INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 26 de diciembre de 2016

Índice general

Capítulo I

COMPLEMENTO MATEMÁTICO: Geometría y Trigonometría.

I.1. INTRODUCCIÓN

Al estudiar el movimiento de un cuerpo y la causa que lo genera requiere aplicar conceptos básicos de geometría en la determinación de su trayectoria y extraer información desde un gráfico. La geometría constituye en este proceso una herramientas fundamental .

El itinerario o trayectoria de un cuerpo es conocer simultáneamente donde y cuando se encuentra un objeto. Determinar la trayectoria en el espacio de un cuerpo a partir de cierta información básica, es lo que entendemos por cinemática.

estilo		
eje	horiz	vert
row	t	x
0	0	-24,197
1	0,1	-21,597
2	0,2	-15,837
3	0,3	-11,936
4	0,4	-7,476
5	0,5	-2,369
6	0,6	1,718
7	0,7	10,543
8	0,8	17,324

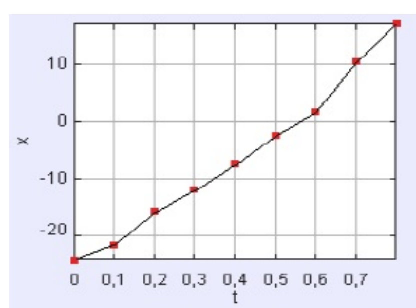


Figura I.1: *A partir de un video del movimiento de una esfera en un riel horizontal, se seleccionaron fotos de la posición de la esfera cada 0,1 segundos y -simultáneamente-, se registró su posición. A partir de esta Tabla de valores, se construye el gráfico que se muestra a la derecha. Existen dos modalidades: los puntos vecinos se unen mediante rectas (como se muestra en la Figura), o se traza una línea recta que pase lo más cerca posible de cada uno de los puntos obtenidos.*

El movimiento más simple es el de un punto (o cuerpo) desplazándose a lo largo de una línea recta. Para describirlo se requiere conocer la posición y el instante correspondiente. A su vez se requieren unidades de tiempo y longitud para que otros puedan compartir nuestro resultado. En principio estas unidades son arbitrarias pero acá utilizaremos el sistema internacional de unidades **SI**, segundos, metros y el kg como unidad de masa.

Para describir la velocidad y aceleración de un cuerpo, se requiere comparar puntos vecinos en el gráfico. Y, sin entrar en detalles, es aquí donde las propiedades geométricas de las curvas son de gran ayuda. Por esta razón estudiaremos geometría básica primero. Además, Newton utilizó geometría para desarrollar su teoría: estamos en buena compañía.

En lo que sigue, incluimos nociones básicas que son útiles en el estudio de la mecánica de Newton. En general no demostramos teoremas. Si el desarrollo de alguno de los temas requiere, en su opinión, más detalles puede consultar algunas de las referencias que se incluyen al final del capítulo.

I.2. GEOMETRÍA PLANA

Es notable que con unos pocos conocimientos elementales de geometría, se pueden demostrar muchos resultados relevantes en mecánica. Por esto comenzamos repasando los teoremas básicos de geometría plana que utilizaremos más adelante.

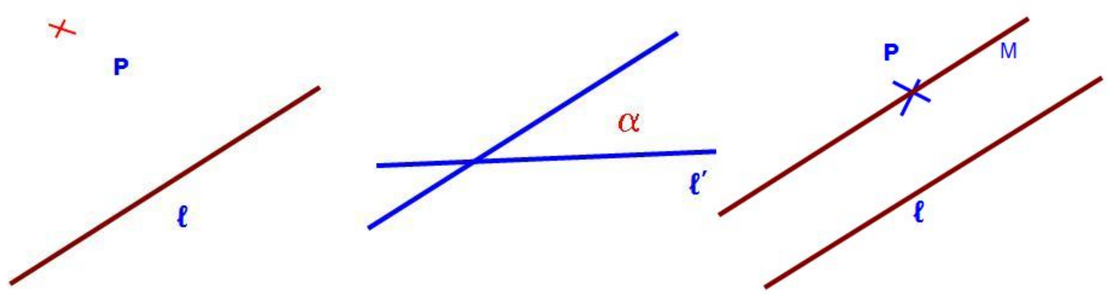


Figura I.2: *Un par de elementos básicos de geometría: un punto, una recta, una recta y un punto externo. La intersección de dos rectas y la definición del ángulo generado:* α.

Los desarrollos incluidos no pretende reemplazar la lógica ni la estructura de un buen libro de geometría. En ocasiones apelamos a la intuición o procuramos construirla. En general, no demostraremos teoremas.

Lo básico es un punto. A continuación, una recta, que en geometría, no tiene ni grosor ni límites: se extiende hasta infinito y proviene de infinito. Aceptamos estas definiciones, en particular infinito, en forma intuitiva.

Lo siguiente, es considerar el conjunto: un punto exterior **P** y una recta ℓ. Por dicho punto puedo trazar otra recta ℓ'. De acuerdo a la inclinación de la nueva recta, ésta puede cortar (o interceptar) a la anterior hacia la izquierda de **P** o hacia su derecha. Esta no es una definición matemática, pero intuitiva. Si variamos la inclinación de ℓ' adecuadamente, la intersección de ambas rectas pasa de la izquierda hacia la derecha (o viceversa, de acuerdo a cómo uno comenzó). Hay una posición en que la intersección *parece* producirse en infinito (hacia la derecha o hacia la izquierda). En ese caso decimos que ambas rectas son paralelas. Establecemos como axioma que por un punto externo a una recta, se puede trazar una y solo una recta paralela a ella.

Ejercicio

Considere que sucedería con este mismo argumento si resolvemos este problema sobre una esfera y no sobre una mesa plana. ¿Cómo define paralelo en este caso? ¿Cuál es el equivalente de una línea recta en este caso? □

Dos rectas que se cortan en un punto forman un ángulo, α. Podemos clasificar los ángulos de acuerdo a su magnitud como (ver I.3) agudos, obtusos, rectosÉ

Figura I.3: *Distintos tipos de ángulos. Usamos grados como unidad para para cuantificar la magnitud de los ángulos. En la siguiente sección definiremos esta medida angular.*

Dado un par de rectas que forman un ángulo, podemos trazar una paralela a una de las rectas iniciales. La estrategia es ir armando estructuras con creciente complejidad.

Demostraremos que$\angle$**ABC** y $\angle$**BCD** (ver Figura I.4), son iguales mediante una construcción geométrica: utilizando regla y compás. Si trasladamos paralelamente la recta L_2 mediante una regla y escuadra, debe coincidir con la recta L_1 puesto que son paralelas y solo existe una paralela. El ángulo α (inferior en la figura de la izquierda) debe ser igual a X que aparece en la Figura de la derecha. Si fuera más pequeño (o más grande) que el inicial, entonces las rectas L_1 y L_2 se

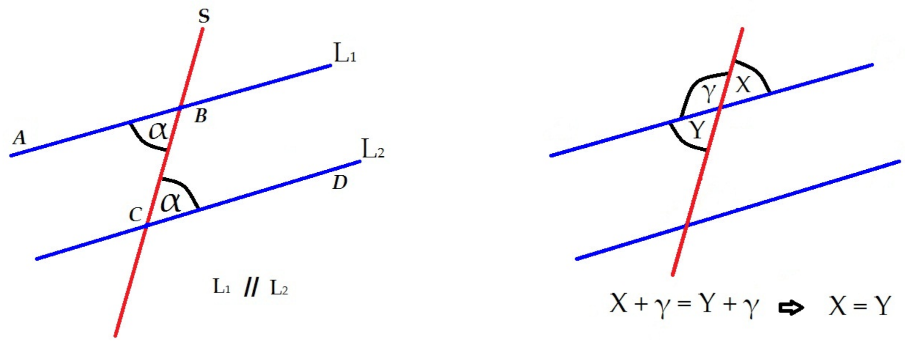


Figura I.4: *Sean L_1 y L_2 dos rectas paralelas. Otra recta cualquiera* **S** *las corta en los puntos* **B** *y* **C** *respectivamente. La misma construcción aparece a la derecha de la Figura. Allí se aprecia que $x + \gamma = 180^o = y + \gamma$entonces, sustrayendo ambas ecuaciones tenemos $x = y$. Hemos demostrado que ángulos opuestos por el vértice son idénticos.*

cortarían en algún punto. Por tanto, como demostramos que $x = y$, los dos ángulos identificados con la letra α en la figura inicial (la ubicada a la izquierda) son iguales.

Los ángulos **ABC** y **BCD** se denominan alternos internos.

Resumiendo, si cortamos las rectas paralelas L_1 y L_2 mediante una tercera recta **S**, podemos verificar, con compás y regla, o demostrar que, todos los ángulos opuestos por el vértice son iguales. Lo mismo ocurre con los ángulos de la misma naturaleza, definidos en la figura, como $\angle$ **SBL**$_1$ = $\angle$ **BCD**. Esto se extiende a todos los ángulos ubicados en posiciones semejantes. En cada uno de ellos se puede verificar la igualdad ideando un método que incluye traslación paralela.

Otro ejemplo: dos ángulos de la misma naturaleza, cuyos lados son respectivamente perpendiculares, son iguales. La demostración consiste en rotar cada una de las rectas un ángulo de 90^o y trasladarlo hasta la ubicación del otro.

I.2.1. Unidad angular: grados

En toda definición de unidades, existe un grado de arbitrariedad. Los grados se definen como el ángulo que subtiende la $1/360$-ava parte de una circunferencia. Se designan mediante el símbolo $(^\circ)$ grados, $(')$ minutos y $('')$ segundos .

Estas unidades son *sexagesimales*: cada unidad contiene 60 subunidades: 1 grado contiene 60 minutos, 1 minuto contiene 60 segundos. Las mediciones de longitud son *decimales*, 1 metro contiene 10 decímetros, un decímetro 10 centímetros,É

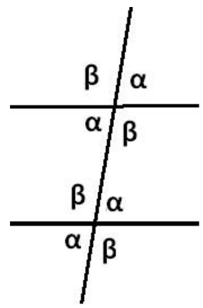


Figura I.5: *Resumen de las igualdades entre los distintos ángulos generados por dos rectas paralelas y una que intercepta ambas. Ángulos iguales se identifican con la misma letra.*

El origen del sistema sexagesimal se asocia con el pueblo Sumerio, aproximadamente 2500 años AdC.

Las equivalencias son las siguientes:

$$\begin{aligned}
360^\circ &\equiv \text{ un giro completo alrededor de un circunferencia.}\\
180^\circ &\equiv 1/2 \text{ vuelta alrededor de un circunferencia.}\\
90^\circ &\equiv 1/4 \text{ de vuelta alrededor de un circunferencia.}\\
45^\circ &\equiv 1/8 \text{ de vuelta alrededor de un circunferencia.}\\
1^\circ &\equiv 1/360 \text{ de vuelta alrededor de un circunferencia.}\\
1^\circ &\equiv 60',\ \text{sesenta minutos.}\\
1' &\equiv 1/216{,}000 \text{ de vuelta alrededor de una circunferencia.}\\
1'' &= 1/60 \text{ de un minuto.}\\
1'' &\equiv 1/12{,}960{,}000 \text{ de vuelta alrededor de una circunferencia.}
\end{aligned}$$

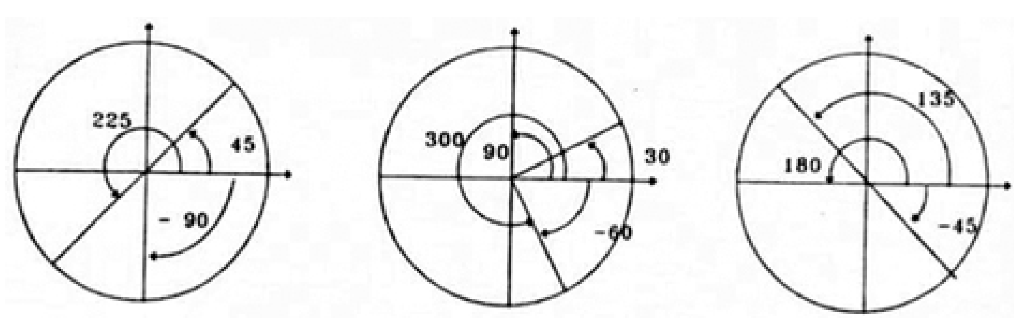


Figura I.6: *Se ilustran diversos ángulos:* 180°, 90°, 45°, *y otros. Se indica además, el sentido positivo y negativo de un ángulo.*

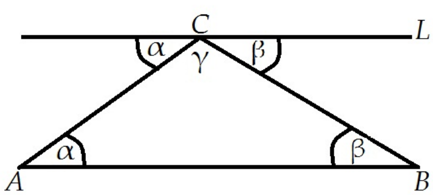
I.3. Ejemplos. Triángulos Semejantes.

A partir de tres rectas arbitrarias (que no son paralelas entre sí) definimos un triángulo cualquiera. Esta figura geométrica es particularmente útil en la resolución de problemas en mecánica. Nos interesa, por tanto, conocer sus propiedades más relevantes para poder utilizarlas cuando se requieran.

Ejemplo

a.- Demostrar que los ángulos interiores de un triángulo suman 180^o.

b.- Demostrar que la prolongación de uno de los lados genera, en el vértice de la intersección con el lado concurrente, un ángulo igual a la suma de los dos ángulos opuestos al vértice de concurrencia.



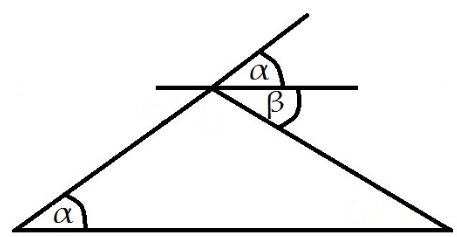


Figura I.7:

Solución

a.- Si por el vértice **C** trazamos una recta **L** paralela a la base $\overline{AB}$, generamos dos ángulos adicionales. Recordando la definición de ángulos alternos internos, podemos identificar los ángulos que por ser de la misma naturaleza y estar entre dos rectas paralelas cortadas por una secante son iguales. Los denominamos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$. De la Figura se desprende que: $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$.

b.- Al prolongar el lado **AC** más allá del vértice **C** se forma una recta y un ángulo de 180^o. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo plano suman precisamente 180^o, se obtiene que el complemento de γ en la figura es $\alpha + \beta$.
□

Con este resultado, podemos demostrar que un triángulo queda determinado en forma **única** si nos damos un segmento $|\mathbf{A\,B}|$ y los dos ángulos asociados al vértice **A** y al vértice **B**. Otra forma de escribirlo es la siguiente: si dos triángulos tienen un lado igual y sus ángulos adyacentes (los que se ubican en cada uno de los vértices de este lado) iguales, entonces los triángulos son iguales.

Para demostrar este resultado, trazamos el segmento dado |**A B**| y por cada uno de sus extremos trazamos una recta que forme un $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ con ella. Si estos ángulos suman menos de 180^o estas dos rectas siempre se cortan en un punto, que es el vértice del triángulo buscado.

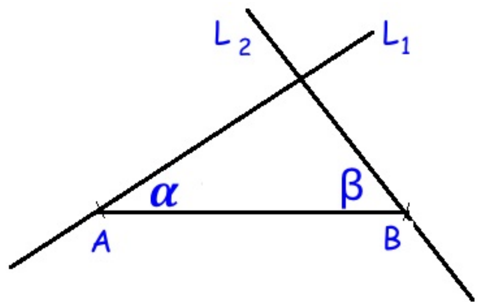


Figura I.8: *Dado un lado y los ángulos adyacentes a los vértices* **A** *y* **B***, el triángulo queda determinado en forma única.*

Ejercicio

Si nos dan un segmento |**AB**|, un ángulo adyacente α y el ángulo en el *vértice opuesto al segmento dado*: ¿Podemos afirmar que un triángulo queda determinado en forma única con estos datos?

Note que este es un caso diferente al ejemplo anterior. Sólo uno de los ángulos se ubica en el vértice del trazo dado.
□

Para encontrar más propiedades debemos incluir familias de triángulos que tengan alguna característica relevante en común. Triángulos con uno de sus ángulos igual a 90^o parecen ser los primeros reconocidos históricamente desde el tiempo de los sumerios. Cualquier triángulo puede ser descompuesto en un par de triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras está definido en estos triángulos. Veremos en este capítulo, que al incluir la proporcionalidad entre los lados de un triángulo rectángulo, llegamos naturalmente a la trigonometría.

I.3.1. Triángulos Semejantes. Leyes de Proporcionalidad

Los triángulos semejantes son aquellos cuyos ángulos son respectivamente iguales. La propiedad más relevante en este caso es que dados dos triángulos semejantes, sus lados respectivos están en la misma razón de proporcionalidad.

Un caso particular es aquel en el cual los lados respectivos presentan *la misma razón de proporcionalidad*. En este caso los triángulos son iguales, o congruentes.

Otra forma de construir triángulos semejantes es: dado un triángulo arbitrario, Ud. alarga (o encoge) cada lado por un factor λ. El resultado es un triángulos semejante. Todos los lados crecen (o encogen) de acuerdo al factor λ.

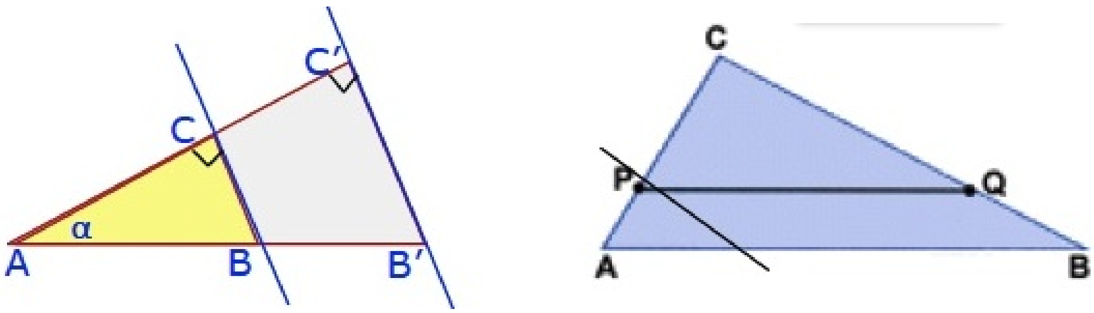


Figura I.9: *Dos ejemplos de triángulos semejantes. En ambos casos podemos establecer diversas relaciones de proporcionalidad al comparar distintos triángulos. semejantes*

Ejercicio

Utilizando la ley de proporcionalidad en triángulos semejantes, identifique los triángulos semejantes (ver Figura I.9) que se utilizaron para escribir las igualdades indicadas a continuación.

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}}, \quad \frac{\overline{PC}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QB}}, \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{CB}}.$$

Basta encontrar los triángulos semejantes pertinentes para encontrar estas razones.
En el triángulo **ABC** a la derecha de la Figura, el segmento **PQ** es paralelo a la base **AB**.

Algunos sitios donde pueden encontrar dos demostraciones diferentes de este teorema:

www.youtube.com/watch?v=JOhOHCNevVw

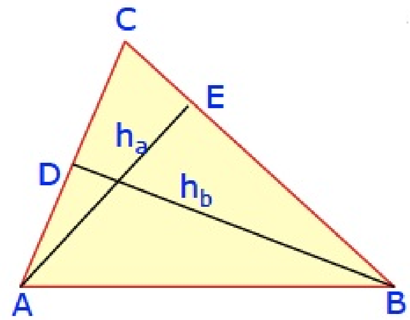
www.youtube.com/watch?v=xV9rvDiwwkY&index=44&list=
PLLYf1wFEASGQQC6a5gp2vZUUGqqzmOK7d

Esta última es geométrica, sin palabras y elegante.

Un sitio que reúne más información acerca de este tema es:
www.youtube.com/playlist?list=PLLYf1wFEASGQQC6a5gp2vZUUGqqzmOK7d
□

Ejemplo

Utilizando la semejanza de triángulos demuestre que el área de un triángulo es la misma, cualquiera sea el lado que se considere como base.



Para demostrarlo basta reconocer que los triángulos $\Delta AEC \sim \Delta BDC$. Ambos tienen un ángulo en común y otro ángulo recto en los vértices **D** y **E**. Por tanto sus tres ángulos son iguales y estos triángulos son semejantes (ver Fig. adjunta). Se cumple entonces la proporcionalidad

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}, \quad \text{identificando los segmentos respectivos, tenemos:} \quad \frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a}.$$

Trazando la altura restante podemos obtener una ecuación adicional. Ordenando estas igualdades obtenemos: $a\,h_a = b\,h_b = c\,h_c$. Estas expresiones son el doble del valor asociado al área de un triángulo medido desde cualquiera de sus lados.
□

Ejemplo

Considere los triángulos semejantes formados por las rectas L_1 y L_2, que se cortan en un punto **A** y las dos rectas paralelas y a su vez perpendiculares a L_1. Utilizando las letras indicadas en la Fig. I.10, demostrar que se cumplen las siguientes relaciones

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BC}}. \tag{I.1}$$

Nota: Puede ver el video
www.youtube.com/watch?v=xV9rvDiwwkY&index=44&list=
PLLYf1wFEASGQQC6a5gp2vZUUGqqzmOK7d

Solución

Basta con probar que el área del $\triangle$**AEC** es igual al área del $\triangle$**ABD**.

Considere el área de los triángulos $\Delta\,EBD$ y $\Delta\,EDC$. Como se puede apreciar de la figura (I.10), es lo que se requiere para demostrar que los dos triángulos: $\triangle$**ABD** y $\triangle$**AEC** tienen áreas iguales.

El área del triángulo $\Delta\,EBD$ es $\mathbf{DE} \times \mathbf{BC}/2$. Sin embargo el área del triángulo $\Delta\,EDC$ es también $\mathbf{BE} \times \mathbf{BC}/2$. Con esto se cumple lo buscado inicialmente. Como las áreas de los triángu-

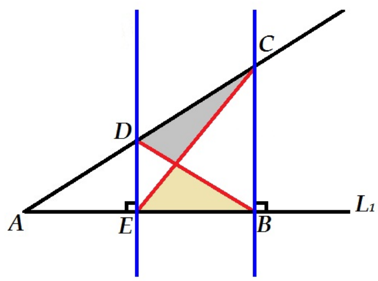


Figura I.10: *Calculando el área de los dos triángulos achurados de la Figura, se demuestra la igualdad buscada.*

los $\triangle$**AEC** y $\triangle$**ABD** son iguales, se cumple que:

$$\mathbf{AE} \times \mathbf{BC} \; = \; \mathbf{AB} \times \mathbf{ED} \quad \text{o,} \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BC}}. \tag{I.2}$$

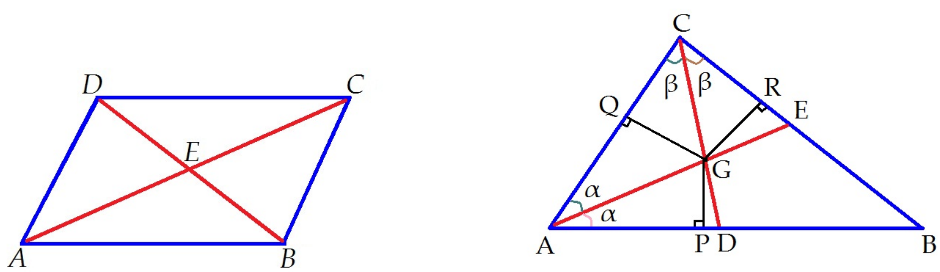


Figura I.11: *En el paralelogramo se utilizan las relaciones entre los ángulos correspondientes y alternos internos de la misma naturaleza. Para el caso de las bisectrices, se construyen tres triángulos congruentes mediante las perpendiculares trazadas desde* **G**.

Ejemplo

Demuestre que las diagonales de un paralelogramo se dimidian (se cortan en su punto medio). Figura izquierda de (I.11).

