69. a) ¿Qué tan grande tenemos que hacer x para que $1/x^2 < 0.0001$?

b) Al hacer $r = 2$ en el teorema 5, tenemos la proposición

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demuéstrela directamente aplicando la definición 7.

70. a) ¿Qué tan grande debemos tomar a x de manera que $1/\sqrt{x} < 0.0001$?

b) Tomando $r = \frac{1}{2}$ en el teorema 5, tenemos la proposición

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demuéstrela directamente aplicando la definición 7.

71. Demuestre, mediante la definición 8, que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

72. Demuestre, mediante la definición 9, que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

73. Utilice la definición 9 para demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

74. Formule una definición precisa de

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Después utilice su definición para demostrar que

$$\lim_{x\to-\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

75. Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+} f(1/t)$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^-} f(1/t)$$

si estos límites existen.

2.7 Derivadas y razones de cambio

El problema de encontrar la recta tangente a una curva y el problema de encontrar la velocidad de un objeto involucran encontrar el mismo tipo de límite, como vimos en la sección 2.1. Este tipo especial de límite se denomina *derivada* y en las ciencias e ingeniería puede ser interpretada como una razón de cambio.

Tangentes

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y quiere usted hallar la recta tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la recta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Después, acerque Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende un número m, entonces definimos la *tangente t* como la recta que pasa por P con pendiente m. (Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiene a P. (Véase la figura 1.)

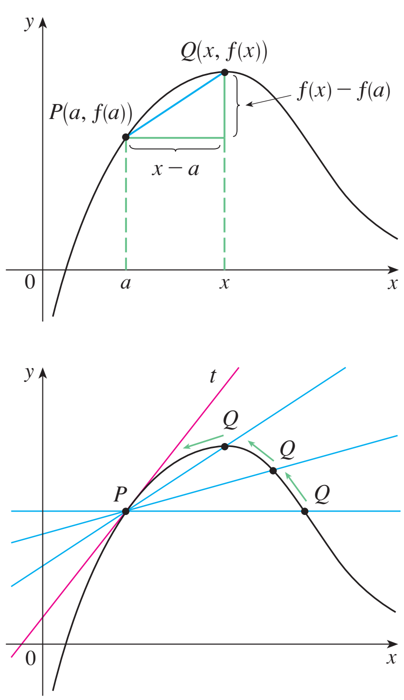


FIGURA 1

1 Definición La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que este límite exista.

En nuestro primer ejemplo, se confirma la suposición que hicimos en el ejemplo 1 de la sección 2.1.

V EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en el punto $P(1,1)$.

SOLUCIÓN En este caso, $a = 1$ y $f(x) = x^2$, de modo que la pendiente es

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Forma punto-pendiente para una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Con la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, se encuentra que la ecuación de la recta tangente en (1, 1) es

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = 2x - 1$$

TEC Visual 2.7 muestra una animación de la figura 2.

A veces se hace referencia a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la **pendiente de la curva** en el punto. La idea es que si se acerca lo suficiente al punto, la curva parece una línea recta. En la figura 2 se ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$ del ejemplo 1. Cuanto más se acerque, tanto más la parábola se parece a una recta. En otras palabras, la curva casi se vuelve indistinguible de su recta tangente.

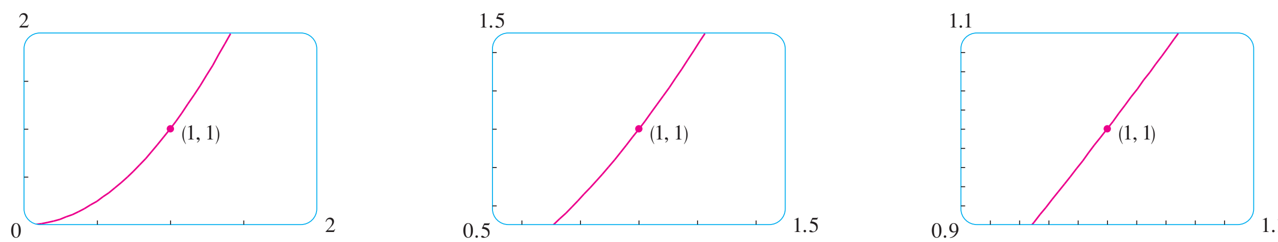


FIGURA 2 Acercamiento hacia el punto (1, 1) sobre la parábola $y = x^2$

Existe otra expresión para la pendiente de la recta tangente que a veces es más fácil de usar. Si $h = x - a$, en este caso $x = a + h$, entonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

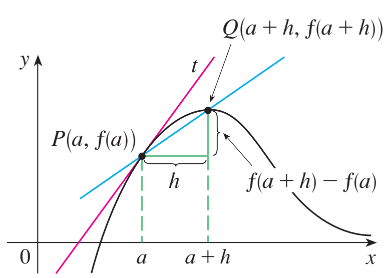


FIGURA 3

(Véase la figura 3, donde se ilustra el caso $h > 0$ y Q está a la derecha de P. Sin embargo, si $h < 0$, Q estaría a la izquierda de P.)

Note que conforme x se aproxima a a, h se acerca a 0 (puesto que $h = x - a$) y, por ende, la expresión de la pendiente de la recta tangente, en la definición 1 se convierte en

2 $$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

EJEMPLO 2 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$, en el punto (3, 1).

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 3/x$. Entonces, la pendiente de la tangente en (3, 1) es

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{3-(3+h)}{3+h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

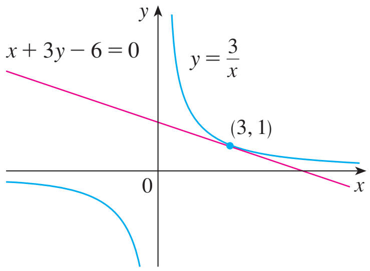


FIGURA 4

En consecuencia, la ecuación de la tangente en el punto (3, 1) es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

la cual se simplifica a

$$x + 3y - 6 = 0$$

En la figura 4 se muestra la hipérbola y su tangente.

Velocidades

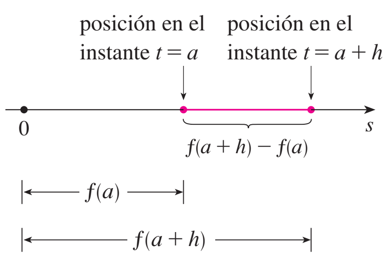


FIGURA 5

En la sección 2.1 investigamos el movimiento de una pelota que se dejó caer desde la Torre CN, y se definió su velocidad como el límite del valor de las velocidades promedio sobre periodos de tiempo cada vez más cortos.

En general, suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia dirigida) del objeto respecto al origen, en el tiempo t. La función f que describe el movimiento se conoce como **función posición** del objeto. En el intervalo de tiempo $t = a$ hasta $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$. (Véase la figura 5.) La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

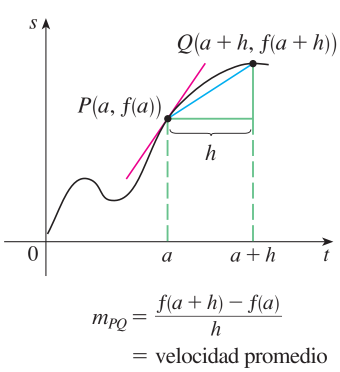


FIGURA 6

que es lo mismo que la pendiente de la recta secante PQ en la figura 6.

Suponga ahora que calcula las velocidades promedio sobre intervalos de tiempo $[a, a + h]$ más y más cortos. En otras palabras, haga que h tienda a 0. Como en el ejemplo de la pelota que cae, se definió la **velocidad** (o **velocidad instantánea**) $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

3
$$\boxed{v(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en P. (Compare las ecuaciones 2 y 3.)

Ahora que sabe calcular límites, vuelva a considerar el problema de la pelota que cae.

V EJEMPLO 3 Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma superior de observación de la Torre CN, a 450 m sobre el nivel del suelo.

a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos?
b) ¿Con qué rapidez cae cuando choca contra el suelo?

Recuerde que en la sección 2.1 vimos que la distancia (en metros) que recorre la pelota que cae una vez que transcurre t segundos es $4.9t^2$.

SOLUCIÓN Necesita usted hallar la velocidad cuando $t = 5$ y cuando la pelota golpea el suelo, de tal manera que es conveniente iniciar la búsqueda de la velocidad en un tiempo general $t = a$. Empleando la ecuación de movimiento $s = f(t) = 4.9t^2$, se tiene

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(2ah + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4.9(2a + h) = 9.8a$$

a) La velocidad después de 5 s es $v(5) = (9.8)(5) = 49$ m/s.
b) Puesto que la plataforma de observación está a 450 m sobre el nivel del suelo, la pelota chocará contra el suelo en el instante t_1, cuando $s(t_1) = 450$; es decir,

$$4.9t_1^2 = 450$$

Esto da

$$t_1^2 = \frac{450}{4.9} \qquad \text{y} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6 \text{ s}$$

Por tanto, la velocidad de la pelota cuando choca contra el suelo es

$$v(t_1) = 9.8t_1 = 9.8\sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 94 \text{ m/s}$$

Derivadas

Hemos visto que en la búsqueda de la pendiente de una recta tangente (ecuación 2) o la velocidad de un objeto (ecuación 3) surge la misma clase de límite. De hecho, límites en la forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

surgen cuando calculamos una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o en ingeniería, tal como la velocidad de reacción en química o un costo marginal en economía. Ya que esta clase de límite aparece muy a menudo, se da un nombre y notación especial.

$f'(a)$ se lee "f prima de a".

4 Definición La **derivada de una función f en un número $x = a$**, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Si se escribe $x = a + h$, entonces $h = x - a$ y h tiende a 0 si y sólo si x tiende a a. En consecuencia, una manera equivalente de expresar la definición de la derivada, como vimos en la búsqueda de rectas tangentes, es

5 $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

V EJEMPLO 4 Encuentre la derivada de la función $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número $x = a$.

SOLUCIÓN De la definición 4 se tiene

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h\to 0} (2a + h - 8) \\ &= 2a - 8 \end{aligned}$$

Definimos la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ como la recta que pasa por P y tiene pendiente m, dada por la ecuación 1 o 2. Ya que, por la definición 4, ésta es la misma que la derivada $f'(a)$, podemos decir lo siguiente.

La recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, la derivada de f en $x = a$.

Si utilizamos la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, podemos escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

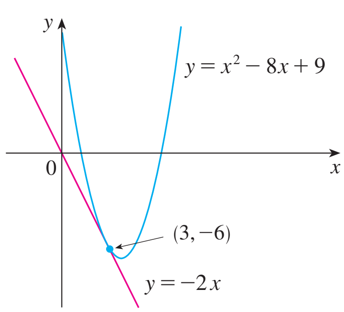


FIGURA 7

V EJEMPLO 5 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 8x + 9$ en el punto $(3, -6)$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 4 sabemos que la derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número $x = a$ es $f'(a) = 2a - 8$. En consecuencia, la pendiente de la recta tangente en $(3, -6)$ es $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. En estos términos, la ecuación de la recta tangente que se muestra en la figura 7, es

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \quad \text{o bien} \quad y = -2x$$

Razones de cambio

Suponga que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Así, y es una función de x y lo expresamos como $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el cambio en x (también conocido como **incremento** de x) es

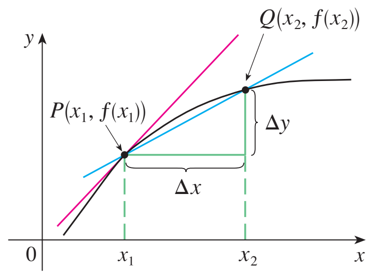
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



razón de cambio promedio $= m_{PQ}$
razón de cambio instantánea $=$ pendiente de la recta tangente en P

FIGURA 8

se llama **razón de cambio promedio de y respecto a x** sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, y puede interpretarse como la pendiente de la recta secante PQ en la figura 8.

Por analogía con la velocidad, considere la razón de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños haciendo que x_2 tienda a x_1 y, por tanto, hacer que Δx tienda a 0. El límite de estas razones de cambio promedio se llama **razón de cambio (instantánea) de y respecto a x** en $x = x_1$, lo cual se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

6 Razón de cambio instantánea $= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Reconocemos este límite como la derivada $f'(x_1)$.

Sabemos que una interpretación de la derivada $f'(a)$ es como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = a$. Ahora tenemos una segunda interpretación:

La derivada $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ respecto a x cuando $x = a$.

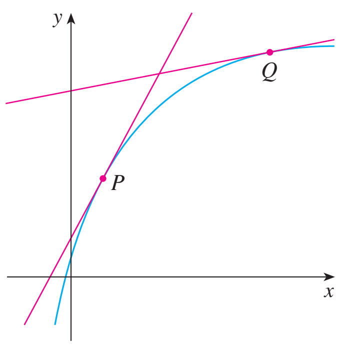


FIGURA 9
Los valores de y cambian rápidamente en P y lentamente en Q.

El vínculo con la primera interpretación es que si dibuja la curva $y = f(x)$, entonces la razón de cambio instantánea es la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto donde $x = a$. Esto significa que cuando la derivada es grande (y, en consecuencia, la curva es escarpada, como en el punto P de la figura 9), los valores de y cambian rápidamente. Cuando la derivada es pequeña, la curva es relativamente plana (como en el punto Q), y el valor de y cambia lentamente.

En particular, si $s = f(t)$ es la función posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, entonces $f'(a)$ es la razón de cambio del desplazamiento s respecto al tiempo t. En otras palabras, *$f'(a)$ es la velocidad de la partícula en el tiempo $t = a$*. La **rapidez** de la partícula es el valor absoluto de la velocidad, es decir, $|f'(a)|$.

En el siguiente ejemplo se analiza el significado de la derivada de una función que está definida verbalmente.

V EJEMPLO 6 Un fabricante produce un rollo de un tejido con ancho fijo. El costo de producir x yardas de este tejido es de $C = f(x)$ dólares.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) En términos prácticos, ¿qué significa decir que $f'(1\,000) = 9$?
c) ¿Cuál piensa que es más grande $f'(50)$ o $f'(500)$? ¿Qué hay respecto a $f'(5\,000)$?

SOLUCIÓN

a) La derivada $f'(x)$ es la razón de cambio instantánea de C respecto a x, es decir, $f'(x)$ significa la razón de cambio del costo de producción respecto al número de yardas producidas. (Los economistas llaman a esta rapidez de cambio *costo marginal*. Esta idea se analiza en más detalle en las secciones 3.7 y 4.7.)

Ya que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

las unidades para $f'(x)$ son las mismas que las unidades para el cociente de diferencias $\Delta C/\Delta x$. Puesto que ΔC se mide en dólares y Δx en yardas, las unidades para $f'(x)$ son dólares por cada yarda.

b) El enunciado de que $f'(1\,000) = 9$ significa que, después de fabricar 1 000 yardas de tejido, la cantidad a la cual se incrementa el costo de producción es de 9 dólares/yarda. (Cuando $x = 1\,000$, C se incrementa 9 veces tan rápido como x.)

En este caso suponga que la función costo se comporta bien; en otras palabras, $C(x)$ no oscila rápidamente cerca de $x = 1\,000$.

Dado que $\Delta x = 1$ es pequeño si se le compara con $x = 1000$, podría usarse la aproximación

$$f'(1\,000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

y decimos que el costo de fabricación de las 1 000 yardas (o de la 1 001) es de casi 9 dólares.

c) La razón a la cual se incrementa el costo de producción (por cada yarda) probablemente es inferior cuando $x = 500$ que cuando $x = 50$ (el costo de fabricación de la yarda 500 es menor que el costo de la yarda 50) debido a la escala económica. (El fabricante hace más eficiente el uso de los costos de producción fijos.) De manera que

$$f'(50) > f'(500)$$

Pero, conforme se expande la producción, el resultado de la operación a gran escala será ineficiente y con eso los costos de horas extra de trabajo. En estos términos, es posible que la razón de incremento de costos empezarán con el tiempo a subir. De este modo, es posible que suceda que

$$f'(5\,000) > f'(500)$$

En el ejemplo siguiente estimaremos la razón de cambio de la deuda nacional respecto al tiempo. En este caso, la función no se define mediante una fórmula sino mediante una tabla de valores.

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1 945.9
1990	3 233.3
1995	4 974.0
2000	5 674.2
2005	7 932.7

V EJEMPLO 7 Sea $D(t)$ la deuda nacional de EU en el tiempo t. La tabla en el margen proporciona valores aproximados de esta función siempre que se estime a fin de año, en miles de millones de dólares, desde 1980 hasta 2005. Interprete y estime el valor de $D'(1990)$.

SOLUCIÓN La derivada $D'(1990)$ significa la razón de cambio de D respecto a t cuando $t = 1990$, es decir, la razón de incremento de la deuda nacional en 1990.

De acuerdo con la ecuación 5,

$$D'(1990) = \lim_{t \to 1990} \frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$$

Así que calculamos y tabulamos los valores del cociente de diferencias (la razón de cambio promedio) como sigue.

t	$\dfrac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09
2005	313.29

A partir de esta tabla vemos que $D'(1990)$ se localiza en alguna parte entre 257.48 y 348.14 miles de millones de dólares por cada año. [En este caso, está haciendo la suposición razonable de que la deuda no fluctuará de manera errática entre 1980 y el 2000.] Se estima que la razón de incremento de la deuda nacional de EU en 1990 fue el promedio de estos números, específicamente

$$D'(1990) \approx 303 \text{ miles de millones de dólares por cada año.}$$

Otro método sería una gráfica de la función deuda y estimar la pendiente de la recta tangente cuando $t = 1990$.

Una nota sobre unidades

Las unidades de la razón de cambio promedio $\Delta D/\Delta t$ son las unidades para ΔD divididas entre las unidades de Δt, o sea, miles de millones de dólares por cada año. La razón de cambio instantánea es el límite de la razón de cambio promedio, de este modo, se mide en las mismas unidades: miles de millones de dólares por cada año.

En los ejemplos 3, 6 y 7 aparecen tres casos específicos de razones de cambio: la velocidad de un objeto es la razón de cambio del desplazamiento respecto al tiempo; el costo marginal es la razón de cambio del costo de producción respecto al número de artículos producidos; la razón de cambio de la deuda respecto al tiempo es de interés en economía. Existen otras razones de cambio: en física, la razón de cambio de trabajo respecto al tiempo se le denomina *potencia*. Los químicos que estudian una reacción química están interesados en la razón de cambio de la concentración de un reactivo respecto al tiempo (denominada *velocidad de reacción*). Un biólogo se interesa en la relación de cambio de la población de una colonia de bacterias respecto al tiempo. De hecho, el cálculo de razones de cambio es importante en todas las ciencias naturales, en la ingeniería e, incluso, en las ciencias sociales. En la sección 3.7 se darán más ejemplos.

Todas estas razones de cambio son derivadas y pueden interpretarse como pendientes de rectas tangentes. Esto le confiere un significado adicional a la solución del problema de la tangente. Siempre que resuelve usted problemas en que intervienen rectas tangentes, no sólo resuelve un problema de geometría, también resuelve implícitamente gran variedad de problemas de las ciencias y la ingeniería, en que intervienen razones de cambio.

2.7 Ejercicios

1. Una curva tiene la ecuación $y = f(x)$.
a) Escriba una expresión para la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(3, f(3))$ y $Q(x, f(x))$.
b) Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente en P.

2. Dibuje la curva $y = e^x$ en los rectángulos de vista $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0.5, 0.5]$ por $[0.5, 1.5]$ y $[-0.1, 0.1]$ por $[0.9, 1.1]$. ¿Qué advierte acerca de la curva conforme hace un acercamiento hacia el punto (0, 1)?

3. a) Halle la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 4x - x^2$ en el punto (1, 3)
i) usando la definición 1 ii) usando la ecuación 2
b) Encuentre la ecuación de la recta tangente del inciso a).
c) Dibuje la parábola y la recta tangente. Como verificación de su trabajo, haga un acercamiento hacia el punto (1, 3) hasta que la parábola y la recta tangente sean indistinguibles.

4. a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x - x^3$ en el punto (1, 0)
i) usando la definición 1 ii) usando la ecuación 2
b) Halle la ecuación de la recta tangente del inciso a).
c) Dibuje la curva y la recta tangente en rectángulos de vista cada vez más pequeños centrados en (1, 0) hasta que parezcan coincidir la curva y la recta.

5-8 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto dado.

5. $y = 4x - 3x^2$, $(2, -4)$

6. $y = x^3 - 3x + 1$, $(2, 3)$

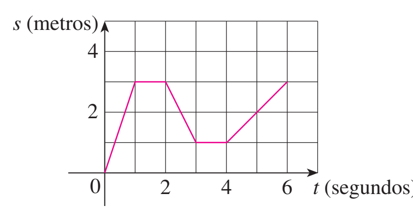
7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

8. $y = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$, $(1, 1)$

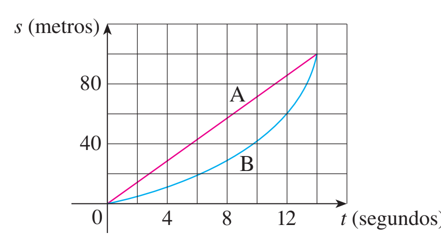
9. a) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ en el punto donde $x = a$.
b) Determine las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos (1, 5) y (2, 3).
c) Grafique la curva y ambas rectas tangentes en una misma pantalla.

10. a) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en el punto donde $x = a$.
b) Plantee las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos (1, 1) y $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
c) Grafique la curva y ambas rectas tangentes en una misma pantalla.

11. a) Una partícula empieza moviéndose a la derecha a lo largo de una recta horizontal; la gráfica de su función posición se muestra enseguida. ¿Cuándo se mueve la partícula a la derecha? ¿Cuándo a la izquierda? ¿Cuándo permanece inmóvil?
b) Dibuje una gráfica de la función velocidad.



12. Se muestran las gráficas de las funciones posición de dos competidoras, A y B, quienes compiten en los 100 m y terminan en empate.



a) Describa y compare cómo desarrollaron la carrera las competidoras.
b) ¿En qué momento hay la mayor distancia entre las competidoras?
c) ¿En qué momento tienen la misma velocidad?

13. Si una pelota se lanza al aire verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) una vez que transcurren t segundos, está dada por $y = 40t - 16t^2$. Encuentre la velocidad cuando $t = 2$.

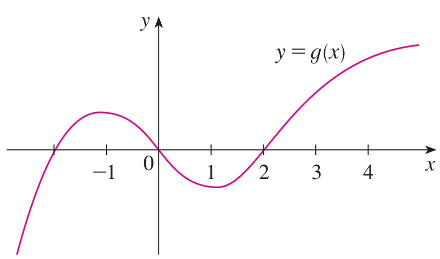
14. Si se lanza una roca verticalmente hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $H = 10t - 1.86t^2$.
a) Halle la velocidad de la roca después de un segundo.
b) Halle la velocidad de la roca cuando $t = a$.
c) ¿Cuándo caerá la roca a la superficie?
d) ¿Con qué velocidad la roca chocará contra la superficie?

15. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 1/t^2$, donde t se mide en segundos. Halle la velocidad de la partícula en los instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

16. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta esta dado por $s = t^2 - 8t + 18$, donde t se mide en segundos.
a) Encuentre la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo:
i) $[3, 4]$ ii) $[3.5, 4]$
iii) $[4, 5]$ iv) $[4, 4.5]$
b) Halle la velocidad instantánea cuando $t = 4$.
c) Dibuje la grafica de s como función de t y trace las rectas secantes cuyas pendientes son las velocidades promedio en el inciso a) y la recta tangente cuya pendiente es la velocidad instantánea en el inciso b).

17. Para la función g cuya gráfica está dada, reordene los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento.

$0 \quad g'(-2) \quad g'(0) \quad g'(2) \quad g'(4)$



18. Halle una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en $x = 5$ si $g(5) = -3$ y $g'(5) = 4$.

19. Si la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto donde $a = 2$ es $y = 4x - 5$, encuentre $f(2)$ y $f'(2)$.

20. Si la recta tangente a $y = f(x)$ en $(4, 3)$ pasa a través del punto $(0, 2)$, halle $f(4)$ y $f'(4)$.

21. Dibuje la gráfica de una función f para la cual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ y $f'(2) = -1$.

22. Dibuje la grafica de una función g para la cual
$g(0) = g(2) = g(4) = 0$, $g'(1) = g'(3) = 0$, $g'(0) = g'(4) = 1$, $g'(2) = -1$, $\text{lím}_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\text{lím}_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

23. Si $f(x) = 3x^2 - x^3$, encuentre $f'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - x^3$ en el punto $(1, 2)$.

24. Si $g(x) = x^4 - 2$ encuentre $g'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 - 2$ en el punto $(1, -1)$.

25. a) Si $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encuentre $F'(2)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 5x/(1 + x^2)$ en el punto $(2, 2)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

26. a) Si $G(x) = 4x^2 - x^3$, encuentre $G'(a)$ y utilícela para encontrar las rectas tangentes a la curva $y = 4x^2 - x^3$ en los puntos $(2, 8)$ y $(3, 9)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y las rectas tangentes en la misma pantalla.

27-32 Encuentre f'a) en cada una de las siguientes funciones.

27. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

28. $f(t) = 2t^3 + t$

29. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

30. $f(x) = x^{-2}$

31. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

32. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 - x}}$

33-38 Cada uno de los siguientes límites representa la derivada de alguna función f en algún número $x = a$. Establezca una f y una a en cada caso.

33. $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

34. $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

35. $\displaystyle \lim_{x\to 5} \frac{2^x - 32}{x - 5}$

36. $\displaystyle \lim_{x\to \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$

37. $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

38. $\displaystyle \lim_{t\to 1} \frac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

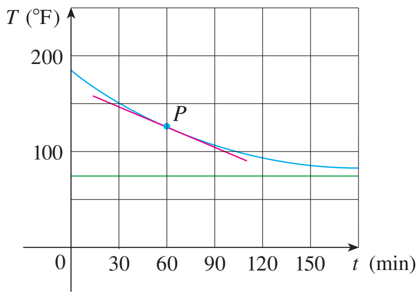
39-40 Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta con ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde s se mide en metros y t en segundos. Halle la velocidad y la rapidez cuando $t = 5$.

39. $f(t) = 100 + 50t - 4.9t^2$

40. $f(t) = t^{-1} - t$

41. Una lata de gaseosa tibia se pone a enfriar en un refrigerador. Grafique la temperatura de la gaseosa como función del tiempo. ¿La razón de cambio inicial de la temperatura es mayor o menor que la relación de cambio después de una hora?

42. Se saca un pavo asado del horno cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y se coloca sobre la mesa de un cuarto donde la temperatura es de 75°F. En la gráfica se muestra cómo disminuye la temperatura del pavo y, finalmente, tiende a la temperatura del cuarto. Por medio de la medición de la pendiente de la recta tangente, estime la razón de cambio de la temperatura después de una hora.



43. La tabla muestra el número N de usuarios de telefonía celular en EU. (Se proporcionan estimaciones semestrales.)

t	1996	1998	2000	2002	2004	2006
N	44	69	109	141	182	233

a) Halle la razón de crecimiento promedio de celulares
i) de 2002 a 2006 ii) de 2002 a 2004
iii) de 2000 a 2002
En cada caso, incluya las unidades.

b) Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2002 tomando dos razones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?

c) Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2002 midiendo la pendiente de una recta tangente.

