::::: Guía 0 ::::: Problemas de Trigonometría y Geometría :::::

FÍSICA I Verano 2011

Profesores: Marcos Flores, Nelson Zamorano

Entrega Tarea 0: 05 Enero 2011

::: Objetivos :::

Esta guía de ejercicios tiene por objeto hacer una revisión rápida de las herramientas matemáticas que utilizaremos durante el curso de verano. Algunos o muchos de estos ejercicios pueden parecer nuevos para ti. Estudiaremos estas materias durante las primeras clases, pero conviene que leas acerca de los temas para que te prepares mejor para enfrentar el curso. Las estrellitas (*) indican la relevancia del tema en el curso.

Los siguientes son los temas que abordaremos en esta guía:

1:: Ángulos. Sistema sexagesimal y radianes. (**)
2:: Funciones e identidades trigonométricas. Aplicaciones. (***)
3:: Aproximaciones numéricas.(*)
4:: Estimaciones y órdenes de magnitud.(*)
5:: Cálculo numérico.

Si tienes dificultades con estos ejercicios, consulta cualquier libro básico de trigonometría o la sección "Complemento Matemático" del libro "Introducción a la Mecánica" del Profesor Nelson Zamorano (**NZ**) que se encuentra en la página web http://www.escueladeverano.cl/fisica

::: Indicaciones :::

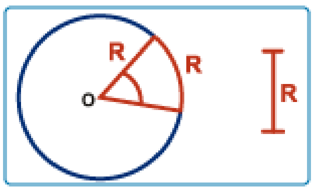
Esta guía consiste de 31 problemas que cubren los cinco temas mencionados en los objetivos. De ellos, los problemas P8, P12, P19 y P22, deberán ser entregados resueltos el primer día de clases (05 de Enero de 2010), en la sala correspondiente al horario de "Consulta de tareas". Lee el problema P26 e intenta doblar una hoja de cuaderno para saber las limitaciones físicas que existen con este problema. Comentaremos esta situación en la primera clase.

PARTE I: ANGULOS

P1.

En este problema responderemos la pregunta **¿Qué es un Radián?**

1:: Dibuje, utilizando un compás, un círculo en un papel. No olvide marcar el centro.
2:: Corte varios trozos de hilo, todos con un largo igual al radio de la circunferencia. ¿Cuántos de estos trozos de hilo se necesitan para cubrir el largo de la circunferencia? O puesto de otro modo, ¿cuántos radios caben en el largo de la circunferencia?
3:: Mida el ángulo que subtiende uno de estos trozos de cuerda al ser colocado sobre la circunferencia que dibujó en la primera parte. Esto es por definición **UN RADIÁN**.



4:: Repita los pasos **1::**, **2::** y **3::** para una circunferencia de mayor radio que la anterior.
5:: Compare el valor del ángulo subtendido por el radio en ambos casos.
6:: Dado que el ángulo medido en radianes se obtiene a partir de la razón entre dos segmentos, ¿cuál debe ser la dimensión de un radián?

P2.

a) ¿A cuántos radianes equivale un segundo?
b) ¿A cuántos segundos equivale un radián?

P3.

Exprese en radianes los ángulos:
a) 45°
b) 30°
c) 105°
d) 22° 30'
e) 18°

P4.

Exprese en grados sexagesimales los ángulos:
a) $3\pi/4$
b) $7\pi/45$
c) $5\pi/27$
d) $5\pi/24$
e) 0,3927

P5.

La manilla de una máquina da vueltas sin cambiar su rapidez, a una razón de 35 revoluciones por minuto **(RPM).**

>¿Cuánto tiempo tarda en girar 5 radianes?

PARTE II: Trigonometría (revisar libro de NZ, pp. 441-452)

P6.

Demuestre que:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\tan\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\cot\alpha=1.$$

P7.

Calcule

$$3\tan^2 30°+\frac{1}{4}\sec 60°-5\operatorname{sen}^2 60°.$$

P8. **(Problema # 1 Tarea 0)**

Encuentre los valores de θ que satisfacen la ecuación:

$$3\operatorname{sen}^2\theta+5\operatorname{sen}\theta=2. \quad (*)$$

Indicación: Defina $x=\operatorname{sen}\theta$, y reemplácelo en la ecuación (*). ¿Qué tipo de ecuación es ésta? Resuelva esta ecuación auxiliar y finalmente determine θ.

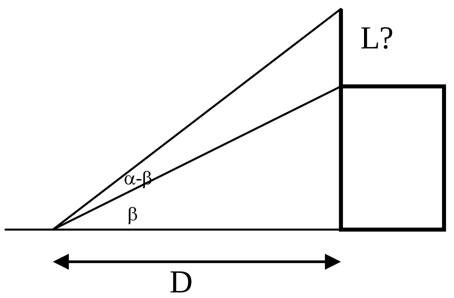
P9.