Solución

Considere los triángulos $\triangle$**ABE** y $\triangle$**CED**. Tienen un ángulo opuesto por el vértice en **E**. Como los lados **AB** y **DC** son paralelos, los ángulos de la base de ambos triángulos son iguales. Por ejemplo, el ángulo del vértice **A** y **C** son iguales por ser ángulos correspondientes. Lo mismo ocurre en el vértice **B D**. Los dos triángulos mencionados son entonces (al menos) semejantes puesto que tienen todos sus ángulos respectivos iguales. Pero, como **AB** y **DC** son iguales, por ser lados opuestos de un paralelogramo, entonces ambos triángulos son congruentes. De esta forma los lados correspondientes **AE** y **EC** son iguales y así también **DE** y **BE**. Las diagonales en un paralelogramo cualquiera se dimidian. $\square$

Ejemplo

a.- Demostrar que las tres bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo se cortan en un solo punto.

b.- Demostrar que las tres alturas de un triángulo se cortan en un solo punto.

c.- Demostrar que las tres simetrales (rectas que perpendiculares a cada uno de los lados de un triángulo y trazadas por el punto medio de los lados respectivos) se cortan en un solo punto.

d.- Demostrar que las tres transversales de gravedad (rectas que unen el vértice con el punto medio del lado opuesto) de un triángulo se cortan en un solo punto.

Solución de la parte a.-

Si trazamos dos bisectrices desde los vértices **A** y **C**, necesariamente se cortan en un punto **G** siempre dentro del triángulo. Figura a la derecha en (I.11).

A partir de dicho punto **G** se traza una perpendicular a cada uno de los lados del triángulo. Con esta construcción se forman dos pares de triángulos en cada vértice desde donde se trazó una bisectriz. Cada uno de ellos tiene un lado común (la bisectriz) y el ángulo adyacente igual. Como el ángulo opuesto al lado común mide 90^o, todos los ángulos son iguales y por tanto este par de triángulos son congruentes. El mismo argumento es válido para el triángulo formado por la bisectriz trazada desde el otro vértice, supongamos que es **C**.

En consecuencia, a partir de la bisectriz trazada desde **A** , tenemos que **GP** = **GQ** y aquella trazada desde **C** ocurre que **GQ** = **GR**, entonces **GP** = **GR**. Si unimos el vértice **B** con **G**, el par de triángulos $\triangle$ **BPG** y $\triangle$**BGR** son congruentes, por las siguientes razones: tienen dos lados iguales **GP** = **GR**, el lado **BG** es común a ambos y los ángulos rectos en los vértices **P** y **R**. Con esto hemos demostrado que los triángulos $\triangle$ **BPG** y $\triangle$**BGR** son congruentes y por tanto **BG** es la bisectriz del ángulo β correspondiente al vértice **B**.

Por tanto las tres bisectrices se cortan en un solo punto que denominamos **G**.
$\square$

Ejemplo

Considere un ángulo cualquiera inscrito en la circunferencia (su vértice está en la circunferencia). Demuestre que el ángulo inscrito α es la mitad del ángulo central β (cuyo vértice está en el centro de la circunferencia) que subtiende el mismo arco.

Usando este resultado muestre que todo triángulo rectángulo, está inscrito en una circunferencia cuya hipotenusa coincide con el diámetro de la circunferencia.

Figura I.12: *En esta demostración se utilizan las propiedades de un triángulo isósceles y del ángulo externo en un triángulo. Se resuelven dos casos: el simétrico (izquierda) y el caso donde el centro de la circunferencia se ubica fuera del área del triángulo.*

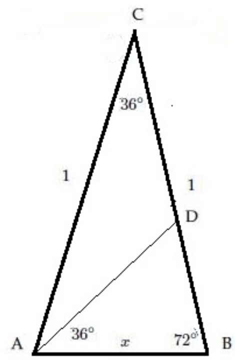
Solución

Considere el ángulo simétrico con respecto al vértice y al centro de la circunferencia (Figura I.12 izquierda). Si denominamos α a la mitad del ángulo del vértice, entonces el ángulo central que subtiende el mismo arco es $\beta = 2\,\alpha$, puesto que es el ángulo externo del triángulo isósceles $\triangle$**AOB** .

A la derecha aparece un caso más general. Si trazamos un diámetro desde el vértice **B** del ángulo α, se forma el ángulo $(\alpha + \gamma)$ en el vértice. Si consideramos el $\triangle$ **BOC** , tenemos que el ángulo externo es $(\beta + 2\,\gamma)$ y debe ser igual a la suma de los ángulos opuestos a dicho vértice. Como el $\triangle$ **BOC**, es isósceles entonces la suma de los dos ángulos de la base es: $2\,[\,\alpha + \gamma]$. Igualando ambos términos, y restando 2γ , obtenemos $\beta = 2\,\alpha$.

□

Ejemplo



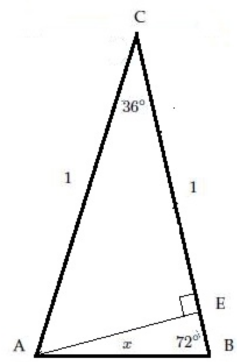


Figura I.13: *En la resolución de este problema aplicamos semejanza de triángulos y la ecuación de segundo grado en x, eligiendo la solución que posea una interpretación geométrica.*

Considere un triángulo isósceles cuyo ángulo en el vértice **C** mide 36^o, sus lados iguales tienen una longitud unitaria y su base un largo **x**, cuyo valor debemos encontrar a partir de los datos proporcionados. (Ver figura I.13)
NO DEBE USAR TABLAS, SOLO GEOMETRÍA.

Solución

A partir del vértice **A** trazamos una bisectriz del ángulo de la base. El ángulo queda dividido endos ángulos de 36^o. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180^o, el nuevo ángulo $\angle$**ADB** $= 72^o$. De modo que el triángulo $\triangle$**ADB** es isósceles y semejante al triángulo primitivo $\triangle$**ABC**, porque tienen todos sus ángulos iguales. También el triángulo $\triangle$**ADC** es isósceles, porque los ángulos $\angle$**DAC** $=$ $\angle$**ACD** $= 36^o$. De este modo **CD** $=$ **AD**. Como el triángulo $\triangle$**BAD** es isósceles, entonces **AD** $=$ **x**.
Aplicamos la ley de las proporciones a estos dos triángulos. Debemos distinguir los lados correspondientes para evitar errores en este paso. Hacemos coincidir los vértices **A** con **C** de los triángulos $\triangle$**ADB** y $\triangle$**ABC**, respectivamente, porque ambos corresponden on un ángulos de 36^o. Entonces

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{DB}, \qquad \text{pero como} \quad DB = CB - CD = 1 - CD = 1 - x,$$

obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1 - x}, \quad \Longrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0. \quad x = [\sqrt{5} - 1]/2.$$

Consideramos sólo la raíz positiva, puesto que **x** debe ser positivo. Con este resultado hemos resuelto el problema.

Podemos calcular las funciones trigonométricas del ángulo 36^o y algunos de sus múltiplos, si trazamos una perpendicular a **BC** desde **A**. Dejamos este ejercicio propuesto.
□

Ejemplo

En un triángulo equilátero de lado **a**, desde un punto **P** se trazan dos perpendiculares a los lados opuestos como se indica en la figura adyacente. Se generan dos segmentos de largo **m** y **n**, conocidos.
Encontrar el valor del área de este triángulo equilátero y expresarlo en función de **m** y **n**.

Solución:

Defino x $= |$**AP**$|$, y $= |$ **PB**$|$ con **x+y = a**.

Como es un triángulo equilátero, cualquier altura **h** asociado a este triángulo es h $= \sqrt{3}/(2\,a)$ y **Área =** $\sqrt{3}\,(a/2)^2$.

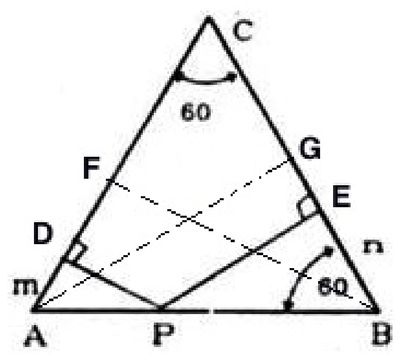
Recurrimos una vez más a la semejanza de triángulos. Si trazamos la altura desde el vértice **A** se generan dos triángulos semejantes $\triangle$**PBE** y $\triangle$**ABG**. Como $|$**BG**$|$ = a/2, la proporcionalidad de los lados respectivos nos da

$$\frac{n}{a/2} = \frac{y}{a} \qquad n = y/2.$$

Análogamente, a partir de la altura trazada por el vértice **B**, tenemos la siguiente proporcionalidad

$$\frac{m}{a/2} = \frac{x}{a} \qquad m = x/2$$

Como **x + y = a**, obtenemos **m + n = a/2**. De esta forma el área del triángulo equilátero es Área $= \sqrt{3}\,(\mathbf{m} + \mathbf{n})^2$.



I.4. Ecuación de una Línea Recta

Utilizando la semejanza entre figuras geométricas, nos permitirá definir la multiplicación y división de segmentos y encontrar la ecuación de una recta.

Para ilustrar estos resultados asociamos -en forma intuitiva-, un número a un segmento recto. Esta operación debe ser consistente y definida de una vez para siempre, se aplica igual a todos los segmentos. El número asociado a un segmento de una recta, lo definimos como su longitud.

En el ejemplo siguiente mostramos cómo multiplicar segmentos. Usaremos proporcionalidad y un sistema de ejes coordenados.

Ejemplo

Utilizando las propiedades geométricas de los triángulos, multiplique dos segmentos de longitud **a** y **b**. Use sólo métodos geométricos.

Con este procedimiento, dados dos segmentos podemos generar un tercero, al cual le asociamos un número real (su longitud). Este número es compatible con la definición de longitud utilizada en cada uno de los segmentos iniciales.

Solución

Utilizaremos dos rectas perpendiculares. Esta elección nos aproxima a los sistemas de referencia que utilizaremos para graficar los resultados en cinemática, por ejemplo.

Considerando estas dos rectas perpendiculares, definimos un segmento particular como la medida del largo unitario. Lo copiamos en el *eje horizontal* (ver Figura I.14).

Marcamos el segmento **a** en el *eje vertical*.

Éste es uno de los segmentos a multiplicar. Marcamos el otro segmento a multiplicar, **b**, en el eje horizontal. Unimos los extremos de los segmentos **a** y del largo unitario **1** mediante una recta. Trazamos una paralela a la recta anterior por el extremo del segmento **b**. Con esto se obtiene el segmento definido como **c** y que, mediante el teorema de las proporciones, podemos ver que representa el producto de los segmentos **a** y **b**, $c = a\,b$, como se indica en la Figura I.14.

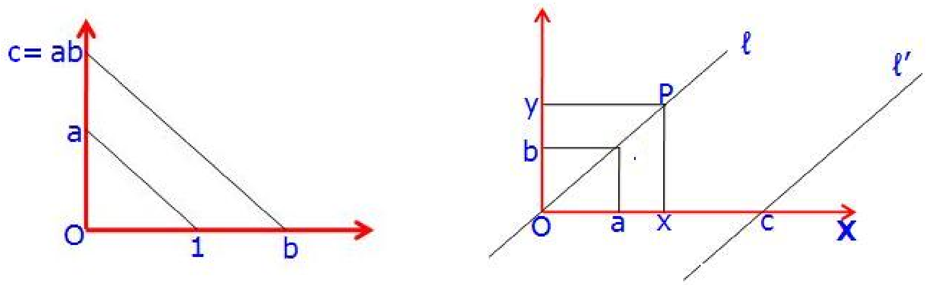
¿Qué sucede si **b** (por ejemplo) tiene un largo menor que la unidad?

¿Qué sucede si generalizamos este protocolo y permitimos que **b** apunte en el sentido opuesto al anterior?

□

Ejemplo

En el sistema de coordenadas de la Figura (I.14), encuentre la ecuación de una recta cualquiera



1 q

Figura I.14: *Se ilustra la operación multiplicación de segmentos mediante triángulossemejantes. También se puede extender a la división de segmentos mediante un procedimiento similar.*

en el plano.

Solución

Definimos los ejes coordenados **X** (denominada abcisa) e **Y** (denominada ordenada).

Usando la definición de un segmento unitario, tenemos a mano una escala para cada uno de los ejes: existe un segmento que representa la unidad y que al repetirlo, tenemos un eje graduado. Incluye todos los números reales puesto que podemos multiplicar segmentos de largo arbitrario, como vimos en el ejemplo anterior.

Primero trazamos una recta cualquiera por el origen y dibujamos dos triángulos semejantes, como se indica en la figura (I.14) a la derecha . Escribimos las proporciones que son relevantes asociadas a este triángulo y obtenemos la ecuación de una recta que pasa por el origen:

$$a/b = x/y \implies y \,=\, (b/a)\, x.$$

La recta ℓ' es paralela a ℓ. Copiamos los segmentos **a** y **b** adecuadamente a partir del punto de intersección de ℓ' con la horizontal, y usando la ley de proporcionalidad vemos que sólo debemos incluir el desplazamiento en la coordenada x:

$$y\,/(x\,-\,c)\,=\,(b/a) \;\implies\; y\,=\,(b/a)\,x\,-\,(b\,c)/a.$$

Esta expresión corresponde a la ecuación de una recta cualquiera con pendiente b/a y que corta al eje x, en el punto C. La forma convencional de escribir esta ecuación es $y\,=m\,x\,+\,n$. Daremos un barniz de Funciones en el próximo capítulo.
□

La ecuación de una recta es equivalente a encontrar una regla que asocia a cada valor escogido en el eje horizontal (abcisa) o eje X, un solo valor en el eje Y (ordenada). Ver la Figura I.14 a la derecha. Esta es la idea básica de una función. Se define como **y = f(x)**, donde **f(x)** puede ser la ecuación de una recta como hemos visto, o un polinomio como $\mathbf{f(x)} = \,a\,x\, + \,b\,x^2$, con **a** y **b** son constantes (números) y **x** toma sus valores en el eje **x**. Volveremos a la definición de una función al estudiar cinemática.

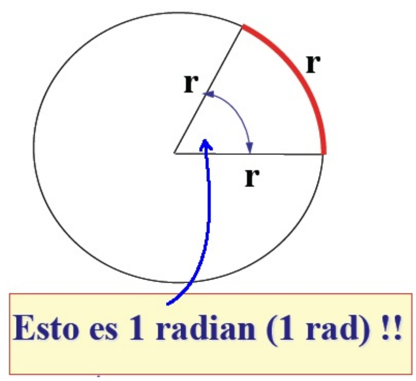
I.5. Otra Unidad Angular: el Radián.

¿Qué es un Radián? ¿Cuál es la necesidad de introducir una nueva definición, como la de radián?

El largo de una circunferencia cualquiera de radio **r**, es $2\,\pi\,\mathbf{r}$. Conviene mirar esta definición desde otra perspectiva: el largo de la circunferencia es proporcional al radio de ella. Nos interesa el factor de proporcionalidad 2π y el ángulo central 360^o.

Por ejemplo, un ángulo central de 90^o corresponde con un arco que es un cuarto de la longitud de la circunferencia. En el caso de un ángulo central de 45^o, el arco de circunferencia es 1/8 del largo total de la circunferencia. En general el arco de circunferencia es proporcional al valor del ángulo central α que subtiende.

Esto es el significado de proporcionalidad entre el ángulo central y el tamaño del arco subtendido. La idea es definir una nueva unidad de medida angular que cumpla dos requisitos: que el largo del arco se obtenga mediante una simple multiplicación del valor del ángulo por el radio de la circunferencia y que esta nueva medida angular sea propocional a los ya conocidos grados^o. Existe una solución y la nueva unidad se define como el radián.



De acuerdo a esta idea, un ángulo de 360^o, una vuelta completa, corresponde a $2\,\pi$ radianes.

Además es una definición que NO depende de la circunferencia usada. Todas las circunferencias concéntricas son semejantes: dado un cierto ángulo, la razón entre el arco subtendido por este ángulo y el radio de la circunferencia correspondiente es el mismo para todas ellas.

Si el arco de circunferencia tiene una longitud igual al radio, la razón entre el arco y el radio es la unidad y es la forma de definir un radián.

Examinemos algunos ejemplos.

Para visualizar el origen de esta definición realicemos la siguiente operación. Con un compás, dibuje en un papel varios círculos concéntricos de distinto radio. No olvide marcar su centro.

Para cada circunferencia corte un trozo de hilo con un largo igual al radio de la circunferencia correspondiente. Verifique que el ángulo central subtendido para cada una de las circunferencias concéntricas es el mismo. Hemos encontrado así una medida natural para definir una unidad angular: dado una circunferencia cualquiera, el ángulo que subtiende un arco igual a su radio, es UN RADIÁN.

Como el largo de una circunferencia debe ser proporcional al radio, podemos calcular en forma exacta este factor de proporcionalidad y resulta ser $2\,\pi$. Esto corresponde a 360^o. Ahora podemos invertir el proceso: el largo de una arco de circunferencia arbitrario debe ser proporcional al arco que subtiende. Y el factor de proporcionalidad, como vimos es el radio de la circunferencia.

Ejemplo

Considere una rueda sobre un plano. Marque un radio desde el centro al punto de contacto. Desplace la rueda, sin resbalar, una distancia igual a su radio. ¿Cuál es el valor del ángulo descrito en dicho movimiento?

Por definición es un radián, puesto que al no resbalar el camino recorrido es igual al arco que subtiende el ángulo central.
Note que la distancia que avanza el eje de la rueda depende del tamaño de su radio.

Si el eje (o centro de la circunferencia) avanza la mitad del radio, puede verificar que el ángulo descrito es también la mitad de un radián.
□

En definitiva, la longitud de un arco cualquiera de circunferencia es igual al ángulo central, **medido en radianes** por el radio de la circunferencia. Este resultado es válido para cualquier valor del arco, ya sea pequeño o grande.

$$\text{Longitud del arco de} \odot \;=\; [\,\text{ángulo subtendido (en radianes)}] \times \left[\text{Radio de la} \odot\right].$$

$$360^o \;=\; 2\,\pi \;=\; 6{,}28318... \qquad \text{radianes.}$$

La equivalencia con los grados es:

$$1 \text{ radián} \quad = \frac{360^o}{2\,\pi} = 57,29^\circ,$$

aplicando esta conversión podemos obtener las siguientes igualdades:

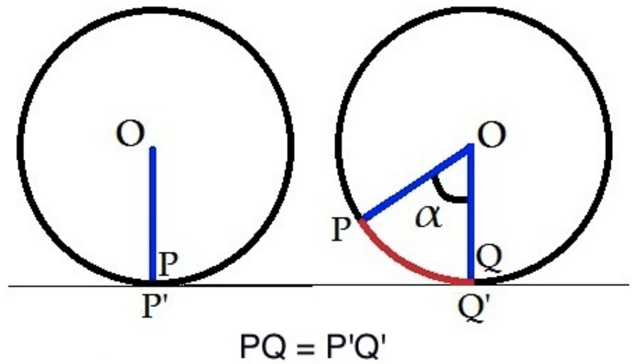
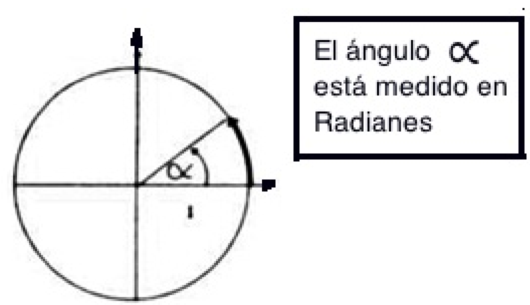


Figura I.15: *Rodar sin resbalar: cada punto de la circunferencia está en contacto con un solo punto del piso, una sola vez. El arco PQ es igual al camino recorrido P'Q'.*

$90°$ equivalen a $(\pi/2)$ radianes,
$45°$ equivalen a $(\pi/4)$ radianes,
$30°$ equivalen a $(\pi/6)$ radianes,
$60°$ equivalen a $(\pi/3)$ radianes.



Ejercicio.

1.- Exprese en radianes los ángulos: a) 45^o, b) 30^o, c) $22^o\ 30'$.

2.- Exprese en grados sexagésimales los ángulos: a) $3\,\pi/4$, b) $7\,\pi/4$, c) $0,3927$ radianes.

3.- Considere el minutero de un reloj de manillas: ¿A cuántos radianes equivale un segundo? ¿A cuántos segundos equivalen a un radián?

4.- La manilla de una máquina da 35 vueltas por minuto sin cambiar su rapidez. ¿Cuánto tiempo tarda en girar 5 radianes?

Nota: una medida de rotación en ingeniería es RPM, que es un acrónimo para Revoluciones (giros completos) Por Minuto. Por ejemplo para que un auto viaje a 120 km/h, su motor gira a 3000 RPM, aproximadamente.
□

I.6. TRIGONOMETRÍA.

I.6.1. Definición Geométrica de Seno, Coseno y Tangente.

Cualquier triángulo puede ser dividido en un par triángulos rectángulos. De esta forma si vamos a definir las razones **seno**, **coseno** y **tangente** pueden ser definidos utilizando los lados de un triángulo rectángulo (Ver Figura I.16).

Con un triángulo rectángulo $\triangle$**OBA** se definen las funciones trigonométricas básicas: seno, coseno y tangente.

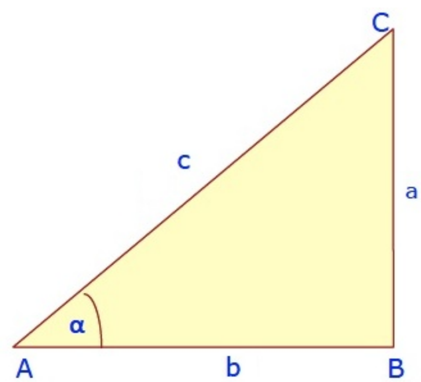


Figura I.16: *Definiciones trigonométricas a partir de un triángulo rectángulo cualquiera. Como uno de los ángulos mide 90º ninguno de los dos restantes puede ser mayor que 90º. Es una restricción que será superada con una definición más general en los siguientes párrafos.*

Seno y Coseno de un ángulo referido a un círculo de radio unitario

En un triángulo rectángulo $sen\,\alpha$ es la razón entre el **cateto opuesto** al ángulo α y la hipotenusa.

Coseno de α, $(cos\,\alpha)$ es la razón entre el **cateto adyacente** al ángulo y la hipotenusa del triángulo rectángulo que aparece en la Figura (I.16).

Inicialmente lo definimos con respecto a un triángulo rectángulo cualquiera, pero posteriormente nos concentraremos a uno cuya hipotenusa es de largo unitario inserto en una circunferencia de radio unitario. Esto constituye una tremenda ventaja operativa y nos permite extender estas definiciones a una propiedad del ángulo sin mirar el triángulo desde donde nació la idea original. Está basado en que todos los triángulos rectángulos con un ángulo común son semejantes.

Si nos restringimos a una circunferencia de radio unitario, la hipotenusa es la unidad de manera que el valor del coseno está dado directamente por la magnitud del cateto adyacente al ángulo y el seno por la magnitud del cateto opuesto al ángulo referido. Las propiedades encontradas para este triángulo serán válidas también para cualquier familia de triángulos semejantes a él.

Las definiciones anteriores se convierten en

Definición

$$\begin{aligned} sen\,\alpha &\equiv \frac{|AB|}{|OA|} = |AB|, \qquad |OA| = 1, \\ cos\,\alpha &\equiv \frac{|OB|}{|OA|} = |OB|, \qquad |OA| = 1. \end{aligned} \tag{I.3}$$

A continuación se incluyen algunos valores de estas funciones que debemos *recordar*:

$$\begin{array}{ll} sen\,0° = 0, & \cos\,0° = 1, \\ sen\,90° = 1, & \cos\,90° = 0, \\ sen\,45° = 1/\sqrt{2}, & cos\,45° = 1/\sqrt{2}, \\ sen\,30° = 1/2, & cos\,30° = \sqrt{3}/2, \\ sen\,60° = \sqrt{3}/2, & cos\,60° = 1/2, \end{array}$$

Propiedades de estas funciones

Ilustramos aquí las ventajas del uso de la circunferencia unitaria para definir seno, coseno y tangente. Esta definición permite extender la definición a los caso en que el ángulo es mayor que la 90^o, incluir el signo de la función y encontrar relaciones entre ellas. Esta generalización incluye la definición primitiva, que permanece vigente.

