Escuela de Verano para estudiantes de Enseñanza Media Universidad de Chile

Universidad de Chile
Facultad De Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2014
Profesor: Pablo Dartnell

Profesores auxiliares: Felipe Asencio, Sebastián Tapia

Guía III: Integración.

1. Primitivas

P1. Usando un cambio de variable, calcule las siguientes primitivas

a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x}.$

b) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}.$

c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

d) $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\ln(\operatorname{sen} x)}.$

e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}.$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x(ln^2x+1)}$

g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}.$

h) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+(\sqrt{1+x^2})^3}}$

P2. Usando integración por partes calcule las siguientes primitivas

(a) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(x).$

(b) $\displaystyle\int x\cos(x).$

(c) $\displaystyle\int xe^x.$

(d) $\displaystyle\int x\operatorname{senh}(x).$

(e) $\displaystyle\int x\cosh(x).$

(f) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}.$

(g) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$

(h) $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(x).$

(i) $\displaystyle\int x^2\cos(x).$

(j) $\displaystyle\int x^2e^x.$

(k) $\displaystyle\int x^2\operatorname{senh}(x).$

(l) $\displaystyle\int x^2\cosh(x).$

(m) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}.$

(n) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}.$

P3. Establezca fórmulas de recurrencia para la expresión I_n, dada por

(a) $\displaystyle I_n=\int x^n\operatorname{sen}(x).$

(b) $\displaystyle I_n=\int x^n\cos(x).$

(c) $\displaystyle I_n=\int x^ne^x.$

(d) $\displaystyle I_n=\int \operatorname{sen}^n(x).$

(e) $\displaystyle I_n=\int \cos^n(x).$

(f) $\displaystyle I_n=\int x^n\sinh(2x).$

P4. Utilizando integración de funciones racionales calcule las siguientes primitivas

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x}$.

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+1}$.

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}$.

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}$.

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

P5. Aplique el cambio de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$ para calcular las siguientes primitivas

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$.

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}$.

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)}$.

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos(x)}$.

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$.

P6. Calcule las siguientes primitivas

(i) $\int (x+1)\sqrt{x+3}dx$.

(ii) $\int \frac{\tan x}{1+\sec^2(x)}dx$.

(iii) $\int x^3\sqrt{5-2x^2}dx$.

(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$, **Indicación:** use $u = \tan(x)$.

(v) $\displaystyle\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2}dx$.

(vi) $\int \frac{1}{2-\operatorname{sen}^2(x)}dx$, **Indicación:** use $u = \tan(x)$.

(vii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+\ln^2(x)).}$

(viii) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)+\sin(x)}dx$.

(ix) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+1)(1+x^2)}$.

P7. Deduzca una fórmula de recurrencia para

$$I_n = \int (x+1)^n \operatorname{sen}(2x)dx.$$

P8. (i) Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\ln(x)+\ln^2(x))}$.

(ii) Usando el cambio de variables $\tan(\frac{x}{2}) = u$, calcule $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx$.

(III) Sean $I = \int \cos(\ln(x))dx$ y $J = \int \operatorname{sen}(\ln(x))dx$. Usando integración por partes, plantee un sistema lineal que permita calcular I y J. Calcule I y J.

P9. Obtenga una relación de recurrencia para

$$I_n = \int \sqrt{x+b}(x+a)^n dx, \quad a, b, x > 0$$

y calcule I_0.
Indicación: Puede ser útil usar la identidad $x + b = (x + a) + (b - a)$.

P10. Calcule la primitiva $\int \frac{x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$.

2. Integral de Riemann

P1. (I) Calcule $\int_a^b e^x dx$ utilizando una partición equiespaciada.

(II) Usando sumas de Riemann calcular los siguientes límites

(a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{k+n}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+4k/n}}$.

(d) Calcular $\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^3} \right)$.

(III) Sea $a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\ln(n+i) - \ln(n)]$.

(IV) Identifique a a_n como una suma de Riemann, determinando la función y la partición involucradas.

(V) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$ usando la integral apropiada.

P2. Demuestre que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} (1 + \frac{i}{n})}$. Tomando logaritmo y usando sumas de Riemann, calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.

