
ESCUELA DE VERANO 2009 - MATEMÁTICAS II

Profesores: Raúl Uribe, Pierre Paul Romagnoli, Leonardo Sánchez, José Zamora.

GUÍA # 1 :Lógica, Conjuntos e Inducción

Lógica y Conjuntos.

P1.- Construya las Tablas de Verdad de las siguientes proposiciones:

- $p \wedge (q \vee r)$
- $(p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)$
- $[p \vee (\bar{q} \wedge \bar{r})] \vee [(q \wedge \bar{p}) \vee (r \wedge \bar{q})]$
- $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow (p \vee \bar{q})$

P2.- Si $p \Leftrightarrow V$ y $q \Leftrightarrow r \Leftrightarrow F$ encuentre el valor de verdad de:

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\bar{p} \wedge q)] \wedge (r \Rightarrow q)$$

P3.- Sean p, q, r proposiciones tales que: $p \Leftrightarrow V, q \Leftrightarrow F$ y r es una proposición cualquiera. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- $(p \wedge q) \vee q$
- $(p \vee q) \wedge q$
- $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
- $(q \vee r) \Rightarrow (\bar{p} \vee \bar{r})$

P4.- Si $p \Leftrightarrow V$ y $q \Leftrightarrow F$, determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$\overline{[p \vee (\bar{p} \wedge q) \wedge q]} \Rightarrow [(\bar{q} \vee r) \Rightarrow (q \Rightarrow s)]$$

P5.- Pruebe que las siguientes proposiciones son tautologías:

- $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)]$
- $[(p \vee r) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- $(p \wedge q) \Rightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$
- $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$

P6.- Determine si las siguientes proposiciones son o no Tautologías.

- $p \Rightarrow (p \vee q)$
- $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \bar{q})$
- $p \Rightarrow (p \wedge q)$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

P7.- Muestre que:

- $[p \wedge (q \wedge \bar{p})] \Leftrightarrow V$
- $[(p \wedge q) \vee p] \Leftrightarrow p$
- $[(p \Rightarrow q) \vee \bar{p}] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
- $\{[p \vee (q \Leftrightarrow \bar{p})] \Rightarrow \bar{q}\} \Leftrightarrow \bar{q}$

P8.- Pruebe que:

$$[p \vee (\bar{p} \wedge q)] \Leftrightarrow (p \vee q)$$

P9.- Demostrar las siguientes equivalencias:

- $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r$
- $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$
- $p \Rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
- $(p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$
- $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow s)] \vee [(r \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Leftrightarrow (p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)$

P10.- Se definen los siguientes conectivos lógicos ∇ y Δ de la manera siguiente: $p \nabla q \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$
 $p \Delta q \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$. Demostrar que:

- $\bar{p} \Leftrightarrow (p \nabla p)$
- $(p \wedge q) \Leftrightarrow \overline{(p \Delta q)}$

P11.- Se define el conectivo lógico \oplus como: $p \oplus q \Leftrightarrow F$ solamente si $p \Leftrightarrow F$ y $q \Leftrightarrow F$; para cualquier otros valor de p y q $p \oplus q \Leftrightarrow V$. Determine si la siguiente proposición es una Tautología o no:

$$[(p \Rightarrow q) \vee q] \Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \oplus \bar{q}]$$

P12.- Se define el conectivo lógico binario \star por la siguiente tabla:

p	q	p \star q
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Muestre lo siguiente:

- $\bar{p} \Leftrightarrow p \star p$
- $p \vee q \Leftrightarrow (p \star q) \star (p \star q)$
- $p \wedge q \Leftrightarrow (p \star p) \star (q \star q)$
- $p \star q \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \wedge (p \wedge q)]$

P13.- Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Escribir en simbolos matemáticos y averiguar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- Hay un elemento en A que es mayor que los restantes.
- Existe un único en A elemento cuyo cuadrado es 4.
- Para cada elemento en A existe otro en A que es menor o igual que él.
- Existe un elemento cuyo cuadrado es igual a sí mismo.

P14.- Indique en cuál de los siguientes casos p es condición necesaria y suficiente para q, ie $p \Leftrightarrow q$.

- p: n es múltiplo de 4; q: n es número par.
- p: n y m son números pares; q: $n + m$ es un número par.
- p: n^2 es par; q: n es par.

