Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Fsicas y Matemticas
Escuela de Verano 2008
Matemticas II

Pauta Control 1

Raúl Uribe, Pierre Paul Romagnoli, Leonardo Sánchez, José Zamora.

P1 **(a)** Determine los valores de verdad de verdad de las proposiciones p, q, r, s, t sabiendo que la proposicin

$$[(p \Leftrightarrow q) \wedge \overline{(r \Leftrightarrow s)} \wedge \bar{t}] \Rightarrow [s \vee (p \Rightarrow s)]$$

es falsa

Solución

Como $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow F] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow V \wedge q \Leftrightarrow F]$

Luego $[(p \Leftrightarrow q) \wedge \overline{(r \Leftrightarrow s)} \wedge t] \Leftrightarrow V \wedge [s \vee (p \Rightarrow s)] \Leftrightarrow F$(hasta acá 1 punto).

Entonces $s \Leftrightarrow F \wedge (p \Rightarrow s) \Leftrightarrow F$, es decir $s \Leftrightarrow F \wedge p \Leftrightarrow V$.

Además, las tres proposiciones de primer miembro deben ser verdaders así

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow V \Rightarrow q \Leftrightarrow V \text{ (ya que } p \Leftrightarrow V)$$

$$\overline{r \Rightarrow s} \Leftrightarrow V \Rightarrow (r \to s) \Leftrightarrow F \Rightarrow r \Leftrightarrow V \wedge s \Leftrightarrow F$$

Finalmente

$$\bar{t} \Leftrightarrow V \Rightarrow t \Leftrightarrow F$$

Luego se tiene que $p \Leftrightarrow V, q \Leftrightarrow V, r \Leftrightarrow V, s \Leftrightarrow F \wedge t \Leftrightarrow F$ (hasta acá 3 puntos)

(b) Decida usando, tablas de verdad, si la proposicin siguiente es tautología:

$$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [(q \Rightarrow (p \wedge \overline{r})]$$

Solución

p	q	r	$\overline{r}$	$(p \wedge q)$	$p \wedge q \Rightarrow r(\bigstar)$	$p \wedge \overline{r}$	$q \Rightarrow (p \wedge \overline{r})(\bigcirc)$	$\bigstar \wedge \bigcirc$
V	V	V	F	V	V	F	F	F
V	V	F	V	V	F	V	V	F
V	F	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	V	V

***2.4 puntos total, 0.4 por cada columna correcta**
Como existe una combinacin de valores de verdad de las preposiciones que hacen la preposición F, entonces la preposicin no es tautología (0.6 puntos)

P2 Sean p, q, r, s proposiciones. Pruebe, sin usar tablas de verdad, que

$$\{(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow \overline{r})\} \Rightarrow \{\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)\}$$

es una tautologa.

Sol.

NOTA: Por omitir los simbolos $\Leftrightarrow$ y $\Rightarrow$ se descontar 0,1 ptos, con un maximo de 0.5 ptos.

1^a **Forma: Usando definiciones y tautologas conocidas(1).**

$(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow \overline{r})$
$\Leftrightarrow (\overline{p} \vee q) \wedge (s \vee \overline{r})$
$\Leftrightarrow (\overline{p} \wedge s) \vee (\overline{p} \wedge \overline{r}) \vee (q \wedge s) \vee (q \wedge \overline{r})$
$\Rightarrow \overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s) \vee \overline{r}$
$\Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{r} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)$
$\Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)$