44. En la tabla se proporciona el numero N de establecimientos de una popular cadena de cafeterías. (Se dan los números de establecimientos al 1 de octubre.)

Año	2004	2005	2006	2007	2008
N	8569	10 241	12 440	15 011	16 680

a) Determine la tasa promedio de crecimiento
i) desde 2006 hasta 2008 ii) desde 2006 hasta 2007
iii) de 2005 hasta 2006
En cada caso incluya las unidades.

b) Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2006 considerando dos razones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?

c) Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2006 midiendo la pendiente de una recta tangente.

d) Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2007 y compárela con la razón de crecimiento en 2006. ¿Qué concluye?

45. El costo (en dólares) de producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 5\,000 + 10x + 0.05x^2$.

a) Encuentre la razón de cambio promedio de C respecto a x, cuando cambia el nivel de producción:
i) de $x = 100$ a $x = 105$
ii) de $x = 100$ a $x = 101$

b) Halle la razón de cambio instantáneo de C respecto a x, cuando $x = 100$. (Esto se conoce como *costo marginal*. En la sección 3.7 se explica su significado.)

46. Si un tanque cilíndrico contiene 100 000 galones de agua que se pueden drenar por el fondo del depósito en 1 h, entonces la ley de Torricelli da el volumen V del agua que queda después de t minutos como

$$V(t) = 100\,000\left(1 - \tfrac{1}{60}t\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 60$$

Encuentre la rapidez con que fluye el agua hacia afuera del tanque (la razón de cambio instantáneo de V respecto a t) como función de t. ¿Cuáles son sus unidades? Para los instantes $t = 0$, 10, 20, 30, 40, 50 y 60 min, encuentre el gasto y la cantidad de agua que queda en el tanque. Resuma sus hallazgos en una frase o dos. ¿En qué instante el gasto es máximo? ¿Cuándo es mínimo?

47. El costo de producir x onzas de oro a partir de una reciente mina de oro es $C = f(x)$ dólares.

a) ¿Cual es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?

b) ¿Que significa establecer $f'(800) = 17$?

c) Qué piensa usted: ¿los valores de $f'(x)$ se incrementarán o disminuirán en corto plazo? ¿Y a largo plazo? Explique.

48. El número de bacterias después de t horas en un experimento controlado de laboratorio es $n = f(t)$.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(5)$? ¿Cuáles son sus unidades?

b) Considere que existe una cantidad de espacio y nutrientes para la bacteria. Qué cree usted: ¿Es mayor $f'(5)$ o $f'(10)$? Si se limita el suministro de nutrientes, ¿afectaría su conclusión? Explique.

49. Sea $T(t)$ la temperatura (en °F) en Phoenix t horas después de la medianoche del 10 de septiembre de 2008. La tabla muestra los valores de esta función registrada cada dos horas. ¿Cuál es el significado de $T'(8)$? Estime su valor.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	82	75	74	75	84	90	93	94

50. La cantidad (en libras) de un café que es vendido por una compañía en un precio de p dólares por cada libra es $Q = f(p)$.

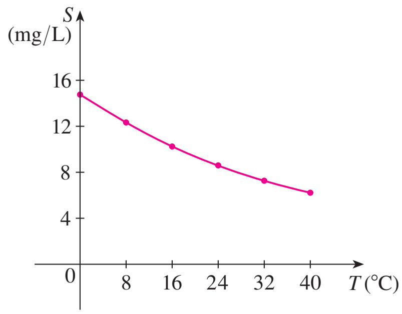
a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(8)$? ¿Cuáles son sus unidades?

b) ¿$f'(8)$ es positiva o negativa? Explique.

51. La cantidad de oxígeno que puede disolverse en agua depende de la temperatura de ésta. (De esa manera la polución térmica induce el contenido de oxígeno en el agua.) La gráfica muestra cómo varia la solubilidad S de oxígeno como una función de la temperatura del agua T.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

b) Estime e interprete el valor de $S'(16)$.

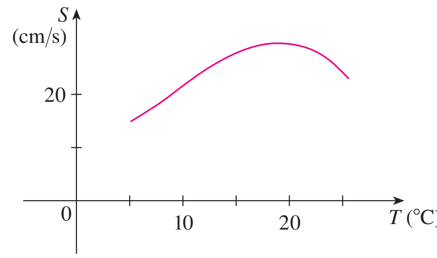


Adaptada de *Environmental Science: Living Within the System of Nature*, 2a. ed.; por Charles E. Kupchella, © 1989. Reimpreso con autorizacion de Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J.

52. La grafica muestra la influencia de la temperatura T en la rapidez máxima sostenible de nado del salmón Coho.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

b) Estime los valores de $S'(15)$ y $S'(25)$ e interprételos.



53-54 Determine si $f'(0)$ existe en cada una de las siguientes funciones.

53. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

54. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

REDACCIÓN DE PROYECTO PRIMEROS MÉTODOS PARA ENCONTRAR TANGENTES

La primera persona en formular explícitamente las ideas de límites y derivadas fue Isaac Newton en la década de 1660. Pero Newton reconoció: “Si he visto más lejos que otros hombres, es porque he estado parado sobre los hombros de gigantes”. Dos de esos gigantes fueron Pierre Fermat (1601-1665) y el maestro de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estaba familiarizado con los métodos que estos hombres habían aplicado para hallar rectas tangentes, y los métodos de ambos tuvieron que ver con la formulación final del cálculo a la que llegó Newton.

Las siguientes referencias contienen explicaciones de estos métodos. Lea una o varias de estas referencias y escriba un informe en que compare los métodos de Fermat o de Barrow con los métodos modernos. En particular, aplique el método de la sección 2.7 para hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + 2x$ en el punto $(1, 3)$ y muestre cómo habrían resuelto Fermat o Barrow el mismo problema. Aunque usted usó derivadas y ellos no, señale las semejanzas entre los dos métodos.

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics* (Nueva York: Wiley, 1989), pp. 389, 432.

2. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus* (Nueva York: Springer-Verlag, 1979), pp. 124, 132.

3. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed. (Nueva York: Saunders, 1990), pp. 391, 395.

4. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York: Oxford University Press, 1972), pp. 344, 346.

2.8 La derivada como una función

En la sección anterior consideramos la derivada de una función f en un número fijo $x = a$:

$$\boxed{1} \qquad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Ahora cambiaremos el punto de vista y haremos que el número $x = a$ varíe. Si en la ecuación 1 reemplaza a con una variable x, obtenemos

$$\boxed{2} \qquad \boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$$

Dado cualquier numero x para el cual este límite exista, asignamos a x el número $f(x)$. De modo que consideramos a f' como una nueva función, llamada **derivada de f** y definida por medio de la ecuación 2. Sabemos que el valor de f' en x, $f'(x)$ puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

La función f' se conoce como derivada de f porque se ha "derivado" de f por medio de la operación de hallar el límite en la ecuación 2. El dominio de f' es el conjunto $\{x \mid f'(x)$ existe$\}$ y puede ser menor que el dominio de f.

V EJEMPLO 1 En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f. Utilícela para dibujar la gráfica de la derivada f'.

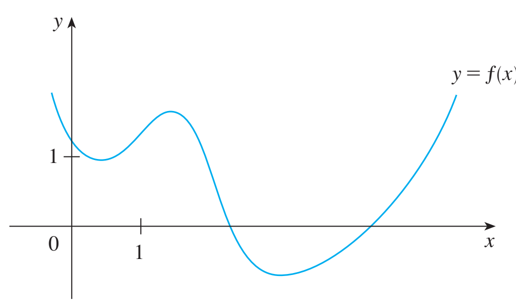
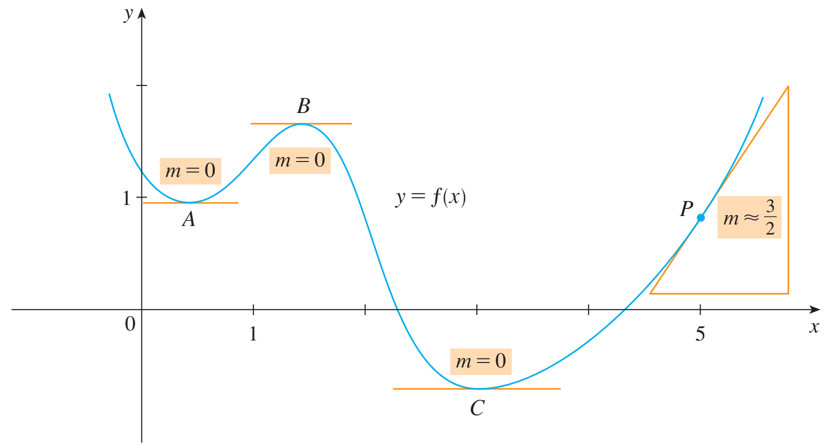


FIGURA 1

SOLUCIÓN Puede estimar el valor de la derivada, en cualquier valor de x, trazando la tangente en el punto $(x, f(x))$ y estimando su pendiente. Por ejemplo, para $x = 5$, trace la recta tangente en P de la figura 2a) y estime su pendiente alrededor de $\frac{3}{2}$, por tanto, $f'(5) \approx 1.5$. Esto nos permite situar el punto $P'(5, 1.5)$ en la gráfica de f' directamente debajo de P. Si repite este procedimiento en varios puntos, se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 2b). Advierta que las tangentes en A, B y C son horizontales, de modo que la derivada es 0 allí, y la gráfica de f' cruza el eje x en los puntos A', B' y C', directamente debajo de A, B y C. Entre A y B las tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x)$ es positiva allí. Pero entre B y C las tangentes tienen pendiente negativa, de modo que $f'(x)$ allí es negativa.



a)

TEC Visual 2.8 muestra una animación de la figura 2 para diferentes funciones.

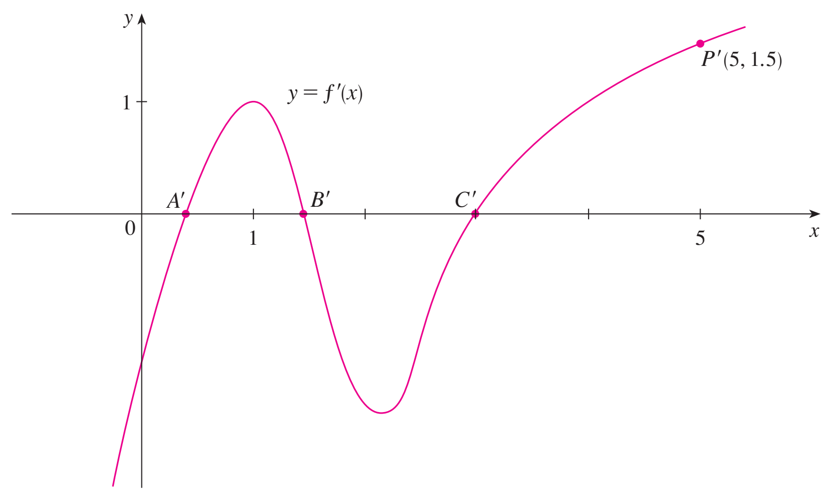


FIGURA 2

b)

V EJEMPLO 2

a) Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre una fórmula para $f'(x)$.
b) Ilústrela comparando las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN

a) Cuando se usa la ecuación 2 para calcular una derivada, hay que recordar que la variable es h y que x se considera temporalmente como una constante durante el cálculo del límite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

b) Use un dispositivo de graficación para trazar las graficas de f y f' de la figura 3. Note que $f'(x) = 0$ cuando f tiene tangentes horizontales y que $f'(x)$ es positiva cuando las tangentes tienen pendientes positivas. De modo que estas graficas sirven como comprobación de nuestra solución del inciso a).

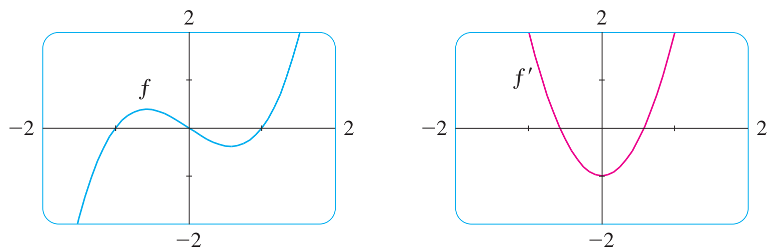


FIGURA 3

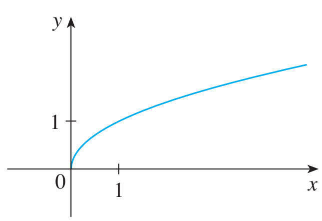
EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}$, encuentre la derivada de f. Establezca el dominio de f'.

SOLUCIÓN

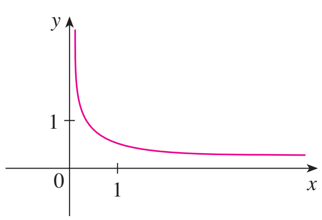
Aquí, racionalice el numerador

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Observe que $f'(x)$ existe si $x > 0$, de modo que el dominio de f' es $(0, \infty)$ y es menor que el dominio de f, $[0, \infty)$.



a) $f(x) = \sqrt{x}$



b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

FIGURA 4

Compruebe que el resultado del ejemplo 3 es razonable observando las graficas de f y f' en la figura 4. Cuando x esta cerca de 0, $\sqrt{x}$ está cerca de 0, por tanto, $f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$ es muy grande, y esto corresponde a rectas tangentes muy empinadas cerca de $(0, 0)$ de la figura 4a), y a valores grandes de $f'(x)$ justo a la derecha de 0 en la figura 4b). Cuando x es grande, $f'(x)$ es muy pequeña, y esto corresponde a rectas tangentes más aplanadas en la extrema derecha de la gráfica de f y a la asíntota horizontal de la gráfica de f'.

EJEMPLO 4 Encuentre f' si $f(x) = \dfrac{1 - x}{2 + x}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}}{e} = \frac{ad - bc}{bd} \cdot \frac{1}{e}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1 - (x+h)}{2 + (x+h)} - \dfrac{1 - x}{2 + x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1 - x - h)(2 + x) - (1 - x)(2 + x + h)}{h(2 + x + h)(2 + x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2 - x - 2h - x^2 - xh) - (2 - x + h - x^2 - xh)}{h(2 + x + h)(2 + x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h(2 + x + h)(2 + x)} = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{(2 + x + h)(2 + x)} = -\frac{3}{(2 + x)^2}
\end{aligned}$$

Otras notaciones

Si usamos la notación tradicional $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y, entonces algunas otras notaciones comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y d/dx se llaman **operadores de derivación** porque indican la operación de **derivación**, que es el proceso de calcular una derivada.

El símbolo dy/dx, introducido por Leibniz, no debe considerarse como una razón (por ahora); es sencillamente un sinónimo de $f'(x)$. No obstante, es una notación útil y sugerente, en especial cuando se usa en la notación de incrementos. Con base en la ecuación 2.7.6, puede volver a escribir la definición de derivada en la notación de Leibniz en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si desea indicar el valor de una derivada dy/dx en la notación de Leibniz en un número específico $x = a$, use la notación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \quad \text{o bien} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que es un sinónimo para $f'(a)$.

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig, en 1646, y estudio leyes, teología, filosofía y matemáticas en la universidad de allí. Obtuvo el grado de bachiller a los 17 años. Después de lograr su doctorado en leyes a la edad de 20, ingresó al servicio diplomático y pasó la mayor parte de su vida viajando por las capitales de Europa, en misiones diplomáticas. En particular, trabajó para conjurar una amenaza militar francesa contra Alemania e intentó reconciliar las Iglesias católica y protestante.

Su estudio formal de las matemáticas no se inició sino hasta 1672, cuando se encontraba en una misión diplomática en París. Allí construyó una máquina para realizar cálculos y se encontró con científicos, como Huygens, quienes dirigieron su atención hacia los desarrollos más recientes en las matemáticas y las ciencias. Leibniz se empeñó en desarrollar una lógica simbólica y un sistema de notación que simplificara el razonamiento lógico. En su versión del Cálculo, que publicó en 1684, estableció la notación y las reglas para hallar derivadas que aún se usan en la actualidad.

Por desgracia, en la década de 1690 surgía una terrible disputa entre los seguidores de Newton y los de Leibniz acerca de quién había inventado el Cálculo. Leibniz incluso fue acusado de plagio por los miembros de la Real Academia de Inglaterra. La verdad es que cada uno lo inventó por separado. Newton llegó primero a su versión del Cálculo; pero, debido a su temor a la controversia, no la publicó de inmediato. Por tanto, el informe de Leibniz del Cálculo en 1684 fue el primero en publicarse.

3 Definición Una función f es **derivable en $x = a$** si $f'(a)$ existe. Es **derivable sobre un intervalo abierto** (a, b) [o (a, ∞) o $(-\infty, a)$ o $(-\infty, \infty)$] si es derivable en todo número del intervalo.

V EJEMPLO 5 ¿Dónde es derivable la función $f(x) = |x|$?

SOLUCIÓN Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y podemos elegir h lo suficientemente pequeño de modo que $x + h > 0$, de aquí que $|x + h| = x + h$. Por tanto, para $x > 0$ tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

y, por consiguiente, f es derivable para cualquier $x > 0$.

De manera análoga, para $x < 0$ se tiene que $|x| = -x$ y se puede elegir h lo suficientemente pequeña para que $x + h < 0$ y, así, $|x + h| = -(x + h)$. Por tanto, para $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h}$$

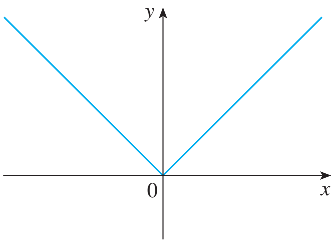
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

así que f es derivable para cualquier $x < 0$.

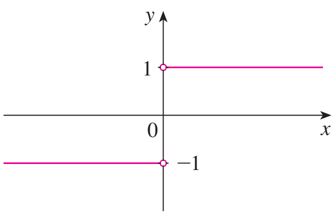
Para $x = 0$ debemos investigar

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} \qquad \text{(si existe).}$$



a) $y = f(x) = |x|$



b) $y = f'(x)$

FIGURA 5

Calcule por separado los límites por la izquierda y por la derecha:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

y $$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que estos límites son diferentes, $f'(0)$ no existe. Así, f es derivable en toda x, excepto en $x = 0$.

La fórmula para f' está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y su gráfica aparece en la figura 5b). La inexistencia de $f'(0)$ se refleja geométricamente en el hecho de que la curva $y = |x|$ no tiene una recta tangente en (0, 0). [Véase la figura 5a).]

Tanto la continuidad como la derivabilidad son propiedades deseables para una función. El teorema siguiente muestra cómo se relacionan estas propiedades.

4 Teorema Si f es derivable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar que f es continua en $x = a$, debemos demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Para esto empezamos por probar que la diferencia $f(x) - f(a)$ tiende a 0.

La información dada es que f es derivable en $x = a$; es decir,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe (véase la ecuación 2.7.5). Para relacionar lo dado con lo desconocido, divida y multiplique $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (lo cual es posible cuando $x \neq a$):

RP Un aspecto importante de la solución de problemas es intentar encontrar una conexión entre lo dado y lo desconocido. Consulte el paso 2 (Piense en un plan) en Principios para la resolución de problemas, en la página 75.

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a)$$

De este modo, si usamos la ley del producto y la ecuación (2.7.5), podemos escribir

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

Para utilizar lo que acabamos de demostrar, comenzamos con $f(x)$ y sumamos y restamos $f(a)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} [f(a) + (f(x) - f(a))] \\ &= \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) + 0 = f(a)\end{aligned}$$

En consecuencia, f es continua en $x = a$.

NOTA El inverso del teorema 4 es falso; es decir, hay funciones que son continuas, pero que no son derivables. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ porque

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$$

(Véase el ejemplo 7 de la sección 2.3.) Pero en el ejemplo 5 demostramos que f no es derivable en $x = 0$.

¿Cómo deja de ser derivable una función?

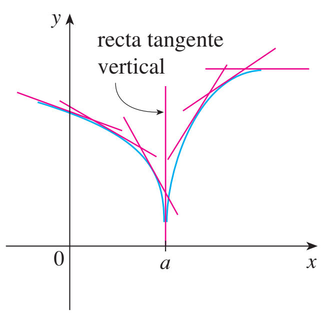


FIGURA 6

En el ejemplo 5 vimos que la función $y = |x|$ no es derivable en $x = 0$ y en la figura 5a) se muestra que su gráfica cambia de dirección repentinamente cuando $x = 0$. En general, si la gráfica de una función f tiene "esquinas" o "picos", la gráfica de f no tiene recta tangente en esos puntos y f no es derivable allí. [Al intentar calcular $f'(a)$, encontramos que los limites por la izquierda y por la derecha son diferentes.]

El teorema 4 señala otra forma en que una función no tiene derivada. En él se afirma que si f no es continua en a, entonces f no es derivable en $x = a$. Por ende, en cualquier discontinuidad (p. ej., una discontinuidad de salto), f no es derivable.

Una tercera posibilidad es que la curva tenga una **recta tangente vertical** cuando $x = a$; es decir, f es continua en $x = a$ y

$$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$$

Esto significa que las rectas tangentes se vuelven más y más empinadas cuando $x \to a$. En la figura 6 se muestra una forma en que esto puede suceder; la figura 7c) ilustra otra. Las tres posibilidades recién analizadas se ilustran en la figura 7.

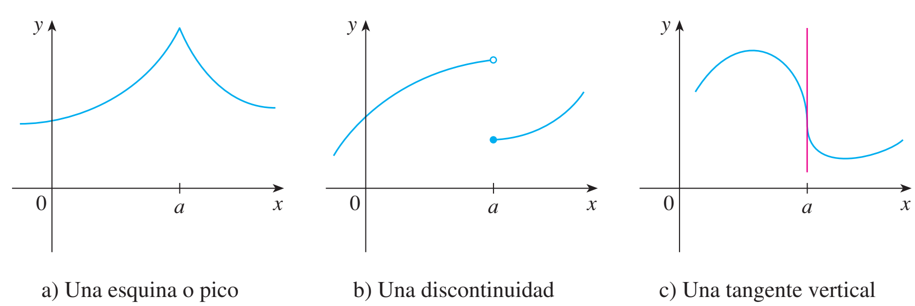


FIGURA 7
Tres maneras para que f no sea derivable en $x = a$

Una calculadora graficadora o una computadora ofrecen otra manera de ver la derivabilidad. Si f es derivable en $x = a$, entonces, con un acercamiento al punto $(a, f(a))$, la gráfica se alinea y adquiere más y más la apariencia de un recta. (Véase la figura 8. Un ejemplo específico es la figura 2 de la sección 2.7.) Pero no importa cuánto se acerque a puntos como los de las figuras 6 y 7a): no puede eliminar el punto agudo o esquina. (Véase la figura 9.)

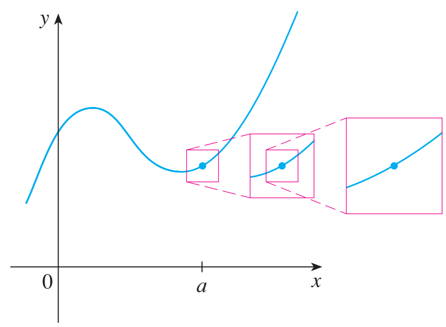


FIGURA 8
f es derivable en $x = a$.

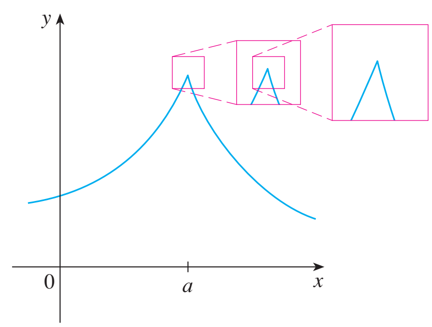


FIGURA 9
f no es derivable en $x = a$.

Derivadas superiores

Si f es una función derivable, entonces su derivada f' también es una función, así que f' puede tener una derivada de sí misma, señalada por $(f')' = f''$. Esta nueva función f'' se denomina **segunda derivada** de f porque es la derivada de la derivada de f. Utilizando la notación de Leibniz, la segunda derivada de $y = f(x)$ se escribe como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^3 - x$, halle e interprete $f''(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 encontramos que la primera derivada es $f'(x) = 3x^2 - 1$. Así que la segunda derivada es

$$\begin{aligned} f''(x) = (f')'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (6x + 3h) = 6x \end{aligned}$$

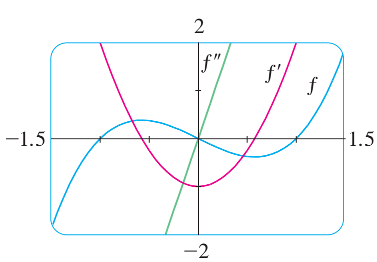


FIGURA 10

Las gráficas de f, f' y f'' se exhiben en la figura 10.

Puede interpretarse $f''(x)$ como la pendiente de la curva $y = f'(x)$ en el punto $(x, f'(x))$. En otras palabras, es la razón de cambio de la pendiente de la curva original $y = f(x)$.

Observe de la figura 10 que $f''(x)$ es negativa cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente negativa y es positiva cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente positiva. De esta manera, las gráficas sirven como una comprobación de sus cálculos.

TEC En Module 2.8 puede usted ver cómo cambian los coeficientes de un polinomio f y cómo afectan el aspecto de la gráfica de f, f' y f''.

En general, puede interpretarse una segunda derivada como una razón de cambio de una razón de cambio. El ejemplo más conocido es la *aceleración*, que se define como sigue.

Si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto que se desplaza en línea recta, su primera derivada representa la velocidad $v(t)$ del objeto como una función del tiempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A la razón de cambio de la velocidad instantánea respecto al tiempo se le llama **aceleración** $a(t)$ del objeto. En estos términos, la función aceleración es la derivada de la función velocidad y, en consecuencia, es la segunda derivada de la función posición:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

o en la notación de Leibniz

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

La tercera derivada f''' es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$. De este modo, $f'''(x)$ puede interpretarse como la pendiente de la curva $y = f''(x)$ o como la razón de cambio de $f''(x)$. Si $y = f(x)$, entonces, las notaciones alternativas para la tercera derivada son

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

El proceso puede continuar. La cuarta derivada f'''' usualmente se denota mediante $f^{(4)}$. En general, la n-ésima derivada de f se denota mediante $f^{(n)}$ y se obtiene derivando n veces a f. Si $y = f(x)$, escribimos

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

EJEMPLO 7 Si $f(x) = x^3 - x$, halle $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 6 encontramos que $f''(x) = 6x$. La gráfica de la segunda derivada tiene ecuación $y = 6x$ y, de este modo, es una línea recta con pendiente 6. Ya que la derivada $f'''(x)$ es la pendiente de $f''(x)$, se tiene

$$f'''(x) = 6$$

para todos los valores de x. Así, f''' es una función constante y su gráfica es una recta horizontal. En consecuencia, para todos los valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$

Puede interpretarse físicamente la tercera derivada en el caso donde la función es la función posición $s = s(t)$ de un objeto que se desplaza a lo largo de una línea recta. Como $s''' = (s'')' = a'$, la tercera derivada de la función posición es la derivada de la función aceleración y se le denomina **jerk** (tirón):

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

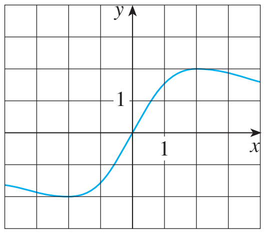
Así, el jerk, j, es la razón de cambio de la aceleración. Nombre apropiado porque un jerk considerable significa un cambio repentino de aceleración, que ocasiona un movimiento repentino en un vehículo.

