Importante: Visita regularmente `http://www.dim.uchile.cl/~algebra`. Ahí encontrarás las guías de ejercicios y problemas, además de información acerca de cuál será la dinámica del curso.

Usa estas notas al margen para consultar de manera más rápida el material. Haz también tus propias anotaciones. ▼

1. Lógica

La lógica le proporciona a las matemáticas un lenguaje claro y un método preciso para demostrar teoremas a partir de axiomas. Por ejemplo:

axiomas de Euclides, definiciones, nociones primarias de geometría clásica
+
lógica
=
teoremas de la geometría euclidiana

Un ejemplo de noción primaria es la de punto. Un ejemplo de axioma es el que dice que por un punto ubicado fuera de una recta L pasa una y sólo una recta paralela a L.
Sin la lógica los axiomas serían un montón de verdades aceptadas, pero nada más. La lógica, sin embargo, les da sentido y permite concluir nueva verdades (teoremas) que antes no conocíamos. Un ejemplo de teorema: la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo siempre es de 180°.
Al ser la lógica el punto de partida de las matemáticas, en ella se deben introducir nociones primarias tales como proposición, valor de verdad, conectivo lógico.

1.1. Proposiciones y valor de verdad

Definición 1.1 (Proposición lógica). *Una proposición debe interpretarse como un enunciado que siempre toma uno de los valores de verdad posibles: verdadero (V) o falso (F).*

Por ejemplo, en el contexto de la aritmética, "2+1=5" corresponde efectivamente a una proposición. Más aún, su valor de verdad es F.
Típicamente notaremos a las proposiciones con letras minúsculas: p, q, r, etc.

Algunos ejemplos:

- "Estoy estudiando ingeniería".
- "$1 \geq 0$".
- "Está lloviendo en Valdivia".

1.2. Conectivos lógicos

Los conectivos lógicos sirven para construir nuevas proposiciones a partir de proposiciones ya conocidas. El valor de verdad de la nueva proposición dependerá del valor de verdad de las proposiciones que la forman. Esta dependencia se explicita a través de una tabla de verdad.

Definición 1.2 (Negación). *La proposición* $\overline{p}$ *se lee "no* p*" y es aquella cuyo valor de verdad es siempre distinto al de* p*. Por ejemplo, la negación de "mi hermano ya cumplió quince años" es "mi hermano aún no cumple quince años". Esto se explicita a través de la siguiente tabla de verdad.*

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

Definición 1.3 (O lógico o disyunción). *La proposición* $p \vee q$ *se lee "*p *o* q*". Decimos que* $p \vee q$ *es verdad, o que "se tiene* $p \vee q$*", cuando al menos una de las dos proposiciones, o bien* p *o bien* q*, es verdadera. Por ejemplo, la proposición "mañana lloverá o mañana no lloverá" es verdadera. En otras palabras, tal como se aprecia en la siguiente tabla de verdad, si alguien afirma que se tiene* $p \vee q$ *lo que nos está diciendo es que nunca son simultáneamente falsas.*

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definición 1.4 (Y lógico o conjunción). *La proposición* $p \wedge q$ *se lee "*p *y* q*". Tal como se aprecia en la siguiente tabla de verdad, si alguien afirma que se tiene* $p \wedge q$*, lo que nos está diciendo es que ambas proposiciones son verdaderas.*

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definición 1.5 (Implicancia). *Todos estaremos de acuerdo en considerar verdadera la proposición "si el señor K está en California entonces el señor K está en Estados Unidos". ¿Por qué?*
Porque a uno no le importa dónde está el señor K: podría estar en Texas o en China. **Lo único importante** *es que, si efectivamente "está en Californa", entonces podemos concluir, con esa sola información, que "está en Estados Unidos".*
La proposición $p \Rightarrow q$ *se lee "*p *implica* q*" o "si* p *entonces* q*". Para estudiar su valor de verdad nos debemos concentrar en el caso de que la hipótesis* p *sea verdadera. Ahí tenemos que determinar si basta con esa información para concluir que* q *es verdadera. En resumen: si alguien afirma que se tiene* $p \Rightarrow q$*, debemos concluir que si* p *es verdad entonces* **necesariamente** q *será verdad. Todo esto se explicita a través de la siguiente tabla.*

