SUMA Y SIGUE

MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 2:
PATRONES Y SECUENCIAS

INTRODUCCIÓN

En este taller se estudiaron algunas secuencias numéricas identificables en diversos contextos matemáticos y en nuestra vida cotidiana, las que pueden ser descritas por una regla o un patrón. Se abordaron patrones que se explican por regularidades aditivas y multiplicativas presentes en las tablas de multiplicar y en la tabla de 10 x 10. También, se analizaron patrones que explican ciertos fenómenos de la naturaleza.

Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos:

- Patrones y regularidades en las tablas de multiplicar.
- Progresiones aritméticas.
- Progresiones geométricas.
- Secuencias en la naturaleza.

7- Patrones y regularidades para multiplicar.

Existen regularidades y patrones en las tablas de multiplicar que nos ayudan a realizar con mayor facilidad los cálculos.

En ciertas ocasiones estos patrones de las tablas se pueden extender a todos los múltiplos de un número, y en otras, solo son válidos para algunos elementos de la tabla.

Por ejemplo, el resultado de cualquier número entero multiplicado por diez, se obtiene de escribir el mismo número con un cero adicional agregado a la derecha. Esta regla funciona para calcular todos los múltiplos de 10.

$10 \cdot 1 = 10 \quad 10 \cdot 2 = 20 \quad 10 \cdot 3 = 30 \quad 10 \cdot 4 = 40 \ldots$

En la tabla del 9, para obtener el siguiente término, podemos sumar uno en la decena y restar uno en la unidad. Esto no se cumple para todos los múltiplos de 9.

$9 \cdot 1 = 9 \quad 9 \cdot 2 = 18 \quad 9 \cdot 3 = 27 \quad \ldots \quad 9 \cdot 9 = 81 \quad 9 \cdot 10 = 90$

$9 \cdot 11 = 99$

Comentarios

Otras tablas que contienen patrones fáciles de describir e interesantes para abordar en clases son las del 5 y la del 11.

Además, existen otras tablas numéricas que entregan buenas oportunidades para la búsqueda de patrones y regularidades. Por ejemplo, la tabla de 10 x 10 que consiste en los números del 1 al 100.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Patrones y secuencias.
Actividad 1: Patrones en las tablas de multiplicar.

8- Secuencias en las que se suma una cantidad constante.

Las secuencias numéricas en las cuales cada término se obtiene sumando una cantidad constante (positiva, negativa o cero) al término anterior, se denominan *progresiones aritméticas*.

Estas secuencias quedan completamente determinadas si se especifican el término inicial, la diferencia constante entre dos términos consecutivos y el número de términos.

2 5 8 11 14 17

En este ejemplo el término inicial es 2, la diferencia constante entre términos es 3 y el número de términos es 6.

Comentarios

Algunos ejemplos de progresiones aritméticas son las secuencias de los números pares, de los números impares, de los múltiplos de 3, etc.

Además, hay muchas situaciones reales que se modelan por esta clase de secuencias, como el cobro de un estacionamiento que tiene un costo fijo y además un monto variable por cada hora o fracción de ella que se utiliza.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Patrones y secuencias.
Actividad 2 : Ahorrando con Felipe.

TALLER 2 PATRONES Y SECUENCIAS.

9- Completando progresiones aritméticas.

Sabemos que la regla para completar las progresiones aritméticas dice que la diferencia entre términos contiguos es constante. Es importante tener en cuenta algunos casos.

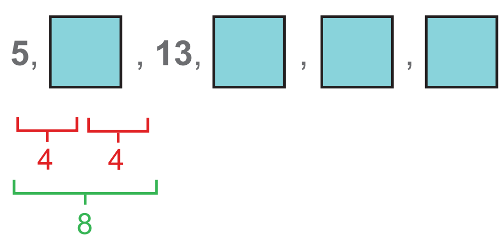
- La diferencia entre términos puede ser un número fraccionario, por ejemplo: $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2}, 1, \mathbf{\frac{3}{2}}, \mathbf{2}, \mathbf{\frac{5}{2}}, \mathbf{3}$$

- La diferencia entre términos puede ser un número negativo, por ejemplo -5, lo que representa una diferencia negativa, por lo que la secuencia va disminuyendo.