Determine el ángulo de elevación del Sol con respecto a la horizontal cuando la sombra de un poste de 6 m de altura es de $2\sqrt{3}$ m de largo.

P10.

Un asta de bandera es colocada en lo alto de un edificio. Desde una distancia D del edificio, los ángulos de elevación de la punta del asta y del borde superior del edificio son α y β, respectivamente.

> ¿Cuál es el largo L del asta?



P11.

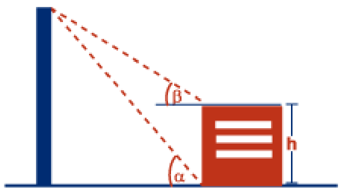
El punto medio de uno de los lados de un cuadrado se une a uno de los vértices opuestos del mismo.

> Encuentre la magnitud de los dos ángulos que se formaron en ese vértice.

P12. **(Problema #2 Tarea 0)**

El ángulo de elevación de la parte superior de una columna vista desde el pie de una torre es α y desde la parte superior de la torre es β. Si la torre tiene una altura **h**:

> ¿Cuál es la altura de la columna?



P13.

a) Dado $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, calcule $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

b) Dado $\tan 135°=-1$, calcule $\operatorname{sen}135°$.

c) Dado $\sec\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-2$, calcule $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ y $\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

d) Si $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, evalúe $\operatorname{sen}\alpha$ y $\tan\alpha$.

P14.

Evalúe:

a) $\cos 0°\operatorname{sen}^2 270°-2\cos 180°\tan 45°=$ **?**

b) $\tan\pi\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\sec\ 2\pi\ -\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=$ **?**

c) $3\operatorname{sen}0°\sec 180°+2\operatorname{cosec}90°-\cos 360°=$ **?**

d) $2\sec^2\pi\cos 0°+3\operatorname{sen}^3\left(\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ **?**

P15.

Determine el valor de:

a) $\cos\ 480°$

b) $\operatorname{sen}\ 960°$

c) $\cos\ -780°$

d) $\operatorname{sen}\left(\frac{15\pi}{4}\right)$

e) $\cot\left(\frac{23\pi}{4}\right)$

f) $\sec\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

g) $\text{sen}\ 1{,}125°$

h) $\text{sen}\ 855°$

i) $\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

P16.

Encuentre **todos** los ángulos (menores que 360°) que satisfacen las ecuaciones:

a) $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\text{sen}\,\theta=-\frac{1}{2}$ c) $\tan\theta=\sqrt{3}$

P17.

Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\frac{\text{sen}\ -\beta}{\text{sen}\ 180°+\beta}-\frac{\tan\ 90°+\beta}{\cot\ \beta}+\frac{\cos\ \beta}{\text{sen}\ 90°+\beta}=$ **?**

b) $\frac{\cos\ 90°+\beta\ \sec\ -\beta\ \tan\ 180°-\beta}{\sec\ 360°+\beta\ \text{sen}\ 180°+\beta\ \cot\ 90°+\beta}=$ **?**

P18.

Demuestre que:

a) $\text{sen}\ \alpha+\beta\ \text{sen}\ \alpha-\beta\ =\text{sen}^2\alpha-\text{sen}^2\beta$

b) $\text{sen}\ \alpha+45°\ =\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{sen}\,\alpha+\cos\alpha$

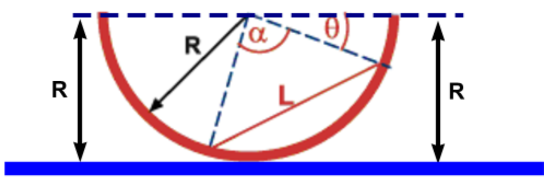
c) $\cos\ \alpha+45°\ =\frac{1}{\sqrt{2}}\ \cos\alpha-\text{sen}\,\alpha$

e) $\frac{\text{sen}\ \alpha+\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha+\tan\beta$

P19. **(Problema #3 Tarea 0)**

> Determine el ángulo α que subtiende la barra de largo **L**, que permanece en reposo en el cilindro de radio **R** de la figura.

> ¿A qué altura se ubica el punto medio de la barra **L** medido a partir del piso? Dé su respuesta en función del ángulo *θ*, que suponemos conocido.



P20.

Si $\text{sen}\,\alpha=\frac{3}{5}$ y $\cos\beta=\frac{12}{13}$

> Evalúe $\cos\ \alpha+\beta$ y $\text{sen}\ \alpha-\beta$

P21.

Compruebe las siguientes identidades:

a) $\cos\ \alpha+\beta\ \cos\beta+\text{sen}\ \alpha+\beta\ \text{sen}\,\beta=\cos\alpha$

b) $\text{sen}\ 3\alpha\ \cos\alpha-\cos\ 3\alpha\ \text{sen}\,\alpha=\text{sen}\ 2\alpha$

c) $\frac{\tan\ \alpha-\beta\ +\tan\beta}{1-\tan\ \alpha-\beta\ \tan\beta}=\tan\alpha$

d) $1+\tan\ 2\alpha\ \tan\alpha=\sec\ 2\alpha$

P22. **(Problema #4 Tarea 0)**

Compruebe que:

a) $\frac{\text{sen}\ 2\alpha}{1+\cos\ 2\alpha}=\tan\alpha$

b) $\frac{1+\sec\alpha}{\sec\alpha}=2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Parte III: Aproximaciones y Estimaciones (revisar libro de NZ, pp. 424-434)

P23.

