Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile Escuela de Verano 2009

Pauta Control 3, 2008
Matemáticas II

VERANO, 2009

Problema 1

(i) Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{xe^x}{\ln(x)}$

b) $g(x) = \tan(x^3)$

(ii) Dada la curva de ecuacin $y = x^3 + x - 3$, determine la ecuación de recta tangente en el punto $x = 1$.

Sol:

(i)

a) $(\frac{xe^x}{ln(x)})'$
$= \frac{(xe^x)' ln(x) - xe^x (ln(x))'}{ln(x)^2}$
$= \frac{(e^x + xe^x) ln(x) - xe^x \frac{1}{x}}{ln(x)^2}$
$= \frac{(e^x + xe^x) ln(x) - e^x}{ln(x)^2}$

b) $(tan(x^3))'$
$= tan'(x^3)(x^3)' = 3x^2 \frac{(sin(x))' cos(x) - (cos(x))' sin(x)}{cos(x)^2} = \frac{3x^2}{cos(x)^2}$

(ii) Como la ecuacion $y = x^3 + x - 3$ es suma y resta de funciones derivables, se tiene que $y' = 3x^2 + 1$, Luego la pendiente de la recta tangente en el punto $x = 1$ es m=y'(1)=4, luego la ecuacion de la recta que pasa por (1,y(1)=-1) con pendiente m es l=4x-5.

Problema 2. Grafique completamente la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Para ello, prosiga de la siguiente forma:

(i) Encuentre los ceros de la función y vea dónde es positiva y negativa.

(ii) Calcule $f'(x)$. A partir de la derivada, encuentre puntos críticos y zonas de crecimiento.

(iii) A partir de las zonas de crecimiento, argumente si los puntos críticos son máximos, mínimos o puntos de infexión.

(iv) Usando todo lo anterior, bosqueje el gráfico de f.

Sol:

(i) Ceros : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Luego el unico cero de la funcion es $x = 0$.
Signos: Notemos que $x^2 + 1$ es siempre positivo, luego

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \wedge f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

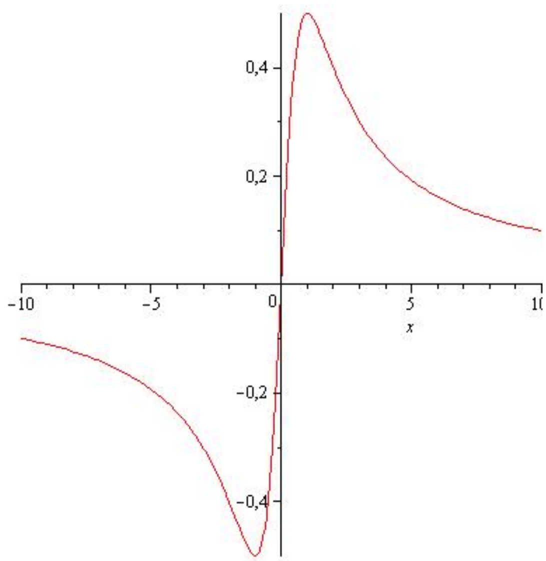
(ii) $f(x)'$
$= \frac{(x)'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$
$= \frac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2}$
$= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

Calculemos los ptos. criticos.
$f(x)' = 0 \Leftrightarrow (1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$
Luego f(x) es creciente en $(-1, 1)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$1 - x$	$-$	$+$	$-$
$f(x)'$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

(iii) Por parte anterios se tiene que x=-1 es un mnimo y x=1 es un maximo.

(iv)



Problema 3 CODELCO le encarga construir un estanque cilndrico de volumen $10m^3$, sin tapa. El costo del material para la base es cinco veces el costo del que se usa para las paredes, que es $p > 0$. Calcule la altura h y el radio r que minimiza el costo de construcción del estanque. Encuentre la relación $\frac{r}{h}$, para h y r óptimos.

Sol: Escribamos el precio en función del radio r y la altura h

$$P(r,h) = 2\pi rhp + 5\pi r^2 p$$

Recordemos la restricción de volumen,

$$10 = \pi r^2 h$$

Despejando h, obtenemos

$$h = \frac{10}{\pi r^2}$$

Reemplazando en la función de Precio,

$$P(r) = \frac{2p}{r} + 5\pi r^2 p$$

Necesitamos minimizar $P(r)$, para ello calculamos los ptos. críticos de $P(r)'$.

$$P(r)' = -\frac{2p}{r^2} + 10\pi rp$$

$$P(r)' = 0 \Leftrightarrow -\frac{2p}{r^2} + 10\pi rp = 0 \Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{5\pi}$$

$$r =^3 \sqrt{\frac{1}{5\pi}}$$

La altura que minimiza el precio es

$$h = \frac{10}{\pi} \sqrt[3]{(5\pi)^2}$$

y la relación $\frac{r}{h}$ es

$$\frac{r}{h} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{5\pi}}}{\frac{10}{\pi} \sqrt[3]{(5\pi)^2}} = \frac{1}{50}$$