Elementos de Estadística

Mayo 2007

GUÍA 1

Profesores: Sebastián Court - Julio Deride - Jorge Lemus
Ayudantes: Daniela Soto - Pamela Soto

1. Variables Aleatorias Discretas

1.1. Problema 1

(a) Considere la variable aleatoria que puede tomar valores en el conjunto $\{0,1\}$. Además, el valor 0 se toma con probabilidad p_1 y 1 con p_2, es decir $\mathbb{P}(X=0)=p_1$ y $\mathbb{P}(X=1)=p_2$.

$$X=\begin{cases}0 & p_1\\ 1 & p_2\end{cases},\quad p_1+p_2=1,\, p_1\geq 0,\, p_2\geq 0.$$

- **(i)** Calcule $\mathbb{E}(X)$.
- **(ii)** Defina la variable aleatoria $Y=X^2$. Encuentre cuáles son los posible valores que toma Y y con qué probabilidad lo hace. Calcule $\mathbb{E}(Y)$.
- **(iii)** Calcule $Var(X)$, usando la definición y las propiedades de la esperanza. Recuerde que: $Var(X)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))^2\right]$.

(b) Consiga una moneda y defina la siguiente variable aleatoria:

$$X=\begin{cases}0 & \text{Si la moneda sale sello}\\ 1 & \text{Si la moneda sale cara}\end{cases}.$$

- **(i)** Lance la moneda 10 veces y escriba la secuencia de realizaciones que obtenga.
- **(ii)** Defina $c=\frac{\text{Numero Caras}}{10}$ y $s=\frac{\text{Numero de Sellos}}{10}$. ¿Es cierto que $p_1=s$ y/o $p_2=c$?, donde $p_1=\mathbb{P}(X=0)$ y $p_2=\mathbb{P}(X=1)$. Explique.

1.2. Problema 2

Suponga la variable aleatoria X que indica el día en que falla un aparato electrónico. X se distribuye según una Poisson de parámetro $\lambda=2$, es decir, $X\sim\mathcal{P}(2)$.

(i) Encuentre la probabilidad de que el aparato falle en 0 días, 1 día o en general en n días.

(ii) ¿Cuál es la esperanza de X? .¿Qué interpretación puede darle a este valor ?.

(iii) Si usted compra un televisor, en el día en que falla está dado por la variable aleatoria X definida antes, basándose en lo anterior, ¿Por cuántos días cree que le darían garantía? (Suponga que a los vendedores de televisores les importan las ventas en promedio).

2. Variables Aleatorias Continuas

2.1. Problema 3

Considere una variable aleatoria continua X, que mide el tiempo que dura la reacción de dos componentes químicos. Suponga que X está distribuida uniformemente en el intervalo [0,5], es decir su densidad es:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} & x \in [0,5] \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}.$$

(i) Grafique la función de densidad $f(t)$.

(ii) Diga cuál es la probabilidad que la reacción dure $0,5$ segundos, es decir, $\mathbb{P}(X = 0,5)$.

(iii) ¿Es posible que la reacción química dure $0,5$ segundos ?.

(iv) Calcule el tiempo esperado de la reacción química, es decir, $\mathbb{E}(X)$.

(v) Calcule la varianza de X.

2.2. Problema 4

Suponga que se tienen n variables aleatorias, cada una con distribución normal de media μ y varianza σ^2. Es decir, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

(i) ¿Cuál es la esperanza y varianza de X_i, para $i = 1, ..., n$?.

(ii) Se define una nueva variable aleatoria, $Y = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Utilizando propiedades de la esperanza, calcule $\mathbb{E}(Y)$.

(iii) Suponga ahora que conoce una realización para cada variable aleatoria, es decir, un conjunto de números reales $x_1, ..., x_n$, en donde x_i es la realización de la variable aleatoria X_i. Calcule el promedio $\overline{x}$ de este conjunto de variables. ¿Es éste promedio igual a μ ?.

2.3. Problema 5

Considere $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Usted sabe que X se distribuyen según una normal, pero no conoce ni la media μ ni la varianza σ^2.

(a) Suponga que la variable aleatoria se realiza 10 veces. Los resultados obtenidos son los siguientes:

$$(0, -1, \frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, 1, \frac{-2}{3}, 0).$$

Calcule la media y varianza **de los datos**. Sin más información que esta, ¿Con qué valor aproximaría a μ y a σ^2 ?.

(b) Ahora se realiza nuevamente el mismo procedimiento obteniendo los siguientes resultados:

$$(0, 1, -1, 0, 2, 0, -2, 0, -2, 2).$$

Usando sólo esta información, es decir, no conoce las realizaciones de la parte anterior, calcule nuevamente la media y varianza **de los datos**. ¿Con qué valor aproximaría a μ y a σ^2?

(c) A partir de los resultados encontrados en la parte (a) y en la parte (b), dé una interpretación para σ^2, como un coeficiente de dispersión de los datos.