P15.- Pruebe que $a \cdot b$ es par $\Leftrightarrow (a$ es par $\vee b$ es par).

P16.- Demuestre por contradicción la siguiente proposición: "Los 123 residentes de un edificio tienen edades que suman 3813 años, entonces existen 100 de ellos cuyas edades suman al menos 3100 años".

P17.- Demuestre por contradicción que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

P18.- Dada la siguiente proposición: " $\exists n \in \mathbb{N} : (n \leq 1 \Rightarrow n^2 \geq 4n)$ ". Determine su valor de verdad, luego escriba la proposición negada.

P19.- Negar las siguientes proposiciones:

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$
- $\exists x \in \mathbb{R} : e < x < \pi$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x < y$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (x + y = 1 \Rightarrow x = -y)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : [(x + y) \text{ es par} \Rightarrow (x \text{ es par} \wedge y \text{ es par})]$
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : (x < y \wedge x^2 \geq y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} : (x < y \Rightarrow x + z = y)$

P20.- Niegue las siguientes proposiciones:

- $\forall m \in \mathbb{Z} : (2m + 1 > 2 \wedge m - 4 \leq 1)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (3x + y) \text{ es par}$
- $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} : (2x + y = 5 \Rightarrow x \cdot y < 2)$
- $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N} : [(n \cdot m > 2) \Leftrightarrow (2n + m \geq 1)]$

P21.- Considere las funciones proposicionales

$$p(x, y) : x - y > 1 \quad y \quad q(x, y) : 2x + 3y < 2$$

así como los conjuntos $A = \{2, 1, -1, -3\}$ y $B = \{-4, 1, -1/2\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- $\exists x \in A, \forall y \in B : \overline{p(x, y)} \Rightarrow q(x, y)$
- $\forall x \in B, \forall y \in A : \overline{p(x, y)} \vee q(x, y)$
- $\exists x \in A, \exists y \in B : p(x, y) \Leftrightarrow q(x, y)$
- $\forall x \in A, \exists y \in B : p(x, y) \wedge q(x, y)$
- $\forall x \in B, \exists y \in B : q(x, y)$
- $\forall x \in B, \exists y \in A : q(x, y) \Rightarrow p(x, y)$

P22.- Dadas las funciones proposicionales

$$p(x) : x \text{ es par,}$$

$$q(x) : x \text{ es múltiplo de 5,}$$

$$r(x) : x \geq 8.$$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- $\forall x \in \mathbb{N} : (p(x) \vee r(x))$
- $\forall x \in \mathbb{N} : (\overline{p(x)} \wedge q(x))$
- $\exists n \in \mathbb{N} : (r(n) \Rightarrow q(n))$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : [p(n) \Rightarrow (q(n) \vee r(m))]$

P23.- Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

- $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < 1$
- $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a$
- $a \geq 1 \Rightarrow a^2 \geq 1$
- $a \geq 1 \Rightarrow a^2 \geq a$

P24.- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ Muestre que:

- a. $(a > 0 \wedge b > 0 \wedge a + b = 1) \Rightarrow (a \cdot b \leq \frac{1}{4})$
- b. $(a > 0 \wedge b > 0 \wedge a + b = 1) \Rightarrow (a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2})$
- c. $2a + 4b = 1 \Rightarrow (a^2 + b^2 \geq \frac{1}{20})$
- d. $(a > 0 \wedge b > 0) \Rightarrow (\sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2})$
- e. $(a > 0 \wedge b > 0) \Rightarrow (\frac{1}{a} \frac{1}{b}) \cdot (a + b) \geq 4$

P25.- Pruebe que si $2p = a + b + c$ entonces:

$$1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2p(p - a)}{bc}$$

P26.- Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| < 1\}$$

y

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x + 2| + 3}{|x|} < 23\}$$

Demuestre que la proposición

$$\forall x \in \mathbb{R} (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

es verdadera.

P27.- Dados

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |3x - 4| < 1\}$$

y

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |\frac{x + 2}{x} - 5| < \varepsilon\}$$

Determine ε de modo que $A \subseteq B$.

P28.- Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique brevemente su respuesta.