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Definición 1.6 (Equivalencia). *Decimos que la proposición p es equivalente con la proposición q (o que "p si y sólo si q"), y escribimos $p \iff q$, cuando basta con conocer el valor de verdad de una para saber el valor de verdad de la otra ya que éste siempre es el mismo.*
Por ejemplo "el paralelógramo dibujado en la pared tiene todos sus ángulos iguales" es equivalente con la proposición "las diagonales del paralelógramo dibujado en la pared miden lo mismo". O bien ambas son verdaderas o bien ambas son falsas.

p	q	$p \iff q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.3. Tautologías

Definición 1.7 (Tautología). *Una tautología es una proposición que, sin importar el valor de verdad de las proposiciones que las constituyen, es siempre verdadera.*

Tres ejemplos bastante razonables:

Ejemplos:

$$p \vee \overline{p}$$
$$p \Rightarrow p \vee q$$
$$(p \iff q) \iff (q \iff p)$$

Demostraremos, desarrollando una tabla de verdad, que la primera proposición es tautología.

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$
V	F	V
F	V	V

Todas las tautologías son equivalentes entre sí y se pueden reemplazar por la proposición V. Por ejemplo $(p \vee \overline{p}) \iff V$. Esto es análogo a lo que hacemos cuando reemplazamos el término $(x - x)$ por el símbolo 0.

Definición 1.8 (Contradicción). *Así como existen las tautologías existen las contradicciones. Son proposiciones siempre falsas.*

Por ejemplo, $p \wedge \overline{p}$. Son todas equivalentes a la proposición F.
Vamos a listar una serie de tautologías de la forma $A \iff B$. El uso que se les dará es el siguiente. Cada vez que en una cierta proposición aparezca la expresión A, puede reemplazarse por B. Y viceversa. El lector debe demostrar la condición de tautología de algunas de ellas usando tablas de verdad, como ejercicio.

Proposición 1.1 (Tautologías importantes).

1. $\begin{array}{lll} (p \wedge \overline{p}) \iff F & (p \wedge V) \iff p & (p \wedge F) \iff F \\ (p \vee \overline{p}) \iff V & (p \vee V) \iff V & (p \vee F) \iff p \end{array}$

2. *Caracterización de la implicancia.* $(p \Rightarrow q) \iff (\overline{p} \vee q)$

3. *Leyes de De Morgan.*

   a $\overline{(p \wedge q)} \iff (\overline{p} \vee \overline{q})$
   b $\overline{(p \vee q)} \iff (\overline{p} \wedge \overline{q})$

4. *Doble negación.* $\overline{\overline{p}} \iff p$

5. *Conmutatividad.*

   5.1. $(p \vee q) \iff (q \vee p)$
   5.2. $(p \wedge q) \iff (q \wedge p)$

6. *Asociatividad.*

   6.1. $(p \vee (q \vee r)) \iff ((p \vee q) \vee r)$
   6.2. $(p \wedge (q \wedge r)) \iff ((p \wedge q) \wedge r)$

7. *Distributividad.*

   7.1. $(p \wedge (q \vee r)) \iff ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
   7.2. $(p \vee (q \wedge r)) \iff ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
   7.3. $((q \vee r) \wedge p) \iff ((q \wedge p) \vee (r \wedge p))$
   7.4. $((q \wedge r) \vee p) \iff ((q \vee p) \wedge (r \vee p))$

1.3.1. Cuatro tautologías muy importantes

Estas cuatro tautologías se prueban *usando tablas de verdad*. Son particularmente útiles para demostrar teoremas.
Cada una de ellas da lugar a una técnica de demostración: equivalencia dividida en dos partes, transitividad, contrarrecíproca, reducción al absurdo. En las partes que siguen ilustraremos el uso de estas técnicas. Verás este símbolo ★ cada vez que lo hagamos.