Con los siguientes ejercicios procuraremos validar (o convencernos que funciona en ciertos casos) la aproximación $1+x^{R}\approx 1+Rx,$ válida para $|x|<<1$. Mientras más pequeño con respecto a la unidad mejor a aproximación.

> Calcule primero **(sin usar calculadora)** el valor de las siguientes expresiones (use donde corresponda $\pi\approx 3{,}14$). Después compruebe el resultado con una calculadora o su PC:

a) $\sqrt{1{,}001}$ b) $\sqrt{0{,}98}$

c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{\pi}$

e) $\frac{1}{\pi}$ f) π^2

g) $\sqrt{2}$ h) $\sqrt{60{,}5}$

P24.

Haciendo uso de la misma aproximación de la pregunta anterior, calcule los siguientes cuocientes:

a) $\dfrac{1}{101}$ b) $\dfrac{905}{77}$

c) $\dfrac{303}{220}$ d) $\dfrac{\sqrt{50}}{703}$

e) $\dfrac{800}{802}$ f) $\dfrac{\sqrt{88}}{0,015}$

P25.

En un tablero de ajedrez hay 8x8 casilleros. En el primero de ellos se pone un grano de maíz; en el segundo el doble del anterior; en el tercero el doble del anterior, y así sucesivamente.

> Calcule el número aproximado de granos de maíz que se requieren para toda la operación y estime su volumen. Compárelo con el volumen de la Tierra.

P26.

Una hoja de papel tipo carta, es doblada por la mitad, de esta manera el área resultante es la mitad y el espesor es el doble de la hoja original. Si este proceso se repite sucesivamente con la hoja resultante,

> Estime el número de veces que se debe doblar una hoja para que el espesor cubra la distancia que separa a la tierra de la Luna.

> Calcule el área de la hoja resultante al final del proceso. Compare este número con el tamaño de un átomo.

P27. (Excel)

La siguiente es una expresión que nos permite calcular en forma aproximada el valor del número $\pi/4$:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$$

Esta fórmula recibe el nombre de serie y es una suma de infinitos términos. Obviamente no podemos sumar infinitos términos y esperamos que mientras más términos sumemos mejor será nuestro resultado.

Utilizando una tabla Excel (por ejemplo), sume el número suficiente de términos de esta serie, de forma que alcance el resultado 0.785, es decir, obtenga el valor aproximado con tres decimales.

P28. (Excel)

Usando Excel, haga un gráfico de las siguientes funciones trigonométricas

a) $\operatorname{sen}\ \alpha$ para $0\le\alpha\le 2\pi.$

b) $\cos\ \alpha$ para $0\le\alpha\le 2\pi.$

c) $\tan\ \alpha$ para $0\le\alpha\le 2\pi.$

d) $\operatorname{sen}\ 5\alpha$ para $0\le\alpha\le 2\pi.$

e) $\operatorname{sen}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$ para $0\le\alpha\le 2\pi.$

Parte IV: Misceláneos – Ordenes de Magnitud

"Conocer el grado de precisión que permite la naturaleza del problema y no buscar exactitud donde sólo una verdad aproximada es posible, constituye el sello de una mente entrenada."

Aristóteles

P29.

Estime cuántos trabajadores se necesitaron para construir una pirámide. Necesita recolectar datos como la densidad de las piedras, el tamaño de las pirámides, cuánto trabajo puede hacer un hombre en un día, la energía potencial de la pirámide y hacer algunas suposiciones como la siguiente: dónde se encontraban las piedras utilizadas.

Referencia: Juegos matemáticos, Ian Stewart, "Investigación y Ciencia", Noviembre 1998, pág. 86. (Problema 28).

P30.

Benjamín Franklin notó que al dejar una gota de aceite en la superficie de un lago, ésta no se esparcía más allá de una cierta superficie. También notó que si el número de gotas de aceite se aumentaba al doble, el área cubierta también se duplicaba. Concluyó que dicho valor era el máximo posible que una cierta cantidad de aceite lograba extenderse. Al realizar el experimento notó que 0,1 cm^3 de aceite cubrían un área de aproximadamente 40 cm^2. ¿De qué espesor es la capa de aceite?

Si la distancia entre átomos de una molécula en un líquido o gas corriente es de $1Å=10^{-10}$ m. En el tipo de aceite que Franklin usó se puede suponer que cada molécula tenía 10 átomos.

> ¿De cuántos átomos de espesor era la película de aceite formada?