Con el uso de la circunferencia unitaria, el seno es la proyección sobre el eje vertical (con un sentido positivo asignado) y puede de esta forma tomar cualquier valor de 0^o a 360^o y ser positiva o negativa de acuerdo al signo que arroja su proyección sobre el eje vertical.
De igual forma el coseno es la proyección sobre el eje horizontal (nuevamente, con sentido positivo asignado) y puede tomar el mismo rango de valores señalado.

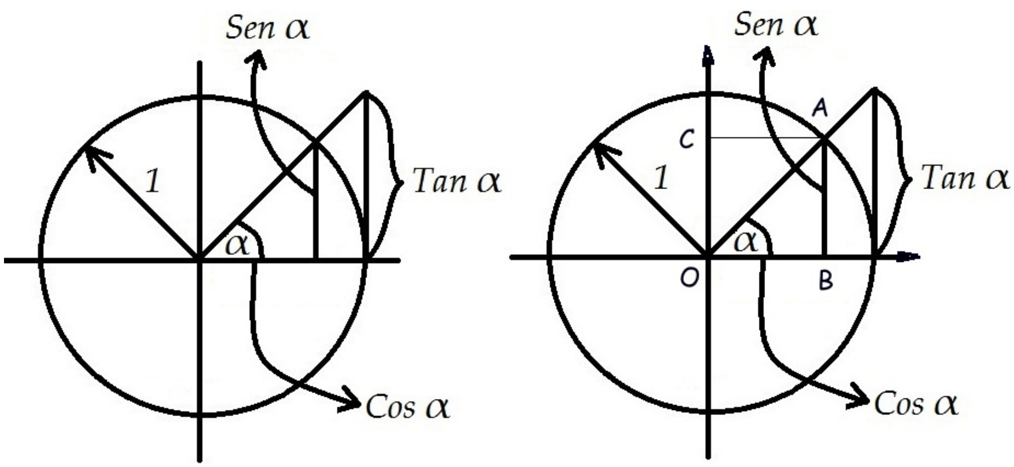


Figura I.17: *Si el radio de la circunferencia es la unidad, el valor de* $sen\,\alpha$ *está dado por la proyección del vector* **OA** *sobre el eje vertical y el valor del coseno es la proyección de este mismo vector sobre el eje horizontal. Note que la definición de tangente es también simple.*

Definición

La rotacón de los punteros del reloj se define como **SENTIDO NEGATIVO**. Obviamente el **SENTIDO POSITIVO** es el opuesto y se indica en la Figura. Esta definición es compatible con la regla de la mano derecha.

I.6.2. Relación entre trigonometría y geometría

Las igualdades trigonométricas se pueden recuperar utilizando geometría, como ilustraremos a continuación. A fin de cuentas está en el origen de la trigonometría: las razones entre los lados de un triángulo.

A continuación, un par de ejemplos.

1.– Como en un triángulo rectángulo se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, y en el triángulo de la Figura I.17, $a = sen\alpha$, $b = \cos\,\alpha$ y $c = 1$, entonces

$$(sen\,\alpha)^2 + (\cos\,\alpha)^2 = 1 \tag{I.4}$$

para **cualquier ángulo** α.

(Por convención $(sen\,\alpha)^2 \equiv sen^2\alpha$.)

Esta igualdad se puede comprobar con la lista de valores para el seno y el coseno que se incluyó más arriba.

2.– De la circunferencia de radio unitario (ver Figura I.17 derecha) se pueden obtener, como se afirmó previamente, relaciones entre las definiciones para diferentes ángulos. Mostramos un ejemplo aquí.
$sen\,\alpha = |AB| \equiv |OC|$ (puesto que $CA \,||\, OB$).

Consideramos el triángulo **OAC** tenemos, $|OC| = \dfrac{|OC|}{|OA|} \equiv \cos(90 - \alpha)$, de acuerdo a la definición de coseno.

$$\text{De aquí, tenemos:} \quad \cos(90 - \alpha) = sen\,\alpha. \tag{I.5}$$

Otras relaciones que se pueden deducir a partir de esta geometría son:

$$\mathrm{s}en(-\,\alpha) \,=\, -\mathrm{s}en\alpha\,, \quad \cos(-\,\alpha) \,=\, \cos\alpha\,, \quad \mathrm{s}en(90^o \,+\, \alpha) \,=\, \cos\alpha.$$

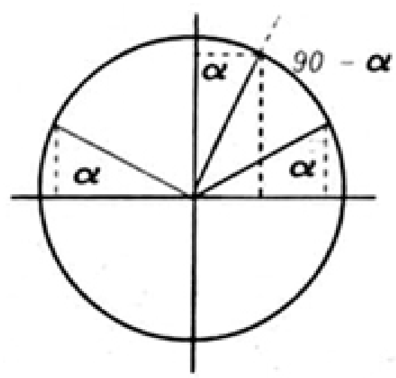


Figura I.18: *De la Figura se desprende que* $sen(180 - \alpha) = sen\,\alpha$, *y cos (90 - α) = sen* α.

Esta igualdad se puede verificar con los valores que aparecen en la lista de funciones seno y coseno incluí das anteriormente, usando geometría como se indica en la Figura I.18.

Ejercicio

Usando la misma figura I.18 demuestre:

$$sen(90 - \alpha) = \cos\alpha, \quad sen\,(180°) = 0, \qquad \cos\,(180°) = -1,$$

$$sen\,(270°) = -1, \qquad \cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad sen(-30°) = -1/2.$$

Otras relaciones que se desprenden de la geometría de la figura I.17,

$sen(180 - \alpha) = sen\,\alpha$.

$\cos(180 - \alpha) = -\cos\,\alpha.$

Suma y Resta de Ángulos

Ejemplo

A partir del triángulo de la Figura I.19, demuestre la siguiente entre el seno de la suma de un par de ángulos y los valores originales del seno y coseno de cada uno de los ángulos.:

$$sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha\ \cos\,\beta + \cos\,\alpha\ sen\,\beta. \tag{I.6}$$

Una forma de encontrar esta igualdad es calcular el área de un triángulo cualquiera de dos maneras diferentes, procurando que en una de ellas tenga protagonismo el ángulo $(\alpha + \beta)$. Utilizaremos el $\triangle$**ABC** de la Figura I.19.

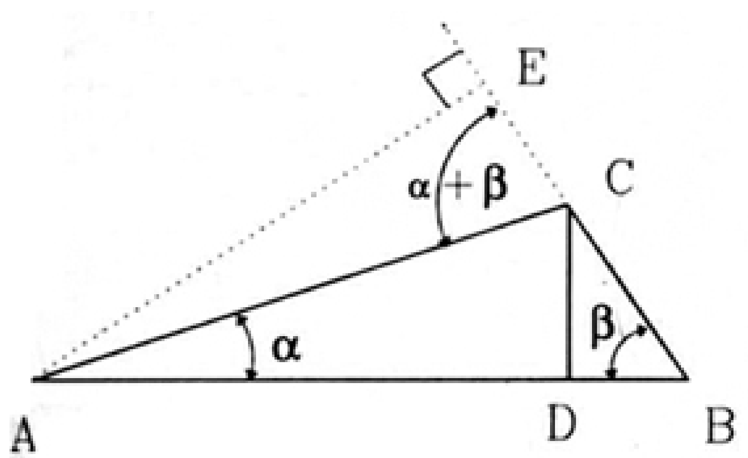


Figura I.19: *Con el Triángulo ΔABC demostramos usando solo geometría la expresión de $sen(\alpha + \beta)$ en función de los ángulos α y β.*

Con este criterio escribimos el área usando **H**=$|AE|$, como una de las alturas y $|BC| = a$ como la base correspondiente. La alternativa para calcular la misma área es sumar el área de $\triangle$**ADC** y de $\triangle$**CDB**. Aquí interviene la altura **h** =$|CD|$. Como el área tiene un solo valor, podemos igualar estas expresiones, y obtenemos el resultado esperado.

Con la primera aproximación tenemos:

$$\text{Área -1} = \frac{1}{2}\,H\,|BC| = \frac{1}{2}\,a\,\text{sen}(\alpha + \beta)b, \tag{I.7}$$

Para los otros triángulos, tenemos

$$\text{Área -2} \;=\; \frac{1}{2}\,h\,|AD| \;=\; \frac{1}{2}\,h\,b\,\cos\alpha \;=\; \frac{1}{2}\,a\,\operatorname{sen}(\beta)\,b\,\cos(\alpha). \tag{I.8}$$

Aquí elegimos igualar h utilizando el ángulo β para que aparezcan los lados a y b en ambos lados de la expresión de las áreas. Para el otro triángulo, tenemos

$$\text{Área -3} \;=\; \frac{1}{2}\,h\,|DB| \;=\; \frac{1}{2}\,h\,a\,\cos\beta \;=\; \frac{1}{2}\,b\,\operatorname{sen}(\alpha)\,a\,\cos(\beta). \tag{I.9}$$

Como la suma de las dos últimas áreas deben ser iguales a la primera, obtenemos el resultado buscado.

Otra igualdad trigonométrica, tan recurrente como la anterior I.6 es

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\,\alpha\;\;\cos\,\beta - sen\,\alpha\;\, sen\,\beta. \tag{I.10}$$

Se puede obtener de la anterior si consideramos

$$sen(\alpha + 90^o\,+\,\beta) = sen(\alpha\,+\,90^o)\;\,\cos\,\beta + \cos(\alpha\,+\,90^o)\;\, sen\,\beta.$$

y usando las relaciones geométricas $sen(90^o\,+\,\alpha) =\;\cos\,\alpha$ y $\cos(90^o\,+\,\alpha) = -sen\,\alpha.$

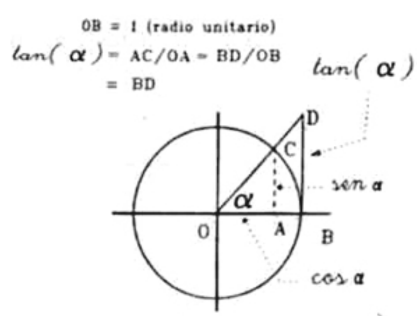
obtenemos la expresión buscada.

I.6.3. Tangente.

La **tangente** de un ángulo es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el adyacente en un triángulo rectángulo.

$$\tan\,\alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{BD}{OB} = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \tag{I.11}$$

La tangente, a diferencia del seno y coseno, puede tomar cualquier valor entre $+\infty$ y $-\infty$.



Algunos valores que aparecen frecuentemente se tabulan a continuación:

$$\begin{array}{ll}\tan(\pi/2) & = +\infty,\\ \tan\,0 & = 0,\\ \tan(-\pi/2) & = -\infty,\\ \tan(\pi/4) = \tan\,45^\circ & = 1,\\ \tan(\pi/3) = \tan\,60^\circ & = \sqrt{3},\\ \tan(\pi/6) = \tan\,30^\circ & = 1/\sqrt{3},\\ \tan(-\pi/3) = \tan\,-60^\circ & = -\sqrt{3}\end{array}$$

Ejercicio

Utilizando la definición de la tangente en función de seno y coseno, demuestre que

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\,\alpha + \tan\,\beta}{1 - \tan\,\alpha \times \tan\,\beta}. \quad \square$$

Como la definición utiliza la razón entre los lados de un triángulo rectángulo, siempre podemos invertir estas razones y obtenemos el inverso del seno (que llamamos cosecante), el inverso de la razón del coseno (lo llamamos secante) y lo mismo para la tangente.
Esto es análogo al caso de los números reales: por cada número real distinto de cero, existe un inverso $(x\epsilon\ \Re, x \neq 0)$

$$x\ \times\ \frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x}\ \times\ x.$$

$$cotan\,\alpha\ \times\ tan\,\alpha = 1, \quad cotan\,\alpha \equiv \text{cotangente de } \alpha = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{BD} \tag{I.12}$$

$$\begin{aligned} sen\,\alpha\ \times\ cosec\,\alpha = 1, &\qquad cosec\,\alpha = \tfrac{AC}{CB},\\ cos\,\alpha\ \times\ sec\,\alpha = 1, &\qquad sec\,\alpha = \tfrac{AC}{AB},\\ cosec\,\alpha &\qquad \equiv \text{cosecante de } \alpha,\\ sec\,\alpha &\qquad \equiv \text{secante de } \alpha. \end{aligned} \tag{I.13}$$

En general evitaremos usar estas definiciones.

I.6.4. Teorema del seno

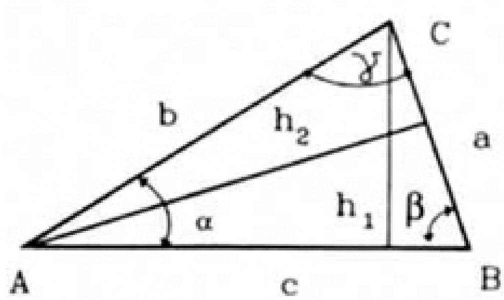
Usando sólo geometría podemos encontrar una relación entre el seno de un ángulo interior de un triángulo y la longitud del lado que lo enfrenta. Esta relación es el teorema del seno.

$h_1 = b\, sen\, \alpha \quad h_1 = a\, sen\, \beta$

$\Longrightarrow \dfrac{a}{sen\alpha} \quad = \dfrac{b}{sen\beta}$

$h_2 = c\, sen\, \beta \quad h_2 = b\, sen\, \gamma$

$\Longrightarrow \dfrac{b}{sen\, \beta} \quad = \dfrac{c}{sen\, \gamma}$



De aquí se obtiene *el teorema del seno*:

$$\frac{a}{sen\, \alpha} = \frac{b}{sen\, \beta} = \frac{c}{sen\, \gamma}. \qquad \text{(I.14)}$$

I.6.5. Teorema del coseno

Aplicando el Teorema de Pitágoras a los triángulos que aparecen en la misma Figura, se tiene

$h_2^2 = b^2 - x^2, \qquad h_2^2 = c^2 - y^2,$

$b^2 - x^2 = c^2 - y^2, \qquad y = a - x,$

expresando y en función de x: $b^2 = c^2 - a^2 + 2\, a\, x,$

pero: $x = b\, \cos\, \gamma,$

introduciendo este término en la última igualdad, obtenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b\, \cos\, \gamma. \qquad \text{(I.15)}$$

Ejercicio

Demostrar que

$$\begin{aligned} a^2 &= \quad b^2 + c^2 - 2\, b\, c\, cos\, \alpha, \\ b^2 &= \quad a^2 + c^2 - 2\, a\, c\, cos\, \beta, \\ c^2 &= \quad a^2 + b^2 - 2\, a\, b\, cos\, \gamma. \end{aligned} \qquad \text{(I.16)}$$

Ejercicio

Descubra una regla nemotécnica que le permita recordar las fórmulas anteriores.
¿Qué ocurre con el signo frente al término que contiene el coseno de uno de los ángulos cuando éste es mayor que $\pi\,/\,2$?

Ejemplo

a.- Encuentre, usando sólo geometría, la expresión para el ángulo doble sen$(2\,\alpha)$, en función del ángulo original. Por ejemplo seno y coseno de (α) y constantes numéricas.

b.- Encuentre, geométricamente, una expresión para $\cos(2\alpha)$ en función de $\text{sen}\ \alpha$ y constantes numéricas. Exprese $\cos(2\,\alpha)$ en función de potencias de $cos\alpha$ más constantes numéricas.

c.- Muestre que los dos resultados anteriores se desprenden directamente de la expresión I.6 obtenida anteriormente, para el seno y coseno de la suma de ángulos.

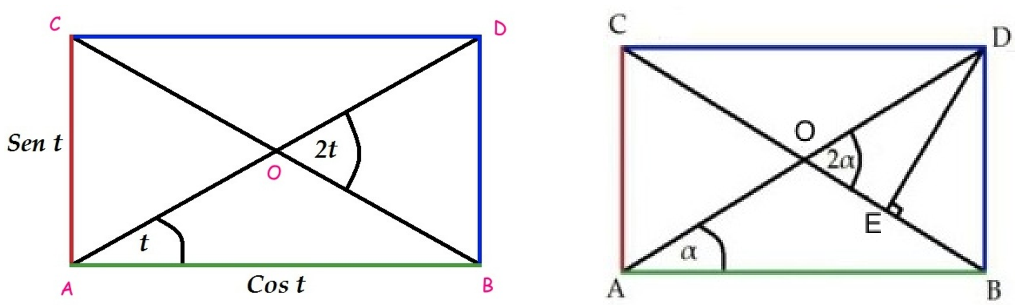


Figura I.20: *Comparando el área de los dos triángulos congruentes generados en este rectángulo, se obtiene l expresión para el ángulo doble.*

Solución

La idea es calcular el área de dos triángulos diferentes que están insertos en el rectángulo **ABCD**. Los valores asignados a los lados del rectángulo no le quitan generalidad a la demostración. Esto es porque cualquier rectángulo es semejante a otro que tenga como lados senα y $\cos\alpha$ para un ángulo α, determinado por el rectángulo escogido.

La estrategia es calcular el área del triángulo Δ**BCD** y el triángulo Δ**BCD** usando los valores asignados a los lados del rectángulo. El área de ambos triángulos es la misma. Como las expresiones tienen el mismo valor, obtenemos una ecuación que contiene una de las expresiones buscadas.

El área del triángulo Δ**BCD** está escrita a la izquierda de la ecuación siguiente. La del triángulo , Δ**BCD** es la expresión a la derecha de la ecuación:

$$\frac{1}{2}\ \text{sen}\ \alpha\ \cos\ \alpha\ =\ \frac{1}{2}\,\frac{\text{sen}\ 2\,\alpha}{2}$$

de esta forma obtenemos la respuesta buscada

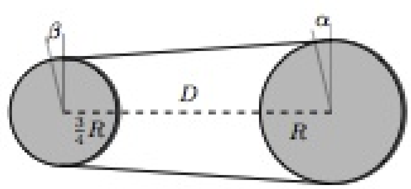
$$\operatorname{sen}(2\,\alpha) = 2\,\operatorname{sen}\,\alpha\,\cos\alpha. \tag{I.17}$$

I.7. PROBLEMAS PROPUESTOS

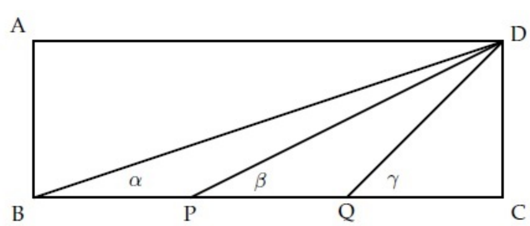
1.- a.- Encuentre el valor de los ángulos α y β que miden el alejamiento angular del punto de contacto de la correa y la circunferencia con respecto a la vertical.

b.- Calcule el largo de la cuerda que rodea a dos cuerdas de radios R y $3R/4$ cuyos ejes están separados por una distancia D.

c.- Calcule el área encerrada por los segmentos de la cuerda situada entre los puntos en que toca a las ruedas y la circunferencia de cada una de las ruedas.

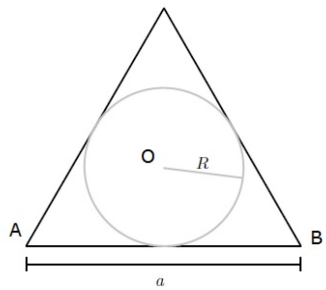


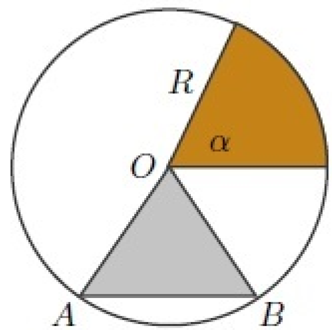
2.- Considere un rectángulo **ABCD** donde el lado **BC = 3 AB**, y **P, Q** son dos puntos sobre el lado **BC** que cumplen la condición **BP = PQ = QC**. Demuestre que, en este caso particular, ocurre que: $\alpha + \beta = \gamma$.



3.- Calcule la razón entre las áreas de un círculo de radio **R** y del triángulo equilátero de lado **a** que lo contiene. Exprese el radio **R** en función de **a**.

4.- a.- Calcule el área del triángulo ABO en función del ángulo $\angle AOB$ y el radio R de la circunferencia. Grafique (a mano alzada) el área de este triángulo en función de α. Por ejemplo, calcule el área para $\alpha = \pi/4, \pi/2,\ 3\,\pi/4,\ \pi$.

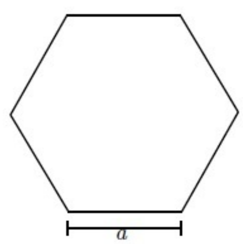


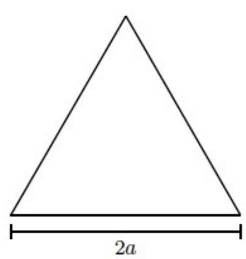


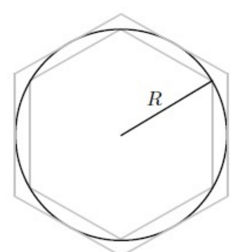
b.- Encuentre el valor del ángulo central del triángulo isósceles OAB, cuyo vértice es el centro de la circunferencia y que tiene la misma área q.ue el sector circular cuyo ángulo central es α. Note que esto no es posible para valores arbitrarios del ángulo α. Para darse cuenta de ello basta pensar el caso $\alpha = \pi$.

c.- Determine el máximo valor de α (en radianes) para el cual el triángulo isósceles descrito existe.

5.- Si un hexágono regular y un triángulo equilátero tienen el mismo perímetro, determine la razón entre sus áreas.



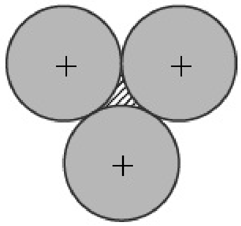


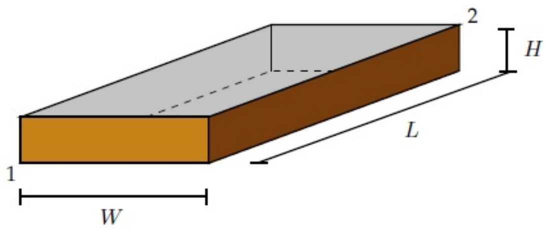


6.- Dado un círculo de radio R, determine el área del hexágono regular circunscrito y el área del hexágono regular inscrito. Compare con el área de la circunferencia. Calcule estas áreas cuando el polígono regular (inscrito y circunscrito) tiene $n = 12,\ 24,$ muchos ladosÉ

7.- Tres círculos de igual radio R se colocan tangentes entre sí como muestra la figura. Calcule el área achurada que se forma en el centro.

8.- Un caracol requiere movilizarse en el menor tiempo posible desde el vértice 1 (inferior izquierdo) hasta el vértice 2 (superior derecho) de la caja rectangular de la figura. Los lados de esta caja son $L > W > H$. Como la rapidez (o lentitud) del caracol es constante, para minimizar su tiempo de viaje debe utilizar la trayectoria más corta entre estos dos puntos. Encuentre la trayectoria que debe seguir el caracol.





9.- Suponga que la Tierra es una esfera perfecta de radio 6390 [km] y que sobre el Ecuador se tiende una cinta que la rodea. Suponga que alguien desea levantar esta cinta de manera que una persona de 2 m de alto pueda pasar justo bajo ella en cualquier lugar del Ecuador.

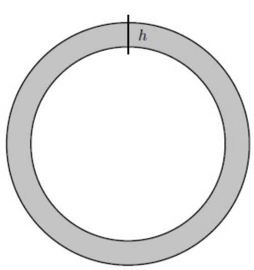
a.- ¿En cuántos metros debe aumentarse el largo de la cinta?

b.- Muestre que en el caso de una circunferencia y un triángulo se cumple que el área extra que se añade es

$$\text{Área adicional } = \mathbf{P}\,\mathbf{h} + \pi h^2$$

donde P es el perímetro de la figura. Este resultado es válido para cualquier figura cóncava cuyo contorno se extiende en un valor h.

