1. Sea L un real no negativo

a) Muestre que las soluciones que cumplen $y(0) = 0$, $y(L) = 0$ de la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + \lambda y = 0$$

solo tiene la solución trivial $y = 0$ para los casos $\lambda = 0$ y $\lambda < 0$.

a) Caso $\lambda = 0$

$y'' + \lambda y = 0 \Longrightarrow y'' = 0$ que tiene ecuación auxiliar $r^2 = 0 \Longrightarrow r = 0$

Por lo tanto la solución general es

$$y(x) = C_1 + C_2 x$$

Ahora evaluamos en las condiciones: $y(0) = C_1 = 0 \Longrightarrow y(x) = C_2 x$

$y(L) = C_2 L = 0 \Longrightarrow C_2 = 0$ $\Longrightarrow y(x) = 0$

$L \neq 0$

Caso $\lambda < 0$

$y'' + \lambda y = 0$ tiene ecuación auxiliar $r^2 + \lambda = 0 \Longrightarrow r = \pm\sqrt{-\lambda}$ (distintos y reales ya que $\lambda < 0$)

Por lo tanto la ecuación tiene solución general

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$$

Ahora evaluamos en las condiciones iniciales: $y(0) = C_1 + C_2 = 0$

$y(L) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} L} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} L} = 0$

Por lo que obtenemos un sistema de ecuaciones

$$C_1 + C_2 = 0 \quad / \cdot e^{\sqrt{-\lambda} L}$$
$$C_1 e^{\sqrt{-\lambda} L} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} L} = 0$$

$$C_1 e^{\sqrt{-\lambda} L} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda} L} = 0$$
$$C_1 e^{\sqrt{-\lambda} L} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} L} = 0$$

Ahora restando las ecuaciones

$$C_2 \left(e^{\sqrt{-\lambda} L} - e^{-\sqrt{-\lambda} L}\right) = 0 \Longrightarrow C_2 = 0 \Longrightarrow C_1 = 0$$

b) Para el caso $\lambda > 0$, encuentre los valores de λ tal que la ecuación no tiene solución trivial y encuentre la respectiva solución.

b) $y'' + \lambda y = 0$ tiene ecuación auxiliar $r^2 + \lambda = 0 \Longrightarrow r = \pm i\sqrt{\lambda}$

Por lo tanto la ecuación tiene solución general

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, x)$$

Ahora evaluamos en las condiciones iniciales: $y(0) = C_1\cos(0) + C_2\operatorname{sen}(0) = C_1 = 0 \Longrightarrow y(x) = C_2\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$

$$y(L) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

Como no queremos solución trivial $C_2 \neq 0$ y así $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Longrightarrow \sqrt{\lambda}L = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{k^2\pi^2}{L^2}$$

Con lo que se obtiene la solución

$$y(x) = C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

2. Sea $\alpha \neq 0$ y k un entero positivo. Generalmente para resolver este tipo de integrales $\int x^k e^{\alpha x} dx$ se integra por partes k veces. En este ejercicio hallaremos otro método de resolverlas, sea

$$y = \int e^{\alpha x} P(x) dx$$

donde

$$P(x) = p_0 + p_1 x + ... + p_k x^k, \quad p_k \neq 0$$

a) Muestre que $y = e^{\alpha x} u$, donde

$$u' + \alpha u = P(x)$$

a) Tenemos que

$$u' + \alpha u = P(x) \quad / \cdot e^{\alpha x}$$

$$(e^{\alpha x}u)' = u'e^{\alpha x} + \alpha u \cdot e^{\alpha x} = e^{\alpha x}P(x) = y'$$

Por lo tanto $y = e^{\alpha x}u$

b) Muestre que la solución particular de la ecuación anterior es de la forma

$$u_p = a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k$$

y muestre que los a_j con $j \in \{0, 1, ..., k\}$ se pueden hallar de manera recursiva.

b) Sea $u_p = a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k$, tenemos que $u_p' = a_1 + 2a_2 x + ... + k a_k x^{k-1}$ luego reemplazando en la ecuación diferencial

$$(a_1 + 2a_2 x + ... + k a_k x^{k-1}) + \alpha(a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k) = p_0 + p_1 x + ... + p_k x^k$$

$$\|$$

$$(a_1 + \alpha a_0) + (2a_2 + \alpha a_1)x + ... + (k a_k + \alpha a_{k-1}) + \alpha a_k x^k$$

Igualando coeficientes tenemos

$$a_1 + \alpha a_0 = p_0$$

$$\vdots$$

$$k a_k + \alpha a_{k-1} = p_{k-1}$$

$$\alpha a_k = p_k$$

Usando las últimas dos ecuaciones tenemos que

$$Ka_k + \alpha a_{k-1} = \frac{K}{\alpha}p_k + \alpha a_{k-1} = p_{k-1} \Longrightarrow a_{k-1} = \frac{p_{k-1}}{\alpha} - \frac{Kp_k}{\alpha^2}$$