P3. Calcule los siguientes límites

(I) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i 2^{\frac{i}{n}}$

(II) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{2n})$.

P4. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y acotada inferiormente por una constante $c > 0$. Para demostrar que $\frac{1}{f}$ es integrable, se pide lo siguiente:

(a) Si $S(\cdot,\cdot)$ y $s(\cdot,\cdot)$ denotan las sumas superiores e inferiores, pruebe que para toda partición P del intervalo $[a,b]$ se cumple

$$S(\frac{1}{f},P) - s(\frac{1}{f},P) \leq \frac{1}{c^2}\left\{S(f,P) - s(f,P)\right\}.$$

(b) Use el resultado anterior para demostrar que la función $\frac{1}{f}$ es integrable en $[a,b]$.

P5. Sea $f\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente

(a) Usando la partición $P = \{1,2,3,\ldots,n\}$ pruebe que

$$\sum_{1=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i), \quad \forall n \geq 2.$$

(b) Considere $f(x) = \ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!, \quad \forall n \geq 1.$$

Indicación: $\int_1^n \ln(x)dx = n\ln n - (n+1)$.

3. Teorema Fundamental del Cálculo y aplicaciones de la integral

P1. Se definen, para $x > 0$, las funciones

$$G(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{y} \quad H(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}.$$

(I) Demuestre que $G'(x) = H'(x)$.

(II)) Concluya, justificando, que $G(x) = H(x)$, $\forall x > 0$.

(III) Calcule las integrales definidas para $G(x)$ y $H(x)$ y deduzca la identidad

$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}, \forall x > 0.$$

P2. (I) Calcule

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x (x-1)\operatorname{sen}(t^2)dt}{\int_{x^2}^{x^3} \operatorname{sen}(t^2-1)dt}.$$

(II) Encuentre una función f y un real $a > 0$ tales que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt = 2\sqrt{x}, \quad \forall x > 0.$$

P3. Considere la función $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, dos veces diferenciable en $\mathbb{R}$ y tal que $\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = f(1)$

Se define $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\int_1^{x^2} f(t)dt}{\displaystyle\int_1^{x} f(t)dt}, & \text{si} \quad x \neq 1 \\ \\ a & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

(I) Demuestre que g es continua en $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

(II) Determine el valor de a para que g sea continua en $x = 1$.

(III) Calcule $g'(1)$.

P4. Sea g una función continua en $\mathbb{R}$. Se considera la función f definida por

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t)g(x-t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Utilice el cambio de variable $u = x - t$ para probar que f admite segunda derivada en $\mathbb{R}$ y se satisface la relación $f'' + f = g$.

P5. (I) Considere las funciones $f(x) = x$, $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, y las constantes $a = 0$ y $b = \pi$. Encuentre el valor de ξ que verifica la ecuación

$$\int_a^b f(x)g(x) = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx. \tag{1}$$

(II) Sean f, g funciones continuas en $\mathbb{R}$, con f monótona, derivable y con derivada continua. Demuestre que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ existe $\xi \in [a, b]$ que satisface la ecuación (1) de la parte a).

Indicación: Defina $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ e integre por partes.

P6. (a) Dado $n \in \mathbb{N}$, calcule las integrales

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 x\operatorname{sen}(n\pi x)dx$$

y verifique que ambas tienden a 0 cuando $n \to \infty$.

(b) Para demostrar que, en general

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)f(x)dx = 0, \tag{2}$$

para toda función f derivable, con derivada acotada, defina $I_n = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) f(x)dx$ y realice lo siguiente:

(I) Usando el cambio de variable $x = u + \frac{1}{n}$, pruebe que

$$I_n = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \operatorname{sen}(n\pi x) f(x+\tfrac{1}{n})dx - \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \operatorname{sen}(n\pi x) f(x+\tfrac{1}{n})dx - \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) f(x+\tfrac{1}{n})dx.$$

(II) Usando lo anterior y sumando las dos formas de I_n, pruebe que

$$|2I_n| \leq \frac{2}{n}M(|f|) + \frac{1}{n}M(|f'|),$$

donde $M(|f|)$ y $M(|f'|)$ son los máximos de $|f|$ y $|f'|$ respectivamente. Con esto concluya (2).