10.- Suponga que, producto de la buena comida consumida en las fiestas de fin de año, debe acomodar su cinturón en el siguiente agujero. Calcule la superficie de tejido adiposo que agregó a su cuerpo a la altura de su cinturón.
Indicación: Para hacer este cálculo puede modelar su cintura como una circunferencia de perímetro **P**: la longitud medida desde uno de los extremos de su cinturón a la posición en que abrochaba su cinturón antes de las Fiestas. Puede suponer que el ancho del cinturón es **W** y que la distancia entre los agujeros es **d**.



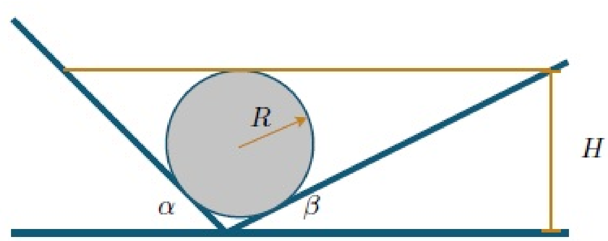


Figura I.21:

11.- Un cilindro de radio **R** se ubica sobre una canaleta caracterizada por los ángulos α y β señalados en la Figura.

Suponiendo que el cilindro no se despega del fondo de la canaleta, determine el nivel necesario de agua **H** para que permanezca completamente sumergida. Verifique su resultado para el caso $\alpha = \beta$. ¿Cambia la solución si usamos una esfera en lugar de un cilindro?

12.- Considere un triángulo isósceles cuyo ángulo del vértice es 120^o. Se inscribe una circunferencia de radio **R** en el interior de este triángulo. Calcule la altura de este triángulo en función del radio **R** dado. ¿Es posible formar un triángulo equilátero con tres de estas baldosas? ¿Es posible formar un cuadrado teniendo estas baldosas como unidades base?

13.- Una barra muy delgada de largo **L** cuelga del techo sostenida de sus extremos por sendos hilos de largo **d**. Los hilos caen perpendicularmente a la barra.

a.- Calcule la altura **h** que se eleva la barra al hacerla girar en $90°$.

b.- Usando materiales a su alcance, compruebe experimentalmente su resultado. ¿Qué condición debe cumplir **d** para que esta operación se pueda realizar?

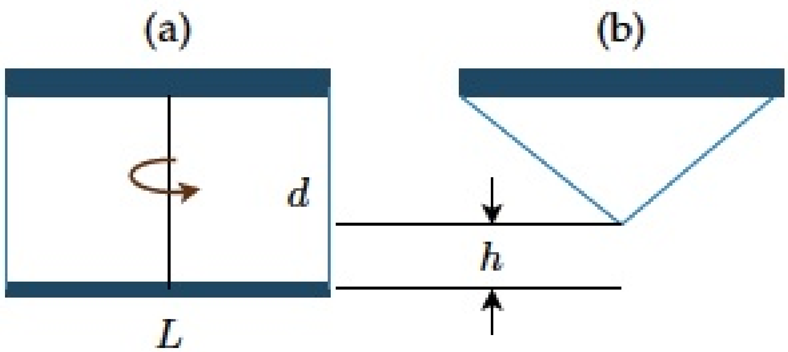
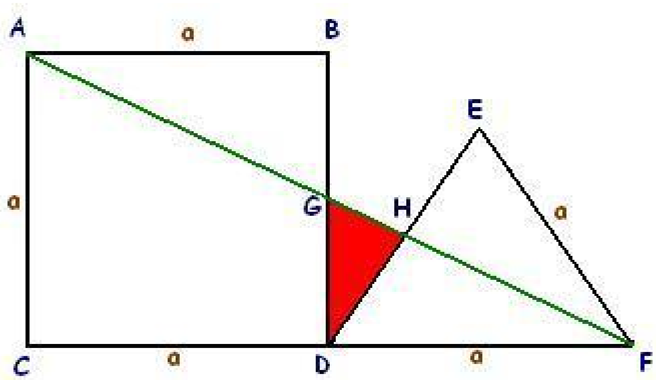
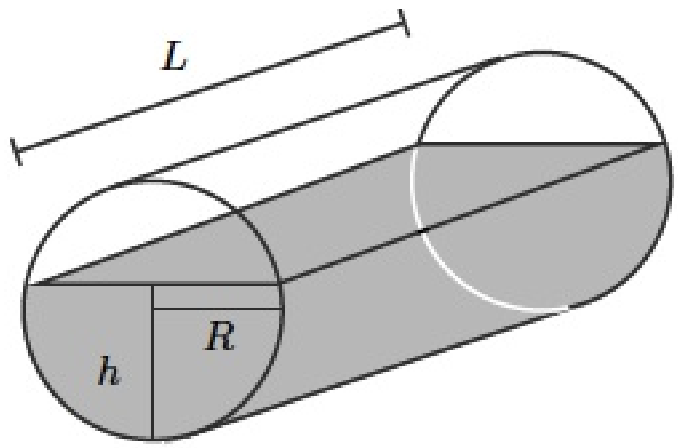


Figura I.22:

14.- Se tiene el cuadrado □**ABCD** de la figura junto con un triángulo equilátero △DEF, ambos de lado **a**. Se traza la diagonal **AF**, calcule el área del triángulo △ GDH.



15.- Un cilindro recostado de radio R y largo L contiene líquido hasta una altura h como indica la figura. Calcule la nueva altura del líquido cuando el cilindro se coloca en posición vertical.



16.- Se tiene un conjunto de n cilindros de radio R alineados sobre una superficie plana y tocándose con sus vecinos. Los cilindros no pueden moverse. Utilizaremos una cuerda inextensible de largo L para colgar una masa m de uno de sus extremos, mientras el otro está conectado a una superficie vertical en un punto de altura $2R$ con respecto a la superficie horizontal, tal como lo indica la figura.

Ahora suponga que usted instala $(n-1)$ cilindros idénticos sobre la base formada por los n cilindros, tal como se muestra en la figura. ¿Cuánto sube el extremo de la cuerda que tiene la masa m con respecto a la situación inicial?

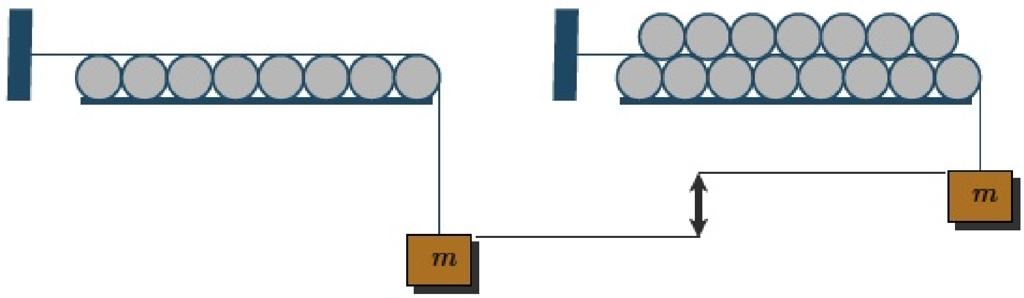
Indicación: Ud. puede resolver el problema como más le acomode, pero incluimos algunas indicaciones que pueden ser útiles:

a.- Resuelva primero el caso con tres cilindros solamente: uno arriba y dos abajo. Con este resultado aborde el problema de **n** ó **(n-1)** cilindros.

b.- La cuerda no tiene espesor y va pegada a los cilindros en la zona ocupada por ellos.

c.- El orden es como sigue: la cuerda llega horizontal y tangente al primer cilindro (el de más a la izquierda), después sigue el arco de ese cilindro hasta el punto de contacto con el cilindro superior, desde allí se pega al superior hasta el siguiente punto de contacto con el inferior y así sucesivamente.

d.- Debe evaluar el arco de circunferencia en cada caso para determinar el camino recorrido por la cuerda.



17.- a.- Determine el ángulo α que subtiende la barra de largo **L**, que permanece en reposo en el interior del cilindro de radio **R** de la figura.

b.- ¿A qué altura se ubica el punto medio de la barra **L**, medido a partir del piso? Dé su respuesta en función del ángulo θ, que suponemos conocido.

c.- Cuál es la relación entre el ángulo θ y α cuando la barra permanece horizontal?

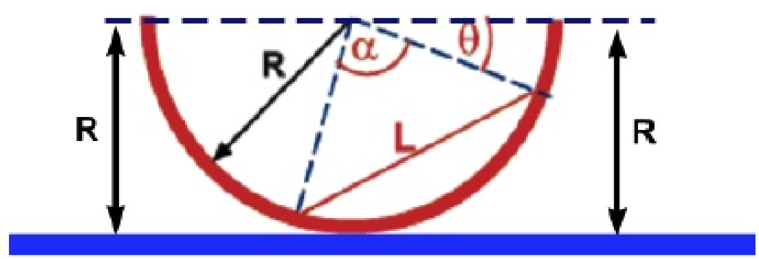


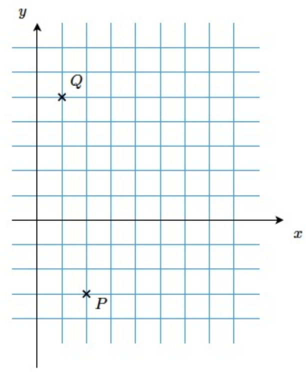
Figura I.23:

18.- Dados dos puntos P (2,-3) y Q (1, 5), en el sistema cartesiano (x, y):

a.- Encuentre la distancia entre ellos.

b.- Encuentre la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos e indique el valor de su pendiente.

c.- Escriba la ecuación de una recta perpendicular a PQ y que pasa por el origen.



19.- Para calcular el ancho de un río, se mide una distancia, AB (ver Figura), a lo largo de su orilla, tomando el punto A directamente opuesto a un árbol C, ubicado en la otra ribera. Si el ángulo $\angle(A\,B\,C)$ es de $55°$ y la distancia AB de 10 m, ¿cuál es el ancho del río?

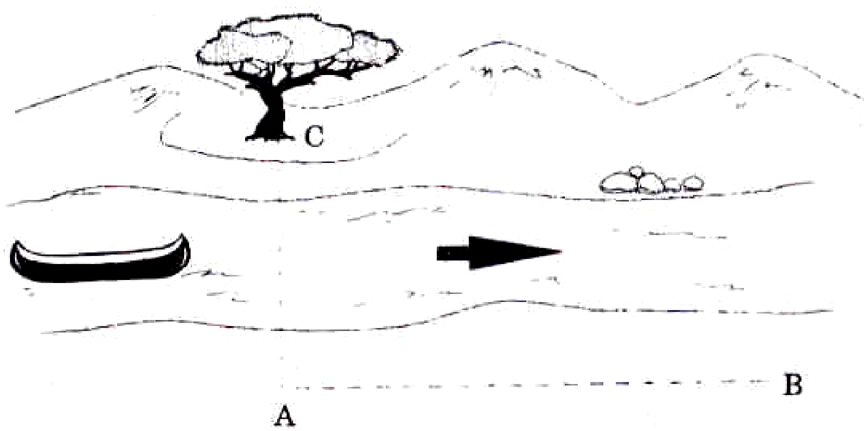


Figura I.24:

20.- El mástil de un gran navío tiene una altura de 30 m sobre el nivel del mar. Lejos de allí, un pescador en su bote, ve el mástil con un ángulo de $5°$ sobre la horizontal. Si el ángulo está en un plano vertical: ¿a qué distancia se encuentra el bote?

(Desprecie la altura del bote y del pescador que está sentado en él.)

21.- Al observar dos torres desde el *punto medio* de la distancia que las separa, los ángulos de elevación de sus extremos superiores son $30°$ y $60°$ respectivamente. Demostrar que la altura de una de las torres alcanza el triple del valor de la altura de la otra.

22.- Al aproximarse una patrulla de reconocimiento a un fuerte situado en una llanura encuentra que, desde un cierto lugar, el fuerte se ve bajo un ángulo de $10°$, y desde otro punto, 200 m más cerca del fuerte, se ve bajo un ángulo de $15°$ ¿Cuál es la altura del fuerte y cuál es su distancia al segundo lugar de observación?

La Figura (I.25) ayuda a visualizar la situación.)

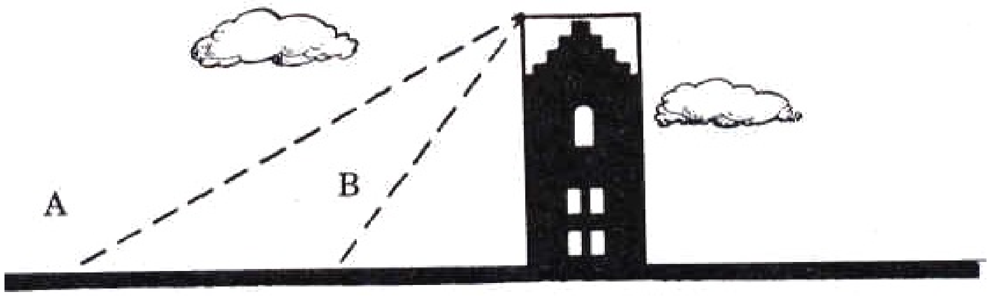


Figura I.25:

23.- Con el fin de conocer la altura, **h** de un objeto, se ha medido la distancia entre dos puntos, **A** y **B**, a lo largo de una recta que pasa por su base en un plano horizontal y resultó ser ℓ metros. Los ángulos de elevación de la punta del objeto desde A y B resultaron ser α y β respectivamente, siendo **A** el punto más cercano a la base. Ver Figura (I.25). Demostrar que la altura está dada por la fórmula:

$$h = \frac{\ell}{\cot\,\beta - \cot\alpha}, \qquad \text{si A y B están del mismo lado, y por:}$$

$$h = \frac{\ell}{\cot\,\beta + \cot\,\alpha}, \qquad \text{si A y B están en lados opuestos de la base del objeto.}$$

24.- La persona de la Figura (I.26), observa dos montes con ángulos de elevación α y β respectivamente.

Si el de la izquierda tiene una altura **h** y la separación entre ambos es **D**, calcule la altura del monte opuesto.

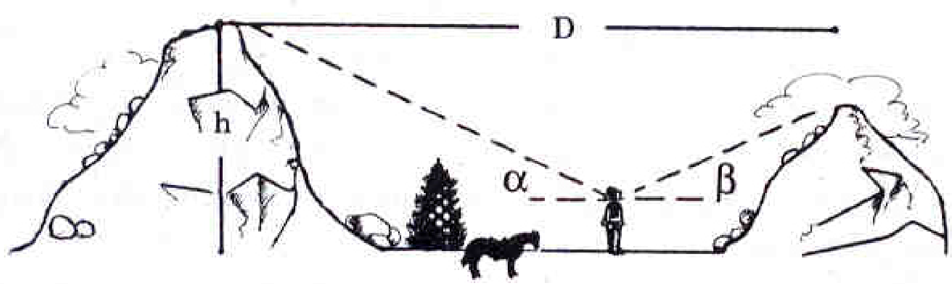
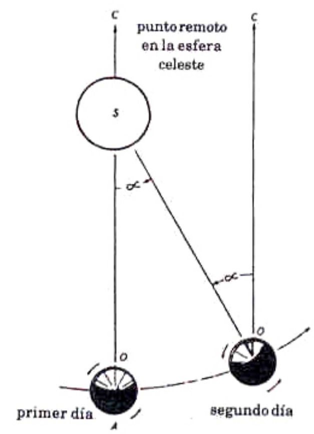


Figura I.26:

25.- En esta Figura se puede apreciar la diferencia entre un día *sideral* y uno *solar*.

Para hacer la explicación más simple, supongamos que es posible observar las estrellas durante el día. En realidad las estrellas están allí y de hecho los radioastrónomos las observan durante el día.

Para un observador en el Ecuador, el día solar es el intervalo que transcurre entre dos pasos consecutivos del Sol por el cenit (posición del Sol justo sobre nuestras cabezas). El día sideral es el tiempo comprendido entre dos pasos consecutivos de una *estrella lejana* por el cenit.



La diferencia que existe entre ambas definiciones se debe al movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol como se indica en la Figura que se acompaña.

Este desplazamiento no cambia la posición de la estrella lejana –precisamente por estar tan lejana–, pero la posición del Sol en el cenit ocurre antes que la Tierra alcance a dar una vuelta completa alrededor de su propio eje.

Determinar el valor del ángulo α definido en la Figura. Calcule la diferencia, expresada en segundos, entre el día sideral y el día solar.

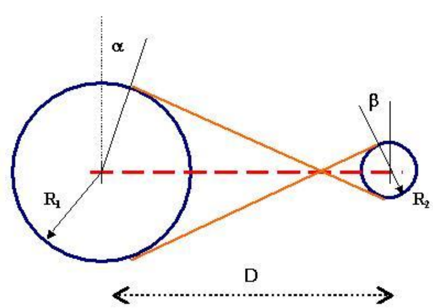


Figura I.27:

26.- Los dos discos de la figura están separados (centro a centro) por una distancia **D**. Los radios de cada uno son R_1 y R_2, con uno mayor que el otro.
a.- Encuentre el largo de la polea que une ambos discos. (Este tipo de unión permite que los discos giren en sentidos opuestos, en caso que exista rotación).
b.- Calcule el ángulo α y β que señala el arco que va desde el punto donde la cuerda toca al disco hasta la vertical señalada en la figura. Los resultados deben quedar en función de los datos conocidos.

27.- Desde un punto **D**, una persona puede observar una estatua con su pedestal en forma completa.

Conoce su altura y la del pedestal, que son 6 y 4 m, respectivamente.

El ángulo de elevación de la cabeza de la estatua con respecto al piso es el doble del ángulo que subtiende el pedestal.

A partir de estos datos, calcule a qué distancia se encuentra este observador.

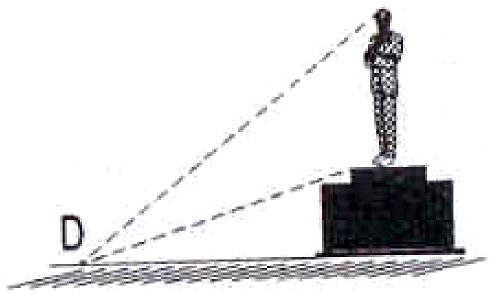


Figura I.28:

28.- Al incidir un rayo de luz sobre una superficie que separa dos medios diferentes, por ejemplo, al pasar del aire al vidrio o viceversa, ésta sufre un cambio de dirección (ver Figura). Este fenómeno se conoce con el nombre de refracción de la luz. La ecuación que describe este fenómeno es la Ley de Snell:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} = \frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{vidrio}}}$$

donde v_{aire} y v_{vidrio}, corresponden a la velocidad de la luz en el aire y en el vidrio respectivamente. (Para el vidrio común se acepta el valor $v_{\text{aire}}/v_{\text{ vidrio}} \simeq 1{,}5$).

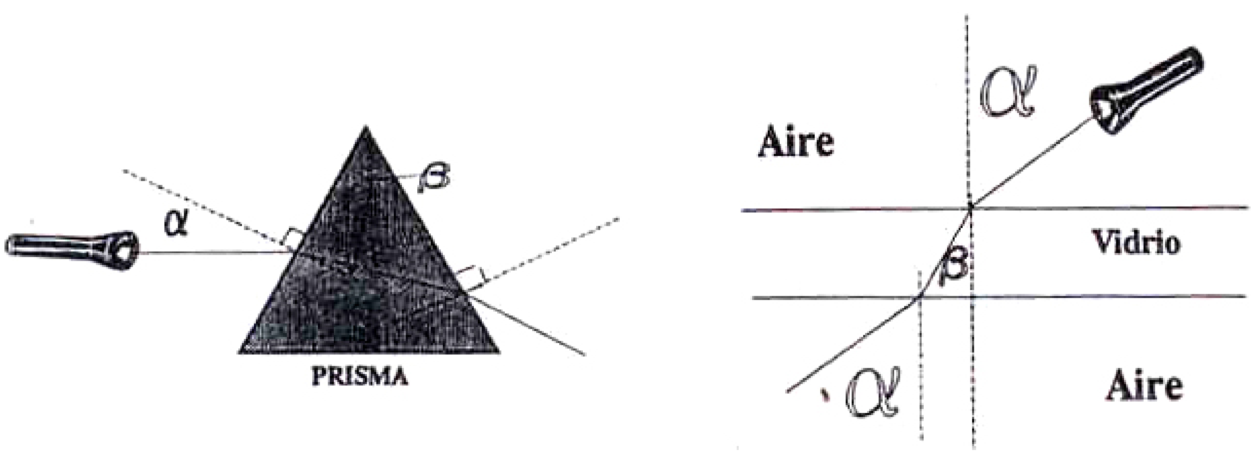


Figura I.29:

Supongamos que un haz de luz incide sobre un vidrio de caras paralelas y de 2 cm de espesor, con un ángulo de incidencia dada α y de refracción β. Demuestre que el rayo de luz que emerge por la otra cara se encuentra siempre paralelamente desplazado respecto al incidente. (Ver Figura).

29.- Considere ahora un rayo de luz incidiendo sobre un prisma en la forma como se muestra en la Figura. Encuentre el ángulo β para $\alpha = 20°,\ 40°,\ 50°$ y $70°$.

¿Para qué valor del ángulo incidente α, el rayo de luz se propaga paralelamente a la cara interior del lado opuesto al de incidencia del prisma?

Para valores de α mayores, el haz de luz es reflejado especularmente en la superficie interior del prisma. Este fenómeno se conoce con el nombre de *reflexión total*.

30.- **Medición del tamaño de la Tierra.**

Los antiguos reconocieron la esfericidad de la Tierra a través de diversas observaciones:

a) En los eclipses de Luna la sombra de la Tierra sobre la superficie lunar es redonda.

b) La elevación de una estrella sobre el horizonte varía con la latitud.

c) Los barcos se pierden rápidamente de vista desapareciendo bajo el horizonte al alejarse.

Uno de los primeros valores para el perímetro del globo terráqueo fue obtenido por Eratóstenes ($\sim$ 330 A. de C.).

Eratóstenes sabía que al mediodía del 22 de Junio el Sol caía verticalmente en Siena (actualmente Asuán): la luz solar que incidía sobre un profundo pozo se reflejaba en el fondo hacia arriba. (Ver Figura). El mismo día, a la misma hora, se midió en Alejandría la sombra de un alto obelisco. Eratóstenes encontró que los rayos del Sol formaban un ángulo de $7,5°$ con la vertical.

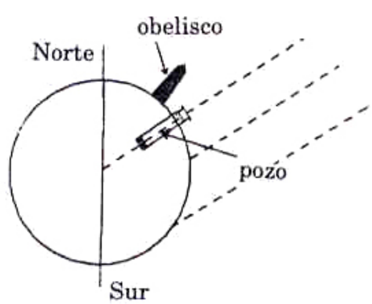


Figura I.30: *El valor obtenido por Eratóstenes no resultó ser el correcto debido a la imprecisión en la medida de las distancias.*

Sabiendo que Alejandría se encuentra a algo más de 800 Km. al Norte de Siena, estime el valor del perímetro y radio terrestres.

31.- Demuestre que si dos cuerdas en un círculo se interceptan en ángulos rectos, entonces la suma de los cuadrados de los largos de los cuatro segmentos formados es una constante y el valor de esta constante es el cuadrado del diámetro: $4\,R^2 \;=\; a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Ref.: **Stephen Barr**; 2nd Miscellany of Puzzles, New York, 1969 (Dover Publ. Mathematical Brain Benders, 2nd Miscellany of Puzzles, 1982) - problem 9: The Pot on the Crosspieces.

Rob Johnson; http://www.whim.org/nebula/math/images/perpchord.gif
Una prueba corta se basa en el siguiente resultado: cuando se tienen dos cuerdas que se interceptan, los arcos opuestos formados en la circunferencia suman el doble del ángulo formado por las dos cuerdas. En nuestro caso, dado que las cuerdas son perpendiculares ($\pi/2$), tenemos que los dos arcos opuestos suman π (son suplementarios entre ellos). Desplazando estos arcos junto con las cuerdas de manera que el punto de intercepción se ubique en la circunferencia, podemos apreciar que entonces forman un triángulo rectángulo con el diámetro de la circunferencia como la hipotenusa.

Roger B. Nelsen;
Four Squares with Constant Area, **Mathematics Magazine**. 77:2 (April 2004) 135 Ver esta revista para tener una prueba sin palabras (sólo usa el dibujo para insinuarla).
(Estas indicaciones son gentileza del Profesor Andrés Meza.)