- a. $\emptyset \subseteq \emptyset$
- b. $\emptyset \in \emptyset$
- c. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- d. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- e. $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$
- f. $\{\emptyset\} \in \emptyset$
- g. $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
- h. $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$
- i. $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
- j. $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
- k. $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$
- l. $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$
- m. $\{a, \emptyset\} \in \{a, \{a, \emptyset\}\}$
- n. $\{a, \emptyset\} \subseteq \{a, \{a, \emptyset\}\}$

P29.- Sean A , B , y C conjuntos arbitrarios. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.

- a. Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \in C$.
- b. Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.
- c. Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \in C$.

d. Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \subseteq C$.

P30.- Si A , B , y C son conjuntos tales que $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$ y $(A \cap C^c) \subseteq (B \cap C^c)$. Demuestre que $A \subseteq B$.

P31.- Sean A , y B conjuntos. Discuta la validez (o no) de las siguientes afirmaciones:

- $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$.
- $A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$.
- $A \Delta B = A \Rightarrow B = \emptyset$.
- $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.

P32.- Sean A , B , C y D conjuntos.

- Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$ ¿es cierto siempre que $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$? ¿y que $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$?
- Si $A \subset B$ y $C \subset D$ ¿es cierto siempre que $(A \cup C) \subset (B \cup D)$? ¿y que $(A \cap C) \subset (B \cap D)$?

P33.- Responda a las siguientes preguntas:

- Si $A \cup B = A \cup C$, ¿es necesario que $B = C$?
- Si $A \cap B = A \cap C$, ¿es necesario que $B = C$?
- Si $A \Delta B = A \Delta C$, ¿es necesario que $B = C$?

P34.- Definamos los siguientes conjuntos:

$A = \{ \text{Estudiantes de Matemáticas I} \}$ $E = \{ \text{Estudiantes de Física II} \}$
 $B = \{ \text{Estudiantes de Matemáticas II} \}$ $F = \{ \text{Estudiantes que fueron a Fantasilandia} \}$
 $C = \{ \text{Estudiantes De Computación} \}$ $G = \{ \text{Estudiantes que se acostaron muy tarde} \}$
 $D = \{ \text{Estudiantes de Física I} \}$

Expresar las siguientes proposiciones en función de los conjuntos anteriormente definidos:

- Todos los alumnos de Matemáticas I cursan Física I.
- Los estudiantes de Matemáticas II o los de Física II se acostaron tarde.
- Sólo los estudiantes de Matemáticas II o los de Física II se acostaron tarde.
- Ningún estudiante de Computación fue a Fantasilandia.
- A Fantasilandia fueron sólo estudiantes de Matemáticas I y Física I.
- Todos los estudiantes de Física I que no son ni de Matemáticas I ni de Matemáticas II fueron a Fantasilandia.

P35.- Se sabe que de un grupo de 20 personas, 10 estudian Música, 7 estudian Fotografía, 4 estudian Pintura y Fotografía, 3 estudian Música y Pintura, 2 estudian Fotografía y Música y 1 estudia Música, Fotografía y Pintura. ¿Cuántos estudian sólo Fotografía? ¿Cuántos estudian sólo Pintura?

P36.- Demostrar las siguientes propiedades del complemento y la diferencia:

- $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$

P37.- Sean A , B , y C conjuntos arbitrarios. Demuestre las siguientes propiedades:

- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cap C)$.
- $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.
- $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

P38.- Sea U un conjunto universo que contiene a A , B , y C (como subconjuntos, no como elementos!!!). Demuestre que:

- $(A \cup B) \cup (A^c \cap B^c) = U$
- $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$
- $A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B^c \cup C)$
- $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$

P39.- Pruebe que:

- $A \subset B \Rightarrow \{A \cup (B \setminus A)\} = B$
- $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$

P40.- Demuestre las siguientes propiedades:

- $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$
- $A \cap (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cap C)$
- $A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \emptyset$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \Delta B = A \cup B$

P41.- Probar que si

$$A \cap X = A \cap Y \wedge A \cup X = A \cup Y$$

entonces $X = Y$.

Sumatorias e Inducción. En esta sección se pedirá expresar todas las sumas que aparezcan como sumatorias. Ej:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i$$

P1.- Demostrar que:

- $n^2 + n$ es divisible por 2.
- $n^3 + 2n$ es divisible por 3.
- $n^2 - n + 2$ es divisible por 2.
- $(a - b)$ es factor de $a^n - b^n$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.
- $(a + b)$ es factor de $a^{2n-1} + b^{2n-1}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.

