ESCUELA DE VERANO - MATEMÁTICAS II - Enero 2009

Profesores: Raúl Uribe, Pierre Paul Romagnoli,
Leonardo Sánchez, José Zamora

Pauta Control # 3

Problema 1.- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

(a) Encuentre $A = Dom(f)$.
(b) Pruebe que f es biyectiva y encuentre f^{-1}.

Sol:

(a) Para que f esté bien definida se tiene que cumplir que

$$\begin{aligned} \sqrt{16 - x^2} &> 0 \\ 16 - x^2 &> 0 \\ 16 &> x^2 \end{aligned}$$

Luego, $Dom(f) = (-4, 4)$ (*2,0 ptos*)

(b) Inyectividad: Sean $x_1, x_2 \in (-4, 4)$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Luego:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{\sqrt{16 - x_1^2}} &= \frac{x_2}{\sqrt{16 - x_2^2}} \quad (*) \\ \frac{x_1^2}{16 - x_1^2} &= \frac{x_2^2}{16 - x_2^2} \\ 16x_1^2 - x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2^2 &= 16x_2^2 - x_1^2x_2^2 \\ x_1^2 &= x_2^2 (\textit{1,5 ptos} \text{ hasta aquí}) \end{aligned}$$

Luego, aplicando en $(*)$ se tiene que

$$\frac{x_1}{\sqrt{16 - x_1^2}} = \frac{x_2}{\sqrt{16 - x_1^2}} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (\textit{0,5 ptos})$$

Sobreyectividad: Para probar la sobreyectividad calcularemos la inversa de f :

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} \\ y^2 &= \frac{x^2}{16 - x^2} \\ 16y^2 &= y^2x^2 - x^2 \\ x^2 &= \frac{16y^2}{1 + y^2} \\ x &= \frac{4y}{\sqrt{1 + y^2}} \quad \text{(No se penaliza por no argumentar)} \end{aligned}$$

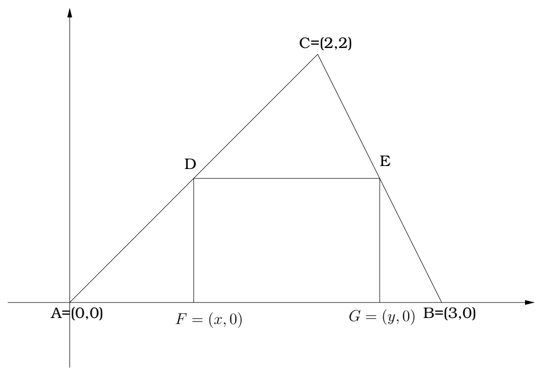
Luego, $f^{-1}(y) = \dfrac{4y}{\sqrt{1+y^2}}$ (*2,0 ptos*)

Como $f^{-1}(y)$ está definida para todo y porque $\sqrt{1+y^2}$ es siempre positivo se tiene que f es sobreyectiva.

OJO: Se puede probar sólo calculando la inversa y argumentando que la inversa es única.

$\square$

Problema 2.- Sea el triángulo ABC de la figura. El objetivo de la pregunta es encontrar el rectángulo de área máxima inscrito en el triángulo.



Para esto siga los siguientes pasos:

(a) Calcule el largo de los trazos DF y EG en función de x e y respectivamente.

(b) Pruebe que el área del rectángulo $DEGF$ esta dada por la función

$$A(x) = \frac{6x - 3x^2}{2}$$

(c) Grafique $A(x)$ para $x \in [0, 3]$.

(d) Encuentre los valores de x e y tal que el área del rectángulo $DEGF$ es máxima y calcule el valor de esta área.

