FM404-1 - Matemática 4: Teoría de Cálculo Diferencial
Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliares: Cristóbal Valenzuela y Sebastián Urzúa

Auxiliar Nº8 feat SNOOP DAWG

14 de Enero de 2015

P1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión positiva tal que: $\lim_{n\to\infty} |\frac{x_{n+1}}{x_n}| = r < 1$

(a) Pruebe que: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)|x_{n+1}| < (r+\varepsilon)|x_n|$
Indicación: $|x| - |y| \leq |x-y|$

(b) Concluya que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

P2. Considere la sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$P_0 > 0, \quad P_{n+1} = \frac{bP_n}{a+P_n}$$

Donde a, b son constantes positivas.

(a) Demuestre que si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces los únicos posibles valores de su límite son 0 y $b-a$.

(b) Pruebe que si $a > b$, entonces $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y converge a 0.

(c) Suponga ahora que $a < b$ y $0 < P_0 < b-a$.

I) Pruebe que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < P_n < b-a$ y que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

II) Determine $\lim_{n\to\infty} P_n$

P3.

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$ (con $a < b$)

ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ (con $a \in (0,\infty)$)

iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n}\left[\frac{n}{b}\right]$ (con $a, b > 0$ y $[x]$ parte entera)

iv) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$ (con $0 < a < b$)

v) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+h_n)^n}$ (con $h_n > 0$ y $\frac{1}{nh_n} \to 0$)

vi) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+\cos(n^n)}$