

Ayudantía 2

Matías Saavedra Lagos

August 31, 2024

Ocuparemos la siguiente definición en los ejercicios:

Definición: Consideremos el subconjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que $x \in \mathbb{R}^n$ es adherente a P si existe una sucesión $\{x_k\}$ que verifique las siguientes propiedades:

1. $x_k \in P$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$

El conjunto de puntos adherentes de P se denomina adherencia o clausura de P y se denota por \overline{P} .

1. Demuestre que \overline{P} es el cerrado más pequeño que contiene a P .
2. Considere el conjunto $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 3, 0 < y < 1\} \cup \{(0, 0)\}$
 - (a) Determine si S es abierto y/o cerrado.
 - (b) Calcule \overline{S}
3. Considere en \mathbb{R}^2 los conjuntos $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Demuestre que cada uno de los A_n es cerrado
 - (b) Considere $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ y encuentre \overline{A} .
 - (c) El conjunto A ¿es cerrado?
4. Determine si son compactos en \mathbb{R}^2
 - (a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 1\}$
 - (b) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \in \mathbb{Q}\}$
 - (c) $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^7 + |y|^7 \leq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$