Sol:

(a) Como el trazo AC es parte de la recta $f(x) = x$, se tiene que $D = (x, x)$. Igualmente, como CB es parte de la recta $f(x) = -2x + 6$, se tiene que $E = (y, -2y + 6)$. Luego, $DF = x$ y $EG = 6 - 2y$ (*1,5 ptos*)

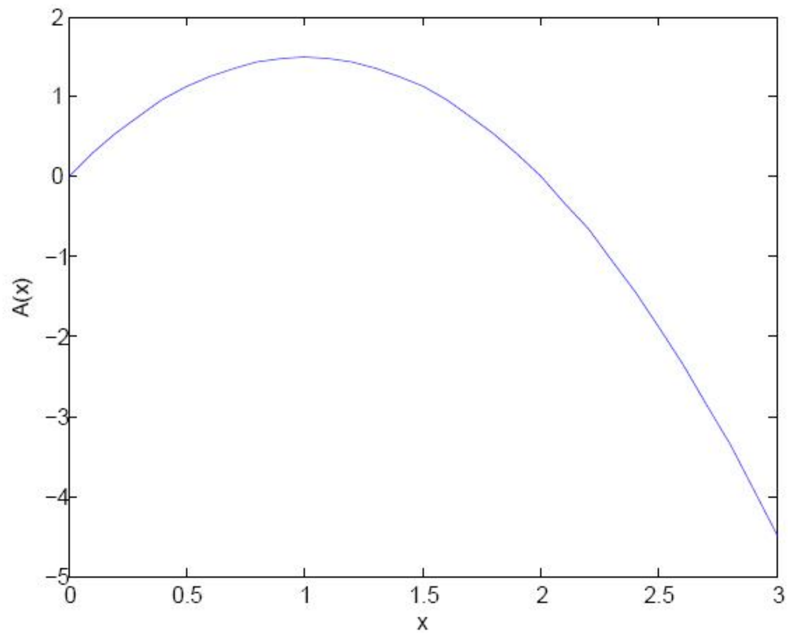
(b) Como $DF = EG$ se tiene que $x = 6 - 2y \quad (*)$. El área del rectángulo $DEFG$ está dada por

$$A(x, y) = (x) \cdot (x - y)$$

Usando la igualdad $(*)$ se tiene que

$$A(x) = x \cdot \left(\frac{6-x}{2} - x\right) = x \cdot \left(\frac{6-3x}{2}\right) = \frac{6x - 3x^2}{2} \quad (\textit{1,5 ptos})$$

(c) Gráfico de $A(x)$: (*1,5 ptos*)



(d) Del dibujo notamos que

$$x_{\mathsf{max}} = 1,$$

lo que implica que

$$y_{\mathsf{max}} = \frac{6 - x_{\mathsf{max}}}{2} = \frac{5}{2}$$

y el área máxima es

$$A(x_{\mathsf{max}}) = \frac{6 \cdot 1 - 3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2} \quad (\textit{1,5 ptos})$$

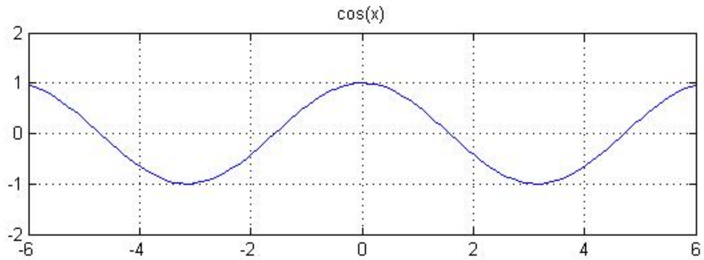
$\square$

Problema 3.- Grafique la función

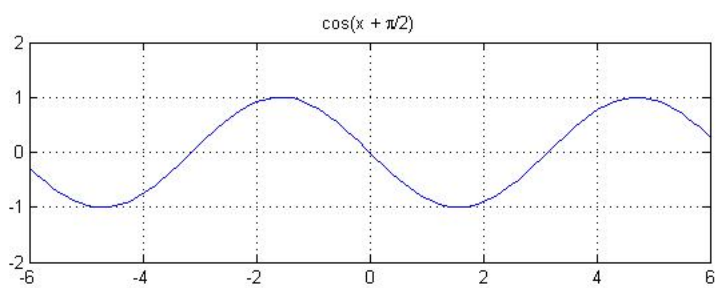
$$f(x) = \left|3\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right| - 3$$

indicando claramente sus ceros y la imagen de f.
Sol: El dibujo final se puede lograr siguiendo los siguientes 6 pasos:

