1.- Sea $\sigma:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $\sigma(x,y)=(x,y,z(x,y))$ una función diferenciable con $z:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.
Suponga que $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ es una función diferenciable.

a) Usando regla de la cadena, hallar el diferencial de $F\circ\sigma$.

Solución: Como F y σ son diferenciables podemos usar la regla de la cadena y esta nos dice que

$$D(F\circ\sigma)(x,y)=DF(\sigma(x,y))\circ D\sigma(x,y)$$

$$=DF(x,y,z(x,y))\cdot D\sigma(x,y)$$

Calculemos entonces los diferenciales por separado.

$$DF(x,y,z)=\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\quad \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

$$D\sigma(x,y)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}$$

Y multiplicando estas matrices obtenemos que

$$D(F\circ\sigma)(x,y)=\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))\quad \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))\right)$$

$$\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) \right)$$

b) Si además, se satisface que $F(\tau(x,y))=0$ y $\frac{\partial F}{\partial z}(\tau(x,y)) \neq 0$, determine $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$.

Solución: Si $F(\tau(x,y))=0$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ entonces podemos calcular $D(F\circ\tau)$ directamente y será la matriz $D(F\circ\tau) = (0 \quad 0)$. Y entonces usando el item a) concluimos que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 0$$, luego

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}$$

Y podemos dividir por $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y)) = \frac{\partial F}{\partial z}(\tau(x,y)) \neq 0$.

Análogamente tenemos que $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}$ ✓✓

c) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $z(x,y)$ verifica la ecuación

$$\cos(xy) = e^{z(x,y)} + x - z(x,y)$$

Definimos la función $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con

$$F(x,y,z) = \cos(xy) - e^{z} - x + z$$

Entonces como $\sigma(x,y) = (x, y, z(x,y))$ se cumple que

$$F(\sigma(x,y)) = F(x,y,z(x,y)) = \cos(xy) - e^{z(x,y)} - x + z(x,y) = 0$$

Luego por la parte b) se cumple que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}$$

Calculemos entonces $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = -\operatorname{sen}(xy)\,y - 1$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = -e^{z} + 1$$

Y entonces concluimos que $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(xy)\,y + 1}{-e^{z(x,y)} + 1}$

De manera análoga podemos calcular $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$.

2.- Sean $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto y convexo y $f: A \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $\|\nabla f(x)\| \leq M \ \forall \ x \in A$. Entonces:

a) Pruebe que f es de Lipschitz, concluya que f es uniformemente continua.

f es de Lipschitz si y solo si existe $M>0$ tal que para todo $x,y \in A$ se cumple que $|f(x)-f(y)| \leq M\|x-y\|$.

El teorema del valor medio nos dice que como f es diferenciable y A es abierto y convexo si $x,y \in A$, $x \neq y$ entonces para todo $u \in \mathbb{R}$ existe $z \in [x,y]$ tal que

$$\langle u, f(y)-f(x) \rangle = \langle u, Df(z)(y-x) \rangle$$

En nuestro caso como estamos en $\mathbb{R}$ $\langle \cdot,\cdot \rangle$ es simplemente la multiplicación, luego

$$u(f(y)-f(x)) = u\, Df(z)(y-x)$$

Tomando $u=1$ entonces nos queda que para todo $y,x \in A$ distintos

$$f(y)-f(x) = Df(z)(y-x) \quad \text{para algún } z \in [x,y]$$

Como f es diferenciable entonces

$$Df(z)(y-x) = D_{y-x}f(z) = \nabla f(z)\cdot(y-x)$$

Luego $f(y)-f(x) = \nabla f(z)\cdot(y-x)$ y entonces se tiene que

$$|f(y)-f(x)| = |\nabla f(z)\cdot(y-x)| \leq \|\nabla f(z)\|\cdot\|y-x\|$$

$$\leq M\cdot\|y-x\|$$

por desigualdad de Cauchy-Schwarz

Y esto para todo $y \neq x$. Para $y=x$ tenemos la igualdad.