Se ha visto que una aplicación de la segunda y tercera derivada sucede al analizar el movimiento de objetos empleando aceleración y jerk. Se investigará otra aplicación de la segunda derivada en la sección 4.3, donde se muestra cómo el conocer f'' proporciona información acerca de la forma de la gráfica de f. En el capítulo 11 veremos cómo la segunda derivada y las derivadas superiores nos permiten representar funciones como sumas de series infinitas.

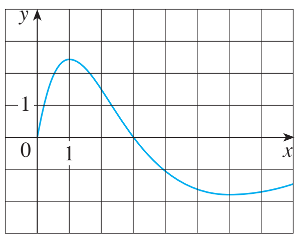
2.8 Ejercicios

1-2 Utilice la gráfica que se proporciona para estimar el valor de cada derivada. Luego dibuje f'.

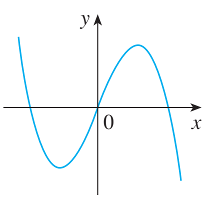
1. a) $f'(-3)$
b) $f'(-2)$
c) $f'(-1)$
d) $f'(0)$
e) $f'(1)$
f) $f'(2)$
g) $f'(3)$

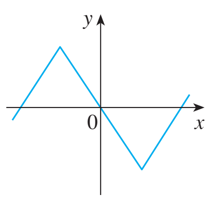


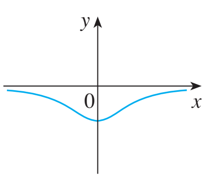
2. a) $f'(0)$
b) $f'(1)$
c) $f'(2)$
d) $f'(3)$
e) $f'(4)$
f) $f'(5)$
g) $f'(6)$
h) $f'(7)$

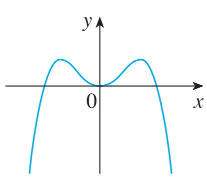


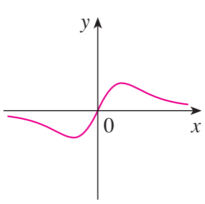
3. Relacione la gráfica de cada función dada en las figuras a)-d) con las gráficas de sus derivadas en las figuras I a IV. Dé las razones para sus selecciones.

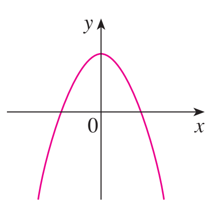
a)


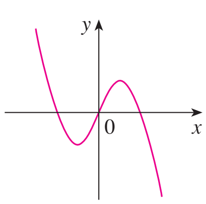
b)


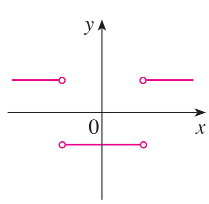
c)


d)


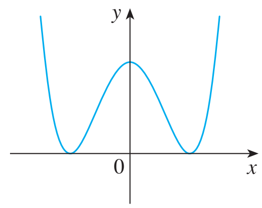
I


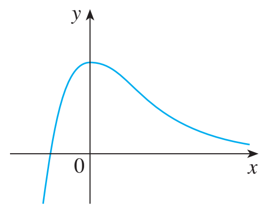
II


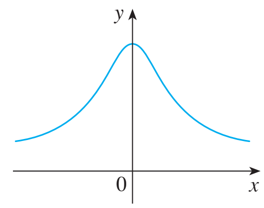
III


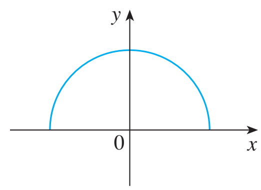
IV


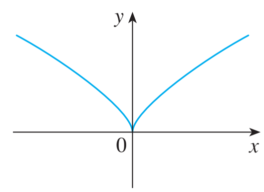
4-11 Trace o copie la gráfica de la función dada f. (Suponga que los ejes tienen escalas iguales.) Luego aplique el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de f' debajo de ella.

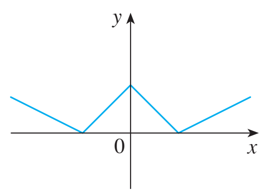
4.


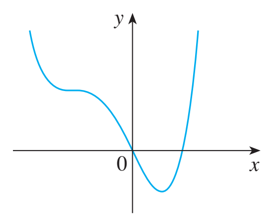
5.


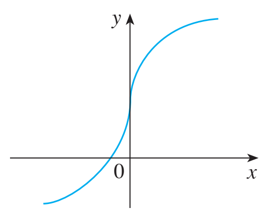
6.


7.


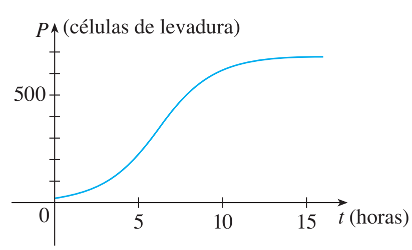
8.


9.


10.


11.


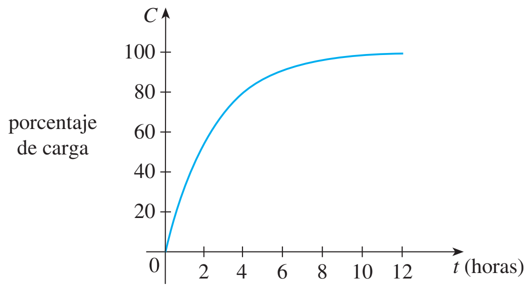
12. Se muestra la gráfica de la función población $P(t)$ para células de levadura en un cultivo de laboratorio. Utilice el método



Se requiere calculadora graficadora o computadora   **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com del ejemplo 1 para dibujar la derivada $P'(t)$. ¿Qué indica la gráfica de P' acerca de la población de levadura?

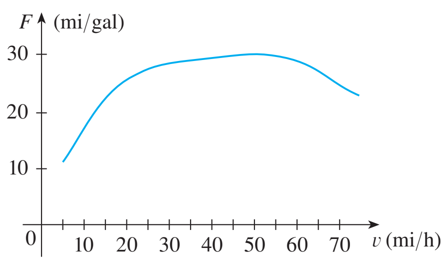
13. Una batería recargable se conecta con un cargador. La gráfica muestra $C(t)$, el porcentaje de capacidad que la batería alcanza como una función del tiempo t transcurrido (en horas).

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $C'(t)$?
b) Trace la gráfica de $C'(t)$. ¿Qué le indica la gráfica?

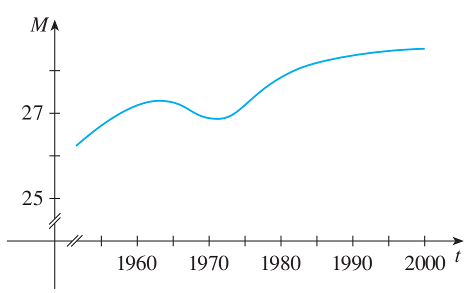


14. La gráfica (proporcionada por el Departamento de Energía de EU) muestra cómo afecta la rapidez de manejo el consumo de combustible. La economía F se mide en millas por galón, y la rapidez v se mide en millas por hora.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $F'(v)$?
b) Trace la gráfica de la derivada de $F'(v)$.
c) ¿A qué rapidez debería manejar si quiere ahorrar combustible?



15. La gráfica ilustra cómo ha variado la edad promedio en que contraían matrimonio por primera vez los hombres japoneses en la segunda mitad del siglo XX. Trace la gráfica de la función derivada $M'(t)$. ¿Durante cuáles años fue negativa la derivada?



16-18 Trace una gráfica cuidadosa de f y debajo de ella la grafica de f' de la misma manera que en los ejercicios 4-11. ¿Puede intuir una fórmula para $f'(x)$ a partir de su gráfica?

16. $f(x) = \operatorname{sen} x$

17. $f(x) = e^x$

18. $f(x) = \ln x$

19. Sea $f(x) = x^2$.

a) Estime los valores de $f'(0), f'\left(\frac{1}{2}\right), f'(1)$, y $f'(2)$ usando un dispositivo graficador para hacer un acercamiento sobre la grafica de f.
b) Utilice la simetría para deducir los valores de $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ $f'(-1)$ y $f'(-2)$.
c) Con los resultados de los incisos a) y b), proponga una fórmula para $f'(x)$.
d) Aplique la definición de derivada para probar que su propuesta del inciso c) es correcta.

20. Sea $f(x) = x^3$.

a) Estime los valores de $f'(0), f'\left(\frac{1}{2}\right), f'(1), f'(2)$ y $f'(3)$ usando un dispositivo graficador para hacer un acercamiento sobre la grafica de f.
b) Aplique la simetría para deducir los valores de $f'\left(-\frac{1}{2}\right), f'(-1)$, y $f'(-2)$ y $f'(-3)$.
c) Utilice los valores de los incisos a) y b) para trazar la gráfica de f'.
d) Proponga una fórmula para $f'(x)$.
e) Aplique la definición de derivada para probar que su propuesta del inciso d) es correcta.

21-31 Encuentre la derivada de cada una de las siguientes funciones aplicando la definición de derivada. Establezca los dominios de la función y de su derivada.

21. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

22. $f(x) = mx + b$

23. $f(t) = 5t - 9t^2$

24. $f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$

25. $f(x) = x^2 - 2x^3$

26. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

27. $g(x) = \sqrt{9 - x}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

29. $G(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$

30. $f(x) = x^{3/2}$

31. $f(x) = x^4$

32. a) Dibuje la gráfica de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ a partir de la gráfica $y = \sqrt{x}$ y aplicando las transformaciones de la sección 1.3.
b) Use la gráfica del inciso a) para trazar la gráfica de f'.
c) Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$. ¿Cuáles son los dominios de f y de f'?
d) Utilice un dispositivo graficador para trazar la grafica de f' y compárela con su trazo del inciso b).

33. a) Si $f(x) = x^4 + 2x$, encuentre $f'(x)$.
b) Vea si su respuesta al inciso a) es razonable comparando las graficas de f y de f'.

34. a) Si $f(x) = x + 1/x$, encuentre $f'(x)$.
b) Vea si su respuesta al inciso a) es razonable comparando las graficas de f y de f'.

35. La tasa de desempleo $U(t)$ varía con el tiempo. La tabla del Bureau of Labor Statistics (Oficina de Estadísticas de Empleo) proporciona el porcentaje de desempleados en la fuerza laboral de EU de 1999 a 2008.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1999	4.2	2004	5.5
2000	4.0	2005	5.1
2001	4.7	2006	4.6
2002	5.8	2007	4.6
2003	6.0	2008	5.8

a) ¿Cuál es el significado de $U'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) Elabore una tabla de valores estimados para $U'(t)$.

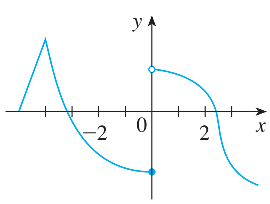
36. Sea $P(t)$ el porcentaje de estadounidenses por debajo de 18 años de edad en el instante t. La tabla proporciona valores de esta función en los años en que se levantó un censo de 1950 a 2000.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1950	31.1	1980	28.0
1960	35.7	1990	25.7
1970	34.0	2000	25.7

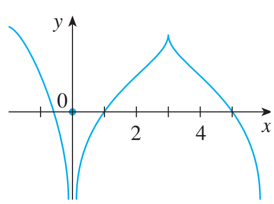
a) ¿Cuál es el significado de $P'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) Elabore una tabla de valores para $P'(t)$.
c) Dibuje P y P'.
d) ¿Cómo sería posible obtener valores más precisos para $P'(t)$?

37-40 Se proporciona la gráfica de f. Establezca con argumentos, los números en los cuales f no es derivable.

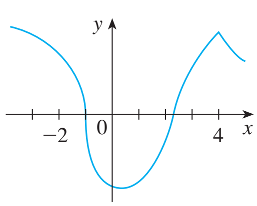
37.



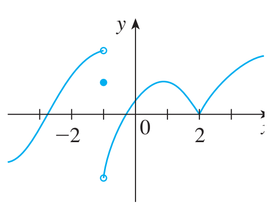
38.



39.



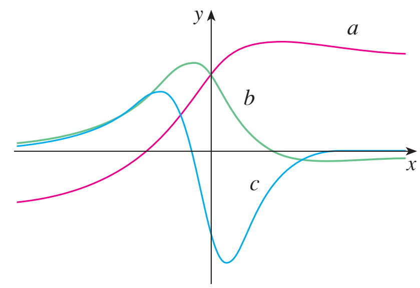
40.



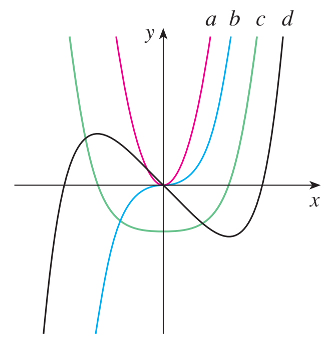
41. Grafique la función $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Haga acercamientos sucesivos primero hacia el punto $(-1, 0)$ y luego en dirección al origen. ¿Qué diferencia existe en cuanto al comportamiento de f en las cercanías de estos dos puntos? ¿Qué conclusiones infiere acerca de la derivabilidad de f?

42. Haga un acercamiento hacia los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(-1, 0)$ sobre la gráfica de la función $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. ¿Que observa? Registre lo que observa en términos de la derivabilidad de g.

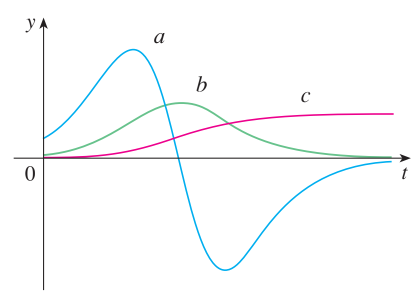
43. La figura muestra las graficas de f, f' y f''. Indique cada curva y explique el porqué de su elección.



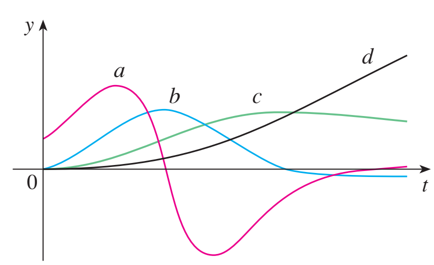
44. La figura muestra gráficas de f, f', f'' y f'''. Identifique cada curva y explique las razones de su elección.



45. La figura exhibe las gráficas de tres funciones. Una es la función posición de un automóvil, otra es la velocidad del mismo, y la de su aceleración. Identifique cada curva y explique las razones de su elección.



46. La figura muestra las gráficas de cuatro funciones relacionadas con el movimiento de un automóvil: la de posición, la de velocidad, la de aceleración y la del jerk. Identifique cada curva y explique los motivos de su elección.

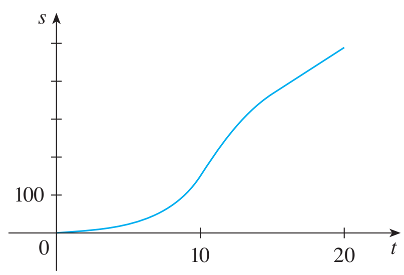


47-48 Utilice la definición de derivada para hallar $f'(x)$ y $f''(x)$. Después, grafique f, f' y f'' en una misma pantalla y verifique para ver si sus respuestas son razonables.

47. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ **48.** $f(x) = x^3 - 3x$

49. Si $f(x) = 2x^2 - x^3$, encuentre $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$. Grafique f, f' f'' y f''' en una misma pantalla. ¿Las gráficas son consistentes con la interpretación geométrica de estas derivadas?

50. a) Se muestra la gráfica de una función posición de un automóvil, donde s se mide en pies y t en segundos. Utilice la gráfica de la velocidad y la aceleración del automóvil. ¿Cuá1 es la aceleración en $t = 10$ segundos?



b) Utilice la curva de aceleración del inciso a) para estimar el jerk en $t = 10$ segundos. ¿Cuáles son las unidades del jerk?

51. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
a) Si $a \neq 0$, utilice la ecuación 2.7.5 para hallar $f'(a)$.
b) Demuestre que $f'(0)$ no existe.
c) Demuestre que $y = \sqrt[3]{x}$ tiene una recta tangente vertical en (0, 0). (*Recuerde:* la forma de la función de f. Véase la figura 13 de la sección 1.2.)

52. a) Si $g(x) = x^{2/3}$, demuestre que $g'(0)$ no existe.
b) Si $a \neq 0$, encuentre $g'(a)$.
c) Demuestre que $y = x^{2/3}$ tiene una recta tangente vertical en (0, 0).
d) Ilustre el inciso c) graficando $y = x^{2/3}$.

53. ¿Demuestre que la función $f(x) = |x - 6|$ no es derivable en $x = 6$. Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

54. ¿Dónde no es derivable la función entero mayor $f(x) = [\![x]\!]$? Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

55. a) Dibuje la gráfica de la función $f(x) = x\,|x|$.
b) ¿Para qué valores de x es f derivable?
c) Encuentre una fórmula para f'.

56. Las **derivadas por la izquierda** y **por la derecha** de f en $x = a$ están definidas por

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si estos límites existen. En tal caso, $f'(a)$ existe si y sólo si estas derivadas laterales existen y son iguales.

a) Halle $f'_-(4)$ y $f'_+(4)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

b) Dibuje la grafica de f
c) ¿Dónde es discontinua f?
d) ¿Dónde f no es derivable?

57. Recuerde que a una función f se le denomina *par* si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio, e *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para toda x. Demuestre cada uno de los siguientes enunciados
a) La derivada de una función par es una función impar.
b) La derivada de una función impar es una función par.

58. Cuando abre el grifo del agua caliente, la temperatura T del agua depende del tiempo que el agua ha estado corriendo.
a) Trace una posible gráfica de T como función del tiempo transcurrido desde que abrió el grifo.
b) Describa cómo varía la razón de cambio de T respecto a t, conforme ésta aumenta.
c) Dibuje la derivada de T.

59. Sea ℓ la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1). El *ángulo de inclinación* de ℓ es el ángulo ϕ que ℓ forma con la dirección positiva del eje x. Calcule ϕ con una aproximación al grado más cercano.

2 Repaso

Verificación de conceptos

1. Explique qué significa cada una de las siguientes afirmaciones e ilustre mediante un esbozo.

a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Describa varias formas en que un límite puede no existir. Ilustre con gráficas.

3. Enuncie las siguientes leyes de los límites.
a) Ley de la suma b) Ley de la diferencia
c) Ley del múltiplo constante d) Ley del producto
e) Ley del cociente f) Ley de la potencia
g) Ley de la raíz

4. ¿Qué establece el teorema de la compresión?

5. a) ¿Qué quiere darse a entender al decir que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$? Dibuje curvas para ilustrar las diversas posibilidades.
   b) ¿Qué significa decir que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$? Dibuje curvas para ilustrar las diversas posibilidades.

6. ¿Cuál de las curvas siguientes tiene asíntotas verticales? ¿Cuál tiene asíntotas horizontales?
   (a) $y = x^4$ (b) $y = \operatorname{sen} x$
   (c) $y = \tan x$ (d) $y = \tan^{-1}x$
   (e) $y = e^x$ (f) $y = \ln x$
   (g) $y = 1/x$ (h) $y = \sqrt{x}$

7. a) ¿Qué significa que f sea continua en $x = a$?
   b) ¿Qué significa que f sea continua sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$? ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de tal función?

8. ¿Qué establece el teorema del valor intermedio?

9. Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

10. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con posición $f(t)$ en el instante t. Escriba una expresión para la velocidad instantánea de un objeto en el instante $t = a$. ¿Cómo puede interpretar esta velocidad en términos de la grafica de f?

11. Si $y = f(x)$ y x cambia de x_1 a x_2, escriba expresiones para lo siguiente.
    a) La razón promedio de cambio de y respecto a x a lo largo del intervalo $[x_1, x_2]$.
    b) La razón de cambio instantáneo de y respecto a x en $x = x_1$.

12. Defina la derivada $f'(a)$. Analice dos maneras de interpretar este número.

13. Defina la segunda derivada de f. Si $f(t)$ es la función de posición de una partícula, ¿cómo puede interpretar la segunda derivada?

14. a) ¿Qué significa que f sea derivable en $x = a$?
    b) ¿Cuál es la relación entre la derivabilidad y la continuidad de una función?
    c) Trace la gráfica de una función que sea continua, pero no derivable en $a = 2$.

15. Describa varias maneras en que una función puede no ser derivable. Ilustre con gráficas.

Examen rápido Verdadero-Falso

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. $\displaystyle \lim_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-4}-\frac{8}{x-4}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{2x}{x-4}-\lim_{x\to 4}\frac{8}{x-4}$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6}=\frac{\lim_{x\to 1}(x^2+6x-7)}{\lim_{x\to 1}(x^2+5x-6)}$

3. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x^2+2x-4}=\frac{\lim_{x\to 1}(x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^2+2x-4)}$

4. Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ no existe.

5. Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ no existe.

6. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existen, entonces $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ no existe.

7. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, pero $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe, entonces $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ no existe.

8. Si $\lim_{x\to 6}[f(x)g(x)]$ existe, entonces el límite debe ser $f(6)g(6)$.

9. Si p es un polinomio, entonces $\lim_{x\to b} p(x) = p(b)$.

10. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = 0$.

11. Una función puede tener dos asíntotas horizontales distintas.

12. Si f tiene dominio $[0, \infty)$ y no tiene asíntota horizontal entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ o $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

13. Si la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$, entonces f no está definida en 1.

14. Si $f(1) > 0$ y $f(3) < 0$, entonces existe un número c entre 1 y 3 tal que $f(c) = 0$.

15. Si f es continua en 5 y $f(5) = 2$ y $f(4) = 3$, entonces $\lim_{x\to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

16. Si f es continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) = 4$ y $f(1) = 3$, entonces existe un número r tal que $|r| < 1$ y $f(r) = \pi$.

17. Sea f una función tal que $\lim_{x\to 0} f(x) = 6$. Entonces existe un número δ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x) - 6| < 1$.

18. Si $f(x) > 1$ para toda x y $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 0} f(x) > 1$.

19. Si f es continua en $x = a$, entonces f es derivable en $x = a$.

20. Si $f'(r)$ existe, entonces $\lim_{x\to r} f(x) = f(r)$.

21. $\displaystyle \frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

22. La ecuación $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $(0, 2)$.

23. Si f es continua en $x = a$, también lo es $|f|$.

24. Si $|f|$ es continua en $x = a$, también lo es $|f|$.

Ejercicios

1. Se da la gráfica de f.

a) Encuentre cada uno de los siguientes límites o explique por qué no existen.

i) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ii) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$

iii) $\lim_{x\to -3} f(x)$ iv) $\lim_{x\to 4} f(x)$

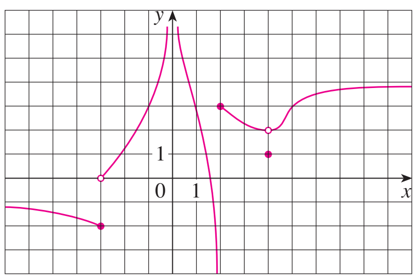
v) $\lim_{x\to 0} f(x)$ vi) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

vii) $\lim_{x\to \infty} f(x)$ viii) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

b) Establezca las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

c) Establezca las ecuaciones de las asíntotas verticales.

d) ¿En qué números f es discontinua? Explique.



2. Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to -3} f(x) = \infty$,

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$,

f es continua por la derecha en $x = 3$

3-20 Encuentre cada uno de los siguientes límites

3. $\lim_{x\to 1} e^{x^3 - x}$

4. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

5. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

6. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

7. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(h - 1)^3 + 1}{h}$

8. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2 - 4}{t^3 - 8}$

9. $\lim_{r\to 9} \dfrac{\sqrt{r}}{(r - 9)^4}$

10. $\lim_{v\to 4^+} \dfrac{4 - v}{|4 - v|}$

11. $\lim_{u\to 1} \dfrac{u^4 - 1}{u^3 + 5u^2 - 6u}$

12. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x + 6} - x}{x^3 - 3x^2}$

13. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

14. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

15. $\lim_{x\to \pi^-} \ln(\operatorname{sen} x)$

16. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1 - 2x^2 - x^4}{5 + x - 3x^4}$

17. $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x\right)$

18. $\lim_{x\to \infty} e^{x - x^2}$

19. $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(1/x)$

20. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}\right)$

21-22 Utilice las gráficas para evidenciar las asíntotas de la curva. Después, pruebe que realmente son evidencias.

21. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

22. $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}$

23. Si $2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ para $0 < x < 3$, encuentre $\lim_{x\to 1} f(x)$.

24. Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2 \cos(1/x^2) = 0$.

25-28 Demuestre cada uno de los siguientes resultados, utilizando la definición precisa de límite.

25. $\lim_{x\to 2} (14 - 5x) = 4$

26. $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

27. $\lim_{x\to 2} (x^2 - 3x) = -2$

28. $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{2}{\sqrt{x - 4}} = \infty$

29. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ 3 - x & \text{si } 0 \leqslant x < 3 \\ (x - 3)^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) Evalúe cada límite, si éste existe

i) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ii) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ iii) $\lim_{x\to 0} f(x)$

iv) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ v) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ vi) $\lim_{x\to 3} f(x)$

b) ¿Dónde es discontinua f?

c) Trace la gráfica de f

30. Sea

$$g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2 - x & \text{si } 2 < x \leqslant 3 \\ x - 4 & \text{si } 3 < x < 4 \\ \pi & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

a) Para cada uno de los números 2, 3 y 4, descubra si g es continua por la izquierda, por la derecha o continua en el número.

b) Bosqueje la gráfica de g.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

31-32 Demuestre que cada una de las siguientes funciones es continua en su dominio. Establézcalo.

31. $h(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$ **32.** $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2 - 2}$

33-34 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación en el intervalo dado.

33. $x^5 - x^3 + 3x - 5 = 0, \quad (1, 2)$

34. $\cos\sqrt{x} = e^x - 2, \quad (0, 1)$

35. a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 9 - 2x^2$ en el punto (2, 1).
b) Determine la ecuación de esta tangente.

36. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y = \frac{2}{1 - 3x}$$

y los puntos de abscisas 0 y -1.

37. El desplazamiento en metros de un objeto que se mueve en línea recta está dado por $s = 1 + 2t + \frac{1}{4}t^2$, donde t se mide en segundos.
a) Encuentre la velocidad promedio en los siguientes periodos de tiempo:
i) $[1, 3]$ ii) $[1, 2]$
iii) $[1, 1.5]$ iv) $[1, 1.1]$
b) Halle la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

38. Según la ley de Boyle, si la temperatura de un gas confinado se mantiene fija, entonces el producto de la presión P y el volumen V es constante. Suponga que, para cierto gas, $PV = 800$, donde P se mide en libras por pulgada cuadrada y V en pulgadas cúbicas.
a) Encuentre la razón de cambio promedio de P cuando V se incrementa de 200 a 250 pulg^3.
b) Exprese V como función de P y demuestre que la razón de cambio instantáneo de V respecto a P es inversamente proporcional al cuadrado de ésta.

