1. Considere $(r(x)y')' + p(x)y = 0$ donde $r(x) > 0$ y $r(x), p(x)$ son funciones continuas. Suponga que

$$\int_\alpha^\infty \frac{1}{r(x)}dx = \infty = \int_\alpha^\infty p(x)dx \quad \alpha > 0$$

entonces cualquier solución de la ecuación diferencial tiene infinitos ceros en $(0, \infty)$.

dem. Supongamos lo contrario, entonces existe una solución $y(x)$ y $x_0 > 0$ tal que $y(x)$ no tiene ceros en el intervalo (x_0, ∞).

Sea $z := \frac{(r(x)y')}{y}$ luego $z' = \frac{(r(x)y')'y - (r(x)y')}{y^2} = \frac{(r(x)y')'}{y} - \frac{(r(x)y') \cdot y'}{y^2}$

Usando que en la edo original $(r(x)y')' = -p(x)y$ tenemos

$$z' = -p(x) - \frac{r(x)y'^2}{y^2} = -p(x) - \frac{z^2}{r}$$

Así z satisface $z' + \frac{z^2}{r} + p(x) = 0$

Integrando sobre (x_0, t) con $t > 0$

$$\int_{x_0}^t z'(x)dx + \int_{x_0}^t \frac{(z(x))^2}{r(x)}dx + \int_{x_0}^t p(x)dx = 0$$

Luego se obtiene

$$z(t) + \int_{x_0}^t \frac{z^2}{r} = z(x_0) - \int_{x_0}^t p$$

Ya que $\int_\alpha^\infty p(x)dx = \infty$, existe t_0 tal que $z(x_0) - \int_{x_0}^{t_0} p(x)dx < 0$ y por lo tanto para $t > t_0$ se tiene que

$$z(t) + \int_{x_0}^t \frac{z^2}{r} = z(x_0) - \int_{x_0}^t p < 0$$

Sea $R(t) := \int_{x_0}^{t} \frac{z^2}{r}$ de lo anterior $\int_{x_0}^{t} \frac{z^2(x)}{r(x)}\, d(x)$

$$\int_{x_0}^{t} \frac{z^2}{r} < -z$$

$$\Longrightarrow \left(\int_{x_0}^{t} \frac{z^2}{r}\right)^2 < z^2$$

$$\Longrightarrow R(t)^2 < R'(t)\cdot r(t)$$

Separando variables e integrando obtenemos

$$\int_{x_0}^{t} \frac{1}{r(x)}dx \leq \int_{x_0}^{t} \frac{R'}{R^2}\, dx = \int_{x_0}^{t} \frac{1}{R^2}\, dR = \frac{1}{R(x_0)} - \frac{1}{R(t)} \leq \frac{1}{R(x_0)}$$

Contradiciendo que $\int_{a}^{\infty} \frac{1}{r(x)}\, dx = \infty$.

$\square$

2. Considere la ecuación $y'' + p(x)y = 0$, suponga que $0 \leq m \leq p(x) \leq M$ para todo $x \in (a, b)$. Si una solución de esta ecuación tiene dos ceros consecutivos $x_1 < x_2$ en (a, b), entonces demuestre que
$$M^{-1/2}\pi \leq x_2 - x_1 \leq m^{-1/2}\pi$$
.

dem. Primero comparemos las dos ecuaciones diferenciales

$$y'' + p(x)y = 0 \quad (i)$$
$$u'' + Mu = 0 \quad (ii)$$

Notemos que la ecuación (ii) posee como solución general

$$u(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{M}x) + C_2\cos(\sqrt{M}x)$$

Escojamos $u_1(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{M}x)$, usando el criterio de comparación de Sturm cada dos ceros consecutivos de cualquier solución no trivial de (i) hay un cero de $u_1(x)$, es decir, $u_1(x)$ oscila más rápido que $y(x)$

Y como la distancia entre dos ceros de $u_1(x)$ es $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ se concluye que

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} < x_2 - x_1$$

Luego comparando como

$$y'' + p(x)y = 0 \quad (iii)$$
$$u'' + mu = 0 \quad (iv)$$

Notemos que la ecuación (iv) posee como solución general

$$u(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{m}x) + C_2 \cos(\sqrt{m}x)$$

Escojamos $u_2(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{m}x)$, usando el criterio de comparación de Sturm cada dos ceros consecutivos de $u_2(x)$ hay un cero de cualquier solución no trivial de (iii), es decir, $y(x)$ oscila más rápido que $u_2(x)$

Y como la distancia entre dos ceros de $u_2(x)$ es $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$ se concluye que

$$x_2 - x_1 < \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

$\square$

3. Usando las misma hipótesis del problema anterior, sea n el número de ceros de una solución de la ecuación diferencial en $[x_1, x] \subset (a, b)$ muestre que se cumple la siguiente desigualdad
$$\frac{x - x_1}{\pi}\sqrt{m} < n < \frac{x - x_1}{\pi}\sqrt{M}$$
.

Si x es un cero de la solución entonces tenemos que

$$n = \frac{x - x}{\text{promedio de los largos entre ceros consecutivos} := y}$$

Por lo tanto usando el ejercicio anterior

$$n = \frac{x - x_1}{y} > \frac{x - x_1}{\frac{\pi}{\sqrt{m}}} \Longrightarrow n > \frac{x - x_1}{\pi}\sqrt{m}$$

$$n = \frac{x - x_1}{y} < \frac{x - x_1}{\frac{\pi}{\sqrt{M}}} \Longrightarrow n < \frac{x - x_1}{\pi}\sqrt{M}$$

Si x no es cero, sea x^* el último cero antes de x en particular por lo anterior

$$n < \frac{x^* - x_1}{\pi}\sqrt{M} < \frac{x - x_1}{\pi}\sqrt{M}$$

Luego para la otra cota denotemos $\{x_1, \dots, x_n\}$ los ceros antes x, notemos que

$$x - x_1 = \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) + (x - x_n)$$

entonces

$$x - x_1 < \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\pi}{\sqrt{m}} + x - x_n = \frac{\pi}{\sqrt{m}}(n-1) + (x - x_n) \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}} \cdot n$$

por lo tanto $\frac{x - x_1}{\pi} \cdot \sqrt{m} < n$

$\square$

4. Considere la ecuación diferencial

$$y'' + q(x)y = 0 \quad , 0 \leq x \leq 1$$

donde q es una función continua en $[0, 1]$. Si $\min_{x\in[0,1]} q(x) > k^2\pi^2(b-a)^{-2}$ para algún entero positivo k. Demuestre que toda solución de la ecuación diferencial tiene por lo menos k ceros en el intervalo $[0, 1]$.

Comparamos las ecuaciones diferenciales

$$y'' + q(x)\, y = 0$$
$$u'' + K^2\pi^2(b-a)^{-2}\, u = 0 \quad (i)$$

Notemos que la solución general de (i) es

$$u(x) = C_1 \operatorname{sen}(K\pi x) + C_2 \cos(K\pi x)$$

Tomando $u_1(x) = \operatorname{sen}(K\pi x)$ que tiene $K+1$ raices en el intervalo $[0,1]$, tomando $x = \frac{m}{K}$ con $m = 0, 1, \ldots, K$

Luego usando el teorema de comparación de Sturm, cada dos ceros de $u_1(x)$ hay al menos uno de $y(x)$, por lo tanto $y(x)$ posee al menos K ceros.

$\square$