Luego $|f(y)-f(x)| \leqslant \|\nabla f(z)\| \cdot \|y-x\| \quad \forall \; y,x \in A$
$\Rightarrow f$ es de Lipschitz.

Ahora para ver que es uniformente continua, note que dado $\varepsilon>0$ escogemos $\delta = \varepsilon/M$ y entonces se cumple que si $\|y-x\| < \delta \Rightarrow \|y-x\| < \varepsilon/M \Rightarrow M\|y-x\| < \varepsilon \Rightarrow \|\nabla f(z)\| \|y-x\| < \varepsilon$
$\Rightarrow |f(y)-f(x)| < \varepsilon$.

Y luego dado $\varepsilon>0$ para todo $x,y \in A$ existe un $\delta(\varepsilon)$ que hace lo que buscamos. Luego f es uniformemente continua □

b) Indique un ejemplo donde se verifiquen las hipótesis y tesis de lo anterior.

Definimos $A = B_1(0,0)$ la bola centrada en $(0,0)$ y de radio 1, este conjunto es abierto y convexo. Y sea $f: A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \cos(xy)$ entonces se tiene que

$$\nabla f(x,y) = \left(-\operatorname{sen}(xy) \cdot y \;,\; -\operatorname{sen}(xy)x\right)$$

Luego $$\|\nabla f(x,y)\|_2 = \sqrt{\operatorname{sen}^2(xy) \cdot y^2) + \operatorname{sen}^2(xy) \cdot x^2}$$
$$= |\operatorname{sen}(xy)| \sqrt{(x^2+y^2)}$$

Y como $(x,y) \in B_1(0,0) \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} < 1$

Luego $\|\nabla f(x,y)\|_2 = |\operatorname{sen}(xy)| \sqrt{(x^2+y^2)} \leqslant 1$.

Y entonces se cumplen las hipótesis de antes luego concluimos que $\cos(xy)$ es Lipschitz en $B_1(0,0)$.

3.- Considere la función $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $g(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$

a) Demuestre que g es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

Note que $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}\cdot(-2x)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}\cdot(-2y)$

Luego las derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$ lo que implica que g es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ $\square$

b) Demuestre que g es Lipschitz.

Note que $\mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto y convexo.

Luego por el ejercicio anterior, si probamos que

$\|Dg(x,y)\|\leq M$ para algún $M>0$ entonces estaremos listos.

Definimos $N(x,y)=\|Dg(x,y)\|_2^2=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)^2$

$$=4x^2e^{-2(x^2+y^2)}+4y^2e^{-2(x^2+y^2)}=4(x^2+y^2)e^{-2(x^2+y^2)}$$

Si $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $\Rightarrow$ $=4r^2e^{-2r^2}$ con $r\geq0$, $\theta\in[0,2\pi)$

Como la función ya no depende de θ definimos

$\overline{N}(r) : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ con $\overline{N}(r) = 4r^2 e^{-2r^2}$ y entonces

note que $\lim\limits_{r\to\infty} \overline{N}(r) = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{4r^2}{e^{2r^2}}$

Como los límites del numerador y denominador se van a infinito podemos usar la regla de L'hopital y entonces

$$\lim_{r\to\infty} \frac{4r^2}{e^{2r^2}} = \lim_{r\to\infty} \frac{8r}{4re^{2r^2}} \underset{\substack{\text{otra vez} \\ \text{L'hopital}}}{=} \lim_{r\to\infty} \frac{8}{16r^2 e^{2r^2}} = 0$$

Entonces como $\overline{N}(r)$ es continua, se cumple que

$\overline{N}(r) \geq 0 \quad \forall\ r \geq 0$ y $\lim\limits_{r\to\infty} \overline{N}(r) = 0$ por cálculo 1

existe $M>0$ tal que $\|\overline{N}(r)\| \leq M \quad \forall\ r\geq 0$ lo que

implica que $\|\nabla g(x,y)\|_2^2 \leq M \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \|\nabla g(x,y)\|_2 \leq \sqrt{M} \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Y entonces por ejercicio 2) concluimos que g es Lipschitz $\square$