Escuela de Verano para estudiantes de Enseñanza Media
Universidad de Chile

Universidad de Chile
Facultad De Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2014
Profesor: Pablo Dartnell

Profesores auxiliares: Felipe Asencio, Sebastián Tapia

Guía 2: Derivadas y aplicaciones.

P1. Usando sólo de la definición de derivada, hallar las derivadas de las siguientes funciones.

(i) $y = \sqrt{x}$

(ii) $y = \dfrac{1}{x}$

(iii) $y = \operatorname{sen}^2(x)$

(iv) $y = x^4 + 3x^2 - 6$

(v) $y = 5(x+a)^3,\ a \in \mathbb{R}$

P2. Utilizando las reglas de derivación calcule las derivadas de las siguientes funciones.

(i) $y = \dfrac{2x^4}{b^2 - x^2}$

(ii) $y = \dfrac{x^p}{x^m - a^m}$

(iii) $y = (a+x)\sqrt{a-x}$

(iv) $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(v) $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1+x^2}}$

(vi) $y = \ln(\ln x)$

(vii) $y = (1+\sqrt{x})^3$

(viii) $y = \ln^3 x$

(ix) $y = \ln(x)^{\ln(x)}$

P3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones, hallando previamente sus logaritmos.

(i) $y = x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$

(ii) $y = \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$

(iii) $y = \arcsin\left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)$

(iv) $y = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right),\quad x \in [0,\pi)$

(v) $y = \arctan\left(\dfrac{a}{x}\right) + \ln\left(\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}\right)$

(vi) $y = \arcsin(\operatorname{sen} x)$

P4. Un cuerpo lanzado al vacío, formando con la horizontal un ángulo α, describe una trayectoria parabólica por acción de la gravedad cuyas ecuaciones son

$$x = v_0 \cdot \cos(\alpha t),\ y = v_0 \cdot \operatorname{sen}(\alpha t) - \frac{gt^2}{2}.$$

Se le pide determinar la dirección del movimiento para los 5 primeros segundos, cuando $\alpha = 60^o, v_0 = 50\frac{m}{s}$, y bosqueje la trayectoria.

P5. De las fórmulas para calcular el volumen y la superficie de la esfera $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3, S(r) = 4\pi r^2$, se deduce que $V'(r) = S(r)$. Explicar el significado geométrico de este resultado. Hallar la relación análoga entre el área del cí rculo y la longitud de la circunferencia.

P6. En el triángulo ABC se cumple: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$. Sean b, c constantes, demostrar que $\frac{da}{dA} = h_a$, en que h_a es la altura del triángulo correspondiente a la base a. Interpretar el significado geométrico de este resultado.

P7. Para cada una de las siguientes funciones, hallar máximos y mí nimos.

(i) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, sobre $[-1, \frac{1}{2}]$

(ii) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-2}$ sobre $[0, 4]$

(iii) $f(x) = e^{-x}(1 - x^2)$ sobre $[-1, 2]$

(iv) $f(x) = \cos(x^2) - \operatorname{sen}(x)$, sobre $[-\pi, \pi^2]$

P8. Pruebe que las funciones $x^2 - \cos(x)$ y $2x^2 - x\operatorname{sen}(x) - \cos^2(x)$ tienen exactamente dos ceros.

P9. Considere

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot \ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \alpha & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

a) Determine el valor de α para que f sea continua en $\mathbb{R}_+^*$.

b) Analice la existencia de $f'(x)$ para $x > 0$. En caso de existir, calcúlela.

c) Determine los puntos de continuidad de f' en $]0, \infty[$.

P10. Analice completamente $f(x) = e^{1/\ln(x)}$ (dominio, asíntotas de todo tipo, derivada, crecimiento, gráfica)

P11. Sean $0 < a < b$. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$, con $f(a) = f(b) = 0$ y $f'(a) = 0$. Demuestre que existe $c \in]a, b[$ de modo que la tangente a f en el punto c pasa por el origen. Analice que pasa si $a = 0$.

P12. Sea $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$.

a) Determine los valores de x para los cuales $f(x)$ existe y calcule su valor.

b) Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de f, en los puntos donde $f(x)$ existe.

P13. Sea f continua en $[0,+\infty[$, derivable en $A=]0,+\infty[$ y tal que $f(0)=0$ y $f'(x)$ es creciente en A. Utilice el Teorema del Valor Medio para probar que $\forall x \in A,\ f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}$.
Concluya que la función $\frac{f(x)}{x}$ es creciente en A.

