UNIVERSIDAD DE CHILE

Ayudantía 12

Leonardo Letelier, Kevin Guerrero
Profesora: Paulina Cecchi
2 de octubre de 2024

---

1. La función gamma se define como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

de donde se sabe que converge si $\alpha > 0$.

   a) Use integración por parte para mostrar que

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0$$

   b) Muestre que $\Gamma(n + 1) = n!$ con $n \in \mathbb{N}$.

   c) Usando lo visto en clases y la parte (b) se tiene que

$$\mathcal{L}(t^\alpha)(s) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}, \quad s > 0$$

   se cumple para cualquier α entero no negativo. Muestre que la fórmula también es valida para un real $\alpha > -1$.

2. Se define la función por partes unitaria $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , \text{si } t < 0 \\ 1 & , \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

y si la discontinuidad ocurre en $t = a$ se denota como

$$h(t - a) = \begin{cases} 0 & , \text{si } t < a \\ 1 & , \text{si } t \geq a \end{cases}$$

   a) **(Primer Teorema de Traslación)** Sea F la transformada de Laplace de f, demuestre que

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at} f(t)$$

   b) Cuando $f(t)$ tiene transformada de Laplace y $h(t - a)$ definida como en el enunciado, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)h(t - a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t + a)\}$$

   c) Use lo anterior para encontrar la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{si } 0 \leq t < 2 \\ t - 3 & , \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

d) **(Segundo Teorema de Traslación)** Si $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$ entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)h(t-a)$$

e) Use lo anterior para encontrar la inversa de la transformada de Laplace de $F(s) = \dfrac{e^{-s} - e^{-2s}}{s}$.