P2.- Demostrar que todo número natural $n \geq 24$ se puede expresar como la suma de cinco y siete.

P3.- Demostrar que para cada $n \geq 0$ el número $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13

P4.- Escriba las sumas como sumatorias y demuestre por inducción lo siguiente:

- $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
- $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
- $1 * 3 + 2 * 4 + 3 * 5 + \dots + n(n + 2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.
- $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
- $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

P5.- En cada uno de los siguientes casos escriba las sumas como sumatorias y demuestre, usando inducción, que el enunciado es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$:

- $2^n > n$.
- $3 + 4 + 5 + \dots + (n + 2) = \frac{n(n+5)}{2}$.
- $2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}$.

- d. $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}$.
- e. $1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$, donde r es una constante distinta de 1.
- f. $1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = n(2n - 1)$.
- g. $3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) = n(n + 2)$.
- h. $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$.
- i. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.
- j. $4 + 3 + 2 + \dots + (5 - n) = \frac{n(9-n)}{2}$.
- k. $-2 - 3 - 4 - \dots - (n + 1) = -\frac{n(n+3)}{2}$.
- l. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
- m. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + (2n - 1) \cdot 2n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$.
- n. $\frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + \frac{1}{(n+2) \cdot (n+3)} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} = \frac{1}{2n}$.
- ñ. $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, a y r son constantes, $r \neq 1$.

P6.- Para $n \in \mathbb{N}$, probar que $n - 2 < \frac{n^2 - n}{12}$

P7.- Sea $P(n)$ la proposición para $n \in \mathbb{N}$: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{(n+1)^2}{2}$

Demstrar que la veracidad de $P(k)$ implica la veracidad de $P(k+1)$ para todo $k \geq 1$.

¿Es verdadera $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

P8.- Probar que la suma de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados es $(n - 2) \cdot 180$ grados.

P9.- Muestre que para

$q(n) : n^2 - n + 41$ es un número primo,

$q(1)$ es verdadera pero $q(n) \Rightarrow q(n - 1)$ es falso.

P10.- Muestre que para

$q(n) : 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = (n^2 + n + 2)$

$q(n) \Rightarrow q(n + 1)$ pero que $q(1)$ es falso.

P11.- A la edad de un año, una pareja (macho y hembra) de comadrejas da origen a dos nuevas parejas de comadrejas y en cada año posterior produce 6 nuevas parejas de comadrejas. Suponga que las comadrejas no mueren y que se comienza con un par de comadrejas recién nacidas, es decir $a_0 = 1$.

a. Determine una relación de recurrencia para a_n , la cantidad de comadrejas al final del año n .

b. Demuestre por inducción que:

$$a_n = \frac{1}{5} [4^{n+1} - (-1)^{n+1}]$$

P12.- Sea $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{6a_n^2}{a_n^2 + 8}$, para $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $a_n \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

P13.- Supongamos que Ud. recibe una carta de una "cadena", con la lista de los nombres y direcciones de 6 personas. La carta le pide que envíe \$1000 a la persona que encabeza la lista. Además, Ud. debe hacer una nueva carta casi idéntica a la recibida, los únicos cambios son suprimir en la lista de nombres el primero de ellos y agregar al final de la lista el nombre suyo al final. Esta carta reformada tiene que enviarla a cinco amigos suyos, distintos de los que aparecen en la carta reformada. La carta original promete a Ud. que recibirá dentro de pocas semanas la cantidad de \$15.625.000.

Aunque estas "cadenas" nunca funcionan Ud. podría encontrar entretenido verificar si la promesa de la carta original es correcta, bajo el supuesto que Ud. y todos los receptores de las cartas siguieran las instrucciones, es decir, no "rompieran la cadena".

Podemos llamar c_k a la cantidad de cartas en el eslabón k , siendo la carta que Ud.

recibió el eslabón 0, es decir $c_0 = 1$. Las cartas que Ud. envía corresponden al primer eslabón, así $c_1 = 5$, la cantidad de cartas enviadas por sus amigos es c_2 , etc.