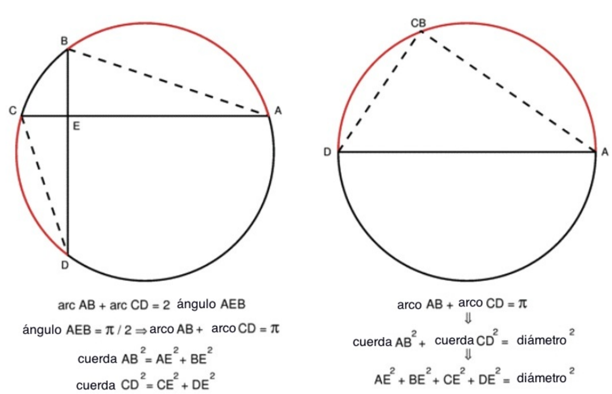


Figura I.31: *Prueba sin palabras de la cuerdas perpendiculares.*

32.- **Problema Desafío!** Resolver usando sólo geometría.

Divida una pizza de la siguiente forma: Toma un punto **P** arbitrario al interior de la pizza, que no sea el centro de ella. A partir de dicho punto **P**, traza una cuerda arbitraria, que no sea, por ejemplo, perpendicular a la recta que une **P** con el centro de la pizza. Por el mismo punto traza otra cuerda perpendicular a la anterior. Con este procedimiento ya tiene cuatro pedazos

de pizza. Finalmente, bisecta los ángulos rectos que se han formado, mediante dos cuerdas, que son necesariamente, perpendiculares entre sí.
Demuestre que la persona que elige las partes sombreadas, (las que no son adyacentes) come exactamente lo mismo que su compañero que consume las partes sin sombrear.

Figura I.32:

33.- **Problema Desafío!**

Demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico (un triángulo dibujado sobre una esfera de radio **R**) tiene el valor:

$$\sum_{i=1}^{3} \theta_i - \pi = \frac{Area}{R^2},$$

Donde θ_i es cada uno de los ángulos interiores del triángulo esférico de la figura, **R**, el radio de la esfera y el área es el área encerrada por el triángulo.

Calcule primero el área generada por una tajada con un ángulo θ. Puede usar la proporcionalidad entre el ángulo θ y $2\,\pi$. Ver dibujo de la izquierda .

Con ese resultado, y considerando que el triángulo esférico genera tres círculos máximos, como se puede apreciar en el dibujo a la derecha de la figura, concluya (y calcule el resultado pedido) que el área que generan las tajadas, al tomarlas de a pares desde cada vértice del triángulo, cubren una vez la esfera y tres veces los dos triángulos (el superior y el reflejo en las antípodas). Con esto puede llegar al resultado pedido.

¿Qué ocurre si R $\mapsto\ \infty$?

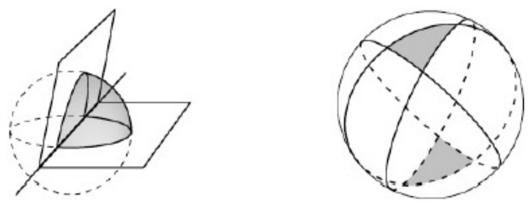


Figura I.33:

I.8. Bibliografía

1. La mayoría de los libros de Introducción al Cálculo contienen lo básico de geometría y trigonometría.
2. Un libro de libre acceso se puede encontrar en: press.princeton.edu/books/maor/ qquad Ver el capítulo 6: *Two Theorems from geometry*. Estudia casos simples de geometría.
3. **Selected Chapters of Geometry**. Buscar bajo este título en google. En el capítulo **I** aparece una discusión acerca de uno de los problemas desafío propuesto.
4. www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie/fun2/fun2.html#graphenwf
   Contiene gráficos de funciones trigonométricas con ejercicios interesantes.
5. **The shape of space**, Jeffrey E. Weeks, Marcel Dekker, Inc. new York, 2002. Contiene diversos tópicos acerca de la geometría. Es una lectura adicional y entretenida. Está en la Biblioteca del Departamento de Física y de la Biblioteca Central.

Ejemplo Resuelto

Un cilindro se ubica en el interior de una canaleta, como se indica en la figura adjunta. Encontrar el nivel de agua medido desde el vértice de la canaleta para que alcance a cubrir el cilindro. ¿Cómo cambia este problema si en lugar de un cilindro se coloca una esfera del mismo radio?

Solución

Los datos del problema son los dos ángulos α, β y el radio **R** del cilindro.
Además el centro **O** de la circunferencia inscrita es el punto donde se cortan las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo (ver I.13).

De la Figura se desprende que

$$\sin\,\beta = \frac{H}{|AB|} = \frac{\mathbf{H}}{(\mathbf{x}+\mathbf{y})}, \;\text{ pero }\; \tan(\beta/2) = \frac{R}{\mathbf{x}} \;\Rightarrow \mathbf{x} = \frac{R}{\tan\beta/2}.$$

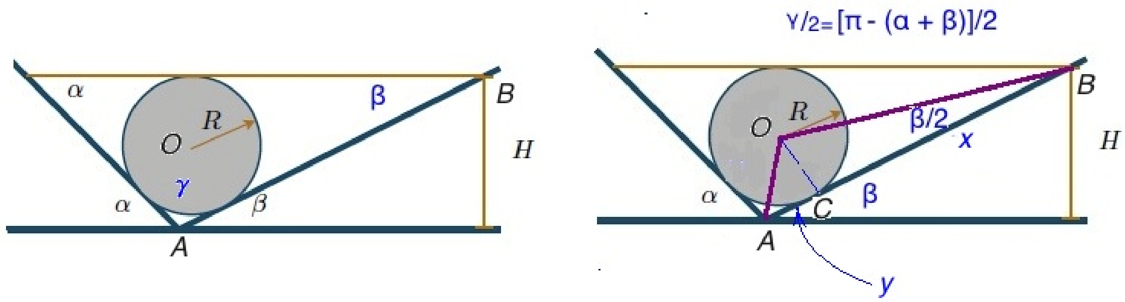


Figura I.34: *Este problema está propuesto en la lista de ejercicios.*

Por otra parte $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, por el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Entonces

$$\tan[\pi - (\alpha + \beta)]/2 = \frac{R}{\mathbf{y}} \Rightarrow \mathbf{y} = \frac{R}{\tan[\pi - (\alpha+\beta)]/2}.$$

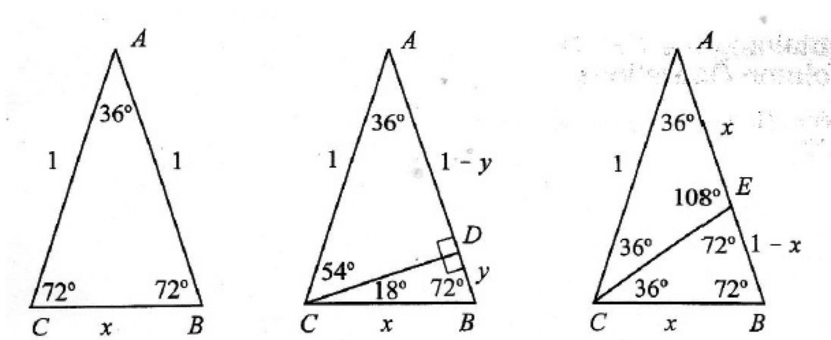
De esta forma

$$\mathbf{H} = \sin\beta\,(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sin\beta \cdot \left[\frac{R}{\tan\beta/2} + \frac{R}{\tan[\pi - (\alpha+\beta)]/2}\right].$$

$$\mathbf{H} = R\sin\beta\left[\frac{1}{\tan\beta/2} + \frac{1}{\tan[\pi - (\alpha+\beta)]/2}\right].$$

□

Ejemplo Resuelto



A partir de los datos y la geometría del triángulo isósceles de la figura, calcule:
$\cos 18^o$, $\cos 36^o$, $\cos 54^o$, $\cos 72^o$, y las funciones seno de los mismos ángulos señalados.
NO DEBE USAR TABLAS, SOLO GEOMETRÍA.
Antes de empezar a calcular escriba (en tres líneas!) el procedimiento que usará. Por ejemplo, qué calculará primero y porque y cómo desde ese cálculo obtendrá los resultados pedidos.

(Referencia: The College Mathematical Journal, Vol.33, N$\frac{1}{4}$4, Sept. 2002)

Solución

A partir de los triángulos semejantes $\triangle CBE \sim \triangle ACB$ con vértice en **C** el primero y con vértice **A** el segundo, se obtiene el siguiente valor para **x**

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{(ver apuntes Cap. I)}$$

Si trazamos la altura CD desde el vértice C (triángulo ubicado al centro de la figura) y definimos $BD \equiv y$ entonces, usando el teorema de Pitágoras, tenemos,

$$\overline{CD}^2 = x^2 - y^2 \qquad \text{(figura ubicada al centro.)}$$

Por otra parte, utilizando el triángulo rectángulo $\triangle ADC$ y el teorema de Pitágoras,

$$\overline{CD}^2 = 1 - (1-y)^2 = 2y - y^2$$

Igualando ambas cantidades obtenemos

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

De aquí se obtienen la magnitud de todos los lados que se necesitan para definir los seno y cosenos

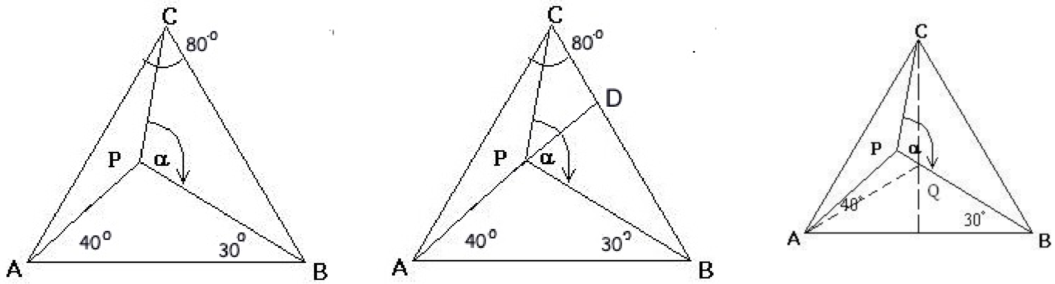
$$\overline{AD} = 1 - \frac{1}{2}x^2, \;\; \overline{BD} = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{y} \quad \overline{CD} = x\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}.$$

Las expresiones buscadas son

$$\cos 18^o = sen 72^o = \sqrt{1-\frac{1}{4}x^2} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 36^o \;=\; \sin 54^o \;=\; 1 - \frac{1}{2}\,x^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\cos 54^o = sen 36^o = x\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$



$$\cos 72^o = sen 18^o = \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}. \qquad \square$$

Ejemplo Resuelto

En el triángulo isósceles ($|\mathbf{AC}|\ =\ |\mathbf{CB}| = 1$, figura izquierda I.8) el valor del ángulo en el vértice **C** es de 80^o. A partir del vértice **A** se traza una recta que forma un ángulo de 40^o con la base del triángulo. Lo mismo a partir de **B**, pero con un ángulo de 30^o. Desde A el punto de intersección **P**, de estas dos rectas, se traza una recta hasta el vértice **C**.
Encuentre el valor del ángulo α formado en el vértice **P**, que aparece en la figura (I.8).
NOTA: los ángulos no están dibujados a escala.

Solución

Prolongar el segmento , $|\mathbf{AP}|$ hasta alcanzar el lado , $|\mathbf{BC}|$ del triángulo parece buena idea (ver Figura del centro I.8). Se forma un triángulo rectángulo y a partir de esa figura se pueden conocer los valores de varios ángulos. Sin embargo no se logra determinar el valor de la división en los ángulos del vértice **C** generada por el segmento $|\mathbf{CP}|$, de forma que no parece ser útil para determinar el ángulo α.

Si dibujamos un ángulo de 30^o a partir de la base $|\mathbf{AB}|$ podemos construir un triángulo isósceles al determinar el punto **Q** con la intersección del segmento $|\mathbf{BP}|$, que coincide con la altura levantada desde el vértice **C**. [1]

Al insertar este segmento, surgen varias igualdades que serán relevantes en la resolución del problema. Se puede demostrar -haciendo el álgebra de los ángulos interiores de un triángulo- que $|\mathbf{AP}|$ es la bisectriz del ángulo asociado al vértice **A** y que $|\mathbf{BP}|$ es bisectriz del ángulo $\angle\ |\mathbf{AQC}|$. Estas dos bisectrices se cortan en el punto **P**.

[1]Esta aproximación fue propuesta por el alumno Mario Ahumada Durán.

Como hemos demostrado que todas las bisectrices de un triángulo cualquiera -en este caso el $\triangle$ **AQC**-, se cortan en un solo punto -**P**, en este caso-, la bisectriz trazada desde el vértice **C** DEBE pasar por **P**. La recta |**CP**| es la bisectriz del ángulo $\angle$ **QCA** y por tanto |**CP**| es la bisectriz del ángulo $\angle$ **QCB**. Con esto hemos determinado el valor del ángulo $\angle$**QCP** = 20^o.

Considerando la suma de los ángulos internos del $\triangle$**QCP**, tenemos

$$20^o + \alpha + 60^o = 180^o \qquad \alpha = 100^o.$$

Note que esta resolución depende exclusivamente de la elección del punto**P**. Si los valores de los ángulos dados (30^0 y 40^o) cambia, no se cumple la relación para las bisectrices del $\triangle$ **AQC** que permitió encontrar analíticamente el valor de α. Otros casos especiales ocurren cuando mantenemos el ángulo de 30^o fijo y desplazamos el punto **P** a lo largo de la recta prolongada de **BQ** hasta coindir con **Q**, o lo alejamos de **Q** hasta coincidir con el lado **AC** del triángulo. Encuentre cuánto vale α en estos dos casos.
$\square$

Capítulo II

COMPLEMENTO MATEMATICO: Series y Aproximaciones.

II.1. SERIES VÍA EJEMPLOS

La idea de este Capítulo es mostrar cómo se opera con algunas series que son importantes en los procesos de aproximaciones que surgen al resolver algunos problemas.

II.1.1. Sucesiones

(**Ref.: Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica**, G. Thomas, Cap. XVI, o cualquier libro de Cálculo).

Una *sucesión* es un conjunto de símbolos

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...$$

que están en correspondencia biunívoca (es decir $1 \leftrightarrow 1$, se corresponden uno a uno) con la sucesión ordenada de los números naturales. Los símbolos $a_1, a_2, ...$ se denominan términos de la sucesión, de forma que el término *enésimo* es a_n, y se designa con la notación $\{a_n\}$.

Ejemplo

El término genérico a$_n$ = $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, designa la sucesión

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1/2,\ a_3 = 1/3,\ ...\ 1/4, ...\ \{1/n\}\ ...$$

El término genérico $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$, designa la sucesión

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1/2,\ ...\ 1/4,\ \ 1/8, ...\ \{1/2^{n-1}\}\ , ...\square$$

¿Qué sucede si n crece indefinidamente? ¿Cuál es el valor de a_n en dicho caso?

Nos interesan los casos en los cuales el valor de a$_n$ es finito o cero. Existe una definición precisa de este límite ($\lim_{n\to\infty} a_n = L.$) pero no lo estudiaremos acá.

II.1.2. Ejemplos de Series

Para definir formalmente las series, utilizamos nuestra definición de sucesión.

Si $a_1,\ a_2,\ a_3, ...a_n, ...$ es una *sucesión* cualquiera de números o funciones, entonces mediante el símbolo

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

representaremos una sucesión deducida a partir de la primera y que llamaremos *serie*. (Sólo se diferencia de la definición utilizada en los primeros ejemplos en el número de elementos de la suma. Era finito en el primer caso y ahora es más general, puede ser infinito.)

Definimos S_n como las sumas parciales la sucesión hasta el término enésimo.

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n.
\end{aligned}$$

El término enésimo de la sucesión S_n es la suma de los n primeros términos de la serie $\{a_n\}$.

Si esta sucesión posee un límite cuando **n** crece indefinidamente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{II.1}$$

S es el valor de la secuencia S_n cuando $n \to \infty$. También podemos decir que la serie $\{S_n\}$ *converge* a S.

Si por el contrario la serie $\{S_n\}$ diverge, es decir, cada uno de las sumas parciales aumenta su valor continuamenten a medida que n crece, entonces definimos la serie $\{S_n\}$ como una serie divergente.

En este libro sólo nos interesan las series convergentes, puesto que son las únicas a las cuales les podemos asignar un significado concreto (un número).

A continuación estudiaremos algunos ejemplos de series, tanto finitas como infinitas.

Ejemplos:

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{n=1}^{3}(2^n) &&\equiv 2^1+2^2+2^3=14,\\
&\textstyle\sum_{n=1}^{3}(1) &&\equiv 1+1+1=3,\\
&\textstyle\sum_{k=1}^{n}(a^k) &&\equiv a^1+a^2+a^3+...+a^{n-1}+a^n,\\
&\textstyle\sum_{k=4}^{6}(a^k) &&\equiv a^4+a^5+a^6, \qquad \text{donde a es un número arbitrario.}
\end{aligned}
$$

Definición:

sigma $\equiv \sum$ indica que el sumando ($[a^k]$ en el último ejemplo) toma cada uno de los valores que recorre **k**, partiendo desde el límite inferior hasta el superior, a través de los enteros.

El límite superior en los dos primeros ejemplos es 3 y en el tercero no se deja explícito, n puede tomar cualquier valor entero. k lleva la contabilidad de los términos incluidos en la suma (va desde $k = 1$ hasta $k = n$, con n un número entero).

Es fácil demostrar la siguiente propiedad de las sumatorias:

$$\sum_{k=1}^{k=n} C\, a_k = C \sum_{k=1}^{k=n} a_k, \tag{II.2}$$

donde C es una constante que no depende de k. Basta recordar la sociatividad de los números reales: $C\,a_1 + C\,a_2 + C\,a_3 = C\,\{a_1 + a_2 + a_3\}$.

Ejemplo

Demuestre la igualdad entre las dos sumatorias indicadas:

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (i)^3.$$

Solución

A continuación se incluye una demostración ingeniosa que usa un arreglo ordenado de los números (ver Figura) para demostrar la igualdad. La idea consiste en sumar los números de cada uno de los arreglos pero agrupados en forma diferente, de manera que reflejen a cada una de las sumatorias propuestas. Esto se señala claramente en la Figura.

Los números se suman de acuerdo a la caja que los contiene (rectangular o formando un ángulo recto). El valor de la suma de cada una de las cajas se indica al pie de la misma Figura.

En el caso del arreglo ubicado a mano izquierda, se ha sacado –usando la regla de factorización recién descrita– un factor común en cada una de las sumatorias individuales, que corresponde

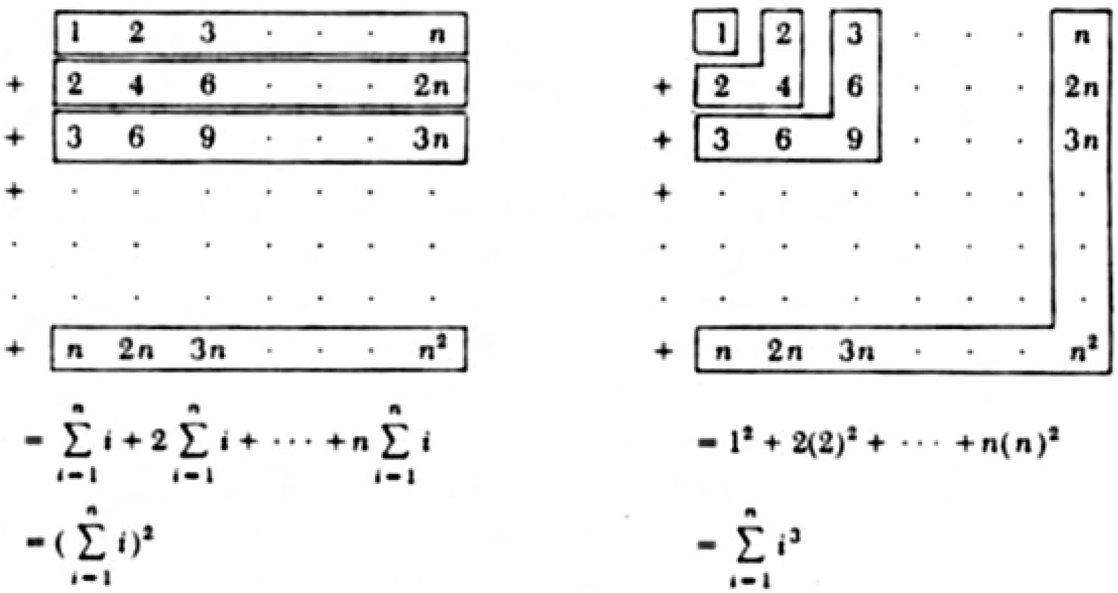


Figura II.1: (The College Mathematics Journal, Vol. 62, # 5, Dec. 89.)

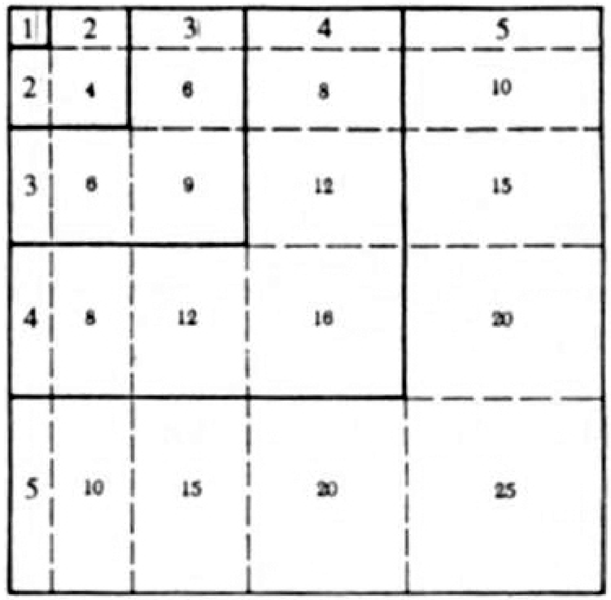
al número 2, 3, 4...n, de acuerdo a la posición del rectángulo horizontal. En seguida, se saca la sumatoria de i como factor común, como se indica a continuación

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)+2\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)+3\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)+...+n\ \left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)=\left\{\sum_{i=1}^{i=n}(i)\right\}[1+2+3+...+n]=\left[\sum_{i=1}^{i=n} i\right]^2$$

Con esto calculamos el bloque de la izquierda.

Dejamos como ejercicio comprobar que los términos al pie del bloque de la derecha de la Figura corresponden a la suma de los números encerrados dentro de cada uno de los cajas en forma de ángulo recto.

Otra forma similar de visualizar la suma $\left[\sum_{i=1}^{i=n} i\right]^2$ consiste en agrupar los términos de forma que corresponde al *área de un terreno cuadrado* que tiene $\sum_{i=1}^{i=n} i$. Se dibuja el terreno a escala (la longitud 5, por ejemplo, tiene cinco unidades de largo) y se calcula el área en forma diferente. El número indicado dentro del cuadrado (o rectángulo), corresponde al valor del área de dicha figura. El truco radica en sumar las áreas considerando franjas o figuras en **L**. En cada caso se obtiene la suma señalada anteriormente y queda claro que el área del cuadrado es la suma buscada. □



Ejemplo

Dado un número real, arbitrario q, y un número entero N, se pide encontrar el valor de la siguiente suma:

$$S = \sum_{n=0}^{N} q^n = q^\circ + q^1 + q^2 + ... + q^N$$

A partir de la expresión encontrada aquí recuperar el resultado obtenido para la serie anterior.

