1. Considere la siguiente ecuación diferencial

$$(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0$$

a) Encuentre la solución general en forma de series de potencias.

b) Use la solución encontrada en el inciso anterior y la fórmula

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots \quad (-1 < r < 1)$$

para hallar una expresión de la solución de la ecuación diferencial en $(-1, 1)$.

c) Muestre que la expresión obtenida en el inciso anterior es realmente la solución general de la ecuación diferencial en $(-\infty, \infty)$.

a) Supongamos que $y(x) = \sum\limits_{n=1} a_n x^n$ es solución de la edo, tenemos

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Luego reemplazando en la ecuación diferencial

$$(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + 4n a_n + 2a_n\right] x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)(n+1)a_n\right] x^n = 0$$

Por lo tanto

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)(n+1)a_n = 0$$

$$a_{n+2} + a_n = 0$$

$$a_n = -a_{n+2}$$

$$a_{n+2} = -a_n$$

Es decir

$$y(x) = a_0 + a_1 x - a_0 x^2 - a_1 x^3 + a_0 x^4 + a_1 x^5 + \dots$$
$$= a_0(1 - x^2 + x^4 + \dots) + a_1(x - x^3 + x^5 + \dots)$$

b) Usando

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots \qquad |r| < 1$$

tomando $r = -x^2$ se tiene que

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Luego multiplicando por x, se tiene que

$$\frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + x^5 - x^7 + \dots$$

Por lo tanto

$$y(x) = a_0\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + a_1\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

c) Luego como $y(x)$ y las funciones de la ecuacion diferencial son continuas en todo $(-\infty, \infty)$, podemos extender y al intervalo maximal donde es continua.

2. Una solución no trivial de

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

se dice **oscilatoria** en el intervalo (a, b) si tiene infinitos ceros sobre el intervalo. Muestre que la ecuación diferencial

$$x^2y'' + ky = 0 \quad k \in \mathbb{R}$$

tiene soluciones oscilatorias en $(0, \infty)$ si y solo si $k > \frac{1}{4}$.

Como la ecuación diferencial es una ecuación de Euler entonces presenta soluciones de la forma

$$y(x)=x^r$$

Calculamos sus derivadas

$$y'(x)=rx^{r-1} \qquad y''(x)=r(r-1)x^{r-2}$$

Luego sustituyendo en la edo

$$x^2(r(r-1)x^{r-2})+Kx^r=0$$
$$r(r-1)x^r+Kx^r=0$$
$$[r(r-1)+K]x^r=0$$
$$(r^2-r+K)x^r=0$$

Por lo tanto la ecuación indicial es $r^2-r+K=0$ que tiene raices

$$r=\frac{1\pm\sqrt{1-4K}}{2}$$

Ahora analizamos los casos

- $1-4K>0$

Es decir $K<\frac{1}{4}$, entonces las raices de la ecuación indicial son dos reales distintos y por lo tanto la solución general es

$$y(x)=C_1x^{r_1}+C_2x^{r_2}$$ que no es oscilatoria

- $1-4K=0$

Es decir $K=\frac{1}{4}$, entonces la ecuación indicial tiene dos raices repetidas y por lo tanto la solución general es

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln(x))\, x^{\frac{1}{2}}$$ que no es oscitaria

- $1 - 4K < 0$

Es decir $K > \frac{1}{4}$, la ecuación indicial tiene raíces complejas $r_1, r_2 = \lambda \pm i\omega$ con $\omega > 0$, por lo tanto la solución general es

$$y(x) = x^{\lambda}\left[C_1 \cos(\omega \ln(x)) + C_2 \sin(\omega \ln(x))\right]$$ que es oscilatoria

Por lo tanto como vimos todos los casos, la ecuación diferencial tiene soluciones oscilatorias si y solo si $K > \frac{1}{4}$.

3. En clases vieron que $x_0 = 1$ y $x_0 = -1$ son puntos singulares regulares de la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

a) Usando $t = x - 1$ y $Y(t) = y(t + 1)$, muestre que y es solución de la ecuación de Legendre si y solo si Y es solución de

$$t(2 + t)Y' + 2(1 + t)Y - \alpha(\alpha + 1)Y = 0$$

que tiene un punto singular regular en $t_0 = 0$.

b) Usando $t = x + 1$ y $Y(t) = y(t - 1)$, muestre que y es solución de la ecuación de Legendre si y solo si Y es solución de

$$t(2 - t)Y' + 2(1 - t)Y + \alpha(\alpha + 1)Y = 0$$

que tiene un punto singular regular en $t_0 = 0$.

a) Notemos que

$$y'(x) = \frac{d}{dx} Y(t) = \frac{dY}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = Y'(t)$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx} y'(x) = \frac{d}{dx} Y'(t) = Y''(t)$$

Por otra parte

- $1 - x^2 = 1 - (t+1)^2 = 1 - (t^2 - 2t + 1) = -t(t+2)$
- $-2x = -2(t+1)$

Luego como $y(x)$ satisface la ecuación diferencial entonces

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$
$$-t(t+2)Y''(t) - 2(t+1)Y'(t) + \alpha(\alpha+1)Y(t) = 0$$
$$t(2+t)Y''(t) + 2(1+t)Y'(t) - \alpha(\alpha+1)Y(t) = 0$$

Luego $t_0 = 0$ es punto singular regular ya que $x_0 = -1$ es punto singular regular.

b) Notemos que

$$y'(x) = \frac{d}{dx}Y(t) = \frac{dY}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = Y'(t)$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dx}Y'(t) = Y''(t)$$

Por otra parte

- $1-x^2 = 1-(t+1)^2 = 1-(t^2-2t+1) = -t(t-2)$
- $-2x = -2(t-1)$

Luego como $y(x)$ satisface la ecuación diferencial entonces

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$
$$-t(t-2)Y''(t) - 2(t-1)Y'(t) + \alpha(\alpha+1)Y(t) = 0$$
$$t(2-t)Y''(t) + 2(1-t)Y'(t) + \alpha(\alpha+1)Y(t) = 0$$

Luego $t_0 = 0$ es punto singular regular ya que $x_0 = 1$ es punto singular regular.