30, **25**, 20, 15, **10**, **5**

- Si conocemos en la secuencia la diferencia entre términos no consecutivos, se puede determinar la diferencia entre términos consecutivos. Por ejemplo, si la diferencia entre el tercer y el primer término es 8, podemos deducir que la diferencia entre términos consecutivos es 4:



Con este razonamiento es posible reconstruir la secuencia:

5, **9**, 13, **17**, **21**, **25**.

Comentarios

Es recomendable enfrentar a los estudiantes a progresiones aritméticas en que la diferencia entre los términos consecutivos tome valores naturales, negativos, fraccionarios o de cualquier otro tipo.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Patrones y secuencias.
Actividad 2: Ahorrando con Felipe.

10- Secuencias en las que se multiplica una cantidad constante.

Las secuencias numéricas en las cuales cada término se obtiene multiplicando por una cantidad constante el término anterior se denominan *progresiones geométricas*. También podemos decir que en este tipo de secuencias la razón entre un término y el anterior es siempre la misma.

Estas secuencias quedan completamente determinadas si se especifican su término inicial, la razón entre los términos y el número de términos.

4 8 16 32 64

En este ejemplo el término inicial es 4, la razón es 2 y el número de términos es 5.

Comentarios

Las progresiones geométricas aparecen al describir muchas situaciones de la vida cotidiana, tales como el interés bancario o el crecimiento de una población de bacterias que se duplica semanalmente. Es recomendable que el trabajo que se realice con los estudiantes respecto a las progresiones surja a partir de situaciones contextualizadas y significativas.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Patrones y secuencias.
Actividad 2: Ahorrando con Felipe.

11- Completando progresiones geométricas.

En las progresiones geométricas la razón entre dos términos consecutivos es constante. Con esta información es posible encontrar los términos faltantes de ciertas secuencias, pero siempre es importante considerar algunos casos.

- Cuando la razón entre términos consecutivos está entre 0 y 1. Por ejemplo, cuando la razón es $\frac{1}{2}$, los elementos se van multiplicando por $\frac{1}{2}$, o, equivalentemente, dividiendo por 2.

$$2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}$$

Notemos que la secuencia es decreciente.

- Cuando la razón entre términos contiguos es mayor que 1. Por ejemplo, cuando la razón es $\frac{5}{2}$, para obtener el término siguiente se debe multiplicar por 5 y dividir por 2.

$$8,\ 20,\ 50,\ 125,\ \frac{625}{2}$$

Notemos que la secuencia es creciente.

- Si la razón de la secuencia es un número negativo. Por ejemplo, cuando la razón es -2, para obtener los siguientes términos hay que ir multiplicando por 2 y cambiando el signo del término anterior.

$$\frac{-1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{-1}{2},\ 1,\ -2,\ 4,\ -8$$

Notemos que la secuencia alterna entre valores negativos y positivos.

- Cuando se conocen dos términos consecutivos de la secuencia es posible determinar la razón de la progresión. En cambio, si los dos términos conocidos no son consecutivos, pueden ocurrir varios casos.

<u>Caso 1</u>: La razón no se puede determinar de forma única. Ejemplo: 9, _, 81, _
Para ir de 9 a 81 hay que multiplicar 9 dos veces por un mismo número y hay dos opciones:

$$9 \xrightarrow{3} \boxed{27} \xrightarrow{3} 81 \quad \text{y} \quad 9 \xrightarrow{-3} \boxed{-27} \xrightarrow{-3} 81$$

<u>Caso 2</u>: La razón se puede determinar de forma única. Ejemplo: 2, _, _,-16, _
En este caso la única posibilidad es que la razón sea -2.

Comentarios

El estudio de los casos mencionados entrega una buena oportunidad para que los estudiantes analicen la posibilidad de que exista más de un patrón para reconstruir una progresión geométrica.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Patrones y secuencias.
Actividad 2: Ahorrando con Felipe.

12- El crecimiento de las progresiones.

Es importante notar que, por ejemplo, ir doblando una cantidad a hace que esta aumente mucho más rápido que ir sumándole a este valor a la misma cantidad a.