Podemos encontrar el valor de S multiplicando ambos lados de la sumatoria por q,

$$q \times S = S + q^{N+1} - 1,$$

despejando S de esta ecuación, tenemos

$$S = (1 - q^{N+1})/(1 - q) = 1 + q^1 + q^2 + ... + q^N. \qquad \text{(II.3)}$$

Hemos encontrado el valor de S sin necesidad de sumar cada uno de los términos de la serie. Este resultado es válido para todos los valores de $q \neq 1$. Supongamos que $|q| < 1$ y hagamos crecer el valor de N indefinidamente, es decir, tomemos el valor límite de $N \to \infty$. En otras palabras, damos a N un valor muy grande, mayor que cualquier otro que uno pueda imaginar. En este caso

$$\lim_{N \to \infty} q^{N+1} = 0.$$

Este resultado adquiere sentido si uno considera el producto de un número, menor que la unidad por sí mismo. Y repite esta multiplicación tantas veces quiera. Por ejemplo, no importa lo pequeño que sea el número (positivo) que Ud. pueda imaginar (llamémosle ϵ, para ser específico), uno siempre puede encontrar un valor de N suficientemente grande, que haga $q^{N+1} < \epsilon$. (Verifique esta afirmación con una calculadora.)

Así

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + ... = \frac{1}{1-q}\,, \tag{II.4}$$

coincidiendo con lo demostrado anteriormente, usando sólo geometría.

Ejemplo

La fracción decimal periódica $0,317317317...$, representa un número *racional*.

a) Escriba este número como una suma infinita de términos.

b) Siendo un número racional, es posible escribirlo de la forma p/q. Usando el resultado de la parte $a)$, encuentre el valor de p y q.

a) Primero notamos que este número, por ser una una fracción decimal periódica, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
0,317317317... &= 0,317 + 0,000317 + 0,000000317... \\
&\text{o de otra forma} \\
0,317317317... &= 0,317 + \frac{0,317}{10^3} + \frac{0,317}{10^6}... \\
0,317317317... &= 0,317\left\{1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + ...\right\} \\
0,317317317... &= 0,317\left\{\frac{1}{1-10^{-3}}\right\}.
\end{aligned}$$

En la última línea, usamos el resultado obtenido en [II.4]. Para poder expresarla como la razón entre dos enteros debemos escribirla de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
0,317317317... &= \frac{317}{10^3}\left\{\frac{1}{1-10^{-3}}\right\} \\
0,317317317... &= \left\{\frac{317}{10^3-1}\right\} = 317/999.\square
\end{aligned}$$

Ejemplo

Encuentre el valor de la siguiente suma para $n = 14$.

$$S_n = 1 + 11 + 111 + 1111 + ... + \overbrace{111111}^{\text{n–unos}}.$$

Indicación: Haga la suma de los tres primeros términos: $S_3 = 1+11+111 = 3\cdot 1+2\cdot 10+1\cdot 100$. En el caso general entonces será $S_n = n \cdot 1 + (n-1)\cdot 10 + ...\square$.

II.2. Series con Infinitos Términos

En un gran número de casos los casos la suma involucra infinitos términos, no termina nunca. En este escenario, si la serie está bien definida (es decir, el valor de su suma es finito), ocurre que al escribirla explícitamente, cada uno de los términos que se agregan – a partir de un cierto valor del índice de la suma k, los términos toman valores (absolutos) decrecientes de acuerdo a un cierto criterio bien establecido (que no mencionaremos acá) que garantiza que la serie converge a un valor finito. Este valor constituye el límite de la serie.

El concepto de serie infinita con su respectivo límite asociado, no es trivial y requiere más elaboración. El dominio de esta área no es fundamental en las materias de este libro. En general en física, uno toma sólo los primeros términos de esta serie -que debe ser convergente-, en la resolución de un problema.

Sólo utilizaremos tres o cuatro de estas series bien conocidas. Proporcionan -además-, la posibilidad de utilizar el computador para convencerse de algunos resultados cuyas demostraciones analíticas van más allá de este curso.

Una serie que utilizaremos en nuestros cálculos es

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... \tag{II.5}$$

Para que esta serie converga se debe verificar que $|x| < 1$. $|x|$ indica el valor absoluto de x.

Nota

Rigurosamente se debe escribir:

$$S_n \equiv \sum_{k=0}^{k=n} x^k \equiv \sum_{k=0}^{n} x^k, \quad \text{o} \quad S_\infty = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right). \tag{II.6}$$

S_n constituye una *sucesión* de números identificadas con n. El límite de esta sucesión para $n \to \infty$ (es decir para un **n** mayor que cualquier **n** que Ud. se pueda imaginar) se obtiene al verificar que a medida que **n** aumenta la suma se aproxima a un valor fijo que no depende de **n**. Este es el valor de S_∞. Debe ser un valor finito, de otra manera, como ya se señaló, el resultado no

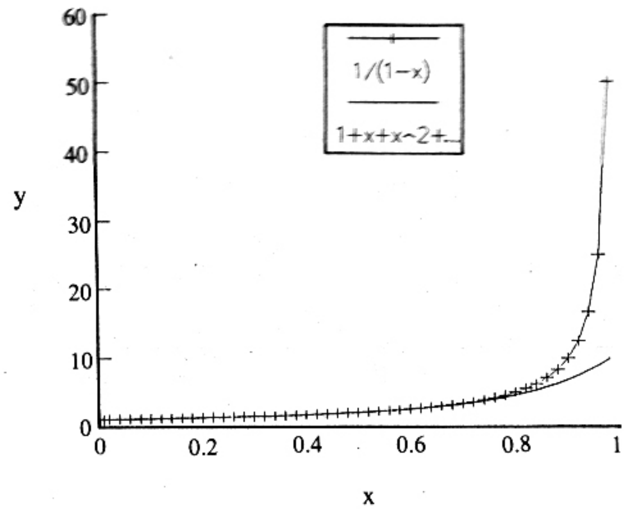


Figura II.2: *Comparación entre la función 1/(1 - x) (gráficada con +) y la aproximación polinomial, que incluye hasta potencias de orden 10 (línea continua). En la aproximación, se corta la serie infinita, manteniendo sólo los primeros términos.*

tiene ningún significado matemático. Verifiquemos que para $|x| < 1$, la serie anterior, con todos sus términos incluidos, se puede escribir en forma analítica:

$$1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = 1/(1 - x). \tag{II.7}$$

Hay muchas formas de obtener esta identidad. Podemos comprobar este resultado graficando con un computador las siguientes dos funciones (ver Figura II.2) :

$$\begin{aligned} y(x) &= 1/(1 - x), \qquad \text{y} \\ S_{10} &= 1 + x + x^2 + ... + x^{10}. \end{aligned}$$

Ejemplo

Demostraremos esta igualdad en forma geométrica utilizando proporciones: triángulos semejantes. Usaremos el triángulo rectángulo de la Figura II.3

Se construye la siguiente estructura sobre el triángulo rectángulo: A partir del cateto más pequeño, que se toma de largo unitario (por definición, o si Ud. quiere, lo construye con dicho lado unitario) se construye un cuadrado perfecto. Con esto se genera un segmento (ver Figura) de largo r, a partir del cual se genera otro cuadrado de lado $r < 1$ como indica la Figura. Sucesivamente se construyen los cuadrados r^2, r^3... etc.

De la Figura , vemos que hay dos triángulos semejantes: $\Delta ADB \sim \Delta COA$, esto implica que

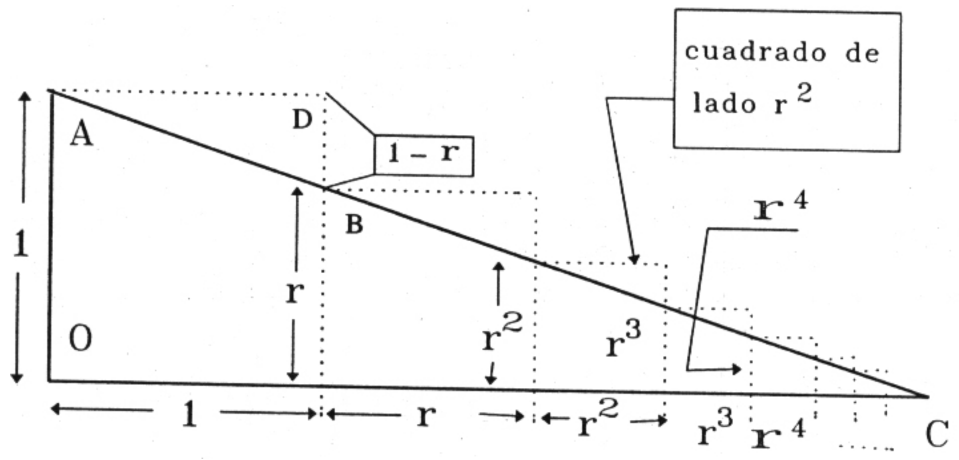


Figura II.3: *La semejanza entre el ΔOAC y el ΔADB permite demostrar la igualdad propuesta. A partir de OA, que hacemos unitario, se construye un cuadrado, este genera el segmento de longitud r, que genera otro cuadrado de longitud r^2...*

existe una proporcionalidad entre sus lados correspondientes, que se indica a continuación

$$\frac{1}{(1-r)} = \frac{(1+r+r^2+r^3+...)}{1}.$$

Con este último paso completamos la demostración.

El valor que puede tomar r (o mejor utilizar la letra x) es arbitrario salvo que $|x| < 1$.

Si r (o $|x|$) es muy pequeño con respecto a la unidad, es decir $|x| << 1$ entonces

$$\frac{1}{1-x} \simeq (1+x), \tag{II.8}$$

porque al multiplicar un número pequeño por sí mismo, se hace aún más pequeño. Comprobemos esto numéricamente: si $r = 10^{-3} = ,001$, entonces $x^2 = 10^{-3} \times 10^{-3} = 10^{-6} = ,000001$ y podemos apreciar que es realmente despreciable con respecto al primer término.

Esta última es una de las aproximaciones más frecuentes en el desarrollo de los problemas físicos.

Ejemplo

A continuación incluimos una serie con infinitos términos que es convergente y que es fácil de visualizar mediante una figura.

Ejemplo

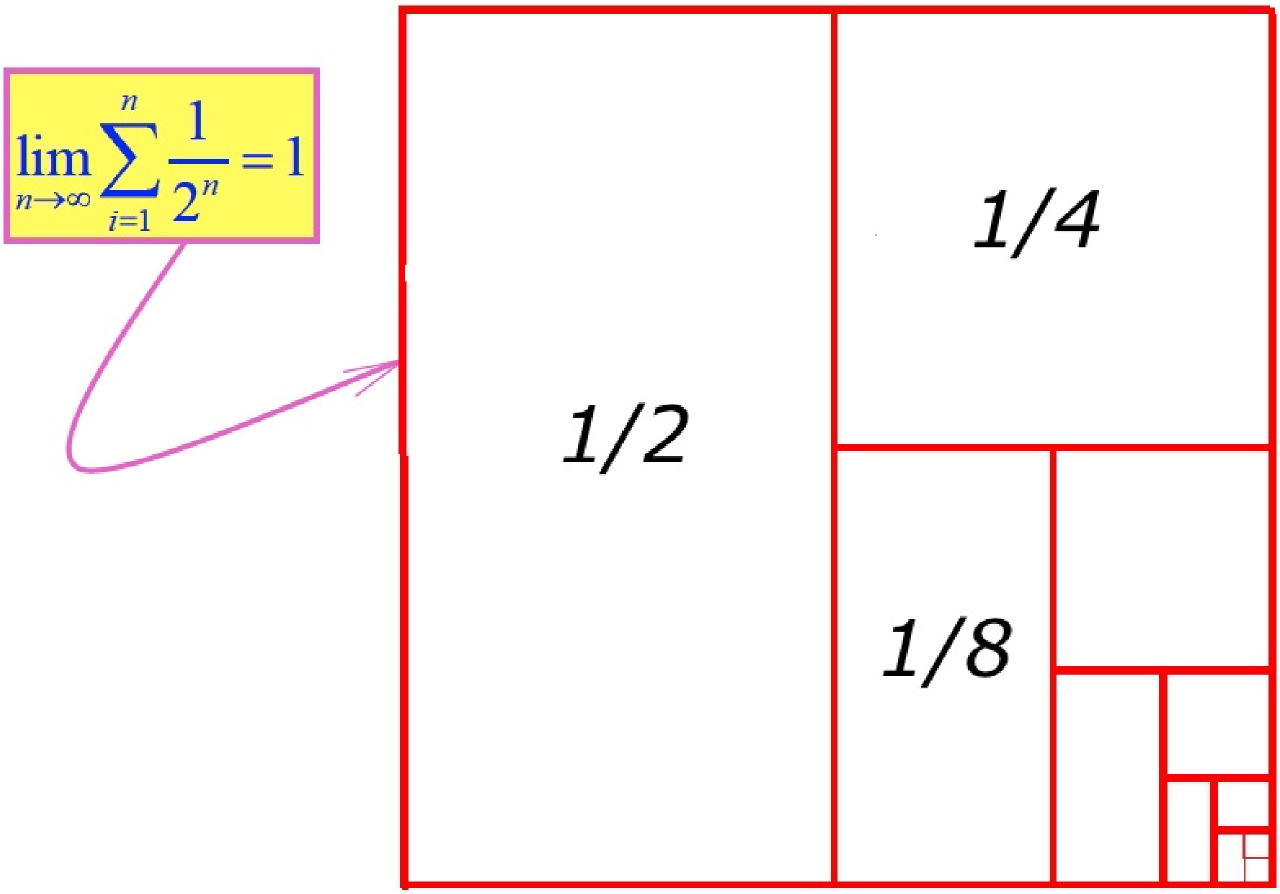


Figura II.4:

La serie que se incluye a continuación es divergente, a pesar que a simple vista, no lo parece.

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{n} \\ S &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n+1} + \ldots \end{aligned}$$

Utilice un computador para encontrar el número mínimo de términos de la serie $\sum 1/n$ que debe sumar, para que su valor sea mayor que 3. (Respuesta: 11) □

II.3. Series Recurrentes en Física

II.3.1. El binomio y el número e.

Una de las series que se presenta frecuentemente, es el desarrollo de de un binomio. La potencia enésima de un binomio es:

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + ... \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-\alpha)!}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\end{aligned} \tag{II.9}$$

La expresión que aparece en esta última línea es una forma compacta para representar la fórmula del binomio y contiene la expresión $n!$ *n factorial* que será definida a continuación. Conviene desarrollar esta suma para los casos más conocidos como una forma de familiarizarse con su significado.

- Esta serie tiene sólo $n+1$ términos **si** n es un entero positivo. En este caso la suma termina cuando $\alpha = n$. Si n no es un entero positivo, la suma prosigue hasta infinito.
- Corresponde al desarrollo usual del cuadrado de un binomio si $n = 2$, al cubo de un binomio si $n = 3$ ...
- Al final de esta sección generalizaremos este resultado para cualquier valor de n, real, negativo... .
- 3!, se lee: tres factorial y es una denominación para el siguiente producto:

$$\begin{aligned}3! &\equiv 3 \cdot 2 \cdot 1, \\ 1! &\equiv 1, \\ 0! &\equiv 1 \text{ (por definición).}\end{aligned}$$

En general

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1. \tag{II.10}$$

$n!$ es un número que crece rápidamente. Compruébelo calculando 10! en un computador.

Probablemente la serie más célebre es la siguiente:

$$e^x \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \tag{II.11}$$

Donde la letra **e** define, por convención, al número irracional $e = 2,71828...$ El valor de **e** se obtiene de la serie anterior si ponemos $x = 1$:

$$e^1 \equiv e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... = 2,71828... \qquad \text{(II.12)}$$

Esta serie obedece las mismas propiedades que las potencias en una base cualquiera, a^x y precisamente por esa razón se define de esa forma. Por ejemplo:

$$a^m \bullet a^n = a^{m+n}, \quad \text{también} \qquad e^0 = 1.$$

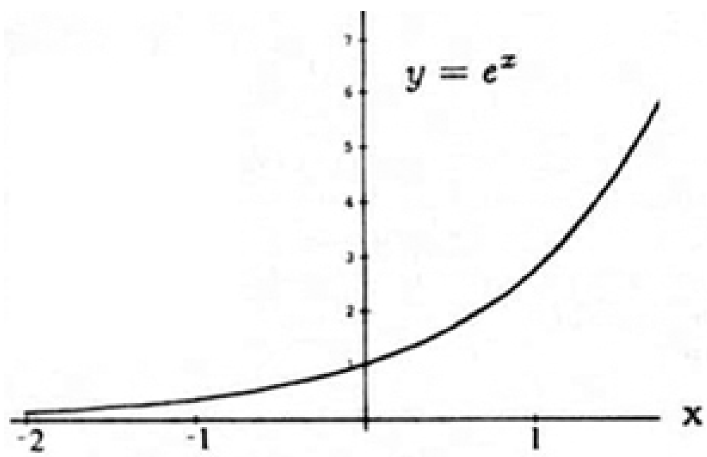


Figura II.5: *Gráfico de la función $y = e^x$. La función exponencial es positiva para todos los valores de x, y toma el valor y = 1, para x = 0.*

Ejercicio

Calcule los dos decimales siguientes en la expresión de $e = 2,7182....$ Grafique la función $y = e^x$

Nota: Calcular los dos decimales siguientes quiere decir que al aumentar el número de términos de la serie incluidos en el cálculo, el valor de los seis primeros decimales no se altera.

- $y = e^x$ es una función positiva a lo largo de todo el eje x.
- También se denomina exponencial de x.
- $f(x) \equiv$ función de x. A un valor determinado de x, $f(x)$ le asocia un número real, si la función es real. Es equivalente a una tabla de valores de dos columnas, o a la información contenida en un gráfico.

II.3.2. La series correspondents a la función seno y coseno

Notablemente las funciones $\cos x$ y $sen\,x$ definidas inicialmente como una razón entre los lados de un triángulo, tienen también un desarrollo en serie. Hay una expresión analítica que posee las mismas propiedades de la funciones trigonométricas definidas anteriormente.

Las series correspondientes con estas funciones trigonométricas son

$$cos\,x \equiv 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm ... \tag{II.13}$$

$$sen\,x \equiv x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm ... \tag{II.14}$$

Esta serie es la que debería evaluar internamente una calculadora para obtener el valor del seno de un ángulo. Sin embargo, para mejorar su rapidez, *las calculadoras evalúan esta serie mediante una aproximación*, la aproximación de Padè, que es un cuociente de polinomios *finitos* que aproximan esta función (y otras) con la precisión que uno desee.

Ejercicio

Encuentre, numéricamente, el valor de $sen\,\alpha$ para $\alpha = 0,05$ radianes, de acuerdo a la serie definida con este nombre en la sección anterior. ¿Cuál es el valor de α en grados? ¿Cuál es el error cometido al aproximar $sen\,\alpha \approx \alpha$? (Sume tres términos de la serie y compare la diferencia).□

Ejercicio

Demuestre que con estas series se cumple el teorema de Pitágoras: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$. Verifique esta igualdad hasta potencias de α^3. (Cuando multiplique la serie por sí misma, no considere términos con potencias superiores a 7.

□

II.4. APROXIMACIÓN PARA ÁNGULOS PEQUEÑOS: ARCO Y CUERDA

La definición geométrica de las funciones trigonométricas es la circunferencia de radio unitario. Usando esta misma herramienta geométrica podemos extraer una aproximación muy útil en los desarrollos de problemas en física. Consiste en considerar los casos en que el ángulos α es muy pequeño (siempre medido en radianes) de forma que podemos aproximar el arco de circunferencia subtendido por el ángulo α con la cuerda que une ambos extremos. Esta descripción está graficada en la Figura II.6.

A continuación ponemos estas afirmaciones en ecuaciones.

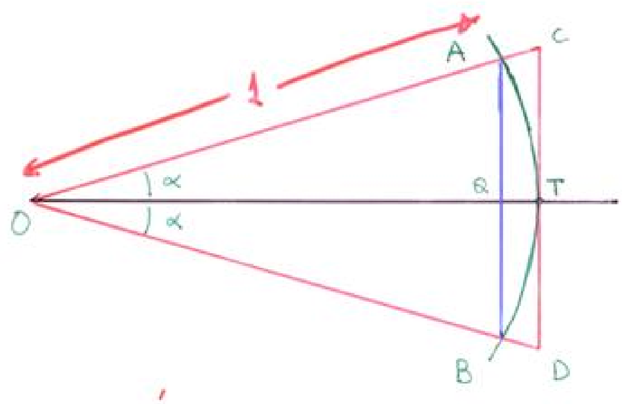


Figura II.6: *Si el ángulo (en radianes) es pequeño, confundiremos el arco con la cuerda.*

IMPORTANTE

Las siguientes *aproximaciones* que se desprenden directamente de las representaciones en serie de las funciones trigonométricas, aparecen con frecuencia en física.

Si α es muy pequeño ($\alpha \ll 1$), se cumple que:

$$\begin{aligned} sen\,\alpha \simeq & \quad \alpha + O(\alpha^3) \\ cos\,\alpha \simeq & \quad 1 - \tfrac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^4) \\ \tan\,\alpha = sen\,\alpha / cos\,\alpha \simeq & \quad \alpha/(1-\alpha^2) \simeq \alpha(1+\alpha^2) \\ \simeq & \quad \alpha + O(\alpha^3) \end{aligned} \tag{II.15}$$

entonces, a primer orden en α, (es decir:despreciando todas las potencias de α superiores a 1), se cumple:

$$\tan\,\alpha \simeq \alpha \simeq \text{sen}\,\alpha. \quad \square \tag{II.16}$$

El ángulo α debe ser medido en radianes para que estas aproximaciones sean válidas.

GRÁFICO SEN y TAN α

SEN A	A-RADIANES	TAN A	A-GRADOS
0,0100	0,01	0,0100	0,5729
0,0200	0,02	0,0200	1,1458
0,0300	0,03	0,0300	1,7187
0,0400	0,04	0,0400	2,2916
0,0500	0,05	0,0500	2,8645
0,0600	0,06	0,0601	3,4374
0,0699	0,07	0,0701	4,0103
0,0799	0,08	0,0802	4,5832
0,0899	0,09	0,0902	5,1561
0,0998	0,1	0,1003	5,729
0,1098	0,11	0,1104	6,3019
0,1197	0,12	0,1206	6,8748
0,1296	0,13	0,1307	7,4477
0,1395	0,14	0,1409	8,0206
0,1494	0,15	0,1511	8,5935
0,1593	0,16	0,1614	9,1664
0,1692	0,17	0,1717	9,7393
0,1790	0,18	0,1820	10,3122
0,1889	0,19	0,1923	10,8851
0,1987	0,2	0,2027	11,458
0,2085	0,21	0,2131	12,0309
0,2182	0,22	0,2236	12,6038
0,2280	0,23	0,2341	13,1767
0,2377	0,24	0,2447	13,7496
0,2474	0,25	0,2553	14,3225
0,2571	0,26	0,2660	14,8954
0,2667	0,27	0,2768	15,4683
0,2764	0,28	0,2876	16,0412
0,2860	0,29	0,2984	16,6141
0,2955	0,3	0,3093	17,187
0,3051	0,31	0,3203	17,7599
0,3146	0,32	0,3314	18,3328

El gráfico muestra el grado de acercamiento entre el sen, la tangente y alpha medido en radianes.

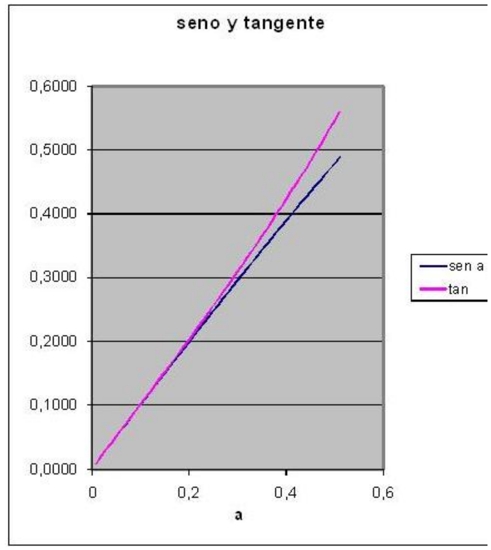


Figura II.7: *Se gráfica la función tangente y seno para ángulos pequeños en radianes. Se puede apreciar que para valores de hasta 0.2, aproximadamente 12º ambas funciones coinciden. El ángulo alpha en radianes no se gráfica pero corresponde a una recta que se confunde con las funciones anteriores en la vecindad del origen.*

II.4.1. Expansión Binomial

Podemos generalizar la fórmula del binomio a un exponente arbitrario. Definimos entonces la forma $(1 + x)^r$ para cualquier valor de r, real, positivo negativo, usando el desarrollo en serie del binomio. Esto nos garantiza que para los casos conocidos anteriormente recuperamos su expresión conocida.

$$\begin{aligned}(1+x)^r &= 1 + r\,x + r\,(r-1)\frac{x^2}{2!} + r\,(r-1)(r-2)\frac{x^3}{3!} + ... \\ &= \textstyle\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{r!}{(r-\alpha)!}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\end{aligned} \tag{II.17}$$

Ejemplo

Usando la expresión recién definida, obtenga -sin usar calculadora-, el valor de las siguientes expresiones, manteniendo tres cifras significativas :

a.- $1/\sqrt{101}$, b.- $(59)^{2/3}$, c.- $\sqrt{\pi}$.