Luego para a_{k-2}

$$(k-1)a_{k-1} + \alpha a_{k-2} = (k-1)\left(\frac{p_{k-1}}{\alpha} - \frac{Kp_k}{\alpha^2}\right) + \alpha a_{k-2} = p_{k-2} \Longrightarrow a_{k-2} = \frac{p_{k-2} - (k-1)\left(\frac{p_{k-1}}{\alpha} - \frac{Kp_k}{\alpha^2}\right)}{\alpha}$$

$$= \frac{p_{k-2}}{\alpha} - (k-1)\left(\frac{p_{k-1}}{\alpha^2} - \frac{Kp_k}{\alpha^3}\right)$$

$\vdots$ se puede resolver recursivamente

c) Concluya que

$$\int e^{\alpha x} P(x)dx = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k)e^{\alpha x} + c$$

donde c es la constante de integración.

c) Tenemos la siguiente ecuación diferencial

$$u' + \alpha u = P(x)$$

tiene ecuación auxiliar $r + \alpha = 0 \Longrightarrow r = -\alpha$ por lo tanto la solución a la ecuación homogenea es

$$u_h = Ce^{-\alpha x} \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es

$$u = u_h + u_p = Ce^{-\alpha x} + (a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k)$$

Por lo que

$$\int e^{\alpha x} P(x)\,dx = y = e^{\alpha x}\left(Ce^{-\alpha x} + (a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k)\right) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k) + C$$

d) Calcule

$$\int e^{6x}(5 + x^2 + 4x^3)dx$$

d) Tenemos que los a_j los podiamos obtener de manera recursiva con el siguiente sistema de ecuaciones

$$5 = a_1 + 6a_0$$
$$0 = 2a_2 + 6a_1$$
$$1 = 3a_3 + 6a_2$$
$$4 = 6a_3$$

Esto implica $a_3 = \frac{4}{6}$, $a_2 = -\frac{1}{6}$, $a_1 = \frac{1}{18}$, $a_0 = \frac{89}{108}$

Por lo que

$$\int e^{6x}(5+x^2+4x^3)\,dx = e^{6x}\left(\frac{89}{108} + \frac{x}{18} - \frac{x^2}{6} + \frac{2x^3}{3}\right) + C$$

3. Suponga que f es continua en un intervalo abierto que contenga a $x_0 = 0$. Use variación de las constantes para hallar una formula del problema del valor inicial

$$y'' - y = f(x), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1$$

Primero hallaremos la solución a la ecuación homógenea, por lo que tiene ecuación auxiliar

$$r^2 - 1 = 0 \implies r = \pm 1$$

por lo que la solución a la ecuación homogenea es

$$y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

Para la solución particular usamos variación de las constantes,

$$y_p = C_1(x) e^{x} + C_2(x) e^{-x}$$

$$y_p' = C_1(x)e^{x} - C_2(x)e^{-x} + C_1'(x)e^{x} + C_2'(x)e^{-x}$$ * Imponemos $C_1'(x)e^{x} + C_2'(x)e^{-x} = 0$

$$y_p'' = C_1(x)e^{x} + C_2(x)e^{-x} + C_1'(x)e^{x} - C_2'(x)e^{-x}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$$C_1(x)e^{x} + C_2(x)e^{-x} + C_1'(x)e^{x} - C_2'(x)e^{-x} - (C_1(x)e^{x} + C_2(x)e^{-x}) = f(x)$$

por lo que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} C_1' e^{x} + C_2' e^{-x} &= 0 \\ C_1' e^{x} - C_2' e^{-x} &= f(x) \end{aligned}$$

sumando las dos ecuaciones

$$2C_1' e^{x} = f(x) \implies C_1' = \frac{f(x)}{2e^{x}} \implies C_1(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f(s)}{2e^{s}}\,ds$$

$$-2C_2' e^{-x} = f(x) \implies C_2' = -\frac{f(x)}{2e^{-x}} \implies C_2(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{f(s)}{2e^{-s}}\,ds$$

Luego la solución general es

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} e^{x} \int_0^{x} \frac{f(s)}{e^{s}}\,ds - \frac{1}{2} e^{-x} \int_0^{x} \frac{f(s)}{e^{-s}}\,ds$$ **

Evaluando en las condiciones iniciales

$$y(0) = C_1 + C_2 = K_0$$

$$y'(x) = C_1e^x - C_2e^{-x} + \cancel{\frac{f(x)}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}e^x\int_0^x \frac{f(s)}{e^s}ds - \cancel{\frac{f(s)}{2}} + \frac{1}{2}e^{-x}\int_0^x \frac{f(s)}{e^{-s}}ds}_{\text{esto pasa por } *}$$

$$y'(0) = C_1 - C_2 = K_1$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= K_0 \\ C_1 - C_2 &= K_1 \end{aligned} \Longrightarrow C_1 = \frac{K_0 + K_1}{2} \quad y \quad C_2 = \frac{K_0 - K_1}{2}$$

Y se obtiene la solución reemplazando los que obtuvimos en **