Proposición 1.2.

1. *Equivalencia dividida en dos partes.* $(p \iff q) \iff (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$

2. *Transitividad.* $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

3. *Contrarrecíproca.* $(p \Rightarrow q) \iff (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

4. *Reducción al absurdo.* $\overline{(p \Rightarrow q)} \iff (p \wedge \overline{q})$

1.3.2. Verificación simbólica y exploratoria

Cuando queremos verificar de manera simbólica que cierta proposición es tautología evitaremos usar tablas de verdad y sólo nos permitiremos usar (como conocidas) las tautologías básicas que aparecen en las secciones anteriores. Demostremos de manera simbólica entonces que:

$$(p \iff q) \iff (\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge q)$$

En efecto:

$$\begin{array}{rcl}
(p \iff q) & \iff & (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \\
& \iff & (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee p) \\
& \iff & [(\overline{p} \vee q) \wedge \overline{q}] \vee [(\overline{p} \vee q) \wedge p] \\
& \iff & [(\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{q})] \vee [(\overline{p} \wedge p) \vee (q \wedge p)] \\
& \iff & [(\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee F] \vee [F \vee (q \wedge p)] \\
& \iff & (\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge q)
\end{array}$$

En las demostraciones exploratorias se acepta “explorar” la tabla de verdad deshechando los casos ”fáciles”. Demostremos, exploratoriamente, que la siguiente proposición es tautología.

$$[(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow \overline{r})$$

Vamos a **asumir** que tanto $(p \Rightarrow \overline{q})$ como $(r \Rightarrow q)$ son verdaderas. Es decir, nos ocupamos sólo del caso en que la hipótesis es verdadera. **Lo que debemos hacer** es concluir que $(p \Rightarrow \overline{r})$ es verdadera.
Caso 1. p es falsa. Este caso es fácil: obviamente se tiene que $(p \Rightarrow \overline{r})$ es verdadera.

Caso 2. p es verdadera. Como asumimos que $(p \Rightarrow \overline{q})$ es verdadera, se tiene que tener q falsa.
Como $(r \Rightarrow q)$ se asume verdadera y como q es falsa, r tiene que ser falsa. Por lo tanto, como r es falsa, se tiene que $(p \Rightarrow \overline{r})$ es verdadera.

1.4. Función proposicional y cuantificadores

Definición 1.9 (Función proposicional). *Una función proposicional p es una expresión descrita en función de algún parámetro x que satisface lo siguiente: cada vez que x* **se reemplaza** *por una cadena de símbolos, $p(x)$ se transforma en una proposición.*

Ejemplos:

- $p(x)$ = "x es un jugador de fútbol" es una función proposicional. Notar que $p(\texttt{Marcelo Salas})$ es verdadera mientras que $p(\texttt{Nicolás Massu})$ es falsa.

- $q(x)$ = "$x - 5 \leq 0$", también es una función proposicional. $q(2)$ es verdadera, pero $q(6)$ es falsa.

Observación: En adelante, usaremos $p(x)$ de dos formas distintas:

- Para referirnos a la función proposicional misma y mostrar que x es la variable que reemplazamos por cadenas de símbolos para obtener proposiciones lógicas.
- Para referirnos, cuando x es algo en particular, a la proposición que se forma de haber hecho el reemplazo en la función proposicional.

1.4.1. Cuantificador universal

Definición 1.10 (Cuantificador universal). *La proposición $(\forall x)p(x)$, que se lee "para todo x $p(x)$", es verdadera siempre y cuando $p(x)$ sea verdadera para cualquier cadena de símbolos que se reemplace en x.*

Veamos un ejemplo:

Ejemplo:

- Usando el ejemplo anterior, $p(x)$ = "x es un jugador de fútbol", ¿será verdadera $(\forall x)p(x)$.

