UNIVERSIDAD DE CHILE

Ayudantía 16

Leonardo Letelier, Kevin Guerrero
Profesora: Paulina Cecchi
21 de octubre de 2024

---

1. Considere la siguiente ecuación diferencial

$$(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0$$

   a) Encuentre la solución general en forma de series de potencias.

   b) Use la solución encontrada en el inciso anterior y la fórmula

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots \quad (-1 < r < 1)$$

   para hallar una expresión de la solución de la ecuación diferencial en $(-1, 1)$.

   c) Muestre que la expresión obtenida en el inciso anterior es realmente la solución general de la ecuación diferencial en $(-\infty, \infty)$.

2. Una solución no trivial de

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

   se dice **oscilatoria** en el intervalo (a, b) si tiene infinitos ceros sobre el intervalo. Muestre que la ecuación diferencial

$$x^2y'' + ky = 0 \quad k \in \mathbb{R}$$

   tiene soluciones oscilatorias en $(0, \infty)$ si y solo si $k > \frac{1}{4}$.

3. En clases vieron que $x_0 = 1$ y $x_0 = -1$ son puntos singulares regulares de la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

   a) Usando $t = x - 1$ y $Y(t) = y(t+1)$, muestre que y es solución de la ecuación de Legendre si y solo si Y es solución de

$$t(2+t)Y' + 2(1+t)Y - \alpha(\alpha+1)Y = 0$$

   que tiene un punto singular regular en $t_0 = 0$.

   b) Usando $t = x + 1$ y $Y(t) = y(t-1)$, muestre que y es solución de la ecuación de Legendre si y solo si Y es solución de

$$t(2-t)Y' + 2(1-t)Y + \alpha(\alpha+1)Y = 0$$

   que tiene un punto singular regular en $t_0 = 0$.