39. a) Utilice la definición de derivada para hallar $f'(2)$, donde $f(x) = x^3 - 2x$.
b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto (2, 4).
c) Ilustre el inciso b) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

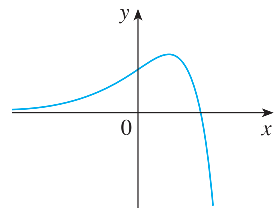
40. Encuentre una función f y un número $x = a$ tales que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

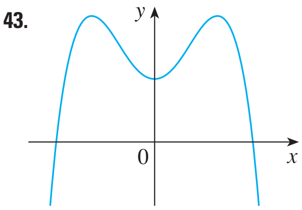
41. El costo total de pagar un préstamo para estudiante a una tasa de interés de r% por año es $C = f(r)$.
a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(r)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) ¿Que significa la afirmación $f'(10) = 1\,200$?
c) ¿$f'(r)$ siempre es positiva o cambia de signo?

42-44 Trace o copie la gráfica de la función dada. Luego dibuje directamente debajo su derivada.

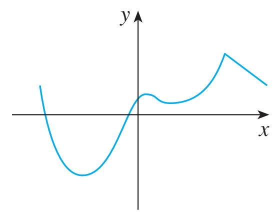
42.



43.



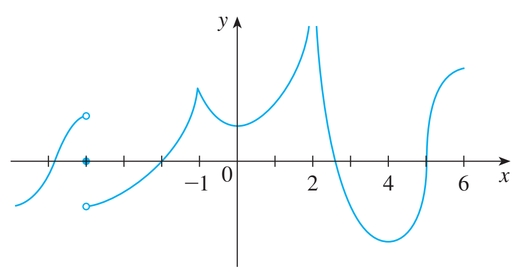
44.



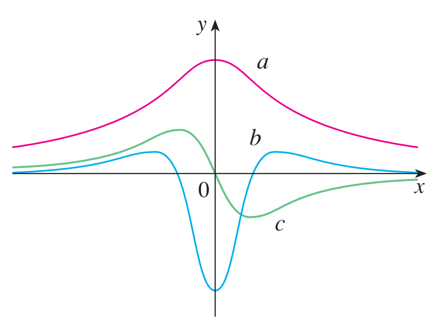
45. a) Si $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$, utilice la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
b) Encuentre los dominios de f y f'.
c) Grafique f y f' en una pantalla común. Compare las gráficas para ver si su respuesta al inciso a) es razonable.

46. a) Encuentre las asíntotas de la grafica de $f(x) = \dfrac{4 - x}{3 + x}$ y utilícelas para dibujar la gráfica.
b) Utilice la grafica del inciso a) para graficar f'.
c) Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
d) Utilice un dispositivo graficador para trazar la gráfica de f' y compárela con su dibujo del inciso b).

47. Se muestra la grafica de f. Enuncie, con razones, los números x en que f no es derivable.



48. La figura muestra la grafica de f, f' y f''. Identifique cada curva y explique su elección.

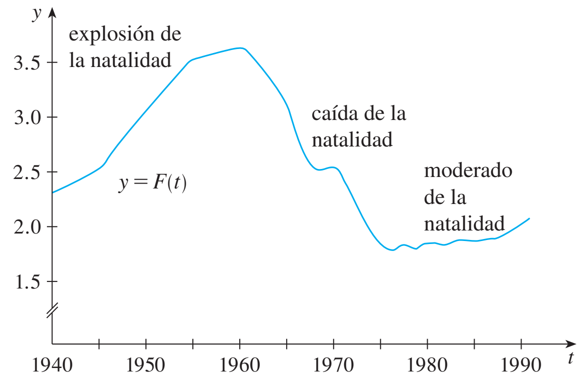


49. Sea $C(t)$ el valor total de certificados bancarios en circulación en el instante t. La tabla de valores de esta función de 1980 a 2000, en miles de millones de dólares. Estime e interprete el valor de $C'(1990)$.

t	1980	1985	1990	1995	2000
$C(t)$	129.9	187.3	271.9	409.3	568.6

50. La *tasa de fertilidad total*, en el tiempo t, denotada con $F(t)$, es una estimación del número promedio de niños nacidos de cada mujer (suponiendo que las tasas de natalidad actuales permanezcan constantes). En la gráfica de la tasa de fertilidad total en EU, se muestran las fluctuaciones desde 1940 hasta 1990.

a) Estime los valores de $F'(1950)$, $F'(1965)$ y $F'(1987)$.
b) ¿Cuáles son los significados de estas derivadas?
c) ¿Puede sugerir razones para los valores de estas derivadas?



51. Suponga que $|f(x)| \leqslant g(x)$ donde $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Encuentre $\lim_{x \to a} f(x)$.

52. Sea $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$.

a) ¿Para qué valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$?
b) ¿En qué números es discontinua la función f?

Problemas adicionales

En el análisis de los principios para la resolución de problemas, se consideró la estrategia para resolver problemas llamada Introduzca algo extra (véase la página 75). En el ejemplo siguiente se muestra cómo este principio resulta útil a veces cuando evalúa límites. La idea es cambiar la variable —introducir una nueva variable relacionada con la original— de tal manera que el problema se haga más sencillo. Más adelante, en la sección 5.5, utilizará más esta idea general.

EJEMPLO 1 Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}$, donde $c \neq 0$ es una constante.

SOLUCIÓN Según se ve, este límite parece desafiante. En la sección 2.3 evaluamos varios límites en los que tanto el numerador como el denominador tendieron a 0. Allí, la estrategia fue realizar cierto tipo de manipulación algebraica que condujo a una cancelación simplificadora, pero en este caso no está claro qué clase de álgebra se necesita.

Por tanto, se introduce una nueva variable t mediante la ecuación

$$t = \sqrt[3]{1+cx}$$

También necesitamos expresar x en términos de t, de modo que resuelva esta ecuación

$$t^3 = 1 + cx \qquad x = \frac{t^3-1}{c} \quad (\text{si } c \neq 0)$$

Observe que $x \to 0$ equivalente a $t \to 1$. Esto permite convertir el límite dado en uno que involucra la variable t:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x} &= \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t^3-1)/c}\\ &= \lim_{t\to 1}\frac{c(t-1)}{t^3-1}\end{aligned}$$

El cambio de variable permitió reemplazar un límite relativamente complicado con uno más sencillo de un tipo que ya ha visto. Si factoriza el denominador como un diferencia de cubos, obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1}\frac{c(t-1)}{t^3-1} &= \lim_{t\to 1}\frac{c(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}\\ &= \lim_{t\to 1}\frac{c}{t^2+t+1} = \frac{c}{3}\end{aligned}$$

Mediante el cambio de variable tuvimos que excluir el caso en que $c = 0$: pero si $c = 5$, la función es 0 para toda $x \neq 0$, así, el límite es 0. En consecuencia, en todos los casos, el límite es $c/3$.

Los problemas siguientes sirven para poner a prueba y desafiar sus habilidades para resolver problemas. Algunos requieren una cantidad considerable de tiempo para pensar, de modo que no se desaliente si no los puede resolver de inmediato. Si tiene alguna dificultad, quizá le sirva consultar en la página 75 el análisis de los principios para la resolución de problemas.

Problemas

1. Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

2. Encuentre números a y b tales que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$.

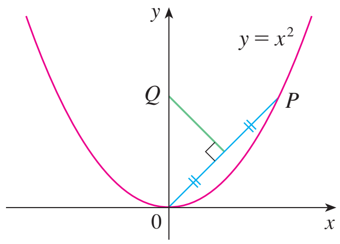


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

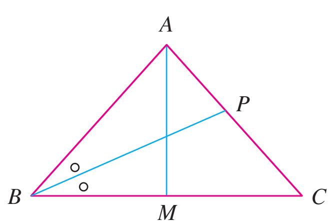


FIGURA PARA EL PROBLEMA 10

3. Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|2x-1| - |2x+1|}{x}$.

4. En la figura se muestra un punto P sobre la parábola $y = x^2$ y el punto Q donde la bisectriz de OP interseca al eje y. Conforme P se aproxima al origen, a lo largo de la parábola, ¿qué sucede con Q? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.

5. Evalúe los siguientes límites, si éstos existen, donde $[\![x]\!]$ denota la función entero mayor.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{[\![x]\!]}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x[\![1/x]\!]$

6. Dibuje la región en el plano definida por cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $[\![x]\!]^2 + [\![y]\!]^2 = 1$ b) $[\![x]\!]^2 - [\![y]\!]^2 = 3$ c) $[\![x + y]\!]^2 = 1$ d) $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

7. Encuentre todos los valores de a tales que f sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant a \\ x^2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

8. Un **punto fijo** de una función f es un número c en su dominio tal que $f(c) = c$. (La función no mueve a c; éste permanece fijo.)

a) Dibuje la gráfica de una función continua con dominio $[0, 1]$ cuyo rango también se encuentre en $[0, 1]$. Localice un punto fijo de f.

b) Intente graficar una función continua con dominio $[0, 1]$ y rango en $[0, 1]$ que *no* tenga un punto fijo. ¿Cuál es el obstáculo?

c) Utilice el teorema de valor intermedio para comprobar que cualquier función continua con dominio $[0, 1]$ y rango en $[0, 1]$ debe tener un punto fijo.

9. Si $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = 2$ y $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = 1$, encuentre $\lim_{x\to a} [f(x)\,g(x)]$.

10. a) En la figura se muestra un triángulo isósceles ABC con $\angle B = \angle C$. La bisectriz del ángulo B interseca el lado AC en el punto P. Suponga que la base BC permanece fija, pero que la altura $|AM|$ del triángulo tiende a 0, de modo que A se aproxima al punto medio M de BC. ¿Qué sucede con P durante este proceso? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.

b) Intente trazar la trayectoria recorrida por P durante este proceso. A continuación, halle la ecuación de esta curva y úsela para dibujarla.

11. a) Si parte de 0° de latitud y avanza en dirección Oeste, puede denotar con $T(x)$ la temperatura en el punto x en cualquier tiempo dado. Suponga que T es una función continua de x, y demuestre que, en cualquier tiempo fijo, existen por lo menos dos puntos opuestos sobre el ecuador que tienen exactamente la misma temperatura.

b) ¿E1 resultado del inciso a) se cumple para puntos que estén sobre cualquier circunferencia sobre la superficie de la Tierra?

c) ¿El resultado del inciso a) se cumple para la presión barométrica y para la altitud arriba del nivel del mar?

12. Si f es una función derivable y $g(x) = xf(x)$, utilice la definición de derivada para demostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

13. Suponga que f es una función que satisface

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

para todos los números reales x y y. Suponga también que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

a) Encuentre $f(0)$. b) Encuentre $f'(0)$. c) Encuentre $f'(x)$.

14. Suponga que f es una función con la propiedad de que $|f(x)| \leqslant x^2$ para toda x. Muestre que $f(0) = 0$. Enseguida, muestre que $f'(0) = 0$.

3 Reglas de derivación

Para que un paseo en montaña rusa sea suave, los tramos rectos de la pista deben estar conectados a los segmentos curvos de manera que no se produzcan cambios bruscos de dirección. En el proyecto de la página 184, veremos la forma de diseñar el primer ascenso y caída de una nueva montaña rusa para lograr esta suavidad en el paseo.

Hasta aquí hemos visto cómo interpretar las derivadas en términos de pendientes y razones de cambio, y hemos estudiado cómo estimar las derivadas de funciones dadas por medio de tablas de valores. También hemos aprendido la manera de graficar las derivadas de funciones que se definen gráficamente y utilizado la definición de derivada para calcular las derivadas de funciones definidas mediante fórmulas. Pero sería tedioso si siempre tuviera que aplicar la definición, de modo que en este capítulo se desarrollan reglas para hallar derivadas sin tener que usar directamente esa definición. Estas reglas de derivación permiten calcular con relativa facilidad derivadas de funciones polinomiales, racionales, algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas. A continuación usaremos estas reglas para resolver problemas en que intervienen razones de cambio y la aproximación de funciones.

3.1 Derivadas de funciones polinomiales y exponenciales

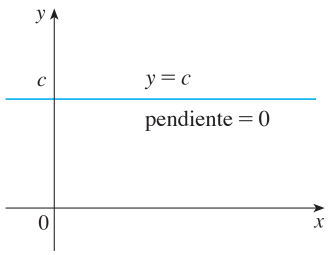


FIGURA 1
La gráfica de $f(x) = c$ es la recta $y = c$; por tanto, $f'(x) = 0$.

En esta sección aprenderá la manera de derivar funciones constantes, potencia, polinomiales y exponenciales.

Empezamos por la más sencilla de todas las funciones: la función constante $f(x) = c$. La gráfica de esta función es la recta horizontal $y = c$, la cual tiene pendiente 0, de modo que debe tener $f'(x) = 0$. (Véase la figura 1.) Una demostración formal, a partir de la definición de derivada, también es fácil:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

En la notación de Leibniz, esta regla se expresa como sigue.

Derivada de una función constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Función potencia

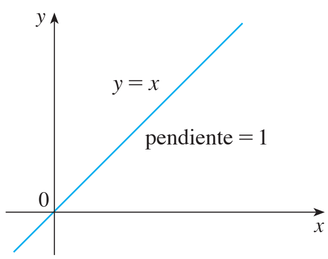


FIGURA 2
La grafica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$; por tanto, $f'(x) = 1$.

Enseguida, se consideran las funciones $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Si $n = 1$, la gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, la cual tiene pendiente 1 (véase la figura 2). De modo que

1 $$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

(También puede demostrar la ecuación 1 a partir de la definición de derivada.) Ya hemos investigado los casos $n = 2$ y $n = 3$. En efecto, en la sección 2.8 (ejercicios 19 y 20) encontramos que

2 $$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Para $n = 4$, encontramos la derivada de $f(x) = x^4$ como sigue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned}$$

Así,

3 $$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Si compara las ecuaciones $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$, se observa un patrón. Parece razonable presuponer que, cuando n es un entero positivo, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Esto resulta cierto.

Regla de la potencia Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

PRIMERA DEMOSTRACIÓN La fórmula

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

puede verificarse simplemente multiplicando el lado derecho (o mediante la suma del segundo factor como una serie geométrica). Si $f(x) = x^n$, podemos utilizar la ecuación 2.7.5 para $f'(a)$ y la ecuación anterior para escribir

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$

El teorema del binomio se da en la página de referencia 1.

Al hallar la derivada de x^4, tuvimos que desarrollar $(x + h)^4$. En este caso, necesitamos desarrollar $(x + h)^n$ y, para hacerlo, utilizamos el teorema del binomio:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

porque todos los términos, excepto el primero, tienen h como factor, y, por tanto, tienden a 0.

En el ejemplo 1 se ilustra la regla de la potencia usando varias notaciones.

EJEMPLO 1

a) Si $f(x) = x^6$, entonces $f'(x) = 6x^5$. b) Si $y = x^{1000}$, entonces $y' = 1000x^{999}$.

c) Si $y = t^4$, entonces $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$. d) Si $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$

¿Qué puede decirse acerca de las funciones potencia con exponentes enteros negativos? En el ejercicio 61 se pide al lector que verifique, a partir de la definición de derivada, que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Por lo que podemos escribir de nuevo esta ecuación como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

y, por consiguiente, la regla de la potencia se cumple cuando $n = -1$. De hecho, en la sección siguiente [ejercicio 62c)] se demuestra que se cumple para todos los enteros negativos.

¿Qué sucede si el exponente es una fracción? En el ejemplo 3 de la sección 2.8 encontramos que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

lo cual puede escribirse como

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Esto hace ver que la regla de la potencia es verdadera incluso cuando $n = \frac{1}{2}$. De hecho, en la sección 3.6 se demuestra que es verdadera para todos los números reales n.

Regla de la potencia (versión general) Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

En la figura 3 se muestra la función y el ejemplo 2b) y su derivada y'. Advierta que y no es derivable en 0 (y' no está definida allí). Observe que y' es positiva cuando y crece, y negativa cuando y decrece.

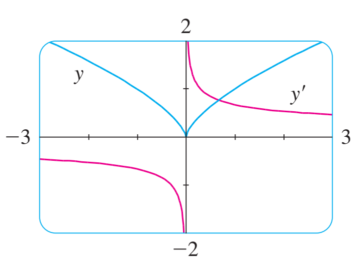


FIGURA 3
$y = \sqrt[3]{x^2}$

EJEMPLO 2 Derive:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

SOLUCIÓN En cada caso, reescriba la función como una potencia de x.

a) Dado que $f(x) = x^{-2}$, utilizamos la regla de la potencia con $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \tfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$

La regla de la potencia permite hallar las rectas tangentes sin hacer uso de la definición de derivada. Además, permite encontrar *rectas normales*. La **recta normal** a una curva C en un punto P es la recta a través de P que es perpendicular a la recta tangente en P. (En el estudio de la óptica, necesita considerar el ángulo entre un rayo de luz y la recta normal a un lente.)

V EJEMPLO 3 Halle la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = x\sqrt{x}$ en el punto (1, 1). Ilustre dibujando la curva y estas rectas.

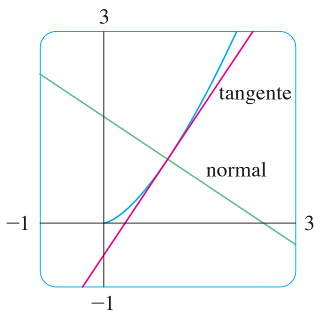


FIGURA 4
$y = x\sqrt{x}$

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

De este modo, la pendiente de la recta tangente en (1, 1) es $f'(1) = \frac{3}{2}$. Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

La recta normal es perpendicular a la recta tangente de tal manera que su pendiente es el recíproco negativo de $\frac{3}{2}$, es decir, $-\frac{2}{3}$. En estos términos, una ecuación de la recta normal es

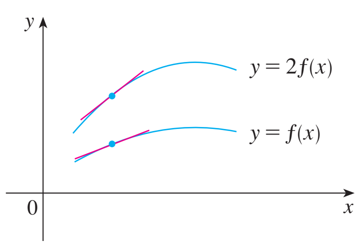
$$y - 1 = -\tfrac{2}{3}(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{5}{3}$$

En la figura 4 se traza la gráfica de la curva y las rectas tangente y normal.

Nuevas derivadas a partir de anteriores

Cuando se forman nuevas funciones a partir de funciones anteriores por adición, sustracción o multiplicación por una constante, sus derivadas pueden calcularse en términos de la derivada de sus funciones anteriores. En particular, en la formula siguiente se afirma que la *derivada de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función*.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE



La multiplicación por $c = 2$ estira la gráfica verticalmente en un factor de 2. Todas las elevaciones se han duplicado, pero los avances permanecen iguales. Las pendientes también se duplican.

Regla del múltiplo constante Si c es una constante y f es una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = cf(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 3 de los límites)} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

a) $\dfrac{d}{dx}(3x^4) = 3\dfrac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\dfrac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$

La siguiente regla señala que *la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas*.

Si se utiliza la notación con apóstrofos, puede escribir la regla de la suma como

$$(f + g)' = f' + g'$$

Regla de la suma Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 1)} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

La regla de la suma puede extenderse a la suma de cualquier número de funciones. Por ejemplo, si se aplica este teorema dos veces, se obtiene

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Al escribir $f - g$ como $f + (-1)g$ y aplicando la regla de la suma y la del múltiplo constante, se obtiene la siguiente fórmula.

Regla de la diferencia Si tanto f como g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

Las reglas de múltiplo constante, la suma y la diferencia pueden combinarse con la regla de la potencia para derivar cualquier función polinomial, como se muestra en los ejemplos que siguen.

EJEMPLO 5

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5) \\ &\quad = \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5) \\ &\quad = 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0 \\ &\quad = 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6 \end{aligned}$$

V EJEMPLO 6 Encuentre los puntos sobre la curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN Se tienen tangentes horizontales donde la derivada es cero. Observe que,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4) \\ &= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3) \end{aligned}$$

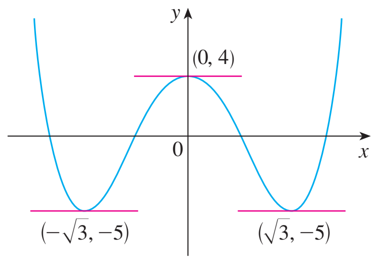


FIGURA 5
La curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ y sus rectas tangentes horizontales

Así, $dy/dx = 0$ si $x = 0$ o $x^2 - 3 = 0$, es decir, $x = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, la curva dada tiene rectas tangentes horizontales cuando $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$. Los puntos correspondientes son $(0, 4)$, $(\sqrt{3}, -5)$ y $(-\sqrt{3}, -5)$. (Véase la figura 5.)

EJEMPLO 7 La ecuación de movimiento de una partícula es $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Hallar la aceleración como una función del tiempo. ¿Cuál es la aceleración después de 2 segundos?

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 10t + 3$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$$

La aceleración después de 2 s es $a(2) = 14\,\text{cm/s}^2$.

Funciones exponenciales

Intente calcular la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$, aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

El factor a^x no depende de h, de modo que puede llevarlo delante del límite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Observe que el límite es el valor de la derivada de f en 0; esto es,

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

En consecuencia, ha demostrado que, si la función exponencial $f(x) = a^x$ es derivable en 0, entonces es derivable para cualquier x; así que

$$\boxed{4} \qquad f'(x) = f'(0)a^x$$

En esta ecuación se afirma que *la razón de cambio de cualquier función exponencial es proporcional a la función misma*. (La pendiente es proporcional a la altura.)

En la tabla que aparece a la izquierda, se da una evidencia numérica de la existencia de $f'(0)$ en los casos $a = 2$ y $a = 3$. (Los valores tienen una aproximación correcta a cuatro posiciones decimales.) Parece que los límites existen y

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

$$\text{para } a = 2, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.69$$

$$\text{para } a = 3, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1.10$$

De hecho, puede demostrarse que estos límites existen y que son correctos hasta seis cifras decimales, los valores son

$$\frac{d}{dx}(2^x)\bigg|_{x=0} \approx 0.693147 \qquad \frac{d}{dx}(3^x)\bigg|_{x=0} \approx 1.098612$$

Por esto, de la ecuación 4

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x$$

De todas las elecciones posibles para la base a de la ecuación 4, se tiene la formula más sencilla de derivación cuando $f'(0) = 1$. En vista de las estimaciones de $f'(0)$ para $a = 2$ y $a = 3$, parece razonable que exista un número a entre 2 y 3 para el que $f'(0) = 1$. Es costumbre denotar este valor con la letra e. (De hecho, así se presento e en la sección 1.5.) Apoyado en esto, se tiene la siguiente definición

En el ejercicio 1 verá que e se encuentra entre 2.7 y 2.8. Más adelante podremos demostrar que e con cinco dígitos (o posiciones) decimales es

$$e \approx 2.71828$$

Definición del número e

$$e \text{ es el número tal que } \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Geométricamente, esto significa que, de todas las funciones exponenciales posibles $y = a^x$, la función $f(x) = e^x$ es aquella cuya recta tangente en (0, 1) tiene pendiente $f'(0)$ que es exactamente 1. (Véanse las figuras 6 y 7.)

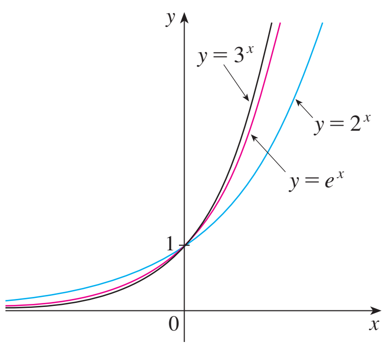


FIGURA 6

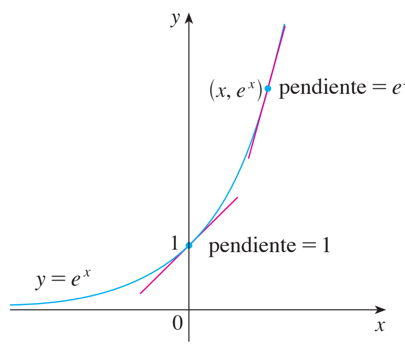


FIGURA 7

Si hacemos $a = e$ y, por tanto, $f'(0) = 1$ en la ecuación 4, se convierte en la importante fórmula de derivación que se proporciona a continuación.

TEC Visual 3.1 utiliza el comportamiento de una pendiente para ilustrar esta fórmula.

Derivada de la función exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

De aquí se ve que la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene la propiedad de que es su propia derivada. El significado geométrico de esto es que la pendiente de una recta tangente a la curva $y = e^x$ es igual a la coordenada y del punto (véase la figura 7).

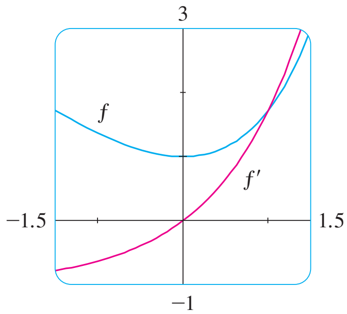


FIGURA 8

V EJEMPLO 8 Si $f(x) = e^x - x$, encuentre f' y f''. Compare las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN Si se aplica la regla de la diferencia, se tiene

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

En la sección 2.8 se define la segunda derivada como la derivada de f', así que

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

La función f y su derivada f' se grafican en la figura 8. Observe que f tiene una recta tangente horizontal cuando $x = 0$; esto corresponde al hecho de que $f'(0) = 0$. Asimismo, observe que para $x > 0$, $f'(x)$ es positiva y f es creciente. Cuando $x < 0$, $f'(x)$ es negativa y f es decreciente.

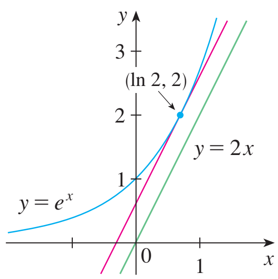


FIGURA 9

EJEMPLO 9 ¿En qué punto de la curva $y = e^x$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x$?

SOLUCIÓN Puesto que $y = e^x$, tenemos $y' = e^x$. Sea a la coordenada x del punto en cuestión. Entonces, la pendiente de la recta tangente en ese punto es e^a. Esta recta tangente será paralela a la recta $y = 2x$ si tiene la misma pendiente; es decir, 2. Si se igualan las pendientes, se tiene

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

Por tanto, el punto requerido es $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$. (Véase la figura 9.)

3.1 Ejercicios

1. a) ¿Cómo se define el número e?
b) Use una calculadora para estimar los valores de los límites

$$\lim_{h \to 0} \frac{2.7^h - 1}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \frac{2.8^h - 1}{h}$$

correctos hasta dos dígitos decimales. ¿Qué puede concluir acerca del valor de e?

2. a) Dibuje a mano la función $f(x) = e^x$, poniendo particular atención a la forma en que la gráfica cruza el eje y. ¿Qué hecho le permite hacer esto?
b) ¿Qué tipos de funciones son $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^e$? Compare las fórmulas de derivación para f y g.
c) ¿Cuál de las dos funciones en el inciso b) crece más rápidamente cuando x es muy grande?

3-32 Derive cada una de las siguientes funciones.

