1. Resuelva usando el método de Frobenius la siguiente ecuación diferencial

$$3xy'' + y' - y = 0$$

Notemos que $x_0 = 0$ es punto singular regular de la ecuación diferencial, por lo que podemos hallar una solución en forma de serie de Frobenius

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

Luego reemplazando en la ecuación diferencial

$$3x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$3r(r-1) a_0 x^{r-1} + r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[3(n+1+r)(n+r) a_{n+1} + (n+r+1) a_{n+1} - a_n\right] x^{n+r} = 0$$

Por lo tanto

ecuación indicial

$$[3r(r-1) + r] a_0 = 0$$

$$a_{n+1}(n+r+1)(3n+3r+1) - a_n = 0$$

Las raíces de la ecuación indicial son $r=0$ y $r=\frac{2}{3}$, luego el teorema de Frobenius nos asegura dos soluciones linealmente independientes

- $r=0$

$$a_{n+1}(n+1)(3n+1)=a_n$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)(3n+1)}$$

$$a_1=\frac{a_0}{1\cdot 1}=a_0 \quad ; \quad a_3=\frac{a_2}{3\cdot 7}=\frac{a_0}{168}$$

$$a_2=\frac{a_1}{2\cdot 4}=\frac{a_0}{8}$$

Luego

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0\left(1+x+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{168}+\dots\right) \\ &= C_1\left(1+x+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{168}+\dots\right) \quad \text{con } C_1\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

- $r=2/3$

Se realiza el mismo procedimiento y se llega a

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 x^{2/3}\left(1+\frac{x}{5}+\frac{x^2}{80}+\frac{x^3}{2640}+\dots\right) \\ &= C_2 x^{2/3}\left(1+\frac{x}{5}+\frac{x^2}{80}+\frac{x^3}{2640}+\dots\right) \end{aligned}$$

Luego la solución general es $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$.

2. La ecuación

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

se llama ecuación de Bessel de orden ν, las soluciones de esta ecuación son las conocidas como las funciones de Bessel de orden ν.

   a) Usando el método de Frobenius, encuentre la relación de recurrencia y las raíces de la ecuación indicial.

   b) Si $\nu=\frac{1}{2}$, las soluciones de la ecuación de Bessel se reducen a una familia elemental de funciones, identifique quienes son estas funciones.

(a) Como $x=0$ es un punto singular de la edo, podemos hallar una solución en forma de serie de Frobenius

Sea $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

Luego reemplazamos en la ecuación diferencial

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} + (x^2 - v^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} - v^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$a_0 r(r-1) x^r + a_1 (1+r) r x^{1+r} + a_0 r x^r + a_1 (1+r) x^{1+r} - v^2 a_0 x^r - v^2 a_1 x^{1+r}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[a_n (n+r)(n+r-1) + a_n (n+r) + a_{n-2} - v^2 a_n \right] x^{n+r} = 0$$

Luego

$$a_0 r(r-1) + a_0 r - v^2 a_0 = 0$$

$$a_1 \left[(r+1)^2 - v^2 \right] = 0$$

$$a_n \left[(n+r)^2 - v^2 \right] + a_{n-2} = 0 \qquad a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+r)^2 - v^2}$$

Obtenemos la ecuación indicial

$$r(r-1) + r - v^2 = 0$$

$$r^2 - r + r - v^2 = 0$$

$$r^2 - v^2 = 0$$

$$(r+v)(r-v) = 0$$

Por lo tanto las raíces de la ecuación indicial son $\pm v$,

b) Si $v=\frac{1}{2}$ entonces usamos la relación de recurrencia anterior tomando $r_1=\frac{1}{2}$ se tiene que

$$a_1=0 \Longrightarrow a_n=0 \text{ para } n \text{ impar}$$

$$a_n=\frac{-a_{n-2}}{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}=\frac{-a_{n-2}}{n^2+n}=\frac{-a_{n-2}}{n(n+1)}$$

Por lo tanto

$$a_2=\frac{-a_0}{2\cdot 3} \quad ; \quad a_4=\frac{-a_2}{4\cdot 5}=\frac{a_0}{5!} \quad ; \quad a_6=\frac{-a_0}{7!}$$

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n a_0}{(2n+1)!}$$

Tenemos una solución de la forma

$$y_1(x)=a_0 x^{\frac{1}{2}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}=a_0\, x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=a_0\, x^{-\frac{1}{2}}\sin(x)$$

