

Profesor: Mario I. Molina

Ayudante: Diego Mora

## Física contemporánea I: Primera guía

1. Quince partículas idénticas tienen diversas velocidades: una tiene una velocidad de 2.0 m/s, dos tienen velocidades de 3.0 m/s; tres tienen velocidades de 5.0 m/s; cuatro tienen velocidades de 7.0 m/s; tres tienen velocidades de 9.0 m/s y dos tienen velocidades de 12.0 m/s. Encuentre la velocidad promedio  $\langle V \rangle$ , la velocidad cuadrática media  $\sqrt{\langle V^2 \rangle}$ , y la velocidad más probable de estas partículas.
2. Para un gas ideal:
  - a) Obtener la energía de traslación molecular media a partir de la distribución de Maxwell expresada como distribución de energías.
  - b) Calcular la fracción de moléculas de un gas que tienen un valor de  $v_x^2$  mayor que la velocidad cuadrática media  $\langle v_x^2 \rangle$ . Demuestre que esta fracción es independiente de la temperatura de los gases.
3. A partir de la función de distribución de velocidades, deduzca la función de distribución de energías.
4. Considere la función  $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$  para  $-1 < x < 1$ , y cero afuera. Puede esta función llegar a ser una densidad de probabilidad? Justifique. Si lo es, calcule  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ .
5. Considere la función distribución dada por

$$f(x) \propto \begin{cases} 2 & \text{si } -2 < x < -1 \text{ y } 1 < x < 2 \\ 3 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

- (a) Normalice  $f(x)$  de modo que pueda representar a una distribución de probabilidad.
  - (b) Calcule  $\langle x \rangle$
  - (c) Calcule  $\langle x^2 \rangle$  y  $\Delta x \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ .
6. En presencia de un potencial externo  $U(\mathbf{r})$  la función distribución de un gas no es uniforme, sino que toma la forma

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = C e^{-\frac{1}{kT}(\frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}))}.$$

Considere una columna de gas bajo gravedad la cual posee una temperatura  $T$  independiente de la altura  $z$ .

(a) Muestre que la densidad como función de la altura esta dada por

$$n(z) = n(0)e^{-mgz/kT}.$$

(b) Que fracción del gas  $H_2$  que esta a nivel del mar y a temperatura de 300K puede escapar del campo gravitatorio de la Tierra?

(c) Por que existe todavia  $H_2$  en la atmósfera a nivel del mar?

- Suponga un recipiente cerrado de moléculas idénticas de masa  $m$  y velocidad  $v$  que ejercen una presión  $p$  sobre las paredes del recipiente. Si reemplazamos la mitad de ellas por moléculas de masa  $m/2$  y velocidad  $2v$ , cómo varía la presión?
- Un compartimento cerrado de volumen  $2V$  se divide en dos compartimientos iguales mediante un delgado tabique. El compartimento izquierdo contiene inicialmente un gas ideal a la presión  $p_0$ , y sus paredes se hallan a temperatura  $T_1$ . El compartimento derecho se halla vacío inicialmente y sus paredes se hallan a temperatura  $T_2$ . En el instante  $t = 0$  el tabique se perfora dejando un pequeño orificio de área  $A$ . Encuentre las presiones de cada lado en función del tiempo.




fig1.pdf

- Resuelva el caso en que se tienen 3 compartimientos, cada uno de volumen  $V$ . Inicialmente el primer compartimiento tiene un numero de partículas  $N_0$  los compartimientos adyacentes estan vacios. Si los tabiques que separan los compartimientos son perforados al mismo tiempo, vuelva a calcular las numero de partículas en cada uno de los compartimientos en funcion del tiempo. Asuma que los compartimientos estan a la misma temperatura, poseen el mismo volumen y que todas las aberturas son identicas.

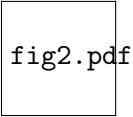


fig2.pdf

- Considere un gas ideal de moléculas de  $N_2$  (Nitrogeno), sobre la superficie de la Tierra, y a temperatura ambiente. A esta temperatura, que fracción de las moléculas posee energía suficiente para escapar de la gravedad terrestre ?
- Calcule la altura promedio a que se halla una molécula de oxígeno  $O_2$  en la atmósfera terrestre, suponiendo una temperatura de  $10^\circ C$ .

12. Considere las partículas dentro de una centrífuga de gases, un aparato usado para separar partículas de masa diferente, haciéndolas girar en una trayectoria circular de radio  $r$  a una velocidad angular  $\omega$ . La fuerza sobre una partícula dada actúa hacia el centro de la órbita circular, y tiene una magnitud de  $m\omega^2 r$ . Demuestre que la densidad radial de partículas obedece

$$n(r) = n(0) \exp(m\omega^2 r^2 / 2K_B T)$$

13. Considere un oscilador armónico simple de frecuencia  $\omega$  y amplitud máxima  $x_0$ .
- Halle la función densidad de probabilidad para el oscilador, es decir, la probabilidad de que el oscilador sea hallado en el intervalo entre  $x$  y  $x + dx$ , como función de  $x$ .
  - Grafíquela en todo el rango permitido, y muestre que está normalizada a uno.
  - Evalúe  $\langle x \rangle$ ,  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$  y la posición más probable.
  - Cuál es la probabilidad de hallar el oscilador entre  $x = 0$  y  $x = x_0/2$ ? Compárela con la probabilidad de hallarlo entre  $x = x_0/2$  y  $x = x_0$ . Cuál es mayor?
14. Considere un recipiente 1D conteniendo un gas de partículas no interactuantes. Suponga que la densidad de probabilidad de hallar una partícula en posición  $x$  entre las paredes  $x = 0$  y  $x = L$  es proporcional a  $\sin(\pi x/L)^2$ . Encuentre la distribución normalizada para la posición de las partículas, y halle la posición promedio  $\langle x \rangle$ .
15. Considere 3 compartimientos, cada uno de volumen  $V$ . Inicialmente el primer compartimiento tiene un número de partículas  $N_0$  y los compartimientos adyacentes están vacíos. Si los tabiques que separan los compartimientos son perforados al mismo tiempo, vuelva a calcular los números de partículas en cada uno de los compartimientos en función del tiempo. Grafique la fracción de partículas en cada compartimiento como función del tiempo. Asuma que los compartimientos están a la misma temperatura, poseen el mismo volumen y que todas las aberturas son idénticas.