Soluciones

La estrategia en estos ejercicios es incorporar un número conocido y fácil de manipular en la expresión del problema.

a.-

$$1/\sqrt{101} \,=\, (81\,+\,20)^{-1/2} \,=\, (81)^{-1/2}\,(1\,+\,20/81)^{-1/2}$$

$$=\,(1/9)\left[1\,+\,\frac{r\,(20/81)}{1!}\,+\,\frac{r\,(r-1)\,(20/81)^2}{2!}\,+\,\frac{r\,(r-1)\,(r-2)\,(20/81)^3}{3!}\,+...\right]$$

Resta sólo reemplazar $r\,=\,-(1/2)$ y podemos evaluar esta serie. El resultado es una aproximación (dependiendo del número de potencias consideradas) al valor correcto.

b.-

$$(59)^{2/3} \,=\, [64+(-5)]^{2/3} \,=\, (64)^{2/3}\,[1\,+\,(-5)/64]^{2/3} \,=\, 16\,[1\,+\,(-5)/64]^{2/3}$$

$$=\,16\,\left[1+\,(2/3)\,(-5/64)+\,\frac{(2/3)(2/3-1)}{2!}(-5/64)^2+\,\frac{(2/3)(2/3-1)(2/3-2)}{3!}(-5/64)^3...\right]$$

Hemos sido cuidadosos con los signos negativos para evitar las confusiones. Como en el caso anterior, el cálculo se detiene cuando tenemos suficientes cifras significativas. No se pueden calcular, obviamente, todos los términos de la serie.

c.- Consideramos 4 cifras significativas para expresar el número π. $\pi\;=3.142$. Esta es la precisión que esperamos obtener en este cálculo. Como requerimos un número fácil de calcular para plantear el esquema de este método, escribimos $\pi\,=\,(4\,-\,0{,}858)$. Entonces, procedemos

$$(\pi)^{1/2} \,=\, (4\,-\,0,858)^{1/2} \,=\, 2\,[1+(-0,858/4)]^{1/2} \,=\, 2\,[1-0{,}2245]^{1/2}.$$

El resto es calcular la serie hasta que los términos siguientes de la serie no afecten a la cuarta cifra significativa.

Ejemplo

Un móvil viaja con rapidez constante V_o a lo largo del eje vertical de la figura. Un observador ubicado en el vértice **O** de la figura lo vigila tomando una fotografía cada vez que el móvil avanza una distancia $\Delta\,x\;=$a, constante, a lo largo del eje vertical. Cuando el móvil estaba en la horizontal, frente al vigilante, se encontraba a una distancia **L** de él.

A partir de estos datos se pide encontrar la rapidez con la cual el vigilante debe rotar sus anteojos: $\Delta\,\theta/\Delta\,t$, para no perder de vista al móvil. Esto es el vigilante debe rotar un ángulo $\Delta\,\theta$ cada $\Delta\,t$ segundos para tener el móvil en su visor.

Basta que calcule esta rapidez angular en una posición arbitraria, o para un ángulo arbitrario: θ.

Antes de comenzar a resolver el problema, analice si su respuesta debe ser que la rapidez angular para fotografiar el móvil cambia depende (aumenta o disminuye) a medida que el móvil avanza a lo largo del eje vertical.

Solución

La estrategia es usar la aproximación arco = cuerda, para ángulos pequeños en radianes.

Para ensayar podemos calcular esta expresión cuando ambos protagonistas están más cercanos: en el eje horizontal. Nuestra aproximación considera que una unidad vertical de longitud (**cuerda = eje vertical**) se puede igualar al **arco descrito** por el radio **L** y el ángulo $\Delta\,\theta_o$, en radianes.

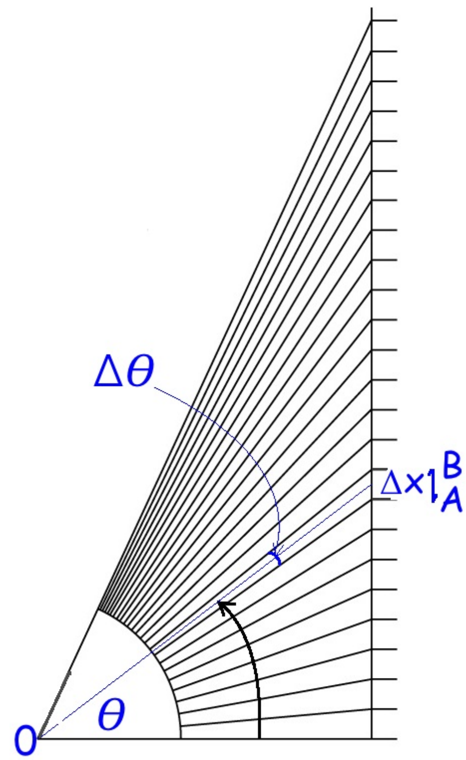
$$\Delta\,\theta_o\,\times\,L\,=\,a\,=\,V_o\,\Delta\,t,$$

de esta forma tenemos

$$\Delta\,\theta_o\,=\,a/L\,=\,V_o\,\Delta\,t]/L,$$

la velocidad angular en esa posición especial es entonces

$$\frac{\Delta\,\theta_o}{\Delta\,t}\,=\,\frac{V_o}{L}.$$



Para un posición arbitraria, sólo debemos cambiar la distancia que los separa, ya que la rapidez del móvil es constante y usaremos la misma aproximación del arco y la cuerda. La cuerda es la misma $\Delta\,x$, el radio es la distancia que los separa $\sqrt{L^2\,+\,(V_o\,t)^2}$. En este caso tenemos

$$\Delta\,\theta\,\times\,\sqrt{L^2\,+\,(V_o\,t)^2}\,=\,V_o\,\Delta\,t,$$

la rapidez con la cual debe girar sus anteojo en esta posición es

$$\frac{\Delta\,\theta}{\Delta\,t}\,=\,\frac{V_o}{\sqrt{L^2\,+\,(V_o\,t)^2}}.$$

Podemos expresar este resultado en función del ángulos θ si recordamos que la distancia que viaja el móvil V_ot y el ángulo θ están relacionados mediante la tanθ (Ver Figura).

De este modo podemos escribir nuestro resultado de la siguiente forma

$$\frac{\Delta\,\theta_o}{\Delta\,t} = \frac{V_o}{L\,\sqrt{1\,+\,(\tan\,\theta)^2}} = \frac{V_o}{L}\,\cos\,\theta.$$

□

II.5. ÁREA ENCERRADA BAJO UNA CURVA

Más adelante se require evaluar el área encerrada bajo una curva y allí haremos uso de las sumas introducidas aquí.

Evaluar el área bajo una curva, es lo que en cálculo se denomina *integrar una función*.

Cabe notar que aún en casos simples se requiere evaluar el área bajo una curva, pero se realiza sin recurrir a sumatorias (o a la integral, si uno tiene conocimientos de cálculo infinitesimal). Por ejemplo, en el movimiento de una partícula con aceleración uniforme, es necesario calcular el área encerrada bajo la curva velocidad vs. tiempo, si desea conocer el camino recorrido por esta partícula. Aquí la *curva* es una recta y el valor del área encerrada corresponde al área de un trapezoide, cuya fórmula es conocida.

Para una partícula que se mueve unida a un resorte o bajo la acción del campo gravitacional debemos recurrir a un método numérico para calcular, primero su velocidad y, posteriormente la distancia recorrida.

II.5.1. Area encerrada por la curva $y = x^2$.

La función $y = x^2$ es un buen ejemplo para calcular el área bajo una curva.

Como método general de cálculo sumaremos el área de cada uno de los rectángulos que aparecen en la Figura . El problema es cómo determinar una altura apropiada para este rectángulo que cubra en forma exacta el área que se quiere avaluar. El procedimiento que usaremos será tomar dos cotas: una superior, donde el rectángulo claramente tiene más superficie que la figura original, y la cota inferior, donde tomamos un rectángulo que toca el valor más bajo de la función en el intervalo a evaluar. Este es el procedimiento más elemental, existen otros métodos más sofisticados diseñados para disminuir el error.

A continuación calcularemos una cota *inferior* para el área bajo la curva de la función $y = x^2$; sumemos los rectángulos achurados, que se ubican *debajo* de la curva:

$$\text{Area}_{INF} = \sum_{n=1}^{100} \left[(n-1)^2 \cdot \Delta^2\right]\,\cdot\,\Delta \tag{II.18}$$

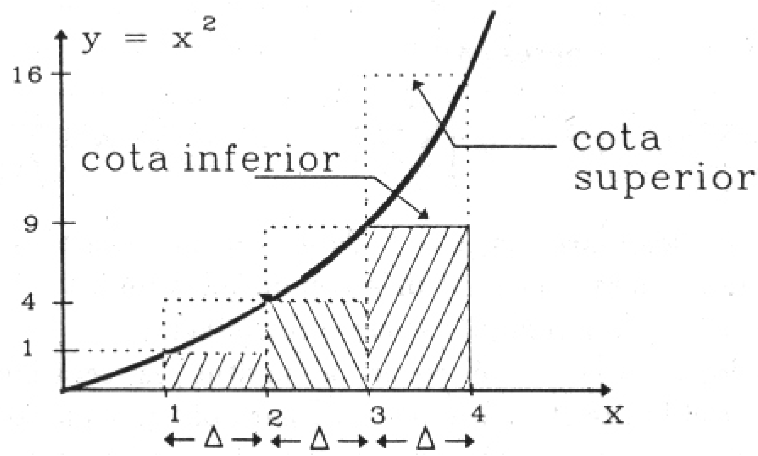


Figura II.8: *El área bajo la curva se ha descompuesto en una suma de rectángulos. Una familia de rectángulos dará como resultado un valor mayor para el área buscada, y la otra familia de rectángulos, un valor menor.*

El término entre corchetes, representa el valor de la función $y = x^2$. Esto proviene del siguiente argumento: si x es el largo y Δ es lo que designamos como la base del rectángulo, entonces $x = (n - 1)\,\Delta$ corresponde al valor más bajo de la función para el intervalo en cuestión (ver Figura II.8). En otras palabras, trazamos un rectángulo que toque a la curva $y = x^2$ en el punto más bajo de cada uno de los intervalos. Esta es la cota mínima.

En seguida desarrollamos $(n - 1)^2 = n^2 - 2\,n + 1$ y usamos la siguientes propiedades de las sumatorias (válidas si las sumatorias son finitas).

$$\sum_{n=1}^{100}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{100} a_n + \sum_{n=1}^{100} b_n, \tag{II.19}$$

$$\sum_{n=1}^{100} \lambda \bullet a_n = \lambda \sum_{n=1}^{100} a_n, \qquad \lambda = \text{constante.} \tag{II.20}$$

Cota inferior para el área

La sumatoria se transforma entonces en:

$$\text{Area}_{INF} = \sum_{n=1}^{100}(n-1)^2 \cdot \Delta^3 = \left[\sum_{n=1}^{100} n^2 \, - \, 2\sum_{n=1}^{100} n \, + \, \sum_{n=1}^{100} 1\right] \, \Delta^3.$$

Hemos tomado $x_{\text{máx.}} = 100\,\Delta$. Estamos calculando entonces el área bajo la curva encerrada entre $x = 0$ y $x_{\text{máx.}} = 100\,\Delta$. En general, para funciones más complicadas, por ejemplo que aumenten y después disminuyan muy marcadamente, el valor de Δ conviene que dependa de la posición y por tanto de n con el objeto de minimizar el error introducido. Acá estamos presentando el método y no ahondamos en ese aspecto.

Escribimos el resultado obtenido anteriormente

$$\text{Área}_{INF} = \left[\sum_{n=1}^{100} n^2 - 2 \sum_{n=1}^{100} n + \sum_{n=1}^{100} 1 \right] \Delta^3.$$

En la Figura se aprecia que el área denominada con INF es MENOR que la que el área encerrada bajo la curva $y = x^2$, que es la que debemos calcular.

Cota superior para el área

Ahora si tomamos el rectángulo cuya altura corresponde al valor máximo de la función en el intervalo, entonces obtenemos

$$\text{Área}_{SUP} = \sum_{n=1}^{100} n^2 \, \Delta^3. \tag{II.21}$$

En la Figura se aprecia que el área$_{SUP}$ constituye una cota superior para el valor del área que deseamos estimar.

Hemos obtenido una cota superior e inferior para el valor del área encerrada por la curva $y = x^2$. Con estos dos resultados, parece natural asignar que un valor cercano al valor exacto del área bajo esta curva se obtiene promediando estas dos cotas.

Ejercicio

Demuestre que asociar el valor del área encerrada por la curva $y = x^2$ con el promedio aritmético del valor del Área Superior y del área Inferior calculada, corresponde geométricamente a trazar una recta que reemplace la curva entre los dos verticales de cada tramo Δ que tocan a la parábola $y = x^2$.

Nota: Considere un trapecio instalado en cada bloque definido por un rectángulo.

□

Se desprende de aquí que para evaluar numéricamente esta área necesitamos, conocer el valor de las sumatorias que han aparecido hasta aquí: $\sum_{n=1}^{N} n$ y $\sum_{n=1}^{N} n^2$.

Incluimos los detalles del cálculo de estas sumatorias en la siguiente sección. Para no desviarnos de este problema, usaremos los valores de estas sumatorias, sin demostrarlos, para obtener el resultado final.

Los valores son

$$\sum_{n=1}^{N} n = (N+1)\frac{N}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{N} n^2 = N[(2N+1)(N+1)]/6. \tag{II.22}$$

Con estos valores disponibles retornamos a las ecuaciones [II.18], [II.21] que correspondían al área evaluada por defecto (cota inferior) y por exceso (cota superior), respectivamente.

Promediando los valores de ambas cotas, tenemos

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \tfrac{1}{2}[\text{Área}_{(SUP)} + \text{Área}_{(INF)}]\,\Delta^3 \\
&= \left\{ \tfrac{1}{2}[2\,\textstyle\sum_{n=1}^{N} n^2 - 2\,\sum_{n=1}^{N} n + \sum_{n=1}^{N} 1] \right\}\,\Delta^3 \\
&= \{\, N[(2N+1)(N+1)]/6 - N(N+1)/2 + N/2\}\;\Delta^3 \\
&= \{\, N(N+1)[(2N+1)/6 - 1/2] + N/2\}\;\Delta^3 \\
&= [N^3/3 + N/6]\,\Delta^3
\end{aligned}$$

Si el valor máximo de x es L, entonces, de acuerdo a nuestra partición, $L \equiv N\,\Delta$, donde N es el valor del número de rectángulos considerados en el cálculo. De este modo área bajo la curva es

$$\text{Área} = \frac{1}{2}[\text{Área}_{(SUP)} + \text{Área}_{(INF)}]\,\Delta^3 \;=\; [N^3/3 + N/6]\,\Delta^3 \;=\; \frac{L^3}{3} + \frac{L^3}{6\,N^2}. \tag{II.23}$$

El valor exacto de esta sumatoria es $L^3/3$. El error porcentual cometido es del orden de $1/(2\,N^2)$. Si utilizamos 100 particiones (N=100), el error es del orden de una parte en 20.000, o un error de 0.005 $\%$.

Ejercicio

a.- Repita este cálculo para el caso $y = x$.

b.- Calcule el área encerrada entre la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$. Calcule primero el punto donde ambas curvas se cortan, posteriormente calcule las áreas separadamente y reste adecuadamente sus resultados. □

II.5.2. Método general para evaluar $\sum_{n=1}^{N} n^k$.

Aquí propondremos un método simple y general para evaluar las sumatorias indicadas en el título de esta sección.

Como ejemplo para ilustrar el método obtendremos el valor de la siguiente sumatoria

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + 3 + ... + N.$$

Consiste en calcular la siguiente combinación de sumatorias,

$$\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2 - \sum_{n=1}^{N} n^2.$$

Esta combinación de sumatorias no parece estar relacionada con la sumatoria que nos interesa, pero al desarrollar el binomio de la primera sumatoria aparecen dos características relevantes para esta evaluación de sumatorias. Primero

$$\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2 - \sum_{n=1}^{N} n^2 = \sum_{n=1}^{N}(n^2+2n+1) - \sum_{n=1}^{N} n^2 = \sum_{n=1}^{N}(2\,n+1). \tag{II.24}$$

Donde hemos usado la asociatividad de la sumatoria (la misma propiedad de los números reales) [**??**], y con ello hemos cancelado las sumatorias que contenían n^2.

En segundo lugar, la resta de sumatorias que aparece a la izquierda de la última ecuación puede ser evaluada fácilmente si escribimos cada uno de sus términos en columnas separadas como se indica a continuación:

$$\begin{array}{rcll} 2^2 & - & 1^2 & \text{primer término de la sumatoria,} \\ 3^2 & - & 2^2 & \text{segundo término de la sumatoria,} \\ 4^2 & - & 3^2 & \text{tercer término de la sumatoria,} \\ & \vdots & & \qquad\vdots \\ (N+1)^2 & - & N^2 & \text{N–ésimo término de la sumatoria.} \\ \hline (N+1)^2 & - & 1. & \end{array}$$

Es fácil ver que los términos de la suma se van anulando entre ellos, permaneciendo sólo el primero y el último, cuya diferencia es el resultado de la suma. las series con esta característica se denominan series telescópicas y surgen frecuentemente en nuestros problemas.

El valor de la suma es: $N\,(N+2)$.

Por otra parte el término de la derecha de la ecuación [II.24] es:

$$2(\sum_{n=1}^{N} n) + \quad \sum_{n=1}^{N} 1 = 2(\sum_{n=1}^{N} n) + N.$$

De aquí se puede despejar $\sum_{n=1}^{n=N} n$ que es la sumatoria cuyo resultado buscamos:

$$\sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)/2 \tag{II.25}$$

Ejercicio

Usando este método, reobtenga el valor de la siguiente sumatoria:
$\sum_{n=1}^{N} n^2 = N(2N+1)(N+1)/6.$

Indicación: use la ecuación [II.24], pero incluyendo potencias cúbicas en lugar de las cuadráticas que allí aparecen.□

Resumiendo: *con este método se puede calcular la sumatoria de una potencia arbitraria de n. Para ello se debe conocer el valor de la sumatoria de una potencia más baja que la buscada y calcular la diferencia entre los valores de las dos sumatorias de una potencia inmediatamente superior, en la forma ya señalada.*

II.5.3. Valor de la sumatoria $\sum_{n=1}^{N} n$

A pesar que el resultado de esta sumatoria es el mismo si N es par o impar, analizaremos ambos casos en forma independiente.

Consideremos primero el caso de N par.

$$\sum_{n=1}^{N} n = \overbrace{1 + \underbrace{2 + \overbrace{3 + \underbrace{4 + ... + (N-3)} + (N-2)} + (N-1)} + N}$$

Para evaluar esta sumatoria reagruparemos los términos de la sumatoria en la forma señalada en la Figura: sumamos en pares aquellos unidos por el extremo de cada una de las llaves indicadas en la Figura. El valor que toma cada uno de estos pares es $(N+1)$. Ahora si *N es par* el número de llaves que debemos considerar es $N/2$ puesto que la suma tiene N términos, y el valor de la suma es $N/2$ veces $(N+1)$:

$$\sum_{n=1}^{N} n = (N+1)\frac{N}{2}. \tag{II.26}$$

N impar.

Si N es impar, la suma de cada par de términos tiene el mismo valor que antes $(N+1)$, **excepto** que ahora al agruparlos permanece uno (el del centro), sin compañero. El valor de este término, es $(N+1)/2$.

En este caso la expresión que toma la sumatoria es

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1+2+...+\overbrace{\frac{(N+1)}{2}}+...+(N-1)+N$$

Sumamos entonces teniendo en cuenta que el valor del término central es $(N+1)/2$, y que debe ser sumado en forma aparte. El valor de la sumatoria se obtiene sumando $(N-1)/2$ veces $(N+1)$ y añadiendo el término central $(N+1)/2$. Recuerde que (N - 1) es un número par, y que la suma del primero y el último de este par es $(N+1)$.

El resultado final es

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{n=1}^{N} n &= (N+1)\bullet(N-1)/2+(N+1)/2\\ &= (N^2-1)/2+(N+1)/2\\ &= N(N+1)/2\end{aligned}$$

Vemos que la expresión es la misma, sea N **par o impar**, de modo que:

$$\sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)/2 \qquad \textbf{(II.27)}$$

El método expuesto se debe a Gauss.

Valor de la sumatoria $\sum_{n=1}^{N} n^2$.

Para evaluar la cota inferior o superior para el área encerrada bajo la curva, necesitamos conocer el valor de otra sumatoria, aquella que contiene n^2. Usaremos dos métodos diferentes para evaluar la suma. El procedimiento indicado a continuación es complejo. Lo estudiaremos como una forma de familiarizarnos con la manipulación de las sumatorias.

Incluiremos otro método, más simple, como ejercicio al final de este capítulo.

A partir de la Figura, sumando los puntos ubicados dentro del cuadrado con línea cortada, se puede verificar la siguiente igualdad:

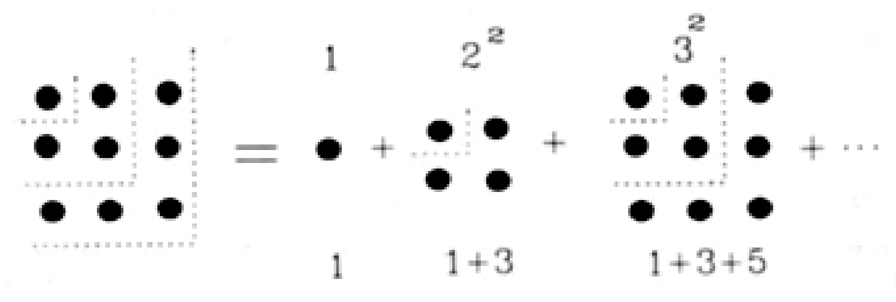


Figura II.9: *La Figura muestra los puntos dentro del cuadrado con línea cortada que permite evaluar una suma cualquiera de números impares. Usaremos este esquema para encontrar el valor de* $\sum n^2$.

$$\begin{array}{ll} 1 & = 1 \\ 1+3 & = 2^2 \\ 1+3+5 & = 3^2 \\ \ldots & \vdots \\ 1+3+5+\cdots+(2N-1) & = N^2 \end{array}$$

Los valores ubicados a la derecha del signo igual son los números que nos piden evaluar. Sumando los números de la izquierda por columnas, obtenemos:

$$N + 3\cdot(N-1) + 5\cdot(N-2) + ... + (2N-1)\cdot 1 = \sum_{n=1}^{N} n^2$$

Para obtener este resultado recordemos que hay N filas y que se han sumado columna por columna. El resultado en la ecuación anterior está escrito en el mismo orden. También podemos *verificar* que la suma que aparece a la izquierda del signo igual se puede escribir , después de agrupar los términos convenientemente, como

$$\overbrace{(1)}\cdot\underbrace{[N]} + \overbrace{(3)}\cdot\underbrace{[N-1]} + ... + \overbrace{(2N-3)}\cdot\underbrace{[2]} + \overbrace{(2N-1)}\cdot\underbrace{[1]} \quad = $$

$$\sum_{n=1}^{N}\overbrace{(2n-1)}\,\underbrace{[N-(n-1)]}\,.$$

Las llaves *sobre* los números a la izquierda del signo igual, indican una familia de términos representada por la expresión genérica $(2\,n-1)$. Este factor se ubica, con la misma identificación, a la derecha del signo igual. Análogamente, los términos con una llave *bajo* el número, son generados por el término señalado a la derecha de la ecuación con una llave similar.