Tomando $r=-\frac{1}{2}$, usando las relaciones de recurrencia

$$a_1\left[\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=0 \Longrightarrow a_1\cdot 0=0 \quad , a_1 \text{ es arbitrario}$$

$$a_n=\frac{-a_{n-2}}{(n-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}=\frac{-a_{n-2}}{n^2-n}=\frac{-a_{n-2}}{n(n-1)}$$

$$a_3=\frac{-a_1}{3\cdot 2} \quad ; \quad a_5=\frac{-a_3}{5\cdot 4}=\frac{a_1}{5!} \quad ; \quad a_7=\frac{-a_1}{7!}$$

$$a_2=\frac{-a_0}{2\cdot 1} \quad ; \quad a_4=\frac{a_0}{4!} \quad ; \quad a_6=\frac{-a_0}{6!}$$

Luego $a_{2n}=\dfrac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$ y $a_{2n+1}=\dfrac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}$

Por lo tanto $y_2(x) = a_0 x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$$= a_0 x^{-\frac{1}{2}} \cos(x) + \underbrace{a_1 x^{-\frac{1}{2}} \sin(x)}_{\text{incluye } y_1(x)}$$

3. Considere la ecuación diferencial

$$t^2 x'' + (\alpha^2 \beta^2 t^{2\beta} + \frac{1}{4} - \nu^2 \beta^2) x = 0$$

con $\alpha, \beta, \nu \in \mathbb{R}$.

a) Pruebe que $x(t) = \sqrt{t} f(\alpha t^\beta)$ es solución de la ecuación diferencial anterior, donde f es solución de la ecuación de Bessel de orden ν.

b) Usando el ejercicio anterior, encuentre una solución dada por $\alpha = 1, \beta = 2$ y $\nu = \frac{1}{2}$ tal que cumple que $x(\sqrt{\pi}) = 0$.

(a) Pruebe que $x(t) = \sqrt{t} f(\alpha t^\beta)$ es solución de la ecuación diferencial, donde f es solución de la ecuación de Bessel de orden ν.

Derivando obtenemos

$$x'(t) = \alpha \beta t^{\beta - \frac{1}{2}} f'(\alpha t^\beta) + \frac{f(\alpha t^\beta)}{2\sqrt{t}}$$

$$x''(t) = \alpha^2 \beta^2 t^{2\beta - \frac{3}{2}} f''(\alpha t^\beta) + \alpha \beta^2 t^{\beta - \frac{3}{2}} f'(\alpha t^\beta) - \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}} f(\alpha t^\beta)$$

Luego reemplazando en la edo

$$\alpha^2 \beta^2 t^{2\beta + \frac{1}{2}} f''(\alpha t^\beta) + \alpha \beta^2 t^{\beta + \frac{1}{2}} f'(\alpha t^\beta) + (\alpha^2 \beta^2 t^{2\beta} - \beta^2 \nu^2) \sqrt{t} f(\alpha t^\beta) = 0$$

$$\alpha^2 t^{2\beta} f''(\alpha t^\beta) + \alpha t^\beta f'(\alpha t^\beta) + (\alpha^2 t^{2\beta} - \nu^2) f(\alpha t^\beta) = 0$$

Denotando $\xi = \alpha t^\beta$, la ecuación puede ser escrita como

$$\xi^2 f''(\xi) + \xi f'(\xi) + (\xi^2 - \nu^2) f(\xi) = 0$$

que es la ecuación de Bessel de orden ν.

(b) Usando el ejercicio anterior, pruebe que una solución dada con $\alpha=1$, $\beta=2$ y $\nu=\frac{1}{2}$ cumple $x(\sqrt{\pi})=0$.

La ecuación nos queda como

$$t^2x''+\left(4t^4-\frac{3}{4}\right)x=0$$

Por lo demostrado en (a), $x(t)=\sqrt{t}\,f(t^2)$ es solución donde f es solución de la ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{2}$.
Usando el ejercicio anterior podemos elegir

$$f(t)=\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$$

por lo tanto

$$x(t)=\sqrt{t}\cdot f(t^2)=\sqrt{t}\,\frac{\sin(t^2)}{t}=\frac{\sin(t^2)}{\sqrt{t}}$$

la cual satisface $x(\sqrt{\pi})=0$.