- ¿Cuál es la relación entre c_k y c_{k+1} ?
- Verifique por inducción que $c_k = 5^k$.
- ¿De qué eslabón son los receptores de cartas que deberían enviar a Ud. \$1000 cada uno?

P14.- En una hoja de papel se tiene n rectas distintas dibujadas de borde a borde, de modo que todo par de rectas tiene un punto en común (que no está en el borde de la hoja) y no hay tres (o más) que concurran en un mismo punto.

- Si a_k es la cantidad de regiones en que queda dividida la hoja al tener k rectas. ¿qué relación hay entre a_k y a_{k+1} ?
- Determine a_n en términos de n , sin referencia a a_{n-1} .

P15.- Una "Torre de Hanoi" es un juego consistente de n anillos de distintos tamaños y tres estacas verticales fijas en un tablero A, B, C, alineadas de izquierda a derecha, en las que se colocan los anillos. Al iniciar el juego todos los anillos están en la estaca A, apilados de mayor a menor, el más grande en la base, es decir, formando una pila cónica. El juego consiste en trasladar los anillos a la estaca C, para obtener una pila igual a la original. La complicación es que cada vez se puede mover un solo anillo para ubicarlo en otra estaca y si en esta hay otros anillos ellos deben ser de menor diámetro, es decir, en cada etapa del juego en cada estaca debe haber una pila cónica.

- Determine una recurrencia para a_n , el número mínimo de movimientos para lograr el objetivo.
- Conjeture una fórmula para a_n y demuéstrela por inducción.

La observación clave es que para mover el anillo más grande desde A hasta C, debemos primero mover los $(n - 1)$ anillos restantes desde A a B y luego desde B a C.

P16.- S_n es un conjunto formado por n números distintos. Se trata de obtener una relación de recurrencia para a_n , la cantidad de comparaciones entre pares de números que están en S_n , para determinar el mayor de todos ellos. Es claro que $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$. En el caso general se propone el siguiente algoritmo (procedimiento). Si n es par, podemos calcular M_1 , el mayor de los números en la primera mitad de S_n ; después calculamos M_2 , el mayor de los números en la segunda mitad de S_n ; finalmente, hacemos las comparaciones entre M_1 y M_2 , para así obtener el mayor elemento de S_n . Si n es impar, separamos S_n en un número aislado cualquiera y 2 mitades iguales del resto. En estas 2 mitades elegimos M_1 y M_2 como en el caso anterior y comparamos el mayor de ambos con el número aislado separado antes, para así obtener el mayor número de S_n .

- Encuentre a_n para n par y para n impar.
- Considere un algoritmo que recorra S_n de manera ordenada y que compare cada elemento nuevo con el mayor de los anteriores. Encuentre el número de comparaciones b_n que se realizaría con este algoritmo y compárelo con a_n .
- Adapte ambos algoritmos al caso de tener que obtener el mayor y el menor número de S_n y compare su eficiencia, en cuanto al número de comparaciones que realiza cada uno.

P17.- Una persona debe subir una escala de n peldaños, cada paso de ella puede abarcar un peldaño o dos peldaños. Se trata de establecer una relación de recurrencia para a_n la cantidad de maneras distintas de ascender la escala de n peldaños. Es fácil ver que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_3 = 3$. Note que para calcular a_4 podemos razonar así: si el primer paso abarca un peldaño, el resto del recorrido (3 peldaños) se puede hacer de a_3

maneras; si el primer paso abarca 2 peldaños, el resto del ascenso (2 peldaños) se puede hacer de a_2 maneras, luego $a_4 = a_3 + a_2$.

- Expresar a_n en términos de a_{n-1} y a_{n-2} para $n \geq 3$.
- Demuestre por inducción que:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

P18.- Probar las siguientes identidades:

- $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$
- $n \binom{n-1}{k} = (n-k) \binom{n}{k}$
- $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$
- $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

P19.- Determinar el valor de n si $\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n+1}{3}} = \frac{5}{6}$

P20.- Calcular el término central de $(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}x^{-2})^6$

P21.- En el desarrollo de $(x^2 + \frac{1}{x})^{18}$ encuentre:

- El término constante.
- El término central.
- El valor del coeficiente de x^6 .

P22.- Utilice el teorema del binomio para demostrar que:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

P23.- Sean p y q dos reales no negativos tal que $p + q = 1$. Calcule

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2$$