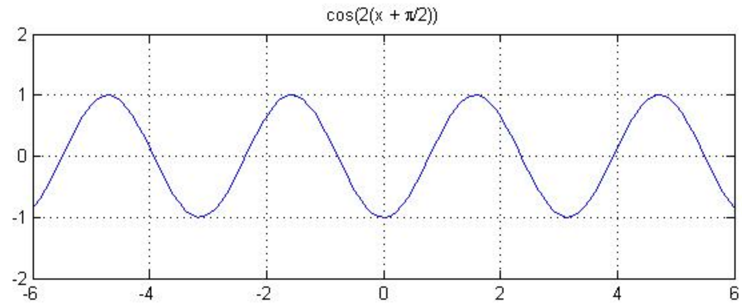
(1) Dibujar $\cos(x)$.



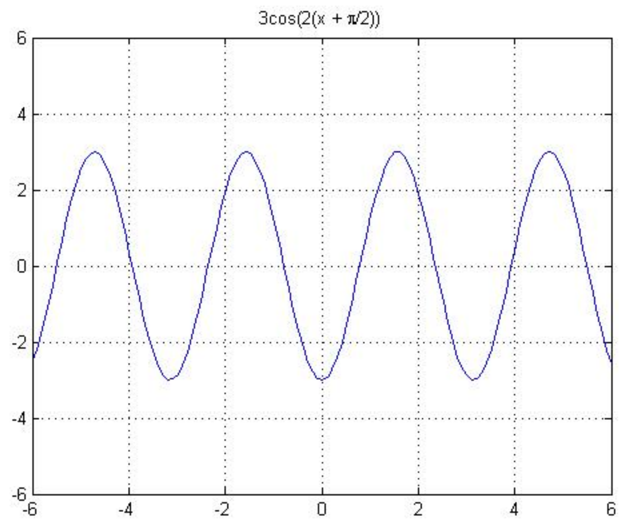
(2) Desplazar en $\frac{\pi}{2}$ hacia la derecha.



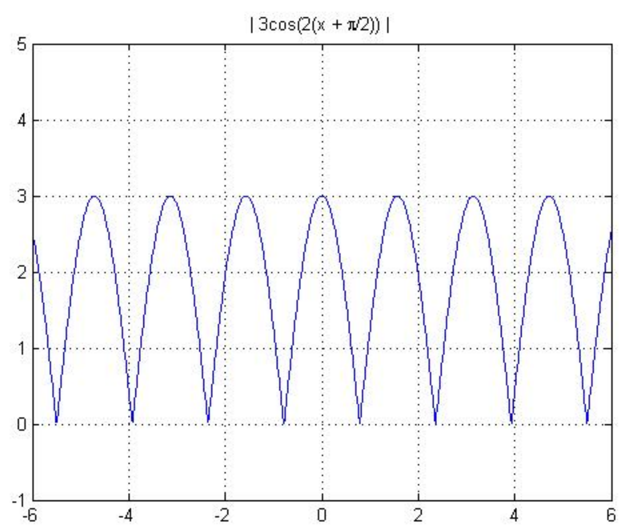
(3) Aumentar la frecuencia a 2.



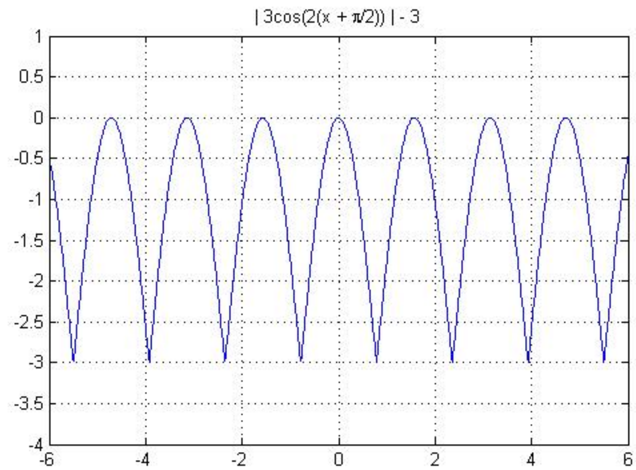
(4) Aumentar la amplitud a 3.



(5) Aplicar módulo.



(6) Desplzar en 3 hacia abajo.



(*1,0 pto* por cada paso)

□