figura\_tarea.pdf

16. Considere un recipiente 1D conteniendo un gas de partículas no interactuantes a temperatura  $T$ . Suponga que la densidad de probabilidad de hallar una partícula en posición  $x$  entre las paredes  $x = 0$  y  $x = L$  es proporcional a  $\sin(\pi x/L)^2$ . Encuentre la distribución normalizada para la posición de las partículas, y halle  $\langle x \rangle$  y  $\langle x^2 \rangle$ .
17. Considere una función de distribución de rapidez dada por  $f(v) = A v \exp(-Bv)$ , donde  $B \equiv \sqrt{m/K_B T}$  y  $0 < v < \infty$ .
- determine  $A$  de modo que  $f(v)$  esté normalizada.
  - Calcule  $\langle v \rangle$ ,  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ , y la velocidad más probable.
  - Qué porcentaje de las partículas posee rapidez mayor que  $2\langle v \rangle$  ?
18. Considere un oscilador **NO** armónico de masa  $m$  y constante de resorte  $k$ , donde el potencial tiene la forma  $U(x) = (1/2)k|x|$ . Sea  $x_0$  la amplitud máxima del oscilador.
- Halle la función distribución (normalizada) para este oscilador, es decir, la probabilidad de que el oscilador sea hallado entre  $x$  y  $x + dx$ , como función de  $x$ .

- (b) Calcule  $\langle x^2 \rangle$ .
- (c) Calcule la probabilidad de hallar el oscilador en el intervalo  $(x_0/2) < x < x_0$ .
19. Deduzca la distribución de Maxwell-Boltzmann para un gas ideal bidimensional. Calcule la velocidad media  $\langle v \rangle$ , la velocidad más probable  $v_{mp}$  y  $\sqrt{v^2}$ , como funciones de la temperatura.
20. Dada la distribución de Maxwell-Boltzmann, calcule  $\langle 1/v \rangle$  y  $\langle 1/v^2 \rangle$ .
21. La luz emitida por las moléculas de un gas caliente experimentan un corrimiento Doppler debido a la agitación térmica que hace que unas moléculas se muevan hacia el observador, y otras se alejan del observador. Estime el corrimiento Doppler  $\Delta f/f_0$ , asumiendo que la frecuencia en reposo es  $f_0$ , para átomos de hierro a una temperatura de 6000 K, y donde la velocidad media es

$$\langle v \rangle = \pm \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad (1)$$

Lleve a cabo las aproximaciones que sean razonables al usar la fórmula para el corrimiento de las frecuencias:

$$f = f_0 \frac{\sqrt{1 \pm v/c}}{\sqrt{1 \mp v/c}}. \quad (2)$$

22. Considere un gas de fotones en equilibrio dentro de una caja cúbica de volumen  $a^3$ . Calcule el número de modos normales permitidos de frecuencia  $\omega$  en el intervalo  $d\omega$ .
23. En muchos casos de interés la energía total de una partícula puede escribirse de la forma  $E = \sum_{j=1}^n c_j q_j^2$ , donde los  $c_j$  son constantes y los  $q_j$  son coordenadas de posición o momento. En tal caso, la distribución de Maxwell-Boltzmann tiene la forma  $F_{MB} = A \exp(-\sum c_j q_j^2/kT)$ . Encuentre el valor de la constante  $A$ . Luego, como aplicación de este resultado demuestre que la energía promedio por partícula es igual a  $(1/2)kT \times n$ . Este resultado se conoce como el *Teorema de equipartición de la energía*.
24. Suponga una nave espacial (en 3D) donde la presión interna es  $P_0$  inicialmente. En un cierto instante se producen 2 roturas (en sitios alejados uno del otro) en el casco de la nave. Una de las roturas tiene el doble de área que la otra. Halle el comportamiento de la presión como función del tiempo.
25. Suponga ahora una nave espacial en 2D donde la presión interna es  $P_0$  inicialmente. Si en un cierto instante se produce una pequeña rotura en el casco de la nave (debida a un micrometeorito), halle el comportamiento de la presión como función del tiempo.
26. A partir de la distribución de velocidades Maxwell-Boltzmann, halle la distribución de energías  $G(E)$  donde  $G(E)dE$  es la fracción de moléculas con energía cinética en el intervalo  $[E, E + dE]$ .
27. Un sistema posee niveles de energía no-degenerados con energía  $E = (n + 1/2)\hbar\omega$ , donde  $\hbar\omega = 8.625 \times 10^{-5} \text{ eV}$ , y  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Calcule la probabilidad de que el sistema esté en el estado  $n = 10$  si está en contacto con un baño térmico a temperatura ambiente ( $T = 300 \text{ K}$ ). ¿Cuál será la probabilidad en los casos límites de temperatura muy bajas y muy altas?