3. $f(x) = 2^{40}$

4. $f(x) = e^5$

5. $f(t) = 2 - \frac{2}{3}t$

6. $F(x) = \frac{3}{4}x^8$

7. $f(x) = x^3 - 4x + 6$

8. $f(t) = 1.4t^5 - 2.5t^2 + 6.7$

9. $g(x) = x^2(1 - 2x)$

10. $h(x) = (x - 2)(2x + 3)$

11. $g(t) = 2t^{-3/4}$

12. $B(y) = cy^{-6}$

13. $A(s) = -\dfrac{12}{s^5}$

14. $y = x^{5/3} - x^{2/3}$

15. $R(a) = (3a + 1)^2$

16. $h(t) = \sqrt[4]{t} - 4e^t$

17. $S(p) = \sqrt{p} - p$

18. $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$

19. $y = 3e^x + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

20. $S(R) = 4\pi R^2$

21. $h(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu$

22. $y = \dfrac{\sqrt{x} + x}{x^2}$

23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

24. $g(u) = \sqrt{2}\,u + \sqrt{3u}$

25. $j(x) = x^{2.4} + e^{2.4}$

26. $k(r) = e^r + r^e$

27. $H(x) = (x + x^{-1})^3$

28. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

29. $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

30. $v = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

32. $y = e^{x+1} + 1$

33-34 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto dado.

33. $y = \sqrt[4]{x}$, $(1, 1)$

34. $y = x^4 + 2x^2 - x$, $(1, 2)$

35-36 Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a cada una de las siguientes curvas en el punto dado.

35. $y = x^4 + 2e^x$, $(0, 2)$

36. $y = x^2 - x^4$, $(1, 0)$

37-38 Encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto dado, a cada una de las siguientes curvas. Ilustre graficando la curva y la recta tangente, en la misma pantalla.

37. $y = 3x^2 - x^3$, $(1, 2)$

38. $y = x - \sqrt{x}$, $(1, 0)$

39-40 Encuentre $f'(x)$. Compare las gráficas de f y f' y utilícelas para explicar por qué su respuesta es razonable.

39. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$

40. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x - 1$

41. a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para graficar la función $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ y $g(x) = x^e$ en el rectángulo de vista $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.
b) Con la misma gráfica del inciso a) estime las pendientes y elabore un esbozo a mano de la gráfica de f'. (Véase el ejemplo 1 de la sección 2.8.)
c) Calcule $f'(x)$ y utilice esta expresión para graficar f' con una calculadora graficadora. Compare con su esbozo del inciso b).

42. a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para graficar la función $g(x) = e^x - 3x^2$ en el rectángulo de vista $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.
b) Utilizando la gráfica del inciso a) para estimar pendientes, haga a mano un boceto aproximado de la grafica de g'. (Véase el ejemplo 1 de la sección 2.8.)
c) Calcule $g'(x)$ y utilice esta expresión, con un dispositivo graficador, para dibujar g'. Compare con su boceto del inciso b).

43-44 Encuentre la primera y segunda derivada de cada una de las siguientes funciones.

43. $f(x) = 10x^{10} + 5x^5 - x$

44. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

45-46 Encuentre la primera y segunda derivadas de cada una de las siguientes funciones. Verifique para ver si sus respuestas son razonables, comparando la gráficas de f, f' y f''.

45. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$

46. $f(x) = e^x - x^3$

47. La ecuación de movimiento de una partícula es $s = t^3 - 3t$, donde s está en metros y t en segundos. Encuentre
a) la velocidad y la aceleración como funciones de t,
b) la aceleración después de 2 s y
c) la aceleración cuando la velocidad es cero.

48. La ecuación de movimiento de una partícula es $s = t^4 - 2t^3 + t^2 - t$, donde s está en metros y t en segundos.
a) Encuentre la velocidad y la aceleración como funciones de t.
b) Encuentre la aceleración después de 1 s.
c) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración, en la misma pantalla.

49. La ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P del gas es inversamente proporcional al volumen del gas.
a) Suponga que la presión de una muestra de aire que ocupa $0.106\,m^3$ a 25 °C es 50 kPa. Exprese V como una función de P.
b) Calcule dV/dP cuando $P = 50$ kPa. ¿Cuál es el significado de la derivada? ¿Cuáles son sus unidades?

50. Los neumáticos de automóvil deban ser inflados correctamente porque un alto inflado o un bajo inflado puede causar desgaste prematuro. Los datos de la tabla muestran la vida L (en miles de millas) para un determinado tipo de neumático a diversas presiones P (en lb/pulg²).

P	26	28	31	35	38	42	45
L	50	66	78	81	74	70	59

a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para modelar la vida del neumático con una función cuadrática de la presión.
b) Utilice el modelo para estimar dL/dP cuando $P = 30$ y cuando $P = 40$. ¿Cuál es el significado de la derivada? ¿Cuáles son sus unidades? ¿Cuál es el significado de los signos de las derivadas?

51. Encuentre los puntos sobre la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ donde la recta tangente es horizontal.

52. ¿Para qué valores de x la gráfica de $f(x) = e^x - 2x$ tiene una recta tangente horizontal?

53. Demuestre que la curva $y = 2e^x + 3x + 5x^3$ no tiene una recta tangente cuya pendiente es 2.

54. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x\sqrt{x}$ que es paralela a la recta $y = 1 + 3x$.

55. Encuentre las ecuaciones de ambas rectas tangentes a la curva $y = 1 + x^3$ y paralela a la recta $12x - y = 1$.

56. ¿En qué punto sobre la curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ es la recta tangente paralela a la recta $3x - y = 5$? Ilustre graficando la curva de ambas rectas.

57. Encuentre la ecuación de la recta normal a la parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que es paralela a la recta $x - 3y = 5$.

58. ¿Dónde la recta normal a la parábola $y = x - x^2$ en el punto (1, 0) interseca la parábola por segunda vez? Ilustre con un esbozo la gráfica.

59. Dibuje un diagrama que muestre que hay dos rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto $(0, -4)$. Encuentre las coordenadas de los puntos donde estas rectas tangentes intersectan la parábola.

60. a) Encuentre ecuaciones de ambas rectas que pasan por el punto $(2, -3)$ que son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.
b) Demuestre que no hay una recta que pasa por el punto (2, 7) que es tangente a la parábola. A continuación, dibuje un diagrama para ver por qué.

61. Utilice la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$. (Esto demuestra la regla de la potencia para el caso $n = -1$.)

62. Encuentre la n-ésima derivada de cada una de las siguientes funciones calculando algunas derivadas y observando el patrón de recurrencia.
a) $f(x) = x^n$ b) $f(x) = 1/x$

63. Encuentre una polinomial P de segundo grado tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ y $P''(2) = 2$.

64. La ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$ es una **ecuación diferencial** porque involucra una función desconocida y y sus derivadas representadas por y' y y''. Encuentre constantes A, B y C tales que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisface esta ecuación diferencial. (Las ecuaciones diferenciales serán estudiadas en detalle en el capítulo 9.)

65. Encuentre una ecuación cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya gráfica tiene rectas tangentes horizontales en los puntos $(-2, 6)$ y (2, 0).

66. Encuentre una parábola con ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que tiene pendiente 4 en $x = 1$, pendiente -8 en $x = -1$ y que pasa por el punto (2, 15).

67. Sea
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$
¿Es f derivable en $x = 1$? Trace las gráficas de f y f'.

68. ¿En qué números es derivable la siguiente función g?
$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2 - x & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$
Proporcione una fórmula para g' y trace las gráficas de g y g'.

69. a) ¿Para qué valores de x la función $f(x) = |x^2 - 9|$ es derivable? Encuentre una fórmula para f'.
b) Esboce las gráficas de f y f'.

70. ¿Dónde es derivable la función $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$? Proporcione la función para h' y trace las gráficas de h y h'.

71. Encuentre la parábola con ecuación $y = ax^2 + bx$ cuya recta tangente en (1, 1) tiene por ecuación $y = 3x - 2$.

72. Supongamos que la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene una recta tangente cuando $x = 0$ con ecuación $y = 2x + 1$ y una recta tangente cuando $x = 1$ con ecuación $y = 2 - 3x$. Encuentre los valores de a, b, c y d.

73. ¿Para qué valores de a y b la recta $2x + y = b$ es tangente a la parábola $y = ax^2$ cuando $x = 2$?

74. Encuentre el valor de c tal que la recta $y = \frac{3}{2}x + 6$ es tangente a la curva $y = c\sqrt{x}$

75. Sea
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$
Encuentre los valores de m y b que hacen que f sea derivable para toda x.

76. Se dibuja una recta tangente a la hipérbola $xy = c$ en un punto p.
a) Demuestre que el punto medio del segmento de recta cortado de esta recta tangente por los ejes de coordenadas es P.
b) Demuestre que el triángulo formado por la recta tangente y los ejes de coordenadas siempre tiene la misma área, no importa dónde se encuentre P sobre la hipérbola.

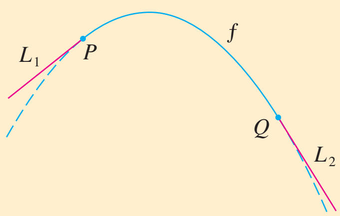
77. Evalúe $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

78. Dibuje un diagrama que muestre dos rectas perpendiculares que se intersecan en el eje y y que son ambas tangentes a la parábola $y = x^2$. ¿Donde se intersecan estas rectas?

79. Si $c > \frac{1}{2}$, ¿cuántas rectas que pasan por el punto $(0, c)$ son rectas normales a la parábola $y = x^2$? ¿Qué pasa si $c \leqslant \frac{1}{2}$?

80. Trace las parábolas $y = x^2$ y $y = x^2 - 2x + 2$. ¿Piensa que existe una recta que es tangente a ambas curvas? Si es así, encuentre su ecuación. Si no es así, ¿por qué no?

PROYECTO DE APLICACIÓN CONSTRUCCIÓN DE UNA MONTAÑA RUSA



© Flashon Studio / Shutterstock

Suponga que se le solicita que diseñe el primer ascenso y descenso de una nueva montaña rusa. Después de estudiar fotografías de sus montañas rusas predilectas, decide hacer la pendiente de ascenso 0.8 y la de descenso -1.6. Opta por conectar estos dos tramos rectos $y = L_1(x)$ y $y = L_2(x)$ mediante parte de una parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, donde x y $f(x)$ se miden en pies. Para que el trayecto sea uniforme, no pueden existir cambios abruptos de dirección, por lo que desea que los segmentos de recta L_1 y L_2 sean tangentes a la parábola en los puntos de transición P y Q. (Véase la figura.) Para simplificar las ecuaciones, decide situar el origen en P.

1. a) Suponga que la distancia horizontal entre P y Q es 100 pies. Escriba ecuaciones en a, b y c que aseguren que el trayecto sea suave en los puntos de transición.
b) Resuelva las ecuaciones del inciso a) para a, b y c para hallar una fórmula para $f(x)$.
c) Dibuje L_1, f y L_2 para verificar gráficamente que las transiciones sean suaves.
d) Encuentre la diferencia en elevación entre P y Q.

2. La solución del problema 1 puede *parecer* suave, pero es posible que no *sienta* lo suave debido a que la pieza definida como función [consistente en $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 100$; y $L_2(x)$ para $x > 100$] no tiene una segunda derivada continua. Por consiguiente, usted decide mejorar su diseño utilizando una función cuadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ únicamente en el intervalo $10 \leqslant x \leqslant 90$ y conectarlo con las funciones lineales por medio de dos funciones cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \qquad 0 \leqslant x < 10$$
$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \qquad 90 < x \leqslant 100$$

a) Escriba un sistema de ecuaciones con 11 incógnitas que aseguren que las funciones y sus dos primeras derivadas coincidan en los puntos de transición.
SAC b) Resuelva las ecuaciones del inciso a) con un sistema algebraico computarizado para encontrar las fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.
c) Dibuje L_1, g, q, h y L_2 y compárelos con las gráficas del problema 1 inciso c).

Se requiere calculadora graficadora o computadora

SAC Se requiere un sistema algebraico computarizado

3.2 Reglas del producto y el cociente

Las fórmulas de esta sección permiten derivar nuevas funciones formadas a partir de anteriores, por multiplicación o división.

Regla del producto

Por analogía con las reglas de la suma y la diferencia, podría tener la tentación de suponer —como Leibniz lo hizo hace tres siglos— que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Sin embargo, puede ver que esta suposición es errónea al considerar un ejemplo particular. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Por tanto, la regla de la potencia da $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x$. Pero $(fg)(x) = x^3$, de modo que $(fg)'(x) = 3x^2$. Así que, $(fg)' \neq f'g'$. La formula correcta fue descubierta por Leibniz (poco tiempo después de su falso inicio) y se llama regla del producto.

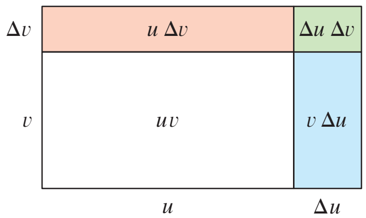


FIGURA 1
Geometría de la regla del producto

Antes de enunciar la regla del producto, vea como podría descubrirla. Empezamos suponiendo que $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones positivas derivables. Entonces puede interpretarse el producto uv como el área de un rectángulo (véase la figura 1). Si x cambia una cantidad Δx, entonces los cambios correspondientes en u y v son

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

y el nuevo valor del producto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, puede interpretarse como el área del rectángulo grande en la figura 1 (siempre que Δu y Δv sean positivos).

El cambio en el área del rectángulo es

$$\boxed{1} \qquad \begin{aligned} \Delta(uv) &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v \\ &= \text{la suma de las tres áreas sombreadas} \end{aligned}$$

Si dividimos entre Δx, se obtiene

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Recuerde que en la notación de Leibniz la definición de derivada puede escribirse como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si ahora hacemos que $\Delta x \to 0$, obtenemos la derivada de uv:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) \\ &= u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0}\Delta u\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) \\ &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx} \end{aligned}$$

$$\boxed{2} \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

(Observe que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ puesto que f es derivable y, por tanto, continua.)

Aun cuando se partió de la hipótesis (para la interpretación geométrica) que todas las cantidades son positivas, observe que la ecuación 1 siempre es verdadera. (El álgebra es válida si u, v, Δu y Δv son positivas o negativas.) De modo que ha probado la ecuación 2, conocida como regla del producto, para todas las funciones derivables u y v.

En notación con apóstrofos:

$$(fg)' = fg' + gf'$$

Regla del producto Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

En palabras, la regla del producto expresa que *la derivada de un producto de dos funciones es la primera función multiplicada por la derivada de la segunda función, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera función*.

EJEMPLO 1

a) Si $f(x) = xe^x$, encuentre $f'(x)$.

b) Halle la n-ésima derivada, $f^{(n)}(x)$.

En la figura 2 se muestran las gráficas de la función f del ejemplo 1 y su derivada f'. Advierta que $f'(x)$ es positiva cuando f es creciente y negativa cuando f es decreciente.

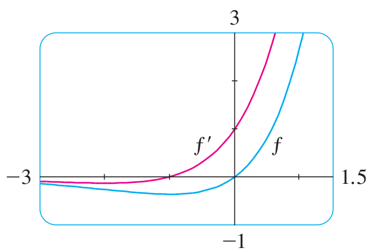


FIGURA 2

SOLUCIÓN

a) Por la regla del producto se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(xe^x) \\ &= x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x) \\ &= xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x \end{aligned}$$

b) Aplicando a regla del producto una segunda vez, se obtiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}[(x+1)e^x] \\ &= (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x+1) \\ &= (x+1)e^x + e^x \cdot 1 = (x+2)e^x \end{aligned}$$

Las siguientes aplicaciones de la regla del producto dan

$$f'''(x) = (x+3)e^x \qquad f^{(4)}(x) = (x+4)e^x$$

De hecho, cada derivada sucesiva agrega otro término e^x, así que

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

En el ejemplo 2, a y b son constantes. Es habitual en matemáticas el uso de las primeras letras del alfabeto, para representar las constantes y las últimas para representar variables.

EJEMPLO 2 Derive la función $f(t) = \sqrt{t}\,(a+bt)$

SOLUCIÓN 1 Utilizando la regla del producto, tenemos que

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(a+bt) + (a+bt)\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right) \\ &= \sqrt{t}\cdot b + (a+bt)\cdot \tfrac{1}{2}t^{-1/2} \\ &= b\sqrt{t} + \frac{a+bt}{2\sqrt{t}} = \frac{a+3bt}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Si primero utilizamos las leyes de los exponentes para reescribir $f(t)$, entonces podemos proceder directamente sin utilizar la regla del producto.

$$\begin{aligned} f(t) &= a\sqrt{t} + bt\sqrt{t} = at^{1/2} + bt^{3/2} \\ f'(t) &= \tfrac{1}{2}at^{-1/2} + \tfrac{3}{2}bt^{1/2} \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a la respuesta dada en la solución 1.

El ejemplo 2 muestra que a veces es más fácil simplificar un producto de funciones antes de derivar que utilizar directamente la regla del producto. En el ejemplo 1, sin embargo, la regla del producto es sólo un posible método.

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}\, g(x)$, donde $g(4) = 2$ y $g'(4) = 3$, encuentre $f'(4)$.

SOLUCIÓN Aplicando la regla del producto, tenemos que

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\, g(x)\right] = \sqrt{x}\, \frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right] \\
&= \sqrt{x}\, g'(x) + g(x) \cdot \tfrac{1}{2}x^{-1/2} \\
&= \sqrt{x}\, g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Así que

$$
f'(4) = \sqrt{4}\, g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2 \cdot 3 + \frac{2}{2 \cdot 2} = 6.5
$$

Regla del cociente

Encontramos una regla para derivar el cociente de dos funciones derivables $u = f(x)$ y $v = g(x)$ en gran parte de la misma manera que hemos encontrado la regla del producto. Si x, u y v se incrementan por cantidades Δx, Δu y Δv, entonces el cambio correspondiente en el cociente u/v es

$$
\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} \\
&= \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}
\end{aligned}
$$

por tanto,

$$
\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}
$$

Cuando $\Delta x \to 0$, también $\Delta v \to 0$, porque $v = g(x)$ es derivable y, por consiguiente, continua. Así, al aplicar las leyes de los límites, se obtiene

$$
\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}
$$

En notación con apóstrofos:

$$
\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}
$$

Regla del cociente Si f y g son derivables, entonces

$$
\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}
$$

En palabras: en la regla del cociente se expresa que la *derivada de un cociente es el denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.*

La regla del cociente y las otras formulas de derivación permiten calcular la derivada de cualquier función racional, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Podemos utilizar un dispositivo de graficación para verificar que la respuesta al ejemplo 4 es verosímil. En la figura 3 se muestran las gráficas de la función del ejemplo 4 y su derivada. Note que cuando y crece con rapidez (cerca de -2), y' es grande. Y cuando y crece con lentitud, y' está cercana a 0.

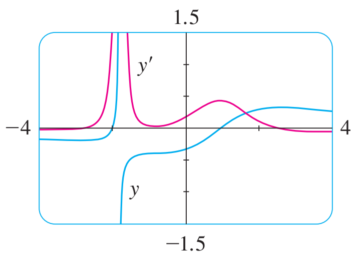


FIGURA 3

V EJEMPLO 4 Sea $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Entonces

$$y' = \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}$$

V EJEMPLO 5 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x/(1 + x^2)$ en el punto $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la regla del cociente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x\dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2}$$

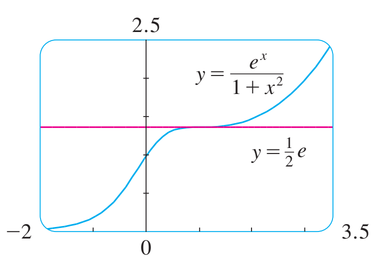


FIGURA 4

De modo que la pendiente de la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Esto significa que la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$ es horizontal, y su ecuación es $y = \frac{1}{2}e$. [Véase la figura 4. Advierta que la función es creciente y cruza su recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$.]

NOTA No use la regla del cociente *cada* vez que vea un cociente. A veces es más fácil reescribir un cociente en una forma que sea más sencilla para los fines de derivación. Por ejemplo, aun cuando es posible derivar la función

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

aplicando la regla del cociente, es más fácil dividir primero y escribir la función como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de derivar.

A continuación se resumen las fórmulas de derivación que ha aprendido hasta el momento.

Tabla de fórmulas de derivación

$\dfrac{d}{dx}(c) = 0$	$\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f + g)' = f' + g'$	$(f - g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg' + gf'$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{gf' - fg'}{g^2}$	

3.2 Ejercicios

1. Encuentre la derivada de $f(x) = (1 + 2x^2)(x - x^2)$ de dos maneras: aplicando la regla del producto y efectuando primero la multiplicación. ¿Sus respuestas son equivalentes?

2. Encuentre la derivada de la función

$$F(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + \sqrt{x}}{x^2}$$

en dos maneras diferentes: utilizando la regla del cociente y simplificando primero. Demuestre que sus respuestas son equivalentes. ¿Cuál método prefiere?

3-26 Derive cada una de las siguientes funciones.

3. $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \dfrac{x}{e^x}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

7. $g(x) = \dfrac{1 + 2x}{3 - 4x}$

8. $G(x) = \dfrac{x^2 - 2}{2x + 1}$

9. $H(u) = (u - \sqrt{u})(u + \sqrt{u})$

10. $J(v) = (v^3 - 2v)(v^{-4} + v^{-2})$

11. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $f(z) = (1 - e^z)(z + e^z)$

13. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

14. $y = \dfrac{x + 1}{x^3 + x - 2}$

15. $y = \dfrac{t^2 + 2}{t^4 - 3t^2 + 1}$

16. $y = \dfrac{t}{(t - 1)^2}$

17. $y = e^p(p + p\sqrt{p})$

18. $y = \dfrac{1}{s + ke^s}$

19. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

20. $z = w^{3/2}(w + ce^w)$

21. $f(t) = \dfrac{2t}{2 + \sqrt{t}}$

22. $g(t) = \dfrac{t - \sqrt{t}}{t^{1/3}}$

23. $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$

24. $f(x) = \dfrac{1 - xe^x}{x + e^x}$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{c}{x}}$

26. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

27-30 Halle $f'(x)$ y $f''(x)$ de cada una de las siguientes funciones.

27. $f(x) = x^4 e^x$

28. $f(x) = x^{5/2}e^x$

29. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2x}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

31-32 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto especificado.

31. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$, $(1, 0)$

32. $y = \dfrac{e^x}{x}$, $(1, e)$

33-34 Halle las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a cada una de las curvas dadas en el punto que se especifica.

33. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

34. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, $(1, 1)$

35. a) La curva $y = 1/(1 + x^2)$ se llama **bruja de María Agnesi**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.
b) Ilustre el inciso a) trazando las gráficas de la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

36. a) La curva $y = x/(1 + x^2)$ se llama **serpentina**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(3, 0.3)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente, en la misma pantalla.

37. a) Si $f(x) = (x^3 - x)e^x$, encuentre $f'(x)$.
b) Compruebe que su respuesta al inciso a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

38. a) Si $f(x) = e^x/(2x^2 + x + 1)$, halle $f'(x)$.
b) Compruebe que su respuesta al inciso a) es razonable comparando las graficas de f y f'.

Se requiere calculadora graficadora o computadora   **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

39. a) Si $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$, halle $f'(x)$ y $f''(x)$.
b) Verifique si sus respuestas en el inciso a) son razonables al comparar las gráficas de f, f' y f''.

40. a) Si $f(x) = (x^2 - 1)e^x$, halle $f'(x)$ y $f''(x)$.
b) Verifique para comprobar que sus respuestas en el inciso a) son admisibles al comparar las gráficas de f, f' y f''.

41. Si $f(x) = x^2/(1 + x)$, halle $f''(1)$.

42. Si $g(x) = x/e^x$, halle $g^{(n)}(x)$.

43. Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. Encuentre los valores siguientes

a) $(fg)'(5)$ b) $(f/g)'(5)$ c) $(g/f)'(5)$

44. Suponga que $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $g'(2) = 7$, encuentre $h'(2)$.

a) $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$ b) $h(x) = f(x)g(x)$

c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{1 + f(x)}$

45. Si $f(x) = e^x g(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, halle $f'(0)$.

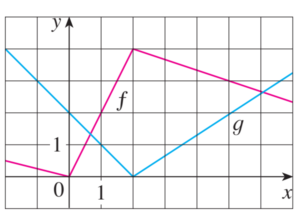
46. Si $h(2) = 4$ y $h'(2) = -3$, encuentre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

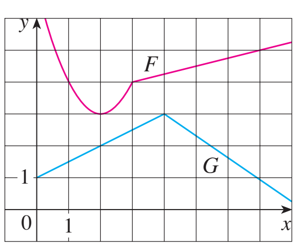
47. Si $g(x) = xf(x)$, donde $f(3) = 4$ y $f'(3) = -2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto donde $x = 3$.

48. Si $f(2) = 10$ y $f'(x) = x^2 f(x)$ para toda x, encuentre $f''(2)$.

49. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se ilustran, sean $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = f(x)/g(x)$.
a) Encuentre $u'(1)$. b) Encuentre $v'(5)$.



50. Sea $P(x) = F(x)G(x)$ y $Q(x) = F(x)/G(x)$, donde F y G son las funciones cuyas gráficas se muestran
a) Encuentre $P'(2)$. b) Encuentre $Q'(7)$.



51. Si g es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

a) $y = xg(x)$ b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$ c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

52. Si f es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

a) $y = x^2 f(x)$ b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

53. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = x/(x + 1)$ pasan por el punto $(1, 2)$? ¿En qué puntos toca la curva estas rectas tangentes?

54. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

que sean paralelas a la recta $x - 2y = 2$.

55. Encuentre $R'(0)$, donde

$$R(x) = \frac{x - 3x^3 + 5x^5}{1 + 3x^3 + 6x^6 + 9x^9}$$

Sugerencia: en vez de encontrar primero $R'(x)$, sea $f(x)$ el numerador y $g(x)$ el denominador de $R(x)$ y calcule $R'(0)$ de $f(0)$, $f'(0)$, $g(0)$ y $g'(0)$.

56. Utilice el método del ejercicio 55 para calcular $Q'(0)$, donde

$$Q(x) = \frac{1 + x + x^2 + xe^x}{1 - x + x^2 - xe^x}$$

57. En este ejercicio, estime la proporción a la que se está creciendo el ingreso personal total en el área metropolitana de Richmond-Petersburg, Virginia. En 1999, la población de esta área era 961 400 y la población aumentaba en alrededor de 9 200 personas al año. El ingreso anual promedio era \$30 593 per cápita, y este promedio se incrementaba en cerca de \$1400 al año (ligeramente por arriba del promedio nacional de alrededor de \$1225 al año). Use la regla del producto y estas cifras para estimar la proporción en la que estaba aumentando el ingreso personal total en el área de Richmond-Petersburg en 1999. Explique el significado de cada término en la regla del producto.

58. Un fabricante produce rollos de una tela con un ancho fijo. La cantidad q de esta tela (medida en yardas) que se vende es función del precio de venta p (en dólares por yarda), de modo que $q = f(p)$. Entonces, el ingreso total que se percibe con el precio de venta p es $R(p) = pf(p)$.
a) ¿Qué significa afirmar que $f(20) = 10\,000$ y $f'(20) = -350$?
b) Suponiendo los valores del inciso a), encuentre $R'(20)$ e interprete su respuesta.

59. a) Utilice la regla del producto dos veces para probar que si f, g y h son derivables, entonces $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

b) Tomando $f = g = h$ en el inciso a), demuestre que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x)$$

c) Utilice el resultado del inciso b) para derivar $y = e^{3x}$.