P14. a) Para la función $\frac{x^3}{1-x^2}(e^x - e)$ encuentre: dominio, ceros, asíntotas de todo tipo y límites en 1 y -1.

b) Para la función $\cos(x) \cdot e^{-\cos(x)/2}$ encuentre mínimos y máximos.

P15. Sea f definida y continua sobre $[a,b]$ y derivable sobre $]a,b[$, con $0<a<b$. Suponga que $f(a)=f(b)=0$. Mostrar que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c)=\frac{f(c)}{c}$.

P16. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$

a) Encontrar los ceros, mí nimos, máximos, puntos críticos y puntos de inflexión de f.

b) Estudiar las así ntotas y bosquejar el gráfico de f.

P17. Estudiar completamente la función $f(x)=\frac{x}{\ln^2(x)}$ indicando: dominio, recorrido, continuidad y eventuales reparaciones de discontinuidades, diferenciabilidad, paridad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos, concavidad, puntos de inflexión, asíntotas y gráfico.

P18. Dada la función $f(x)=e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})$, se le pide estudiarla completamente indicando: dominio, recorrido, continuidad y eventuales reparaciones de discontinuidades, diferenciabilidad, paridad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos, concavidad, puntos de inflexión, asíntotas y gráfico.

P19. Dado $a>0$, verificar que la función de variable real

$$f(x)=\left(a-\frac{1}{a}-x\right)(4-3x^2)$$

tiene exactamente un sólo máximo local y un sólo mínimo local y que la diferencia entre los valores alcanzados es

$$\frac{4}{9}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$$

¿Cuál es el menor valor de esta diferencia para diferentes valores de a?.

P20. Sean a,b números reales tales que $a<b$ y f una función real y continua en $[a,b]$. Suponga que f no se anula en el intervalo $[a,b]$ y que es diferenciable en $]a,b[$. Demostrar que existe $c \in]a,b[$ tal que :

$$\frac{f(a)}{f(b)}=\frac{f'(c)}{f(c)}\cdot e^{(a-b)}$$

Indicación: Considere la función $g = \ln|f|$, comente las propiedades de g en $[a, b]$.

P21. Sea $[a, b]$, $a < b$ y $f(x)$ una función definida en $[a, b]$, positiva y continuamente derivable (derivable con derivada continua) en (a, b). Se definen las funciones $g(x)$ y $h(x)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-a)(x-b)\cdot f(x) \quad \forall x \in [a, b] \\ h(x) &= g'(x) + c \cdot g(x) \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Probar que h tiene al menos una raíz en (a, b).

P22. Estudie el gráfico de la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, determinando: dominio, recorrido, continuidad y eventuales reparaciones de discontinuidades, diferenciabilidad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mí nimos, así ntotas y gráfico.

P23. Considere la función $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Demuestre que f verifica

$$(1-t^2)f'(t) - tf(t) = 0$$

Luego, demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene $f^{(n)}(t) = P_n(t)(1-t^2)^{-n-\frac{1}{2}}$, donde P_n es algún polinomio de grado n.

Indicación: Proceda por inducción.

P24. Sea f tal que $f'(x) \geq M > 0$ para todos los valores en $[0, 1]$. Demostrar que existe un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$ en el que $|f| \geq \frac{M}{4}$.

P25. Encuentre una función f para la cual existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, pero no existe $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

P26. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable en $[a, b]$ y tal que $f(a) = f(b) = 0$, con $0 < a < b$. Demuestre que existe $c \in]a, b[$ tal que: $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

Indicación: Utilice la función auxiliar $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.

P27. Sea la función $f(x) = (x + 1)e^{1/x}$.
Determine dominio, signos (es decir, dónde f es positiva, dónde f es negativa y dónde f es cero), asíntotas verticales, oblicuas, horizontales, máximos, mínimos, crecimiento, puntos de inflexión y concavidades .
Bosqueje el gráfico de la función.

Indicación: Para el bosquejo de su gráfico puede usar que: $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,62$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62$.
Recuerde además que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

P28. (a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.
Se dice que f es par si $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(-x) = f(x)$.
Se dice que f es impar si $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(-x) = -f(x)$.
Demuestre que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par y derivable, entonces g' es una función impar.

(b) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable, con $h(0) = h'(0) = 0$. Dado $a > 0$, demuestre que existe $\xi \in (0, a)$ tal que

$$h(a) = \frac{a^2}{2} h''(\xi)$$

Indicación: Defina la función $r(x) = h(x) - \left(\frac{x}{a}\right)^2 h(a)$, y calcule $r''(x)$.