****1.2 ptos. por paso**

2^a **Forma: Usando definiciones y tautologas conocidas(2).**

$[(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow \overline{r})] \Rightarrow [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]$
$\Leftrightarrow [(\overline{p} \vee q) \wedge (s \vee \overline{r})] \Rightarrow [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]$
$\Leftrightarrow \overline{(\overline{p} \vee q) \wedge (s \vee \overline{r})} \vee [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]$
$\Leftrightarrow \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{s \vee \overline{r}} \vee [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]$
$\Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{s} \wedge r) \vee [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]$
$\Leftrightarrow [(p \wedge \overline{q}) \vee \overline{p}] \vee [(\overline{s} \wedge r) \vee \overline{r}] \vee (q \wedge s)$
**** Hasta aca 3.0 ptos**
$\Leftrightarrow [(p \vee \overline{p}) \wedge (\overline{q} \vee \overline{p})] \vee [(\overline{s} \vee \overline{r}) \wedge (r \vee \overline{r})] \vee (q \wedge s)$
$\Leftrightarrow [V \wedge (\overline{q} \vee \overline{p})] \vee [(\overline{s} \vee \overline{r}) \wedge V] \vee (q \wedge s)$
$\Leftrightarrow (\overline{q} \vee \overline{p}) \vee (\overline{s} \vee \overline{r}) \vee (q \wedge s)$
$\Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{r}) \vee (\overline{q} \vee \overline{s}) \vee (q \wedge s)$

$\Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{r}) \vee \overline{(q \wedge s)} \vee (q \wedge s)$
$\Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{r}) \vee V$
$\Leftrightarrow V$

**** Los otros restantes 3.0 ptos.**

3^a **Forma: Por inspección.**
El caso que interesa es suponer que $\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)$ es Falso y probar que entonces $(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow \overline{r})$ también es Falso.
En efecto, si $\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s) \Leftrightarrow F$ entonces $\overline{p}, \overline{r}$ y $(q \wedge s)$ son F, es decir $p \Leftrightarrow V$,$r \Leftrightarrow V$ y $(q \wedge s) \Leftrightarrow F$.
De esta forma el primer miembro queda

$$(V \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow F)$$

(Hasta aca 3.0 ptos)**
Como $(q \wedge s) \Leftrightarrow F$, almenos una de las dos proposiciones, q o s, es falsa. Supongamos que $q \Leftrightarrow F$, luego $(V \Rightarrow q) \Leftrightarrow F$, de donde sigue que

$$[(V \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow F)] \Leftrightarrow [F \wedge (\overline{s} \Rightarrow F)] \Leftrightarrow F$$

En caso en que q no sea F, dado que $(q \wedge s) \Leftrightarrow F$, entonces se debe tener $(s \Leftrightarrow F) \Leftrightarrow (\overline{s} \Leftrightarrow V)$, se sigue que:

$$[(V \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow F)] \Leftrightarrow [(V \Rightarrow q) \wedge (V \Rightarrow F)] \Leftrightarrow (V \Rightarrow q) \wedge F \Leftrightarrow F$$

(Los otros restantes 3.0 ptos.)**

P3

(a) A=$\left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$
La afirmacin $(\forall x \in A)(\exists y \in A)(x^2 \leqslant y)$ es verdadera, pues para cada elemento x de A, considerando el elemento $y = 1$, se cumple que $x^2 \leqslant 1$. Su negacin resulta ser la proposicin $(\exists x \in A)(\forall y \in A)(x^2 > y)$

**** 1.5 ptos. por ver el valor de verdad de la afirmación y 0.5 por negarla.**

La afirmacin $(\exists x \in A)(\forall y \in A)(x^2 \leqslant y)$ es falsa, lo que se puede verificar al negar la afirmacin

$$(\forall x \in A)(\exists y \in A)(x^2 > y)$$

la cual es verdadera considerando para cada x en el conjunto A el elemento $y = -1$, que cumple $x^2 > -1$.

**** 1.5 ptos. por ver el valor de verdad de la afirmación y 0.5 por negarla.**

(b)

i) Falso, pues no tienen los mismos elementos (A contiene a x y B contiene a $\{x\}$).

ii) Falso, pues el elemento x de A, no est en B.

iii) Verdadero, porque A=$\{x\}$ es un elemento de B.

iv) Verdadero. x es un elemento de A.

v) Falso. B slo contiene al elemento $\{x\}$.

vi) Verdadero, porque el elemento x de $\{x\}$ est tambin en A.

vii) Falso, porque el elemento x de $\{x\}$ no est en B.

viii) Falso, porque el elemento$\{x\}$de $\{\{x\}\}$ no est en A.

****0.25 ptos por cada afirmacion correcta.**