Ejercicio

Verifique que (2 n - 1) es un número impar para cualquier valor de n y, que en este caso, toma cada uno de los valores de los números que caracterizan a cada columna, exactamente en el mismo orden en que van apareciendo.

Verifique, dando distintos valores de n, que el término entre paréntesis cuadrado reproduce el otro factor de la suma. □

Igualando este último resultado con la sumatoria de n^2, tenemos

$$\sum_{n=1}^{N}(2n-1)[N-(n-1)] = \sum_{n=1}^{N} n^2$$

El resto del cálculo se reduce a separar en un miembro de la ecuación la sumatoria de n^2 y en el otro el resto de los términos.

Desarrollando el miembro de la izquierda, de acuerdo a las reglas establecidas, tenemos

$$N\sum_{n=1}^{N}(2n-1) \;\; - \;\; \sum_{n=1}^{N}(2n-1)(n-1) = \sum_{n=1}^{N} n^2.$$

Aplicando, nuevamente, las propiedades conocidas de las sumatorias,

$$2N\sum_{n=1}^{N} n - N\sum_{n=1}^{N} 1 - 2\sum_{n=1}^{N} n^2 + 3\sum_{n=1}^{N} n - \sum_{n=1}^{N} 1 = \sum_{n=1}^{N} n^2$$

Ordenando sumatorias de potencias similares

$$(2N+3)\textstyle\sum_{n=1}^{N} n \;\; - \;\; (N+1)\sum_{n=1}^{N} 1 \;\; = 3\sum_{n=1}^{N} n^2,$$

reemplazando el valor obtenido para $\sum_{n=1}^{N} n$, [II.27], y recordando que $\sum_{n=1}^{N} 1 = N$, tenemos:

$$2N^2(N+1)/2 - (N+1)\,N + 3N(N+1)/2 = 3\sum_{n=1}^{N} n^2,$$

y finalmente, haciendo un poco de álgebra obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = N[(2N+1)(N+1)]/6. \qquad \textbf{(II.28)}$$

Esta fórmula es válida para cualquier valor de N.

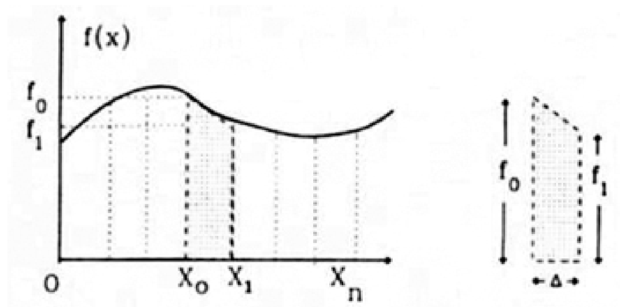


Figura II.10: *Regla de Trapecio. Tomando un conjunto de puntos de la curva, se calcula el área como la suma del área de los trapecios construidos uniendo los puntos mediante rectas.*

II.5.4. Regla del trapecio.

A continuación incluímos la fórmula usada para calcular numéricamente el área bajo una curva $y = f(x)$ usando trapecios (en lugar de rectángulos) como unidades elementales. De cualquiera de las Figuras de esta Sección, se desprende que la idea es acomodar un trapecio bajo la curva, apoyando uno de sus catetos en el eje x y el cateto opuesto aproxima la curva mediante una recta.

Si queremos calcular el valor del área bajo la curva entre los puntos $x = a$ y $x = b$, dividimos dicho segmento en $(N - 1)$ segmentos mediante los puntos x_n con $0 \leq n \leq N$. El valor de la función en cada uno de sus puntos se designa como $f_n \equiv f(x_n)$, es decir $f_0 \equiv f(x_o) = f(a)$, $f_1 \equiv f(x_1)$... $f_N \equiv f(x_N) = f(b)$, donde hemos identificado x_0 con a y x_n con b.

Recordemos que el área de un trapecio es la semisuma de sus bases multiplicada por la altura. La fórmula para el área de un trapecio cualquiera dentro del tramo de interes es:

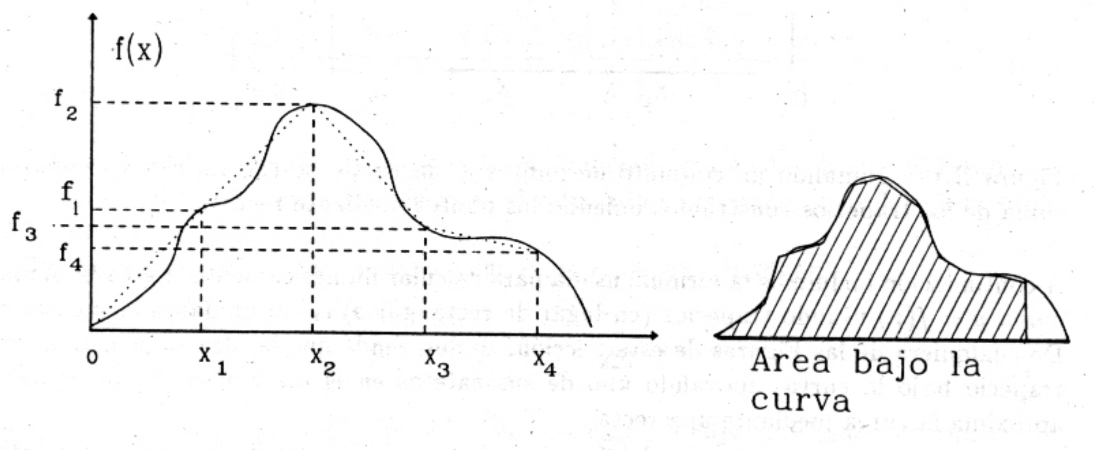
$$\text{Area del trapecio} = \frac{1}{2}\,[f_{n-1} + f_n]\,(x_n - x_{n-1}).$$

En este caso, el trapecio está puesto en forma vertical: la base del trapecio es cada una de las verticales señaladas como f_0, f_1, f_2,... f_N, cuyo valor es el valor que toma la función $f(x)$ para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$...$x = N$ respectivamente (ver Figura).

Si sumamos el área de cada uno de los trapecios de la Figura, suponiendo que todos los trazos son iguales: $[x_n - x_{n-1}] \equiv \Delta$, para simplificar el álgebra, obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_a^b f(x)\Delta \simeq \quad & \Delta[f_0 + f_1]/2 + \\ & \Delta[f_1 + f_2]/2 + \Delta[f_2 + f_3]/2 + ... \\ & + \Delta[f_{N-2} + f_{N-1}]/2 + \Delta[f_{N-1} + f_N]/2. \\ = \Delta & \left\{ 1/2 \cdot f_0 + \left[\sum_{i=1}^{N-1} f_i\right] + 1/2 \cdot f_N \right\}. \end{aligned} \tag{II.29}$$

La suma $\left\{\sum_a^b f(x)\,\Delta\right\}$ indica el valor del área encerrada entre $x = a$ y $x = b$ por la función f(x).



II.6. EJERCICIOS

1.- A partir de la serie:

$$(1+x)^n = \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{n!}{(n-\alpha)!}\,\frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

compruebe que para $h << 1$, es posible aproximar $(1+h)^n$ como:

$$(1+h)^n \approx 1 + n\,h + O(h^2).$$

Para verificar la exactitud de esta aproximación, elija tres valores de h, por ejemplo: 0,01, 0,1 y 0,5, con ellos calcule el valor de $(1+h)^8$ de dos formas: utilizando la expresión exacta y a través de la aproximación mencionada. Compárelos y estime el porcentaje de error cometido, en cada uno de los casos, al truncar la serie.

2.- Compruebe si la igualdad propuesta es correcta.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

a.- Para calcularla numéricamente, procure reordenar la serie agrupando términos consecutivos, y calculando su valor. Por ejemplo calcule como: (1-1/3)+ (1/5 - 1/7)+ ... Éstos son los nuevos términos de la serie reordenada.

b.- Muestre que la serie reordenada se puede escribir como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}.$$

3.- Calcule el valor de las siguientes series:

$$a) \quad 1 + 1/2! + 1/3! + .., 1/n! + ...$$

$$b) \quad 1/2! - 1/3! + 1/4! - 1/5! + ...$$

$$c) \quad 1 - 1/2! + 1/3! - 1/4! + ...$$

Respuestas: a) $(e-1)$, b) e^{-1}, c) $(1 - e^{-1})$.

Compruebe estos resultados numéricamente.

4.- Sean α y δ dos ángulos medidos en radianes.

i) Usando la expresión para la suma de ángulos, calcule:

$$\frac{[\,\mathrm{sen}(\alpha+\delta) - \mathrm{sen}\,\alpha]}{\delta},$$

ii) Haga tender a cero el valor de δ, es decir, suponga que $\delta << 1$ y calcule el valor de la expresión anterior, utilizando las aproximaciones relevantes.

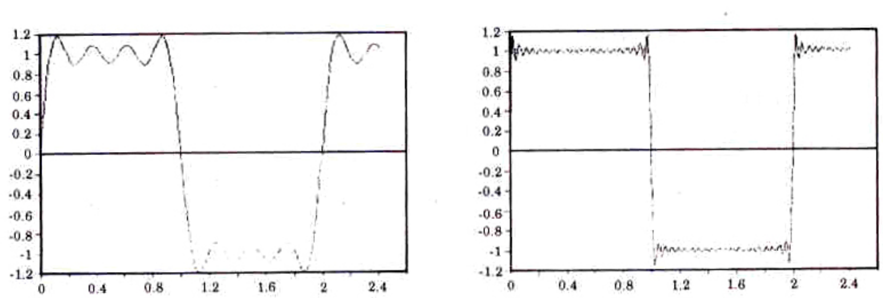


Figura II.11: *El gráfico de la izquierda corresponde a la serie truncada en el octavo término. Si se incluyen los primeros 41, se obtiene el gráfico de la derecha.*

5.- Graficar la función:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}[\,\mathrm{sen}\,x + (\,\mathrm{sen}\,3x)/3 + (\,\mathrm{sen}\,5x)/5 + ...]$$

Compruebe que al aumentar el número de términos de la serie, ésta se aproxima rápidamente a la función:

$$f(x) = \;\; +1 \qquad 0 < x < \pi$$

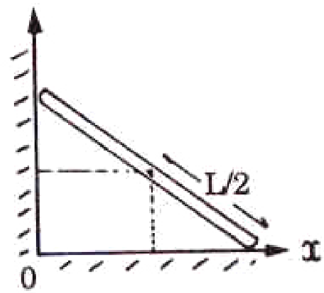
$$f(x) = \;\; -1 \qquad \pi < x < 2\pi$$

Compruebe que para $x = \pi$ se produce una discontinuidad de la función y en el caso que $n \to \infty$, este salto es del orden de un $18\,\%$ de la altura de la función.

¿Puede ver esto en el gráfico del computador ? (Nota: sume un número grande de términos de la serie).

6.- Considere una escalera apoyada en una muralla.

Demostrar que el punto medio de esta escalera, de largo L que resbala apoyándose en el muro, describe una circunferencia.
La ecuación de una circunferencia de radio R es: $x^2 + y^2 = R^2$.



7.- Una camionada de arena seca se descarga formando un cono cuya base es una circunferencia de 4 metros de diámetro. Si la pendiente de la arena seca es de $\theta = 32°$ y su densidad es $\rho = 1,7$ g/cm^3, calcule la masa de la arena.

skip

8.- Encuentre el ángulo entre dos diagonales de un cubo.

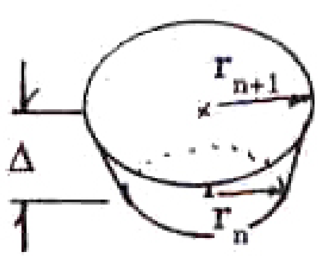
9.- ¿Cómo cortaría un cubo mediante un plano de forma que la intersección entre el plano y las superficies de cubo formen un hexágono regular?

10.- Un tetraedro regular es la figura geométrica que se obtiene al formar una pirámide con cuatro triángulos equiláteros idénticos. Encuentre el ángulo entre dos de sus caras. Debe definir lo que entiende por un ángulo entre dos superficies planas.

11.- ¿Para qué latitud, el paralelo terrestre tiene 1/3 de la longitud del Ecuador?

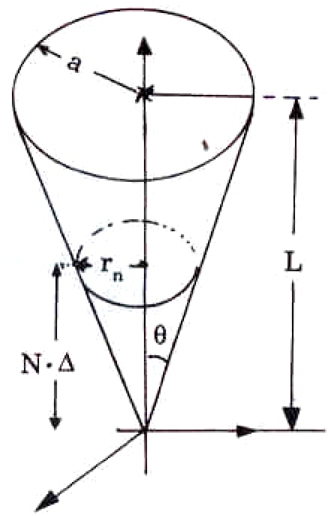
12.- Se pide calcular el volumen del cono que se muestra en la Figura.

Para ello se sugiere trabajar de la siguiente forma:
a) Descomponga el cono en una suma de troncos de cono de altura constante Δ y cuyo volumen está dado por la fórmula siguiente:



$$V_{\text{Tronco de Cono}} = \pi \cdot \left[\frac{r_n + r_{n+1}}{2}\right]^2 \cdot \Delta.$$

Sume cada uno de estos volúmenes hasta completar el cono. Use las propiedades de la sumatoria y los resultados obtenidos anteriormente para:



$$\sum_{n=1}^{n=N} n^2 = \frac{N(2N+1)(N+1)}{6},$$

$$\sum_{n=1}^{n=N} n = \frac{N(N+1)}{2},$$

$r_n = n{\cdot}\Delta{\cdot}\tan\,\theta,\ \ \Delta = $ Cte., $\tan\,\theta = \dfrac{a}{L} = $ Cte.

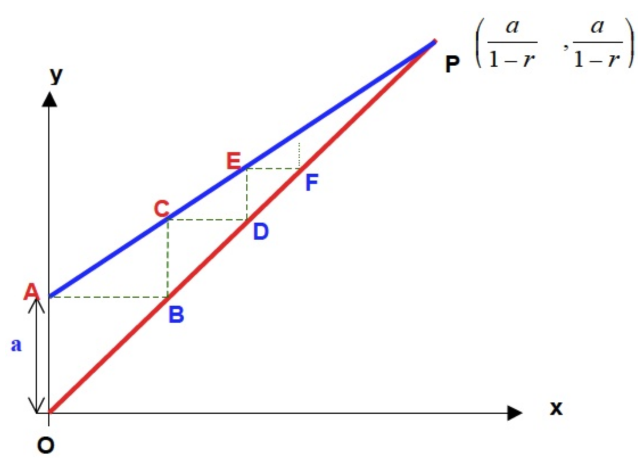
b) Para obtener el valor exacto del volumen de un cono, tome los siguientes límites en los resultados anteriores:

$$\Delta \longrightarrow 0, \qquad N \longrightarrow \infty,$$

de manera que el producto permanezca constante.

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta\to 0}} \quad N \bullet \Delta = L.$$

13.- En la figura aparecen dos líneas rectas que se cortan en el punto **P** de coordenadas (a/(1-r), a/(1-r)). r es un número positivo menor que la unidad: $0 < r < 1$ y **a** es un número real positivo arbitrario, como 2,3 ó 3 ó 4,5.



A partir de la figura:

a.- Escriba la ecuación de la recta que pasa por el origen O y el punto P. b.- Muestre que la ecuación de la recta que pasa por el punto A y el punto P adopta la forma y = r x +a c.- Demuestre que AB es igual a OA = a d.- ¿Qué longitud tiene BC? (Puede ser de ayuda considerar la pendiente de la recta AP) e.- ¿Qué longitud tiene ED? f.- A partir de la figura y sumando los trazos AB, CD, EF... obtenga el siguiente resultado: $a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ... = a/[1 - r]$

14.- Consiga una hoja de papel muy larga y con un grosor de $0,1$ mm $(10^{-4}$ m). Comience a doblarla por su mitad, de manera que en cada doblez el grosor aumenta al doble.

¿Cuántos **dobleces** son necesarios, para que el grosor final que adquiere, alcance a cubrir la distancia Tierra–Luna (aproximadamente 380.000 Km)?
Antes de hacer el cálculo escoja alguna de las alternativas propuestas en la Tabla.

a) 42 veces
b) 1320 veces
c) 483200 veces
d) 639421 veces
e) $2,4 \bullet 10^8$ veces.

Ahora calcule y concluya cuánto puede confiar en su intuición.

En el sitio del New York Times apareció un artículo con el título **Power Tools** de Steven Strogatz (matemático) donde relata una estudiante de secundaria de Pomona, California, Britney Gallivan, estudiando este problema dedujo una fórmula que relacionaba el largo del papel **L** con el número de dobleces **n**

$$L = \frac{\pi T}{6} (2^n + 4)(2^n - 1))$$

donde **T** es el grosor del papel. Llevó su fórmula a la práctica y con un papel higiénico de 3/4 de milla de longitud logró doblarlo 12 veces, verificando así su predicción. Las potencias de 2 aparecen dos veces en la fórmula debido a que en cada doblez, se duplica el grosor y disminuye a la mitad el largo del papel. La página donde apareció esto es

http://opinionator.blogs.nytimes.com/2010/03/28/power-tools/

Ver U-cursos.

15.- Estudie la siguiente situación: alrededor del Ecuador terrestre se construye un anillo metálico que calza en forma exacta, sin huelgo. A continuación se corta el anillo metálico en un punto y se le agrega un pedazo de anillo de 1 metro de longitud. Si al agregarle el nuevo pedazo, el anillo queda suspendido equidistante de la superficie terrestre a una altura h:

a) Estime, sin calcular: ¿A qué altura queda el anillo?

b) Haga el cálculo numérico y compare con su estimación.

16.- a.- ¿Con qué rapidez puede Ud. lanzar una piedra?

b.- ¿Qué velocidad cree Ud. que alcanza una bala a la salida del cañón.

En ambos casos, justifique cuantitativamente su estimación.

17.- a.- Calcule *numéricamente* el valor de la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = ?$$

Indicación:

Calcule esta suma con tres cifras significativas. Descarte los términos de la serie más pequeños que 10^{-4} y al sumarlos aproxime la última cifra de modo que mantenga el mismo número de cifras significativas del comienzo.

b.- Recordando que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$

Calcule *el valor exacto* de la serie propuesta en la parte a).

Se propone el siguiente método:
1.- Escriba la serie correspondiente al número $e = e^1$.
2.- A la serie propuesta en la primera parte, sume la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1/(k+1)! \qquad \textit{término a término}.$$

3.- Relacione esta nueva serie con la asociada al número **e**.

18.- **Estimación del alcance visual sobre el horizonte.**

Suponga que un observador se encuentra a una altura**h** sobre el piso en un terreno sin accidentes . ¿A qué distancia ℓ, se halla el horizonte visible?

Use la aproximación h/R<<1, en la expresión final de su resultado.

(Use $R = 6{,}400$ km). Calcule ℓ para:

$h_1 = 2$ m, ($\sim$ estatura de una persona),

$h_2 = 20$ m, ($\sim$ vigía de un barco),

$h_3 = 300$ m, ($\sim$ altura del cerro San Cristóbal).

(Ver Figura)

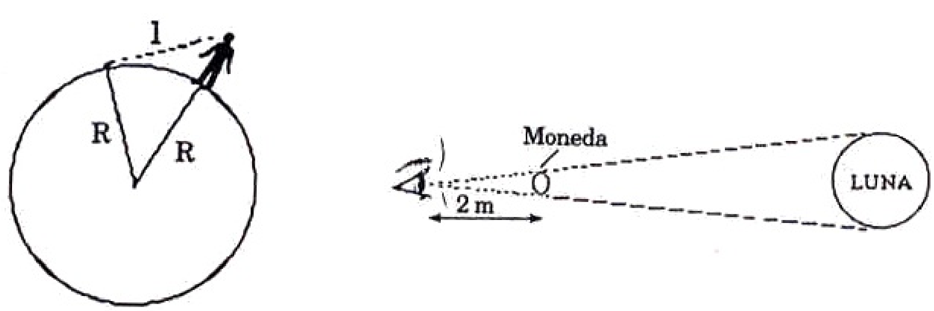


Figura II.12:

19.- **Relación entre el diámetro de la Luna y su distancia a la Tierra.**

Se intercala una moneda de un diámetro de 2 cm. entre el ojo y la Luna, ocultándola a la vista. La moneda se aleja gradualmente, encontrándose que el borde de la Luna empieza a ser visible cuando la moneda está a unos dos metros de la pupila.

Use estos datos para encontrar una relación entre el diámetro de la Luna y su distancia a la Tierra.

20.- **Tamaño de la Luna y distancia a la Tierra.**

El tamaño de la Luna fue comparado con el de la Tierra por Aristarco (270 A. de C.), durante un eclipse lunar. (Esto ocurre cuando la Tierra se interpone entre la Luna y el Sol). Aristarco midió el tiempo que tardaba la Luna en cruzar la sombra de la Tierra, y encontró que el diámetro de la sombra terrestre era dos veces y media el diámetro de la Luna.

Sin embargo, la sombra de los planetas no es un cilindro, sino un cono. Durante una eclipse solar (cuando la Luna se interpone entre el Sol y la Tierra), es sólo un poco más que el vértice del cono de sombra de la Luna lo que alcanza a la Tierra.

Aristarco dedujo esto observando que durante el eclipse, la Luna cubre apenas el disco solar. Argumentó que en un eclipse de Luna, la sombra de la Tierra se reduce en la misma razón que en el caso de la Luna.

Con estos datos, deduzca que $d = \frac{2}{7}D$, donde d es el diámetro lunar y D, el diámetro terrestre. Usando este resultado, el valor del radio terrestre y la relación entre el diámetro de la Luna y su distancia a la Tierra, estime:

a) el diámetro lunar,

b) la distancia Tierra–Luna.

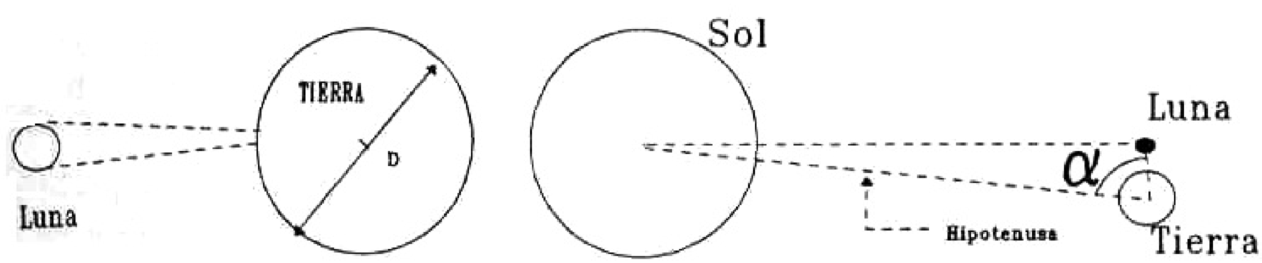


Figura II.13:

.

21.- **Distancia Tierra–Sol.**

La distancia de la Tierra al Sol es difícil de estimar. Aristarco notó que cuando hay media Luna (es decir, se ve iluminada exactamente la mitad del disco lunar), los rayos del sol deben caer sobre la Luna perpendicularmente con respecto a la línea de visión del observador. En ese momento es posible medir el ángulo α con que el Sol es visto desde la Tierra. Su valor es muy cercano al de un ángulo recto: $90° - \alpha \simeq 1°$.

(Aristarco, erróneamente, lo estimó en: $90^\circ - \alpha \simeq 3^\circ$).

Use este resultado y la distancia Tierra–Luna, para estimar la distancia Tierra–Sol.

Estime, además, la rapidez (módulo de la velocidad) con que la tierra orbita alrededor del Sol.

22.- **Masa de la Tierra.**

La mayoría de los líquidos y sólidos constituyentes de nuestro planeta tienen densidades que fluctúan entre 1 y 10 kg/lt. A partir de estos datos y usando $R = 6{,}400$ km para el radio de la Tierra, *estime* un valor para su masa.