60. a) Si $F(x) = f(x)g(x)$, donde f y g son derivables en todos los órdenes, demuestre que $F'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

b) Halle fórmulas similares para F''' y $F^{(4)}$.

c) Intente una fórmula para $F^{(n)}$.

61. Halle expresiones para las primeras cinco derivadas de $f(x) = x^2e^x$. ¿Observa algún patrón en estas expresiones? Intente una fórmula para $f^{(n)}(x)$ y demuéstrela por medio de inducción matemática.

62. a) Si g es derivable la **regla del recíproco** indica que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Utilice la regla del cociente para demostrar la regla del recíproco.

b) Utilice la regla del recíproco para derivar la función del ejercicio 18.

c) Utilice la regla del recíproco para comprobar que la regla de la potencia es válida para números enteros negativos; es decir,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

para todos los números enteros positivos n.

3.3 Derivadas de funciones trigonométricas

En el apéndice D se da un repaso de las funciones trigonométricas.

Antes de iniciar esta sección, quizá necesite repasar las funciones trigonométricas. En particular, es importante que recuerde que cuando habla de la función f definida para todos los números reales x, mediante

$$f(x) = \text{sen } x$$

se entiende que sen x significa el seno del ángulo cuya medida en *radianes* es x. Para las demás funciones trigonométricas: cos, tan, csc, sec y cot se cumple con una convención similar. Recuerde de la sección 2.5 que todas las funciones trigonométricas son continuas en cada número en sus dominios.

Si traza la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$ y utiliza la interpretación de $f'(x)$ como la pendiente de la recta tangente a la curva seno para trazar la grafica de f' (véase el ejercicio 14 de la sección 2.8), parece que la gráfica de esta última es la misma que la curva coseno (véase la figura 1).

TEC Visual 3.3 muestra una animación de la figura 1.

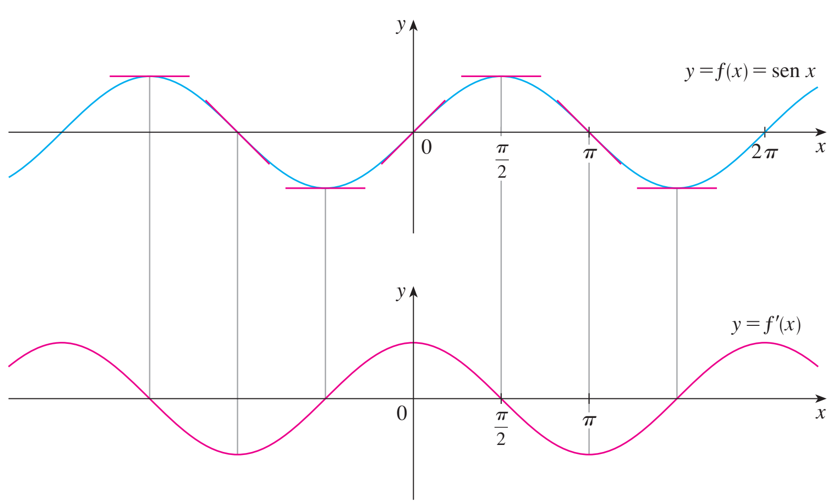


FIGURA 1

Intente confirmar la conjetura de que si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = \cos x$. A partir de la definición de derivada, tenemos

Hemos utilizado la fórmula de adición para el seno. Véase el apéndice D.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x}{h} + \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right] \\
\boxed{1} \qquad &= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}
\end{aligned}$$

Dos de estos cuatro límites son fáciles de evaluar. Puesto que se considera a x como constante al calcular un límite cuando $h \to 0$, se tiene

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} \cos x = \cos x$$

El límite de $(\operatorname{sen} h)/h$ no es tan obvio. Con base en la evidencia numérica y gráfica, en el ejemplo 3 de la sección 2.2 se infiere que

$$\boxed{2} \qquad \boxed{\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1}$$

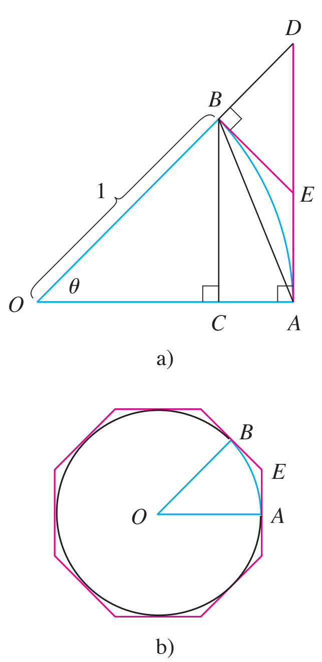


FIGURA 2

Ahora utilizaremos un argumento geométrico para demostrar la ecuación 2. Suponga primero que θ se encuentra entre 0 y $\pi/2$. En la figura 2a) se muestra un sector de circunferencia con centro en 0, ángulo central θ y radio 1. BC se traza perpendicular a OA. Por la definición de radián, tenemos que arco $AB = \theta$. Asimismo, $|BC| = |OB| \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta$. Con base en el diagrama, se observa que

$$|BC| < |AB| < \text{arc } AB$$

En consecuencia $\qquad \operatorname{sen} \theta < \theta \qquad$ de manera que $\qquad \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1$

Suponga que las tangentes en A y B se intersecan en E. Puede verse, con base en la figura 2b), que la circunferencia es menor que la longitud del polígono circunscrito, de modo que arc $AB < |AE| + |EB|$. Así,

$$\begin{aligned}
\theta = \text{arc } AB &< |AE| + |EB| \\
&< |AE| + |ED| \\
&= |AD| = |OA| \tan \theta \\
&= \tan \theta
\end{aligned}$$

(En el apéndice F se demuestra directamente la desigualdad $\theta \leqslant \tan \theta$ a partir de la definición de la longitud de arco, sin recurrir a la intuición geométrica, como se hizo aquí.)

Por tanto, tenemos que

$$\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

de modo que

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1$$

Sabemos que $\text{lím}_{\theta\to 0} 1 = 1$ y $\text{lím}_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$, así que, por el teorema de la compresión

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

Pero la función $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ es una función par, de modo que sus límites por la derecha y por la izquierda deben ser iguales y, por tanto,

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

así que se ha demostrado la ecuación 2.

Podemos deducir el valor del límite restante en $\boxed{1}$ como sigue:

Multiplique el numerador y el denominador por $\cos\theta + 1$ para poner la función de manera que pueda usar los límites que conoce.

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta}\cdot\frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1}\right) = \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)} \\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} = -\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1}\right) \\
&= -\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1} \\
&= -1\cdot\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0 \qquad \text{(por la ecuación 2)}
\end{aligned}$$

3 $$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0}$$

Si ahora ponemos los límites $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$ en $\boxed{1}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\operatorname{sen}x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0}\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h} \\
&= (\operatorname{sen}x)\cdot 0 + (\cos x)\cdot 1 = \cos x
\end{aligned}$$

Así que hemos demostrado la fórmula para la derivada de la función seno:

4 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}x) = \cos x}$$

La figura 3 muestra las gráficas de la función del ejemplo 1 y su derivada. Advierta que $y' = 0$ siempre que y tenga una recta tangente horizontal.

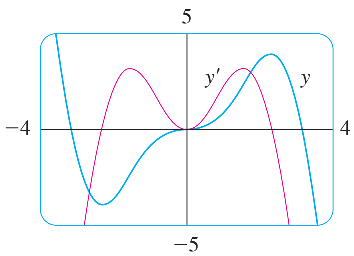


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 Derive $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Con la regla del producto y la fórmula 4, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(x^2)\\ &= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

Si se aplican los mismos métodos que en la demostración de la fórmula 4, puede demostrarse (véase el ejercicio 20) que

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x}$$

También puede derivar la función tangente utilizando la definición de derivada, pero es más fácil usar la regla del cociente con las fórmulas 4 y 5:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\\ &= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

6 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$

También es fácil hallar las derivadas de las funciones trigonométricas restantes, csc, sec y cot, aplicando la regla del cociente (véanse los ejercicios 17-19). En la tabla siguiente aparecen todas las formulas de derivación de las funciones trigonométricas. Recuerde que son válidas sólo cuando x se mide en radianes.

Cuando memorice esta tabla, resulta útil notar que los signos menos van con las derivadas de las "cofunciones"; es decir, coseno, cosecante y cotangente.

Derivadas de las funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

EJEMPLO 2 Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$. ¿Para cuáles valores de x la gráfica de f tiene una recta tangente horizontal?

SOLUCIÓN Por la regla del cociente se tiene que

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1 + \tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x \dfrac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2} \\
&= \frac{(1 + \tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \\
&= \frac{\sec x\,(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2} \\
&= \frac{\sec x\,(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}
\end{aligned}
$$

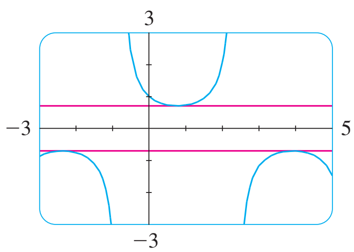


FIGURA 4
Las rectas tangentes horizontales del ejemplo 2

En la simplificación de la respuesta hemos utilizado la identidad $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Ya que $\sec x$ nunca es 0, $f'(x) = 0$ cuando $\tan x = 1$, y esto sucede cuando $x = n\pi + \pi/4$, donde n es un entero (véase la figura 4).

Las funciones trigonométricas se usan con frecuencia en el modelado de fenómenos del mundo real. En particular, las vibraciones, ondas, movimientos elásticos y otras cantidades que varían de manera periódica, pueden describirse por medio de las funciones trigonométricas. En el ejemplo siguiente se analiza un caso de movimiento armónico simple.

V EJEMPLO 3 Un objeto que se encuentra en el extremo de un resorte vertical se desplaza hacia abajo 4 cm mas allá de su posición en reposo, para estirar el resorte, y se deja en libertad en el instante $t = 0$. (Véase la figura 5 y observe que la dirección hacia abajo es positiva.) Su posición en el instante t es

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

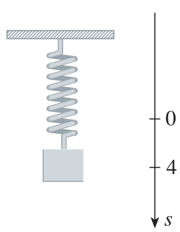


FIGURA 5

Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t y úselas para analizar el movimiento del objeto.

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4\frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \operatorname{sen} t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \operatorname{sen} t) = -4\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) = -4 \cos t$$

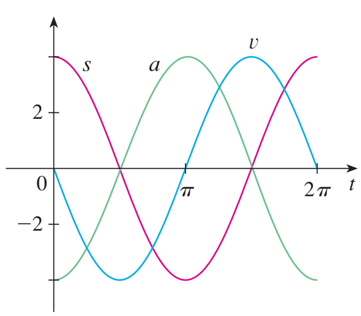


FIGURA 6

El objeto oscila desde el punto más bajo ($s = 4$ cm) hasta el punto más alto ($s = -4$ cm). El periodo de la oscilación es 2π, el periodo de $\cos t$.

La rapidez es $|v| = 4|\operatorname{sen} t|$, la cual es máxima cuando $|\operatorname{sen} t| = 1$; es decir, cuando $\cos t = 0$. De modo que el objeto se mueve con la mayor rapidez cuando pasa por su posición de equilibrio ($s = 0$). Su rapidez es 0 cuando $\operatorname{sen} t = 0$; esto es, en los puntos alto y bajo.

La aceleración $a = -4 \cos t = 0$ cuando $s = 0$. Alcanza la magnitud máxima en los puntos alto y bajo. Observe la gráfica en la figura 6.

EJEMPLO 4 Hallar la vigésima séptima derivada de cos x.

SOLUCIÓN Las primeras derivadas de $f(x) = \cos x$ son como sigue:

RP Busque un patrón

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\operatorname{sen} x \\
f''(x) &= -\cos x \\
f'''(x) &= \operatorname{sen} x \\
f^{(4)}(x) &= \cos x \\
f^{(5)}(x) &= -\operatorname{sen} x
\end{aligned}
$$

Observamos que las derivadas sucesivas ocurren en un ciclo de longitud 4 y, en particular, $f^{(n)}(x) = \cos x$ cada vez que n es un múltiplo de 4. En consecuencia,

$$f^{(24)} = \cos x$$

y, derivando tres veces más, se tiene

$$f^{(27)} = \operatorname{sen} x$$

La principal aplicación del límite en la ecuación 2 ha sido comprobar la fórmula de derivación de la función seno. Pero este límite también se aplica en la búsqueda de otros límites trigonométricos, como en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Determine $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x}$.

SOLUCIÓN Con objeto de aplicar la ecuación 2, primero vuelva a escribir la función para multiplicarla por 7 y dividirla entre 7:

Observe que $\operatorname{sen} 7x \neq 7 \operatorname{sen} x$

$$\frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$

Si considera $\theta = 7x$, entonces $\theta \to 0$, conforme $x \to 0$, de este modo, mediante la ecuación 2

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} &= \frac{7}{4} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right) \\
&= \frac{7}{4} \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

V EJEMPLO 6 Calcule $\lim_{x\to 0} x \cot x$.

SOLUCIÓN En este caso se divide tanto el numerador como el denominador entre x:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x \cot x &= \lim_{x\to 0} \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos x}{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} \\
&= \frac{\cos 0}{1} \qquad \text{(según la continuidad del coseno y la ecuación 2)} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

3.3 Ejercicios

1-16 Encuentre la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$

2. $f(x) = \sqrt{x}\,\text{sen}\,x$

3. $f(x) = \text{sen}\,x + \frac{1}{2}\cot x$

4. $y = 2\sec x - \csc x$

5. $y = \sec\theta\tan\theta$

6. $g(\theta) = e^{\theta}(\tan\theta - \theta)$

7. $y = c\cos t + t^2\,\text{sen}\,t$

8. $f(t) = \dfrac{\cot t}{e^t}$

9. $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$

10. $y = \text{sen}\,\theta\cos\theta$

11. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta}$

12. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \text{sen}\,x}$

13. $y = \dfrac{t\,\text{sen}\,t}{1 + t}$

14. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\tan x}$

15. $f(x) = xe^x\csc x$

16. $y = x^2\,\text{sen}\,x\tan x$

---

17. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x\cot x$

18. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$

19. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$.

20. Aplique la definición de derivada y demuestre que si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(x) = -\text{sen}\,x$.

21-24 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas, en el punto especificado.

21. $y = \sec x, \quad (\pi/3, 2)$

22. $y = e^x\cos x, \quad (0, 1)$

23. $y = \cos x - \text{sen}\,x, \quad (\pi, -1)$

24. $y = x + \tan x, \quad (\pi, \pi)$

---

25. a) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x\,\text{sen}\,x$ en el punto $(\pi/2, \pi)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

26. a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x + 6\cos x$ en el punto $(\pi/3, \pi + 3)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

27. a) Si $f(x) = \sec x - x$, encuentre $f'(x)$.
b) Compruebe para ver que su respuesta al inciso a) es razonable trazando las graficas de f y f' para $|x| < \pi/2$.

28. a) Si $f(x) = e^x\cos x$, obtenga $f'(x)$ y $f''(x)$.
b) Verifique que su respuesta del inciso a) sea razonable graficando f, f' y f''.

29. Si $H(\theta) = \theta\,\text{sen}\,\theta$, halle $H'(\theta)$y $H''(\theta)$.

30. Si $f(t) = \csc t$, halle $f''(\pi/6)$.

31. a) Utilice la regla del cociente para derivar la función

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

b) Simplifique la expresión para $f(x)$ expresándola en términos de sen x y cos x, y enseguida halle $f'(x)$.
c) Demuestre que sus respuestas a los incisos a) y b) son equivalentes.

32. Suponga $f(\pi/3) = 4$ y $f'(\pi/3) = -2$, y sea $g(x) = f(x)\,\text{sen}\,x$ y $h(x) = (\cos x)/f(x)$. Halle
a) $g'(\pi/3)$ b) $h'(\pi/3)$

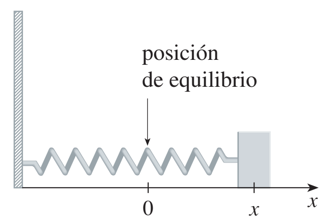
33-34 ¿Para qué valores de x la gráfica de cada una de las siguientes funciones tiene una recta tangente horizontal?

33. $f(x) = x + 2\,\text{sen}\,x$

34. $f(x) = e^x\cos x$

---

35. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada, en un movimiento armónico simple. (Véase la figura.) Su ecuación de movimiento es $x(t) = 8\,\text{sen}\,t$, donde t está en segundos y x en centímetros.
a) Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t.
b) Encuentre la posición, la velocidad y la aceleración de la masa en el instante $t = 2\pi/3$. ¿En qué dirección se desplaza en ese instante?



36. Una banda elástica cuelga de un gancho, con una masa sujeta en su extremo inferior. Cuando se tira de la masa hacia abajo y, luego, se deja en libertad, vibra verticalmente en un movimiento armónico simple. La ecuación del movimiento es $s = 2\cos t + 3\,\text{sen}\,t$, $t \geqslant 0$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. (Tome la dirección positiva correspondiente hacia abajo.)
a) Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t.
b) Dibuje las funciones velocidad y aceleración.
c) ¿Cuándo pasa la masa por la posición de equilibrio por primera vez?
d) ¿Cuán lejos de su posición de equilibrio viaja la masa?
e) ¿Cuándo es máxima la magnitud de la velocidad?

37. Una escalera de 10 pies de largo está apoyada sobre una pared vertical. Sea θ el ángulo entre la parte superior de la escalera y la pared, y x la distancia del extremo inferior de aquélla hasta la pared. Si el extremo inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared, ¿con qué rapidez cambia x respecto a θ cuando $\theta = \pi/3$?

Se requiere calculadora graficadora o computadora

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

38. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal, por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda sujeta al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante llamada *coeficiente de fricción*.

a) Encuentre la razón de cambio de F respecto a θ.

b) ¿Cuándo es igual a 0 esta razón de cambio?

c) Si $W = 50$ lb y $\mu = 0.6$, dibuje la gráfica de F como función de θ y úsela para localizar el valor de θ para el cual $dF/d\theta = 0$. ¿Resulta coherente el valor con su respuesta al inciso b)?

39-48 Determine cada uno de los siguientes límites.

39. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

40. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 6x}$

41. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\tan 6t}{\operatorname{sen} 2t}$

42. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\cos \theta - 1}{\operatorname{sen} \theta}$

43. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{5x^3 - 4x}$

44. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x}{x^2}$

45. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta + \tan \theta}$

46. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$

47. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{1 - \tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

48. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x^2 + x - 2}$

49-50 Encuentre la derivada que se muestra, mediante la búsqueda de las primeras derivadas y observando el patrón que aparece.

49. $\dfrac{d^{99}}{dx^{99}} (\operatorname{sen} x)$

50. $\dfrac{d^{35}}{dx^{35}} (x \operatorname{sen} x)$

51. Encuentre constantes A y B tales que la función $y = A \operatorname{sen} x + B \cos x$ satisface la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$.

52. a) Evalúe $\lim\limits_{x \to \infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

b) Evalúe $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

c) Ilustre los incisos a) y b) graficando $y = x \operatorname{sen}(1/x)$.

53. Derive cada una de las siguientes identidades trigonométricas para obtener una identidad nueva (o conocida) .

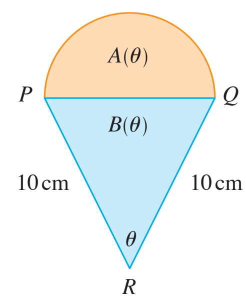
a) $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

c) $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{1 + \cot x}{\csc x}$

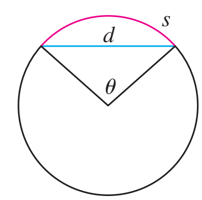
54. Un semicírculo con diámetro PQ descansa sobre un triángulo isósceles PQR para configurar una región en forma de cono para helados como el que se ilustra en la figura. Si $A(\theta)$ es el área del semicírculo y $B(\theta)$ es el área del triangulo, halle

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



55. En la figura se muestra un arco circular de longitud s y una cuerda de longitud d, los dos están subtendidos por un ángulo central θ. Encuentre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{s}{d}$$



56. Sea $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$.

a) Grafique f. ¿Qué tipo de discontinuidad parece tener en $x = 0$?

b) Calcule los límites por la izquierda y por la derecha en $x = 0$. ¿Confirman estos valores su respuesta al inciso a)?

3.4 Regla de la cadena

Suponga que se le pide derivar la función

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Las fórmulas de derivación que usted aprendió en las secciones anteriores de este capítulo no le permiten calcular $F'(x)$.

Véase la sección 1.3 para un repaso de funciones compuestas.

Observe que F es una función compuesta. De hecho, si hacemos $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$, entonces podemos escribir $y = F(x) = f(g(x))$; es decir, $F = f \circ g$. Sabemos cómo derivar tanto f como g, de modo que sería útil contar con una regla que nos indique cómo hallar la derivada de $F = f \circ g$ en términos de las derivadas de f y g.

Resulta que la derivada de la función compuesta $f \circ g$ es el producto de las derivadas de f y g. Este hecho es uno de los más importantes de las reglas de derivación y se llama *regla de la cadena*. Esto parece verosímil si interpretamos las derivadas como razones de cambio. Consideremos du/dx como la razón de cambio de u respecto a x, dy/du como la razón de cambio de y respecto a u, y dy/dx como la razón de cambio de y respecto a x. Si u cambia al doble de rapidez de x y y varía tres veces más rápido que u, entonces parece razonable que y se modifique seis veces más rápido que x, y, por tanto, esperamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Regla de la cadena *Si* g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces la función compuesta $F = f \circ g$ definida mediante $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x, y F' está dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

James Gregory

El primero en formular la regla de la cadena fue el matemático escocés James Gregory (1638-1675), quien también diseñó el primer telescopio práctico. Gregory descubrió las ideas básicas del Cálculo en la misma época que Newton. Se convirtió en el primer profesor de Matemáticas en la Universidad de St. Andrews y más tarde realizó la misma actividad en la Universidad de Edimburgo. Pero un año después de aceptar ese cargo, falleció a la edad de 36 años.

COMENTARIOS SOBRE LA DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA Sea Δu el cambio en u correspondiente a un cambio de Δx en x; es decir,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Entonces el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Resulta tentador escribir

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \boxed{1} \qquad &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \text{(Advierta que } \Delta u \to 0 \text{ conforme } \Delta x \to 0 \text{ porque } g \text{ es continua.)} \\ &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

El único defecto de este razonamiento es que en $\boxed{1}$ podría suceder que $\Delta u = 0$ (aun cuando $\Delta x \neq 0$) y, por supuesto, no podemos dividir entre 0. No obstante, este razonamiento *sugiere* por lo menos que la regla de la cadena es verdadera. Al final de esta sección se da una demostración completa de la regla de la cadena.

La regla de la cadena puede escribirse con apóstrofos

2 $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

o bien, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, en la notación de Leibniz:

3 $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

La ecuación 3 es fácil de recordar porque si dy/du y du/dx fueran cocientes, entonces podría cancelar du. Sin embargo, recuerde que du no se ha definido y no debe concebir du/dx realmente como un cociente.

EJEMPLO 1 Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUCIÓN 1 (Utilizando la ecuación 2): Al principio de esta sección, expresamos F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Dado que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

tenemos
$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 (Utilizando la ecuación 3): Si hacemos $u = x^2 + 1$ y $y = \sqrt{u}$, entonces

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Al utilizar la fórmula 3, debemos tener presente que dy/dx se refiere a la derivada de y cuando ésta se considera como función de x (llamada *derivada de y respecto a x*), en tanto que dy/du se refiere a la derivada de y cuando se considera como función de u (la derivada de y respecto a u). Por tanto, en el ejemplo 1, y puede considerarse como función de x $\left(y = \sqrt{x^2 + 1}\right)$ y también como una función de u $\left(y = \sqrt{u}\right)$. Observe que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{mientras que} \quad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

NOTA En la aplicación de la regla de la cadena, trabajamos del exterior hacia el interior. La fórmula 2 expresa que *derivamos la función exterior f [en la función interior $g(x)$] y, a continuación, multiplicamos por la derivada de la función interior*.

$$\frac{d}{dx}\;\underbrace{f}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}}\;\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}}\;\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

V EJEMPLO 2 Derive a) $y = \operatorname{sen}(x^2)$ y b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

SOLUCIÓN

a) Si $y = \operatorname{sen}(x^2)$, entonces la función exterior es la función seno, y la interior es la función elevar al cuadrado, de modo que la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{\operatorname{sen}}_{\substack{\text{función}\\\text{exterior}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\\text{la función}\\\text{interior}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada de}\\\text{la función}\\\text{exterior}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\\text{la función}\\\text{interior}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada de}\\\text{la función}\\\text{interior}}}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

b) Observe que $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$. En este caso, la función exterior es la de elevar al cuadrado, y la interior es la función seno. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{(\operatorname{sen} x)^2}_{\substack{\text{función}\\\text{interior}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada de}\\\text{la función}\\\text{exterior}}} \cdot \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{\substack{\text{evaluada en}\\\text{la función}\\\text{interior}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada de}\\\text{la función}\\\text{interior}}}$$

La respuesta puede dejarse como $2 \operatorname{sen} x \cos x$, o bien, escribirse como $\operatorname{sen} 2x$ (por una identidad trigonométrica conocida como fórmula del ángulo doble).

Véase la página de referencia 2 o el apéndice D.

En el ejemplo 2a), combinamos la regla de la cadena con la regla para derivar la función seno. En general, si $y = \operatorname{sen} u$, donde u es una función derivable de x, entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

Así que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

De modo semejante, todas las fórmulas para derivar funciones trigonométricas pueden combinarse con la regla de la cadena.

Hagamos explícito el caso especial de la regla de la cadena donde la función exterior f es una función potencia. Si $y = [g(x)]^n$, entonces podemos escribir $y = f(u) = u^n$, donde $u = g(x)$. Si aplicamos la regla de la cadena y, a continuación, la regla de la potencia, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

4 Regla de la potencia combinada con la regla de la cadena Si n es cualquier número real y $u = g(x)$ es derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

De modo alternativo,

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Observe que la derivada en el ejemplo 1 pudimos calcularla tomando $n = \frac{1}{2}$ en la regla 4.

EJEMPLO 3 Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUCIÓN Si, en $\boxed{4}$, se toman $u = g(x) = x^3 - 1$ y $n = 100$, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$
$$= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}$$

V EJEMPLO 4 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUCIÓN En primer lugar, reescribimos f como: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$

De este modo
$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$$
$$= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)$$

EJEMPLO 5 Encuentre la derivada de la función

$$g(t) = \left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^9$$

SOLUCIÓN Si se combinan la regla de la potencia, la regla de la cadena y la regla del cociente, obtenemos

$$g'(t) = 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)$$
$$= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{(2t + 1) \cdot 1 - 2(t - 2)}{(2t + 1)^2} = \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}$$

EJEMPLO 6 Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

En la figura 1 se muestran las gráficas de las funciones y y y' del ejemplo 6. Observe que y' es grande cuando y crece con rapidez, y $y' = 0$ cuando y tiene una recta tangente horizontal. De modo que la respuesta parece ser razonable.