- El primer caso corresponde a una progresión geométrica con razón igual a 2:

$a \quad 2a \quad 4a \quad 8a \quad 16a$

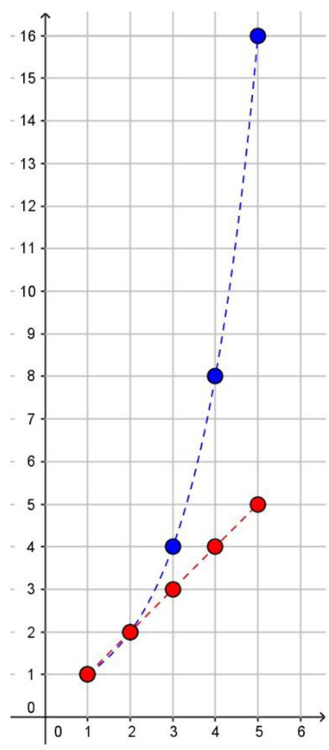
- Mientras que el segundo, a una progresión aritmética con una diferencia de a:

$a \quad 2a \quad 3a \quad 4a \quad 5a$

Cuando los términos de una secuencia crecen multiplicándose por un mismo número mayor que 1, es decir, formen una progresión geométrica con razón mayor que 1, se dice que la secuencia tiene *crecimiento exponencial*.

En el caso de que los términos de una secuencia crezcan al sumar una cantidad constante positiva, es decir, forman una progresión aritmética con diferencia mayor que 0, se dice que la secuencia tiene *crecimiento lineal*.

Veamos esto en un gráfico. Si en las progresiones anteriores $a = 1$, estas quedan de la forma



Acá se ve que los puntos azules coinciden con la progresión geométrica que tiene un crecimiento exponencial, el cual es mayor al crecimiento lineal de la progresión aritmética representada por los puntos rojos.

Comentarios

Las secuencias aritméticas y geométricas aparecen en la modelación de distintas situaciones. Sin embargo, como todo modelo, estos suelen ser válidos en ciertos rangos de las variables involucradas. Muchas veces el crecimiento exponencial de una progresión geométrica con razón mayor que 1 es tan rápido que puede perder sentido en el contexto original.

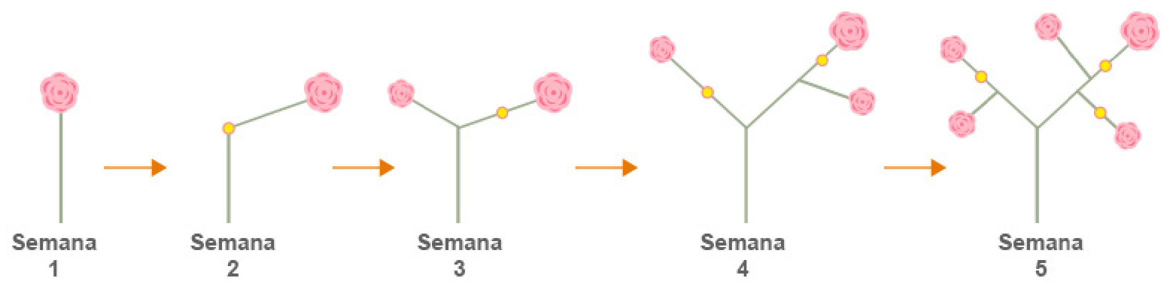
Ubicación: Módulo 1

Taller: Patrones y secuencias.
Actividad 2: Ahorrando con Felipe.

13- Patrones y secuencias en la naturaleza.

Existen numerosos fenómenos en la vida real que se pueden estudiar en la enseñanza básica para explicarlos a través de patrones y regularidades. Incluso, es posible predecir o hacer aproximaciones certeras sobre su comportamiento si se conocen dichos patrones.

Por ejemplo, un tipo de flor tiene un patrón de crecimiento que consiste en que cada término de la secuencia depende del valor de los dos términos anteriores, entonces, conociendo los dos primeros términos y el patrón es posible construir toda la secuencia.



1 1 2 3 5

Otro caso importante para analizar son las fases de la Luna.

Fases de la Luna.

Comentarios

En matemática, el trabajo con patrones avanza hacia el estudio de reglas y propiedades en las distintas áreas de esta disciplina. Por esto, en la educación escolar es fundamental desarrollar el interés por la búsqueda y el estudio de patrones y regularidades.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Patrones y secuencias.
Actividad 3: Patrones en la naturaleza.