

FM404-1 - Matemática 4: Teoría de Cálculo Diferencial**Profesor:** Pablo Dartnell**Auxiliares:** Cristóbal Valenzuela y Sebastián Urzúa**Auxiliar N°11**

19 de Enero de 2015

- P1.** Vanray, un estudiante de Matemáticas IV, vive en su ruca. El día 7 de cada mes a las 00 : 00 hrs., Vanray comienza una caminata de 24 horas hasta el negocio para comprar unas Stolon. Una vez ahí, se toma sus Stolon durante 6 horas y luego se devuelve a su ruca en taxi, por lo que se demora 1 hora. Demuestre que existen dos instantes, uno en el día 7 y otro en el día 8 en los que Vanray se encuentra a la misma distancia de su ruca a la misma hora.
- P2.** Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función continua. Demuestre que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$. Este punto se llama *punto fijo* para la función f . **HINT:** Considere $g(x) = f(x) - x$.
- P3.** Considere la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\beta(1 - e^x) \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- a) Justifique por qué f es continua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$.
- b) Pruebe que si $\beta > 1$, entonces f es continua $\forall x \in \mathbb{R}$
- c) Para $\beta = -1$, utilice la sucesión $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ para probar que f no es continua en $x = 0$. Justifique.
- P4.** Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$.
- (a) Pruebe que existen $\underline{x}, \bar{x} \in [a, b]$ tales que

$$f(\underline{x}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\bar{x}), \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

- (b) Demuestre que dados $x_1, x_2 \in [a, b]$ cualesquiera, existe $\beta \in [a, b]$ tales que

$$f(\beta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$