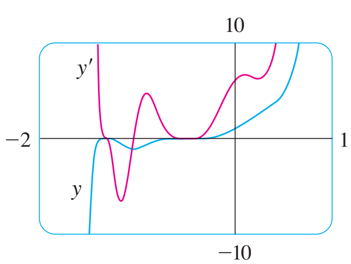


FIGURA 1

SOLUCIÓN En este ejemplo debemos aplicar la regla del producto antes de aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^5 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1)^5$$
$$= (2x + 1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)$$
$$+ (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1)$$
$$= 4(2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x + 1)^4 \cdot 2$$

Observe que cada término tiene el factor común $2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3$, así que podemos factorizarlo y escribir la respuesta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$

EJEMPLO 7 Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

SOLUCIÓN En este caso la función interior es $g(x) = \operatorname{sen} x$, y la exterior es la función exponencial $f(x) = e^x$. Por tanto, por la regla de la cadena,

Más generalmente, la regla de la cadena da:

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$$

Podemos aplicar la regla de la cadena para derivar una función exponencial con cualquier base $a > 0$. Recuerde, por lo visto en la sección 1.6, que $a = e^{\ln a}$. De este modo,

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

y la regla de la cadena da

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x$$
$$= e^{(\ln a)x}\cdot \ln a = a^x \ln a$$

No confunda la fórmula 5 (donde x es el *exponente*) con la regla de la potencia (donde x es la *base*):

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

porque ln a es una constante. En consecuencia, tenemos la fórmula

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

En particular, si $a = 2$, obtenemos

6 $$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

En la sección 3.1, dimos la estimación

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x$$

Esto resulta coherente con la fórmula exacta $\boxed{6}$ porque $\ln 2 \approx 0.693147$.

La razón para el nombre "regla de la cadena" queda clara cuando se ve como analogía de agregar eslabones para alargar una cadena. Supongamos que $y = f(u)$, $u = g(x)$ y $x = h(t)$, donde f, g y h son funciones derivables. Entonces, para calcular la derivada de y respecto a t, utilizamos dos veces la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

V EJEMPLO 8 Si $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\tan x))$, entonces

$$f'(x) = \cos(\cos(\tan x))\frac{d}{dx}\cos(\tan x)$$

$$= \cos(\cos(\tan x))[-\operatorname{sen}(\tan x)]\frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= -\cos(\cos(\tan x))\operatorname{sen}(\tan x)\sec^2 x$$

Observe que se ha aplicado dos veces la regla de la cadena.

EJEMPLO 9 Derive $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUCIÓN La función exterior es la función exponencial, la función media es la función secante y la función interna es el triple de la función. De modo que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= e^{\sec 3\theta}\frac{d}{d\theta}(\sec 3\theta)\\ &= e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta\frac{d}{d\theta}(3\theta)\\ &= 3e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta\end{aligned}$$

Cómo demostrar la regla de la cadena

Recuerde que si $y = f(x)$ y x cambia de a a $a + \Delta x$, se define el incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Según la definición de derivada, tenemos que

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Por consiguiente, si denotamos por medio de ε el cociente de diferencias y la derivada, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0}\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a)\right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

pero $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

Si definimos ε como 0 cuando $\Delta x = 0$, entonces ε se convierte en función continua de Δx. De esta manera, para una función f derivable, podemos escribir

$$\boxed{7} \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad \text{donde} \qquad \varepsilon \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0$$

y ε es una función continua de Δx. Esta propiedad de las funciones derivables es lo que permite demostrar la regla de la cadena.

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA Suponga que $u = g(x)$ es derivable en $x = a$ y $y = f(u)$ es derivable en $b = g(a)$. Si Δx es un incremento en x, y Δu y Δy son los incrementos correspondientes en u y y, entonces podemos aplicar la ecuación 7 para escribir

$$\boxed{8} \qquad \Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. De manera análoga,

$$\boxed{9} \qquad \Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$$

donde $\varepsilon_2 \to 0$ conforme $\Delta u \to 0$. Si ahora sustituimos la expresión para Δu de la ecuación 8 en la ecuación 9, obtenemos

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

así que $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

A medida que $\Delta x \to 0$, la ecuación 8 muestra que $\Delta u \to 0$. De modo que tanto $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. Debido a eso

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$
$$= f'(b)\,g'(a) = f'(g(a))\,g'(a)$$

Esto demuestra la regla de la cadena.

3.4 Ejercicios

1-6 Escriba la función compuesta en la forma $f(g(x))$. [Identifique la función interior $u = g(x)$ y la exterior $y = f(u)$]. Luego, encuentre la derivada dy/dx de cada una de las siguientes funciones.

1. $y = \sqrt[3]{1 + 4x}$ **2.** $y = (2x^3 + 5)^4$

3. $y = \tan \pi x$ **4.** $y = \operatorname{sen}(\cot x)$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$ **6.** $y = \sqrt{2 - e^x}$

7-46 Obtenga la derivada de cada una de las siguientes funciones.

7. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$ **8.** $F(x) = (4x - x^2)^{100}$

9. $F(x) = \sqrt{1 - 2x}$ **10.** $f(x) = \dfrac{1}{(1 + \sec x)^2}$

11. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$ **12.** $f(t) = \operatorname{sen}(e^t) + e^{\operatorname{sen} t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$ **14.** $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = xe^{-kx}$ **16.** $y = e^{-2t}\cos 4t$

17. $f(x) = (2x - 3)^4(x^2 + x + 1)^5$

18. $g(x) = (x^2 + 1)^3(x^2 + 2)^6$

19. $h(t) = (t + 1)^{2/3}(2t^2 - 1)^3$

20. $F(t) = (3t - 1)^4(2t + 1)^{-3}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$ **22.** $f(s) = \sqrt{\dfrac{s^2 + 1}{s^2 + 4}}$

23. $y = \sqrt{1 + 2e^{3x}}$ **24.** $y = 10^{1 - x^2}$

25. $y = 5^{-1/x}$ **26.** $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$

27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$ **28.** $y = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$

29. $F(t) = e^{t \operatorname{sen} 2t}$ **30.** $F(v) = \left(\dfrac{v}{v^3 + 1}\right)^6$

31. $y = \operatorname{sen}(\tan 2x)$ **32.** $y = \sec^2(m\theta)$

33. $y = 2^{\operatorname{sen} \pi x}$ **34.** $y = x^2 e^{-1/x}$

35. $y = \cos\left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right)$ **36.** $y = \sqrt{1 + xe^{-2x}}$

37. $y = \cot^2(\operatorname{sen} \theta)$ **38.** $y = e^{k \tan \sqrt{x}}$

39. $f(t) = \tan(e^t) + e^{\tan t}$ **40.** $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

41. $f(t) = \operatorname{sen}^2(e^{\operatorname{sen}^2 t})$ **42.** $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$ **44.** $y = 2^{3^{x^2}}$

45. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}$ **46.** $y = [x + (x + \operatorname{sen}^2 x)^3]^4$

47-50 Encuentre la primera y segunda derivadas de cada una de las siguientes funciones:

47. $y = \cos(x^2)$ **48.** $y = \cos^2 x$

49. $y = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ **50.** $y = e^{e^x}$

51-54 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

51. $y = (1 + 2x)^{10}$, $(0, 1)$ **52.** $y = \sqrt{1 + x^3}$, $(2, 3)$

53. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$ **54.** $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$, $(0, 0)$

55. a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ en el punto $(0, 1)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente, en la misma pantalla.

56. a) La curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ se llama *curva nariz de bala*. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(1, 1)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente, en la misma pantalla.

57. a) Si $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$, encuentre $f'(x)$.
b) Verifique que su respuesta al inciso a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

58. La función $f(x) = \text{sen}(x + \text{sen } 2x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, surge en aplicaciones a la sintonía de frecuencia modulada (FM).
a) Utilice una gráfica de f producida por un dispositivo de graficación para trazar un boceto aproximado de la gráfica de f'.
b) Calcule $f'(x)$ y utilice esta expresión, junto con un dispositivo graficador, para graficar f'. Compare con su boceto del inciso a).

59. Encuentre todos los puntos sobre la gráfica de la función $f(x) = 2 \text{ sen } x + \text{sen}^2 x$ en los cuales la recta tangente es horizontal.

60. Determine las coordenadas x de todos los puntos de la curva $y = \text{sen } 2x - 2 \text{ sen } x$ en los cuales la recta tangente es horizontal.

61. Si $F(x) = f(g(x))$, donde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, y $g'(5) = 6$, halle $F'(5)$.

62. Si $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, donde $f(1) = 7$ y $f'(1) = 4$, halle $h'(1)$.

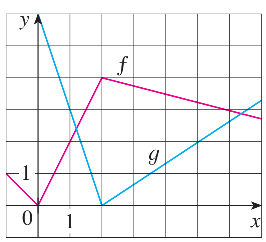
63. Se da una tabla de valores de f, g, f' y g'

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

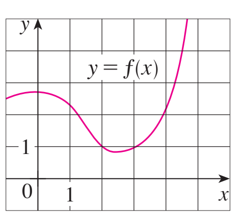
a) Si $h(x) = f(g(x))$, encuentre $h'(1)$.
b) Si $H(x) = g(f(x))$, halle $H'(1)$.

64. Sean f y g las funciones del ejercicio 63.
a) Si $F(x) = f(f(x))$, encuentre $F'(2)$.
b) Si $G(x) = g(g(x))$, encuentre $G'(3)$.

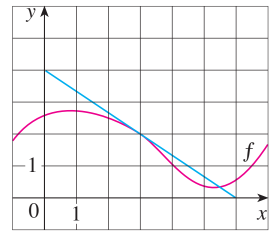
65. Sean f y g las funciones cuyas gráficas se muestran; sea $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ y $w(x) = g(g(x))$. Encuentre, si existe, cada derivada. Si no existe, explique por qué.
a) $u'(1)$ b) $v'(1)$ c) $w'(1)$



66. Si f es la función cuya gráfica se muestra, sea $h(x) = f(f(x))$ y $g(x) = f(x^2)$. Utilice la gráfica de f para estimar el valor de cada derivada.
a) $h'(2)$ b) $g'(2)$



67. Si $g(x) = \sqrt{f(x)}$, donde f es la gráfica que se muestra, evalúe $g'(3)$.



68. Suponga que f es derivable sobre $\mathbb{R}$ y α es un número real. Sea $F(x) = f(x^\alpha)$ y $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encuentre expresiones para a) $F'(x)$ y b) $G'(x)$.

69. Suponga que f es derivable sobre $\mathbb{R}$. Sea $F(x) = f(e^x)$ y $G(x) = e^{f(x)}$. Encuentre expresiones para a) $F'(x)$ y b) $G'(x)$.

70. Sea $g(x) = e^{cx} + f(x)$ y $h(x) = e^{kx}f(x)$, donde $f(0) = 3$, $f'(0) = 5$, y $f''(0) = -2$.
a) Encuentre $g'(0)$y $g''(0)$ en términos de c.
b) En términos de k, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de h en el punto donde $x = 0$.

71. Si $r(x) = f(g(h(x)))$, donde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$, encuentre $r'(1)$.

72. Si g es una función dos veces derivable y $f(x) = xg(x^2)$, halle f'' en términos de g, g' y g''.

73. Si $F(x) = f(3f(4f(x)))$, donde $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$, encuentre $F'(0)$.

74. Si $F(x) = f(xf(xf(x)))$, donde $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$, halle $F'(1)$.

75. Demuestre que la función $y = e^{2x}(A \cos 3x + B \text{ sen } 3x)$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 13y = 0$.

76. ¿Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + y = 0$?

77. Encuentre la 50a. derivada de $y = \cos 2x$.

78. Encuentre la 1000a. derivada de $f(x) = xe^{-x}$.

79. El desplazamiento de una partícula sobre una cuerda vibrante está dada por la ecuación $s(t) = 10 + \frac{1}{4} \text{sen}(10\pi t)$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula después de t segundos.

80. Si la ecuación del movimiento de una partícula está dada por $s = A \cos(\omega t + \delta)$, se dice que la partícula describe un *movimiento armónico simple*.
a) Encuentre la velocidad de la partícula en el instante t.
b) ¿Cuándo es 0 la velocidad?

81. Cefeida, una estrella variable, tiene una brillantez que aumenta y disminuye de manera alternada. La estrella de ese tipo más visible es Delta Cefeida, para la cual el intervalo entre los momentos de máxima brillantez es de 5.4 días. La brillantez promedio de esta estrella es de 4.0, y cambia en ± 0.35. En vista de estos datos, la brillantez de Delta

Cephei en el tiempo t, medido en días, se ha modelado mediante la función

$$B(t) = 4.0 + 0.35 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{5.4}\right)$$

a) Halle la razón de cambio de la brillantez después de t días.
b) Encuentre, con una aproximación de dos cifras decimales, la razón de aumento después de un día.

82. En el ejemplo 4 de la sección 1.3, obtuvimos un modelo para la duración de la luz diurna (en horas) en Filadelfia en el t-ésimo día del año

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Utilice este modelo para comparar cómo aumentan las horas de luz diurna en Filadelfia el 21 de marzo y el 21 de mayo.

83. El movimiento de un resorte que se somete a una fuerza de fricción o una fuerza de amortiguamiento (como un amortiguador en un automóvil) se modela a menudo mediante el producto de una función exponencial y una función seno o coseno. Suponga que la ecuación del movimiento de un punto sobre tal resorte es

$$s(t) = 2e^{-1.5t} \operatorname{sen} 2\pi t$$

donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad después que transcurren t segundos y grafique las funciones de posición y de velocidad para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

84. En ciertas circunstancias, un rumor se esparce según la ecuación

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

donde $p(t)$ es la proporción de la población que lo conoce en el tiempo t, y a y k son constantes positivas. [En la sección 9.4 veremos que ésta es una ecuación razonable para $p(t)$.]
a) Encuentre $\lim_{t \to \infty} p(t)$.
b) Halle la rapidez de esparcimiento del rumor.
c) Grafique p para el caso en que $a = 10$, $k = 0.5$, con t medido en horas. Utilice la gráfica para estimar cuánto tiempo transcurrirá para que 80% de la población escuche el rumor.

85. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con desplazamiento $s(t)$, velocidad $v(t)$ y aceleración $a(t)$. Demuestre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique la diferencia entre los significados de las derivadas dv/dt y dv/ds.

86. Se bombea aire dentro de un globo esférico para el clima. En cualquier tiempo t, el volumen del globo es $V(t)$, y su radio es $r(t)$.
a) ¿Qué representan las derivadas dV/dr y dV/dt?
b) Exprese dV/dt en términos de dr/dt.

87. El flash (unidad de destello) de una cámara funciona mediante el almacenamiento de carga en un capacitor y su liberación repentina cuando se activa el obturador. Los datos siguientes describen la carga que queda en el capacitor (en microcoulombs, μC) en el instante t (en segundos).

t	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
Q	100.00	81.87	67.03	54.88	44.93	36.76

a) Halle, usando una calculadora graficadora o una computadora, un modelo exponencial para la carga.
b) La derivada $Q'(t)$ representa la corriente eléctrica (en microamperes, μA) que fluye del capacitor hacia el bulbo de la lámpara de destello. Con el resultado del inciso a), estime la corriente cuando $t = 0.04$ s. Compare la respuesta con el resultado del ejemplo 2 de la sección 2.1.

88. En la tabla se da la población de estadounidenses, desde 1790 hasta 1860.

Año	Población	Año	Población
1790	3 929 000	1830	12 861 000
1800	5 308 000	1840	17 063 000
1810	7 240 000	1850	23 192 000
1820	9 639 000	1860	31 443 000

a) Use una calculadora graficadora o una computadora para ubicar los datos con una función exponencial. Dibuje los puntos correspondientes a los datos y el modelo exponencial. ¿Qué tan bien ajustan?
b) Estime las tasas de crecimiento de la población en 1800 y 1850 promediando las pendientes de las rectas secantes.
c) Use el modelo exponencial del inciso a) para estimar las tasas de crecimiento en 1800 y 1850. Compare estas estimaciones con las del inciso b).
d) Utilice el modelo exponencial para predecir la población en 1870. Compare con la población real de 38 558 000. ¿Puede explicar la discrepancia?

SAC **89.** Los sistemas algebraicos computarizados (SAC) tienen comandos que derivan funciones, pero la forma de la respuesta quizá no convenga; en consecuencia, pueden ser necesarios otros comandos para simplificarla.
a) Use un SAC para hallar la derivada del ejemplo 5 y compárela con la respuesta en ese ejemplo. Después, use el comando de simplificación y vuelva a comparar.
b) Utilice un SAC para derivar la función del ejemplo 6. ¿Qué sucede si usa el comando de simplificación? ¿Qué ocurre si emplea el comando de factorización? ¿Cuál forma de la respuesta sería la mejor para localizar las rectas tangentes horizontales?

SAC **90.** a) Use un SAC para derivar la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

y simplificar el resultado.
b) ¿En dónde tiene la gráfica de f rectas tangentes horizontales?
c) Trace las gráficas de f y f' en la misma pantalla. ¿Son coherentes las gráficas con su respuesta al inciso b)?

91. Mediante la regla de la cadena demuestre lo siguiente.
a) La derivada de una función par es una función impar.
b) La derivada de una función impar es una función par.

92. Utilice la regla de la cadena y la regla del producto para obtener una demostración alternativa de la regla del cociente. [*Sugerencia:* escriba $f(x)/g(x) = f(x)[g(x)]^{-1}$.]

93. a) Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^n x \cos nx) = n \operatorname{sen}^{n-1} x \cos(n+1)x$$

b) Plantee una fórmula para la derivada de $y = \cos^n x \cos nx$ que es similar a la del inciso a).

94. Suponga que $y = f(x)$ es una curva que siempre queda arriba del eje x y nunca tiene una recta tangente horizontal, donde f es derivable para toda x. ¿Para qué valor de y la razón de cambio de y^5 respecto a x es 80 veces la razón de cambio de y respecto a x?

95. Use la regla de la cadena para demostrar que si θ se mide en grados, entonces

$$\frac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Esto da un argumento para justificar la convención de que siempre se use el radián cuando se manejen funciones trigonométricas en Cálculo: las fórmulas de derivación no serían tan sencillas si usara el grado como medida.)

96. a) Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y utilice la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

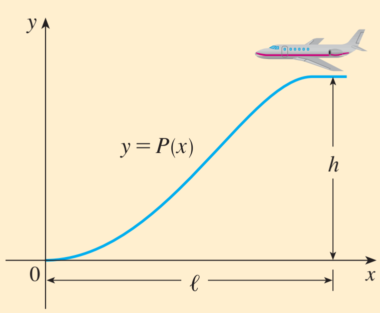
b) Si $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, encuentre $f'(x)$ y trace las gráficas de f y f'. ¿En dónde f no es derivable?
c) Si $g(x) = \operatorname{sen}|x|$, halle $g'(x)$ y dibuje las gráficas de g y g'. ¿En dónde g no es derivable?

97. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, donde f y g son funciones dos veces derivables, demuestre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

98. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, donde f y g tienen tercera derivada, obtenga una fórmula para d^3y/dx^3 parecida a la que se proporciona en el ejercicio 97.

PROYECTO DE APLICACIÓN ¿DÓNDE DEBERÍA UN PILOTO INICIAR EL ATERRIZAJE?



En la figura se muestra una trayectoria de aproximación para el aterrizaje de un avión, que satisface las condiciones siguientes:

i) La altura de crucero es h cuando se inicia el descenso a una distancia ℓ del punto de contacto con la pista en el origen.

ii) El piloto debe mantener una rapidez horizontal constante v a todo lo largo del descenso.

iii) El valor absoluto de la aceleración vertical no debe sobrepasar una constante k (la cual es mucho menor que la aceleración debida a la gravedad).

1. Encuentre un polinomio cúbico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaga la condición i), imponiendo condiciones adecuadas sobre $P(x)$ y $P'(x)$ en el inicio del descenso y el contacto con la pista.

2. Use las condiciones ii) y iii) para demostrar que

$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \leqslant k$$

3. Suponga que una aerolínea comercial decide no permitir que la aceleración vertical de un avión sea mayor que $k = 860\,\text{mi/h}^2$. Si la altitud de crucero de un avión es de 35000 pies y la rapidez de 300 mi/h, ¿a qué distancia del aeropuerto debe el piloto iniciar el descenso?

4. Trace la grafica de la trayectoria de aproximación si se satisfacen las condiciones que se enuncian en el problema 3.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

3.5 Derivación implícita

La mayor parte de las funciones que hemos visto hasta ahora pueden describirse expresando una variable explícitamente en términos de otra variable; por ejemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{o bien} \qquad y = x \operatorname{sen} x$$

o, en general, $y = f(x)$. Sin embargo, algunas funciones se definen implícitamente por medio de una relación entre x y y como

$$\boxed{1} \qquad x^2 + y^2 = 25$$

o bien

$$\boxed{2} \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

En algunos casos, es posible resolver una ecuación de ese tipo para y como una función explícita (o varias funciones) de x. Por ejemplo, si resolvemos la ecuación 1 para y, obtenemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, de modo que dos de las funciones determinadas por la ecuación implícita 1 son $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Las gráficas de f y g son las semicircunferencias superior e inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. (Véase la figura 1.)

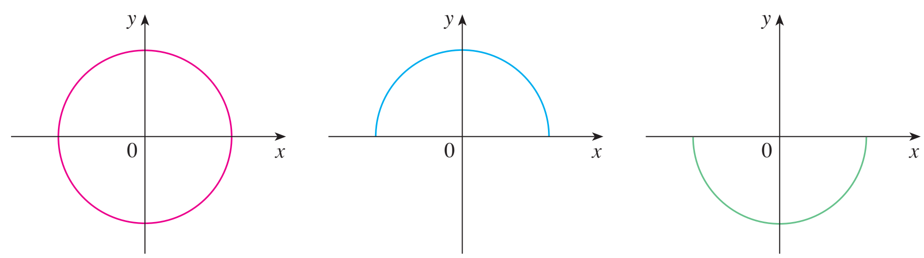


FIGURA 1 a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

No es fácil resolver explícitamente la ecuación 2 para y como función x. (Con un sistema algebraico para computadora no hay dificultad, pero las expresiones que se obtienen son muy complicadas). Sin embargo, $\boxed{2}$ es la ecuación de una curva llamada **folium de Descartes**, ilustrada en la figura 2 y, que de manera implícita define a y como varias funciones de x. En la figura 3 se muestran las gráficas de esas tres funciones. Cuando se dice que f es una función definida implícitamente por la ecuación 2, se da a entender que la ecuación

$$x^3 + [f(x)]^3 = 6xf(x)$$

es verdadera para todos los valores de x en el dominio de f.

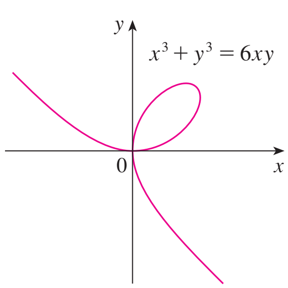


FIGURA 2 Folium de Descartes

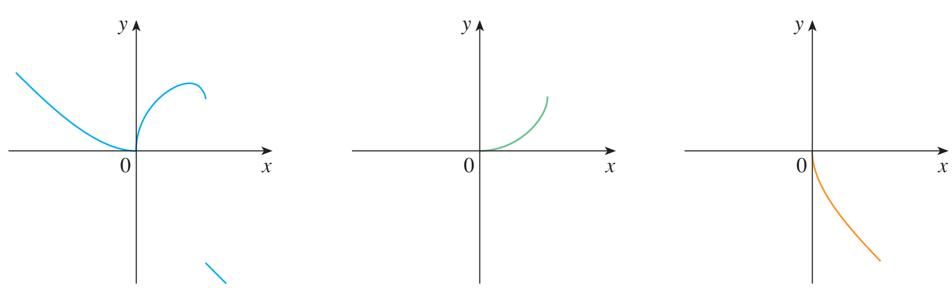


FIGURA 3 Gráficas de tres funciones definidas por el folium de Descartes

Por fortuna, no es necesario resolver una ecuación para y en términos de x a fin de hallar la derivada de y. En lugar de ello, aplicaremos el método de **derivación implícita**. Este método consiste en derivar ambos miembros de la ecuación respecto a x y después resolver la ecuación resultante para y'. En los ejemplos y ejercicios de esta sección, siempre se supone que la ecuación dada determina y implícitamente como una función derivable de x, de modo que puede aplicarse el método de derivación implícita.

V EJEMPLO 1

a) Si $x^2 + y^2 = 25$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, en el punto (3, 4).

SOLUCIÓN 1

a) Derive ambos miembros de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Recuerde que y es una función de x, así que hay que utilizar la regla de la cadena para obtener

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Por tanto,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Ahora resolvemos esta ecuación para dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

b) En el punto (3, 4) se tiene que $x = 3$ y $y = 4$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Por tanto, la ecuación de la tangente a la circunferencia, en (3, 4), es

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \qquad \text{o bien} \qquad 3x + 4y = 25$$

SOLUCIÓN 2

b) Al resolver $x^2 + y^2 = 25$, obtenemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. El punto (3, 4) se encuentra en la semicircunferencia superior $y = \sqrt{25 - x^2}$ y, por consiguiente, considere la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Al aplicar la regla de la cadena a la función f, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(25 - x^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \end{aligned}$$

En el ejemplo 1 se ilustra que aun cuando es posible resolver una ecuación explícita para y en términos de x puede ser más fácil aplicar la derivación implícita.

De modo que $$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

y, como en la solución 1, la ecuación de la recta tangente es $3x + 4y = 25$.

NOTA 1 La expresión $dy/dx = -x/y$ en la solución 1 da la derivada en términos tanto de x como de y. Esto es correcto sin importar cuál función y queda determinada por la ecuación dada. Por ejemplo, para $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

en tanto que para $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

V EJEMPLO 2

a) Encuentre y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.
b) Halle la recta tangente al folium de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$, en el punto (3, 3).
c) ¿En cuál punto en el primer cuadrante es horizontal la recta tangente?

SOLUCIÓN

a) Si se derivan ambos miembros de $x^3 + y^3 = 6xy$ respecto a x, considerando a y como función de x, y usando la regla de la cadena en el término y^3, y la regla del producto en el término $6xy$, obtenemos

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

o bien $$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

Ahora resolvemos para y': $$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

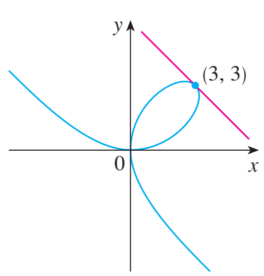


FIGURA 4

b) Cuando $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

un vistazo a la figura 4 confirma que éste es un valor razonable para la pendiente en (3, 3). De este modo, la ecuación de la recta tangente al folium en (3, 3) es

$$y - 3 = -1(x - 3) \quad \text{o bien} \quad x + y = 6$$

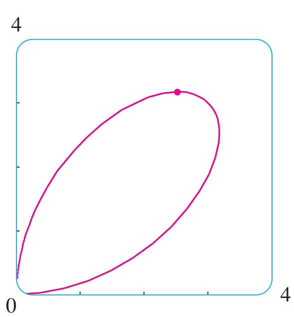


FIGURA 5

c) La recta tangente es horizontal si $y' = 0$. Si utilizamos la expresión para y' del inciso a), vemos que $y' = 0$ cuando $2y - x^2 = 0$ (siempre que $y^2 - 2x \neq 0$). Al sustituir $y = \frac{1}{2}x^2$en la ecuación de la curva, obtenemos

$$x^3 + \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$$

lo cual se simplifica para quedar $x^6 = 16x^3$. Ya que $x \neq 0$ en el primer cuadrante, tenemos $x^3 = 16$. Si $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$, entonces $y = \frac{1}{2}(2^{8/3}) = 2^{5/3}$. Por tanto, la recta tangente es horizontal en $(2^{4/3}, 2^{5/3})$ lo cual es aproximadamente (2.5198, 3.1748). Al estudiar la figura 5, es claro que la respuesta es razonable.