  Claramente, como vimos que $p(\texttt{Nicolás Massu})$ es falsa, no es cierto que al reemplazar x por cualquier cadena de símbolos lo resultante sea una proposición verdadera.

  Luego $(\forall x)p(x)$ es falsa.

A continuación veamos ejemplos de proposiciones construidas usando el cuantificador universal y cómo se verifica la veracidad de dichas proposiciones.

Ejemplo:

- $(\forall x)(p(x) \vee \overline{p(x)})$ es verdadera. Verifiquemos que es verdadera, por pasos.

  Sea x arbitrario (este es el modo en que se considera el "$\forall x$").

  p.d.q (por demostrar que): $p(x) \vee \overline{p(x)}$ es verdadera.

  En efecto:

  Caso 1. $p(x)$ es verdadera. Como $V \vee \overline{p(x)}$ es verdadera, se concluye.

Caso 2. $p(x)$ es falsa. En este caso $\overline{p(x)}$ es verdadera. Como $(F \vee V) \iff V$, se concluye.

- $(\forall x)[p(x) \Rightarrow (p(x) \vee q(x))]$ es verdadera. Demostrémoslo.

  Sea x arbitrario

  Hipótesis: $p(x)$ es verdadera.

  p.d.q: $p(x) \vee q(x)$ es verdadera.

  En efecto: como $p(x)$ es verdadera, usamos que $V \vee q(x)$ es verdadera para concluir.

- $[(\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)] \Rightarrow [(\forall x)(p(x) \vee q(x)]$ es verdadera.

  Hipótesis: $(\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)$ es verdadera

  p.d.q: $(\forall x)(p(x) \vee q(x))$ es verdadera

  En efecto: sea x arbitrario.

  Caso 1. $p(x)$ es verdadera. En este caso $(p(x) \vee q(x))$ es verdadera.

  Caso 2. $p(x)$ es falsa. En este caso, por hipótesis, $q(x)$ **tiene que ser verdadera**. Se deduce que $(p(x) \vee q(x))$ es verdadera.

1.4.2. Cuantificador existencial

Definición 1.11 (Cuantificador existencial). *La proposición $(\exists x)p(x)$, que se lee "existe x, tal que $p(x)$", es verdadera cuando se puede encontrar por lo menos una cadena de símbolos que hace $p(x)$ verdadero.*

Ejemplo:

- Retomando el ejemplo anterior, con $p(x) =$ "x es un jugador de fútbol". ¿Se tendrá que $(\exists x)p(x)$?.

  Tenemos que hay al menos un x que hace a $p(x)$ verdadera, por ejemplo $x =$ `Matías Fernández` cumple claramente que $p($`Matías Fernández`$)$ es verdadera.

  Así, $(\exists x)p(x)$ es verdadera.

1.4.3. Relación entre cuantificadores

A continuación veremos la relación que existe entre los dos cuantificadores antes definidos. Dicha relación se debe a la negación.

Resulta que $(\exists x)p(x)$ es falsa si y sólo si $p(x)$ no es verdadera para ninguna cadena de símbolos x, es decir, si y sólo si $(\forall x)\overline{p(x)}$ es verdadera. Así, hemos hallado la

Proposición 1.3 (Negación del cuantificador existencial). *La siguiente proposición es una tautología*

$$\overline{(\exists x)p(x)} \iff (\forall x)\overline{p(x)}.$$

1.4.4. Existencia y unicidad

Hay un cuantificador más que se utiliza con frecuencia:

Definición 1.12 (Existencia y unicidad). *La proposición $(\exists! x)p(x)$, que se lee "existe un único x tal que $p(x)$", es verdadera cuando hay exactamente una cadena de símbolos hace verdadero $p(x)$.*

Un ejemplo:

> **Ejemplo:**
>
> Nuevamente, considerando nuestra función proposicional $p(x)$ = "x es un jugador de fútbol". ¿Cuál será el valor de verdad de $(\exists! x)p(x)$?
>
> Podemos notar que tanto x_1 = `Marcelo Salas` y x_2 = `Matías Fernández` hacen que $p(x)$ sea verdadera.
> Es decir, si bien existe un x que hace a $p(x)$ verdadera, **no** es único.
> Así, $(\exists! x)p(x)$ es falsa.