P29. Sea $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{x}$

(a) Calcule la derivada de f por definición.

(b) ¿En qué puntos del dominio f es derivable?

(c) Estudiar crecimiento y existencia de asíntotas.

P30. (a) Sea $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ una función derivable en todo su dominio, y que satisface

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in]0, \infty[$$

demuestre que f es constante.

Indicación: Use el teorema del valor medio.

(b) Si f es una función derivable en x, muestre que:

$$\big(x \cdot f(x)\big)' = f(x) + \ x \cdot f'(x)$$

(c) Sea $f :]0, \infty] \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo su dominio, y que satisface

$$\forall x > 0 \quad x \cdot f'(x) = -f(x)$$

demuestre que existe una constante K tal que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{K}{x}$$

P31. Sea la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4|x|}$$

(a) Determine domino, ceros y signos.

(b) Determine asíntotas de todo tipo.

(c) Analice donde es derivable la función, y calcule f' donde exista.

(d) Estudie crecimiento, máximos, mínimos de la función.

(d) Bosqueje un gráfico de la función.

P32. (i) Muestre que

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$$

Indicación: Recuerde que $1 + x \leq e^x \ \forall x \geq 0$, y tome $x = -\ln(\sqrt{x_n})$.

(ii) Demuestre que

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)} = 1$$

Indicación: Utilice la propiedad de que si $x > 0$, $x^{\operatorname{sen}(x)} = e^{\operatorname{sen}(x)\ln(x)}$

(iii) Calcule la derivada de $x^{\operatorname{sen}(x)}$, con $x > 0$, y demuestre que

$$\lim_{x \to 0^+} (x^{\operatorname{sen}(x)})' = -\infty$$

P33. (a) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en (a,b), con $f(a) = f(b)$. Demuestre que $\exists x_0 \in (a,b)$ tal que

$$f'(x_0) = (2x_0 - a - b)e^{f(x_0)}$$

Indicación: Defina $g(x) = (x-a)(x-b) + e^{-f(x)}$

(b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en (a,b), y sea $x_0 \in (a,b)$ tal que $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe.

Se pide demostrar que f' en continua en x_0, y para esto debe seguir los siguentes pasos:

(i) Sea $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, con $x_n \in (a,b)$, $x_n \neq x_0$. Demuestre que existe una sucesión $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(\xi_n), \text{ con } \min\{x_0, x_n\} < \xi_n < \max\{x_0, x_n\}.$$

(ii) Demuestre ahora que

$$\lim_{n \to \infty} f'(\xi_n) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

(iii) Concluya que f' es continua en x_0.

P34. Considere la función $g(x) = \dfrac{4x^3}{x^2 - 3}$

a) Demuestre que:

$$g'(x) = \frac{4(x^4 - 9x^2)}{(x^2-3)^2}, \quad g''(x) = \frac{4x(6x^2 + 54)}{(x^2-3)^3}$$

b) Estudie completamente la función g indicando dominio, ceros, signos, puntos críticos, crecimiento, convexidad, puntos de inflexión y asíntotas de todo tipo. Realice un bosquejo de la función.

P35. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f'(x) = af(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{R}$ una constante. Demuestre que $f(x) = f(0)e^{ax}$.
Indicación: Puede serle útil considerar la función $g(x) = e^{-ax}f(x)$

b) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, y cuya derivada es una función continua. Muestre que si $h'(0) = -1$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$

$$(h(x) - h(0)) \cdot x < 0.$$

P36. i) Sea g y h funciones definidas en $[-a, a]$ tales que g es derivable en $(-a, a), h$ es tres veces derivable en $(-a, a)$ y

$$h(0) = h'(0) = 0, g(0) \neq 0, h''(0) \neq 0$$

Si $f(x) = \frac{x^2 g(x)}{h(x)}$, calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$.

ii) Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{\arctan(\frac{x^2-1}{x^2+1})}{x-1}$

b) $\lim_{x \to 0} (\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$

P37. i) Use la regla de L'Hôpital dos veces para probar que si $f''(x)$ existe $\forall x \in (\bar{x} - \delta . \bar{x} + \delta), \delta > 0$ y f'' es continua en $\bar{x}$,entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h) - 2f(\bar{x}) + f(\bar{x} - h)}{h^2} = f''(\bar{x}).$$

ii) Demuestre que $\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h)-2f(\bar{x})+f(\bar{x}-h)}{h^2} = f''(\bar{x})$ incluso existe si $f''(x)$ existe solamente en $\bar{x}$.