1. Considere el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} (1+x^2)y' = \sqrt{1+y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a) Encontrar todos los puntos (x_0, y_0) para los cuales el PVI no tiene solución.

b) Encontrar todos los puntos (x_0, y_0) para los cuales el PVI tiene solución única. Determinar la solución.

c) Encontrar todos los puntos (x_0, y_0) para los cuales el PVI tiene mas de una solución. Determinar las soluciones.

a) Para los puntos $1+y_0<0$, es decir $y_0<-1$, la función raiz cuadrada no esta definida, por lo que para los puntos

$$H_1 = \{(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2 \mid y_0<-1\}$$ no existe solución

b) Tenemos que verificar los puntos que cumplen el Teorema de Picard,

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{1+y}}{(1+x^2)} \qquad f_y(x,y) = \frac{1}{(1+x^2)} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1+y}}$$
$$= \frac{-1}{(1+x^2)\,2\sqrt{1+y}}$$

Son continuas en

$$H_2 = \{(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2 \mid y_0>-1\}$$

$\therefore$ teorema de Picard existe solución unica en los puntos de H_1.

c) Tenemos que ver que puntos no hemos analizado

$$H_3 = \{(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2 \mid y_0=-1\}$$

$$y' = \frac{\sqrt{1+y}}{(1+x^2)}$$
$$y(x_0) = -1$$

Notemos que para todos esos puntos la función contante es solución $(y=-1)$

Encontraremos otras soluciones

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y}} = \frac{1}{(1+x^2)}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+y}}\,dy = \int \frac{1}{(1+x^2)}\,dx$$

$$2\sqrt{1+y} = \operatorname{arctg}(x) + C$$

$$\sqrt{1+y} = \frac{\operatorname{arctg}(x)}{2} + C'$$

$$y = \left(\frac{\operatorname{arctg}(x)}{2} + C'\right)^2 - 1$$

Es otra solución, por lo que los puntos donde hay más de una solución son los puntos de H_3.

2. Considere el siguiente problema de valores iniciales
$$y' = 1 + y^2 = f(x,y), \quad y(0) = 0$$

a) Calcular las 3 primeras iteraciones de Picard.

b) Probar que el PVI tiene una solución en (al menos) $(-1/2, 1/2)$.

c) Hallar la solución de la ecuación diferencial, entonces demostrar que la solución del PVI está definida en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

(a) $y_0(x) = 0$

$y_1(x) = 0 + \int_0^x f(t,0)\,dt = \int_0^x 1 = x$

$y_2(x) = 0 + \int_0^x f(t,t)\,dt = \int_0^x 1 + t^2\,dt = \left(t + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^x = x + \frac{x^3}{3}$

$y_3(x) = 0 + \int_0^x f\left(t, t + \frac{t^3}{3}\right)dt = \int_0^x 1 + \left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2 dt = \int_0^x 1 + t^2 + 2\frac{t^4}{3} + \frac{t^6}{9}\,dt$

$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{63}$

$$M = \text{máx}\{\,|f(t,x)| \;:\; (t,x) \in B\}, \quad 0 < \bar{a} \le \text{mín}\{a, \frac{b}{M}\}, \quad J_{\bar{a}} = [t_0 - \bar{a}, t_0 + \bar{a}]$$

Esto está en el apunte que está en ucursos

intervalo de la solución

(b) Con $(x_0, y_0) = (0,0)$ podemos considerar la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \le x \le a, -b \le y \le b\}$

$|f(x,y)| = 1 + y^2 \le 1 + b^2 \Longrightarrow M = 1 + b^2 \Longrightarrow h = \min\left(a, \frac{b}{1+b^2}\right)$

$h(b) = \frac{b}{1+b^2}$ alcanza su máximo en $b = 1 \Longrightarrow \min(a, h(1)) = \min\left(a, \frac{1}{2}\right)$ esto es máximo si $a = \frac{1}{2}$

$\therefore h = \frac{1}{2} \Longrightarrow$ Por Picard la solución está definida al menos $(x_0 - h, x_0 + h) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(c)

$$y' = 1 + y^2 \;;\; y(0) = 0$$

Hacemos variables separables

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1$$

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int 1\,dx + C$$

$$\arctg(y) = x + C$$

$$y = \tan(x + C) \qquad y(0) = 0$$

$$0 = \tan(C) \Longrightarrow C = 0$$

$\therefore y(x) = \tan(x)$ y como $x_0 = 0$ está en el dominio al menos en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ podemos extender a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Considere que el siguiente PVI

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Probar que si $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas en un intervalo que contiene a x_0, entonces existe una solución única del PVI en ese intervalo.

El ejercicio anterior es importante, ya que nos dice que si una ecuación diferencial es lineal, entonces donde esta definida la solución es el intervalo mas grande donde $p(x)$ y $q(x)$ son continuas. Otra consecuencia interesante es que el intervalo de validez de la solución depende de solo x_0.

$f(x,y) = q(x) - p(x)y$

son continuas en un intervalo que contiene a x_0

$f_y(x,y) = -p(x)$

$\therefore$ por Picard la solución es única en un intervalo que contenga a x_0

Donde su solución es

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) q(x) \quad \text{donde } \mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

esto es continuo en los intervalos donde $q(x)$ y $p(x)$ sean continuo.

$\therefore$ podemos extender la solución a esos intervalos

4. Determinar el intervalo de validez para las soluciones del los siguientes PVI sin resolverlas.

   a) $(x^2 - 9)y' + 2y = \ln(5 - x), \quad y(4) = -3$

   b) $y' = \frac{2x-y}{x-1}$, y(-3)=4

a) $y' + \frac{2y}{(x^2-9)} = \ln(5-x) \qquad y(4) = -3$

$x^2 - 9 \neq 0 \qquad 5 - x > 0$

$x^2 \neq 9 \qquad 5 > x$

$x = \pm 3 \qquad 5 > x$

Por lo tanto la solución puede estar definida en $(-\infty,-3)$, $(-3,3)$ ó $(3,5)$

pero $x_0 = 4 \in (3,5)$ es el que sirve

(b) $y' = \frac{2x-y}{x-1} \qquad y(-3) = 4$

$y'(x-1) = 2x - y$

$y'(x-1) + y = 2x$

$y' + \frac{1}{(x-1)} y = \frac{2x}{(x-1)}$

$x \neq 1$, el intervalo puede ser $(-\infty,1)$ ó $(1,\infty)$ pero $x_0 = -3 \in (-\infty,1)$ es el que sirve.