Observación: Notemos que $\exists!$ **no** es un cuantificador nuevo, en el sentido de que puede ser definido en función de los dos cuantificadores anteriores. Es decir la siguiente proposición es verdadera.

$$(\exists! x)p(x) \iff \underbrace{[(\exists x)p(x)]}_{\text{Existencia}} \land \underbrace{[(\forall x)(\forall y)((p(x) \land p(y)) \Rightarrow (x = y))]}_{\text{Unicidad}}$$

> **Ejemplo importante: Equivalencia dividida en dos partes**
>
> Veremos ahora una técnica de demostración que se basa en una de las tautologías importantes que vimos antes. Supongamos que queremos demostrar que
>
> $$\underbrace{(\forall x)(p(x) \land q(x))}_{p} \iff \underbrace{[(\forall x)p(x) \land (\forall x)q(x)]}_{q}$$
>
> es verdadera.
> Lo que haremos es usar la Tautología 1,
>
> $$(p \iff q) \iff ((p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)).$$
>
> En donde el rol de p y q está descrito arriba. Ésta nos permite dividir la demostración en dos partes, ya que en lugar de verificar que $(p \iff q)$ es verdadera, podemos verificar que $(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)$ es verdadera.
> Esto, a su vez lo hacemos verificando que $(p \Rightarrow q)$ es verdadera y luego que $(q \Rightarrow p)$ también lo es.

$\Rightarrow$)
Hipótesis: $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$ es verdadera.
p.d.q: $(\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x)$ es verdadera.

En efecto: **Sea** x **arbitrario**. Por hipótesis se tiene tanto $p(x)$ como $q(x)$ son verdaderas. En particular $p(x)$ lo es. Es decir, probamos que $(\forall x)p(x)$ es verdadera. Análogamente se tiene que también $(\forall x)q(x)$ es verdadera.
$\Leftarrow$)
Hipótesis: $(\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x)$ es verdadera.
p.d.q: $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$ es verdadera.

En efecto: **Sea** x_0 **arbitrario**. Como por hipótesis $(\forall x)p(x))$ es verdadera **se tiene que** $p(x_0)$ **es verdadera**. Como por hipótesis $(\forall x)q(x)$ es verdadera **se tiene** $q(x_0)$ también lo es. $\square$

Observación: Convenciones en el desarrollo de un argumento En la demostración anterior la expresión "... es verdadera ..." aparece una gran cantidad de veces. Por ejemplo en

Hipótesis: $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$ es verdadera.
p.d.q: $(\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x)$ es verdadera.

Esto no siempre es necesario pues se subentiende que al decir que la hipótesis es p estamos asumiendo que p es verdadera.
Del mismo modo, si declaramos que queremos demostrar q se subentiende que deseamos demostrar que q es verdadera.
También es posible que después de un razonamiento lleguemos a la conclusión que r es verdadera. Esto suele indicarse con expresiones del tipo "se tiene r" o "y entonces r".
Tomando estas convenciones la última parte del desarrollo anterior queda como sigue.

Hipótesis: $(\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x)$
p.d.q: $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$

En efecto: **Sea** x_0 **arbitrario**. Como por hipótesis $(\forall x)p(x)$, **se tiene** $p(x_0)$. Como por hipótesis $(\forall x)q(x)$, **se tiene** $q(x_0)$.