NOTA 2 Existe una fórmula para obtener las tres raíces de una ecuación cúbica, que es semejante a la fórmula cuadrática, pero mucho más complicada. Si utilizamos esta fórmula (o un sistema algebraico computarizado) para resolver la ecuación $x^3 + y^3 = 6xy$ para y en términos de x, obtenemos tres funciones determinadas por la ecuación:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}$$

y

$$y = \tfrac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}\right)\right]$$

(Éstas son las tres funciones cuyas gráficas se muestran en la figura 3.) Usted puede ver que el método de la derivación implícita ahorra una cantidad enorme de trabajo en casos como éste. Más aún, la derivación implícita funciona con igual facilidad para funciones como

$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$$

en las cuales es *imposible* resolver para y en términos de x.

Abel y Galois

En 1824, el matemático noruego Niels Abel demostró que no puede darse una fórmula general para la obtención de las raíces de una ecuación de quinto grado. Tiempo después, el matemático francés Evariste Galois demostró que es imposible hallar una fórmula general para las raíces de una ecuación de n-ésimo grado (en términos de operaciones algebraicas sobre los coeficientes), si n es cualquier entero mayor que 4.

EJEMPLO 3 Encuentre y' si $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

SOLUCIÓN Si derivamos implícitamente respecto a x y consideramos que y es una función de x, obtenemos

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = y^2(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2yy')$$

(Note que en el lado izquierdo hemos aplicado la regla de la cadena y, en el derecho, la regla de la cadena y la regla del producto). Si agrupamos los términos que contienen a y', obtenemos

$$\cos(x + y) + y^2 \operatorname{sen} x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'$$

Por lo que
$$y' = \frac{y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$$

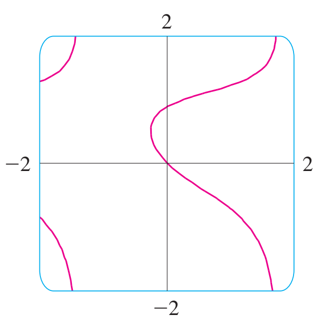


FIGURA 6

En la figura 6, trazada con el comando de construcción de gráficas en forma implícita de un sistema algebraico computarizado, se muestra parte de la curva $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$. Como comprobación de nuestro cálculo, observe que $y' = -1$, cuando $x = y = 0$ y, al parecer de la gráfica, la pendiente es aproximadamente -1 en el origen.

Las figuras 7, 8 y 9 muestran tres curvas más, producidas por computadora. En los ejercicios 41-42 tendrá usted oportunidad de crear y analizar curvas atípicas de esta naturaleza.

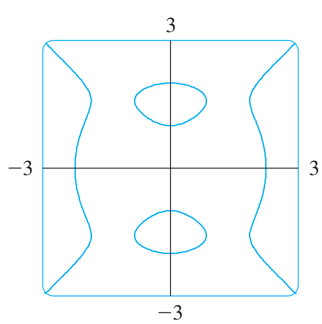


FIGURA 7
$(y^2 - 1)(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 4)$

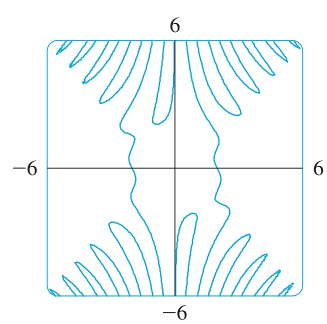


FIGURA 8
$(y^2 - 1)\operatorname{sen}(xy) = x^2 - 4$

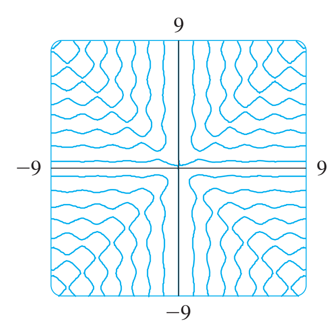


FIGURA 9
$y \operatorname{sen} 3x = x \cos 3y$

En el siguiente ejemplo se muestra cómo encontrar la segunda derivada de una función que está definida implícitamente.

EJEMPLO 4 Hallar y'' si $x^4 + y^4 = 16$.

SOLUCIÓN Derivando la ecuación de manera implícita respecto a x, obtenemos

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

Resolviendo para y'

$$\boxed{3} \qquad y' = -\frac{x^3}{y^3}$$

La figura 10 muestra la gráfica de la curva $x^4 + y^4 = 16$ del ejemplo 4. Observe que es una versión extendida y achatada de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, por esta razón algunas veces se le llama *circunferencia gruesa*. Empieza muy escarpada a la izquierda, pero rápidamente se hace muy plana. Esto puede verse en la expresión

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} = -\left(\frac{x}{y}\right)^3$$

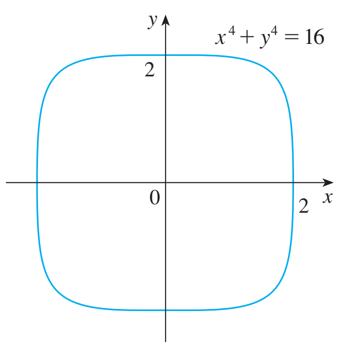


FIGURA 10

Para hallar y'' derivamos esta expresión para y' aplicando la regla del cociente, considerando que y es una función de x:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3\,(d/dx)(x^3) - x^3\,(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2}$$

$$= -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$

Si ahora sustituimos la ecuación 3 en esta expresión, obtenemos

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\dfrac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$

$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Pero los valores de x y y deben satisfacer la ecuación original $x^4 + y^4 = 16$, por lo que la respuesta se simplifica a

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\,\frac{x^2}{y^7}$$

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas inversas se repasan en la sección 1.6. En la sección 2.5 analizamos su continuidad, y en la sección 2.6, sus asíntotas. Aquí usamos la derivación implícita para hallar las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, suponiendo que estas funciones son derivables. [En efecto, si f es una función uno a uno derivable, puede demostrarse que su función inversa f también es derivable, excepto donde sus rectas tangentes son verticales. Esto es posible porque la gráfica de una función derivable no tiene vértices ni bucles y, por esta razón, si la reflejamos respecto a $y = x$, la gráfica de su función inversa tampoco tiene vértices ni bucles.]

Recuerde la definición de la función arco seno:

$$y = \operatorname{sen}^{-1}x \quad \text{significa} \quad \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Al derivar implícitamente sen $y = x$ respecto a x, obtenemos

$$\cos y\,\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Ahora $\cos y \geqslant 0$, debido a que $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, de modo que

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

El mismo método puede utilizarse para hallar una fórmula para la derivada de *cualquier* función inversa. Véase el ejercicio 77.

De manera que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

En la figura 11 se muestra la gráfica de $f(x) = \tan^{-1}x$ y su derivada $f'(x) = 1/(1 + x^2)$. Observe que f es creciente y $f'(x)$ es siempre positiva. El hecho de que $\tan^{-1}x \to \pm\pi/2$ conforme $x \to \pm\infty$ se refleja en el hecho de que $f'(x) \to 0$ a medida que $x \to \pm\infty$.

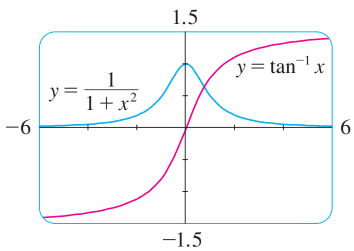


FIGURA 11

La fórmula para la derivada de la función arco tangente se obtiene de manera semejante. Si $y = \tan^{-1} x$, entonces $\tan y = x$. Si derivamos esta última ecuación implícitamente respecto a x, tenemos

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

V EJEMPLO 5 Derive a) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^{-1}x}$ y b) $f(x) = x \arctan\sqrt{x}$.

SOLUCIÓN

a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-1} = -(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)$$
$$= -\frac{1}{(\operatorname{sen}^{-1}x)^2\sqrt{1 - x^2}}$$

Recuerde que $\arctan x$ es una notación alternativa para $\tan^{-1}x$.

b)
$$f'(x) = x\frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2}\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) + \arctan\sqrt{x}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1 + x)} + \arctan\sqrt{x}$$

Las funciones trigonométricas inversas que se presentan con mayor frecuencia son las que acabamos de analizar. Las derivadas de las cuatro restantes se presentan en la tabla siguiente. Las demostraciones de las fórmulas se dejan como ejercicios.

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Las fórmulas para las derivadas de $\csc^{-1}x$ y $\sec^{-1}x$ dependen de las definiciones que se apliquen para estas funciones. Véase el ejercicio 64.

3.5 Ejercicios

1-4 a) Encuentre y' por derivación implícita.
b) Resuelva la ecuación explícita para y y derive para obtener y' en términos de x.
c) Compruebe la coherencia de sus soluciones en los incisos a) y b) sustituyendo la expresión para y en su solución del inciso a).

1. $9x^2 - y^2 = 1$

2. $2x^2 + x + xy = 1$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$

4. $\cos x + \sqrt{y} = 5$

5-20 Encuentre dy/dx por derivación implícita.

5. $x^3 + y^3 = 1$

6. $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

7. $x^2 + xy - y^2 = 4$

8. $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$

9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$

10. $xe^y = x - y$

11. $y \cos x = x^2 + y^2$

12. $\cos(xy) = 1 + \operatorname{sen} y$

13. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$

14. $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

15. $e^{x/y} = x - y$

16. $\sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$

17. $\tan^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

18. $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$

19. $e^y \cos x = 1 + \operatorname{sen}(xy)$

20. $\tan(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

21. Si $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ y $f(1) = 2$, encuentre $f'(1)$.

22. Si $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, determine $g'(0)$.

23-24 Considere a y como la variable independiente y a x como la variable dependiente y utilice la derivación implícita para calcular dx/dy.

23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$

24. $y \sec x = x \tan y$

25-32 Utilice la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

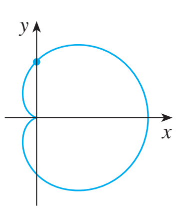
25. $y \operatorname{sen} 2x = x \cos 2y$, $(\pi/2, \pi/4)$

26. $\operatorname{sen}(x + y) = 2x - 2y$, (π, π)

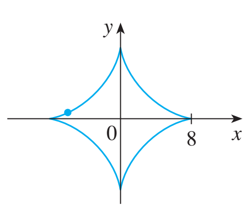
27. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$ (elipse)

28. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$, $(1, 2)$ (hipérbola)

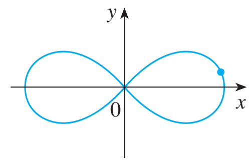
29. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$
$(0, \frac{1}{2})$
(cardioide)



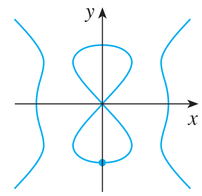
30. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
$(-3\sqrt{3}, 1)$
(astroide)



31. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$
$(3, 1)$
(lemniscata)



32. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$
$(0, -2)$
(curva del diablo)



33. a) La curva con ecuación $y^2 = 5x^4 - x^2$ se llama **kampila de Eudoxo**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(1, 2)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente, en una pantalla común. (Si su dispositivo graficador puede trazar gráficas de curvas definidas implícitamente, entonces utilice esa capacidad. Si no es así, puede dibujar esta curva trazando sus mitades superior e inferior por separado.)

34. a) La curva con ecuación $y^2 = x^3 + 3x^2$ se llama **cúbica de Tschirnhausen**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva, en el punto $(1, -2)$.
b) ¿En cuáles puntos esta curva tiene rectas tangentes horizontales?
c) Ilustre los incisos a) y b) graficando la curva y las rectas tangentes, en una pantalla común.

35-38 Halle y'' por derivación implícita.

35. $9x^2 + y^2 = 9$

36. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

37. $x^3 + y^3 = 1$

38. $x^4 + y^4 = a^4$

39. Si $xy + e^y = e$, encuentre el valor de y'' en el punto donde $x = 0$.

40. Si $x^2 + xy + y^3 = 1$, encuentre el valor de y''' en el punto donde $x = 1$.

SAC **41.** Es posible crear formas caprichosas con las capacidades de los sistemas algebraicos computarizados, a fin de construir gráficas en forma implícita.
a) Trace la gráfica de la curva con ecuación

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

¿En cuántos puntos esta curva tiene rectas tangentes horizontales? Estime las coordenadas x de estos puntos.
b) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(0, 1)$ y $(0, 2)$.
c) Halle las coordenadas x exactas de los puntos mencionados en el inciso a).
d) Diseñe curvas incluso más caprichosas modificando la ecuación del inciso a).

Se requiere calculadora graficadora o computadora   SAC Se requiere sistema algebraico computarizado   **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

SAC **42.** a) La curva con ecuación

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

se ha relacionado a un carretón que rebota. Utilice un sistema algebraico computarizado para la curva y descubra por qué.

b) ¿En cuántos puntos esta curva tiene rectas tangentes horizontales? Encuentre las coordenadas x de estos puntos.

43. Halle los puntos de la lemniscata del ejercicio 31 donde la recta tangente sea horizontal.

44. Demuestre por derivación implícita que la recta tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

45. Formule una ecuación para la recta tangente a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0).

46. Demuestre que la suma de las intersecciones en x y y de cualquier recta tangente a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ es igual a c.

47. Mediante la derivación implícita demuestre que cualquier recta tangente en un punto P a una circunferencia con centro O es perpendicular al radio OP.

48. La regla de la potencia puede demostrarse por medio de la derivación implícita para el caso donde n es un número racional, $n = p/q$, y $y = f(x) = x^n$ es una función derivable. Si $y = x^{p/q}$, entonces $y^q = x^p$. Mediante la derivación implícita demuestre que

$$y' = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}$$

49-60 Halle la derivada de cada una de las siguientes funciones. Simplifique donde sea posible.

49. $y = (\tan^{-1}x)^2$

50. $y = \tan^{-1}(x^2)$

51. $y = \operatorname{sen}^{-1}(2x + 1)$

52. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\sec^{-1}x$

53. $G(x) = \sqrt{1 - x^2}\arccos x$

54. $y = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

55. $h(t) = \cot^{-1}(t) + \cot^{-1}(1/t)$

56. $F(\theta) = \operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen}\theta}$

57. $y = x\operatorname{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2}$

58. $y = \cos^{-1}(\operatorname{sen}^{-1}t)$

59. $y = \arccos\left(\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ a > b > 0$

60. $y = \arctan\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

61-62 Encuentre $f'(x)$. Compruebe si su respuesta es razonable comparando las gráficas de f y f'.

61. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\operatorname{arcsen}x$

62. $f(x) = \arctan(x^2 - x)$

63. Demuestre la fórmula para $(d/dx)(\cos^{-1}x)$ por el mismo método utilizado para demostrar $(d/dx)(\operatorname{sen}^{-1}x)$.

64. a) Una manera de definir $\sec^{-1}x$ es decir que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ y $0 \leqslant y < \pi/2$, o bien, $\pi \leqslant y < 3\pi/2$. Demuestre que, con esta definición

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

b) Otro modo de definir $\sec^{-1}x$ que se utiliza a veces es decir que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ y $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $y \neq 0$. Demuestre que, con esta definición

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

65-68 Dos curvas son **ortogonales** si sus rectas tangentes son perpendiculares en cada punto de intersección. Demuestre que las familias dadas de curvas son **trayectorias ortogonales** entre sí; es decir, cualquier curva en una familia es ortogonal a cualquier curva en la otra familia. Dibuje ambas familias de curvas usando los mismos ejes de coordenadas.

65. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

66. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

67. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

68. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

69. Demuestre que la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y la hipérbola $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$ son trayectorias ortogonales si $A^2 < a^2$ y $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$ (la elipse y la hipérbola tienen los mismos focos).

70. Encuentre el valor del número a tal que las familias de curvas $y = (x + c)^{-1}$ y $y = a(x + k)^{1/3}$ son trayectorias ortogonales.

71. a) La *ecuación de van der Waals* para n moles de un gas es

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde P es la presión, V es el volumen y T es la temperatura del gas. La constante R es la constante universal de los gases, y a y b son constantes positivas que son características de un gas particular. Si T permanece constante, utilice derivación implícita para obtener dV/dP.

b) Encuentre la razón de cambio del volumen respecto a la presión de 1 mol de dióxido de carbono a un volumen de $V = 10\,\text{L}$ y una presión de $P = 2.5\,\text{atm}$. Utilice $a = 3.592$ $\text{L}^2\text{-atm/mol}^2$ y $b = 0.04267\,\text{L/mol}$.

72. a) Utilice derivación implícita para encontrar y' si $x^2 + xy + y^2 + 1 = 0$.

SAC b) Grafique la curva del inciso a). ¿Qué observa? Demuestre que lo que ve es correcto.

c) Tomando en cuenta el inciso b), ¿qué puede decir acerca de la expresión para y' que encontró en el inciso a)?

73. La ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa una "elipse girada"; es decir, una elipse cuyos ejes no son paralelos a los ejes de coordenadas. Encuentre los puntos en que esta elipse cruza el eje x y demuestre que las rectas tangentes en estos puntos son paralelas.

74. a) ¿Dónde la recta normal a la elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$, en el punto $(-1, 1)$, interseca la elipse por segunda vez?

b) Ilustre el inciso a) graficando la elipse y la recta normal.

75. Encuentre todos los puntos de la curva $x^2y^2 + xy = 2$ donde la pendiente de la recta tangente es -1.

76. Halle las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasan por el punto $(12, 3)$.

77. a) Suponga que f es una función uno a uno derivable y que su función inversa f también es derivable. Utilice la derivación implícita para demostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

siempre que el denominador no sea 0.

b) Si $f(4) = 5$ y $f'(4) = \frac{2}{3}$, encuentre $(f^{-1})'(5)$.

78. a) Demuestre que $f(x) = x + e^x$ es uno a uno.

b) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(1)$?

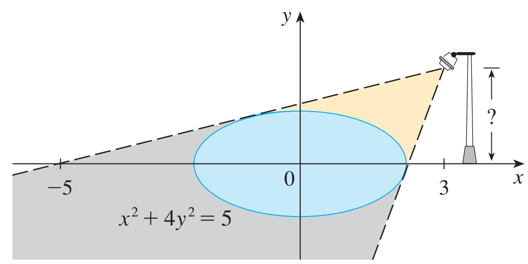
c) Utilice la fórmula del ejercicio 77a) para hallar $(f^{-1})'(1)$.

79. La **función de Bessel** de orden 0, $y = J(x)$, satisface la ecuación diferencial $xy'' + y' + xy = 0$ para todos los valores de x, y su valor en 0 es $J(0) = 1$.

a) Encuentre $J'(0)$.

b) Utilice la derivación implícita para encontrar $J''(0)$.

80. En la figura se muestra una lámpara colocada tres unidades hacia la derecha del eje y y una sombra creada por la región elíptica $x^2 + 4y^2 \leq 5$. Si el punto $(-5, 0)$ está en el borde de la sombra, ¿qué tan arriba del eje x está colocada la lámpara?



PROYECTO DE LABORATORIO SAC FAMILIA DE CURVAS IMPLÍCITAS

En este proyecto exploraremos las formas cambiantes de curvas implícitamente definidas cuando varían las constantes en una familia y determinaremos las funciones comunes a todos los miembros de la familia.

1. Consideremos la familia de curvas

$$y^2 - 2x^2(x + 8) = c[(y + 1)^2(y + 9) - x^2]$$

a) Graficando las curvas con $c = 0$ y $c = 2$, determine cuántos puntos de intersección hay. (Puede usted hacer acercamientos con el *zoom* para encontrarlos.)

b) Ahora agregue las curvas con $c = 5$ y $c = 10$ a sus gráficas del inciso a). ¿Qué observa? ¿Qué pasa con otros valores de c?

2. a) Grafique varios miembros de la familia de curvas

$$x^2 + y^2 + cx^2y^2 = 1$$

Describa cómo cambia la gráfica cuando cambia el valor de c.

b) ¿Qué sucede con la curva cuando $c = -1$? Describa lo que aparece en la pantalla. ¿Puede probarlo algebraicamente?

c) Encuentre y' por derivación implícita. Para el caso $c = -1$, ¿es coherente la expresión y' con lo que descubrió en el inciso b)?

SAC Se requiere sistema algebraico computarizado

3.6 Derivadas de funciones logarítmicas

En esta sección utilizaremos la derivación implícita para hallar las derivadas de las funciones logarítmicas $y = \log_a x$ y, en particular, de la función logaritmo natural $y = \ln x$. [A partir de sus gráficas, es posible probar que las funciones logarítmicas son derivables (véase la figura 12 de la sección 1.6).]

1
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = \log_a x$. Entonces

$$a^y = x$$

La fórmula 3.4.5 establece que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Si mediante la fórmula (3.4.5) derivamos esta ecuación de manera implícita respecto a x, obtenemos

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1$$

y, por consiguiente,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Si en la fórmula 1 ponemos $a = e$, entonces el factor $\ln a$ en el lado derecho se convierte en $\ln e = 1$ y se obtiene la fórmula para la derivada de la función logarítmica natural $\log_e x = \ln x$:

2
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Si se comparan las fórmulas 1 y 2, se evidencia una de las razones principales por la que se usan los logaritmos naturales (logaritmos con base e) en el Cálculo. La fórmula de derivación es más sencilla cuando $a = e$, porque $\ln e = 1$.

V EJEMPLO 1 Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUCIÓN Para utilizar la regla de la cadena, hacemos $u = x^3 + 1$. Entonces $y = \ln u$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$
$$= \frac{1}{x^3 + 1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$$

En general, si combinamos la fórmula 2 con la regla de la cadena como en el ejemplo 1, obtenemos

3
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

EJEMPLO 2 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Utilizando $\boxed{3}$, se tiene que

$$\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x = \cot x$$

EJEMPLO 3 Derive $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUCIÓN En esta ocasión el logaritmo es la función interior, de modo que la regla de la cadena da

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

EJEMPLO 4 Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Si usamos la fórmula 1 con $a = 10$, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\log_{10}(2 + \operatorname{sen} x) \\ &= \frac{1}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2 + \operatorname{sen} x) \\ &= \frac{\cos x}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

SOLUCIÓN 1

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\frac{d}{dx}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,\frac{\sqrt{x-2}\cdot 1 - (x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2} \\ &= \frac{x - 2 - \frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

En la figura 1 se muestra la gráfica de la función f del ejemplo 5, junto con la gráfica de su derivada. Proporciona una comprobación visual de nuestro cálculo. Note que $f'(x)$ es grande negativa cuando f está decreciendo con rapidez.

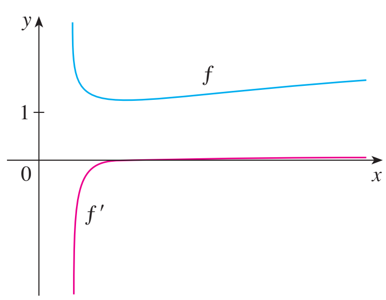


FIGURA 1

SOLUCIÓN 2 Si primero simplificamos la función dada aplicando las leyes de los logaritmos, entonces la derivación se vuelve más fácil:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x-2)\right] \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right) \end{aligned}$$

(Esta respuesta puede dejarse como está, pero si usara un denominador común, vería que da la misma respuesta en la solución 1).

En la figura 2 se muestra la gráfica de la función $f(x) = \ln|x|$ del ejemplo 6 y la de su derivada $f'(x) = 1/x$. Note que cuando x es pequeño, la gráfica de $y = \ln|x|$ está inclinada y, por consiguiente, $f'(x)$ es grande (positiva o negativa).

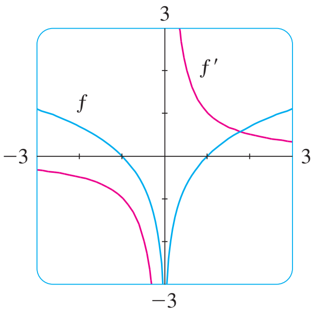


FIGURA 2

V EJEMPLO 6 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \ln|x|$:

SOLUCIÓN Puesto que

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

se sigue que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Así, $f'(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$.

Vale la pena recordar el resultado del ejemplo 6:

4 $$\boxed{\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}}$$

Derivación logarítmica

Con frecuencia, el cálculo de derivadas de funciones complicadas que comprenden productos, cocientes o potencias puede simplificarse tomando logaritmos. El método que se aplica en el ejemplo siguiente se llama **derivación logarítmica**.

EJEMPLO 7 Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

SOLUCIÓN Tome logaritmos de ambos miembros de la ecuación y aplique las leyes de los logaritmos, para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4}\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Al derivar implícitamente respecto a x, resulta que

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2}$$

Al resolver para dy/dx, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Si no hubiéramos utilizado la derivación logarítmica en el ejemplo 7, habríamos tenido que aplicar tanto la regla del cociente como la regla del producto. El proceso de cálculo habría sido horrendo.

Puesto que tenemos una expresión explícita para y, podemos sustituir y escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Pasos en la derivación logarítmica

1. Tomar logaritmos naturales de ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y utilizar las leyes de los logaritmos para simplificar.
2. Derivar implícitamente respecto a x.
3. Resolver la ecuación resultante para y'.

Si $f(x) < 0$ para algunos valores de x, entonces $\ln f(x)$ no está definida, pero podemos escribir $|y| = |f(x)|$ y utilizar la ecuación 4. Este procedimiento se ilustra demostrando la versión general de la regla de la potencia, como se prometió en la sección 3.1.

Regla de la potencia Si n es cualquier número real y $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = x^n$. Utilizando la derivación logarítmica:

Si $x = 0$, podemos demostrar directamente que $f'(0) = 0$ para $n > 1$ a partir de la definición de derivada.

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n\ln|x| \qquad x \neq 0$$

Por tanto,

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

así que,

$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$

Debe distinguir con cuidado la regla de la potencia $[(x^n)' = nx^{n-1}]$, donde la base es variable y el exponente constante, de la regla para derivar funciones exponenciales $[(a^x)' = a^x \ln a]$, donde la base es constante y el exponente es variable.

En general, se tienen cuatro casos para exponentes y bases:

Base constante, exponente constante 1

1. $\dfrac{d}{dx}(a^b) = 0 \qquad$ (a y b son constantes)

Base variable, exponente constante 2

2. $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x)$

Base constante, exponente variable 3

3. $\dfrac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x)$

Base variable, exponente variable 4

4. Para hallar $(d/dx)[f(x)]^{g(x)}$, podemos aplicar la derivación logarítmica, como en el ejemplo que sigue.

V EJEMPLO 8 Derive $y = x^{\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN 1 Dado que la base y el exponente son variables, utilizamos la derivación logarítmica:

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\,\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

La figura 3 ilustra el ejemplo 8 mostrando las gráficas de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ y su derivada.

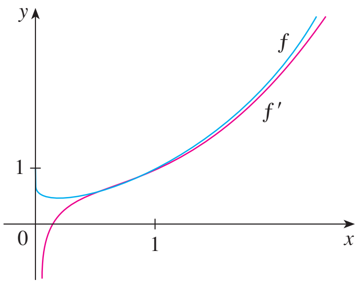


FIGURA 3

SOLUCIÓN 2 Otro método es escribir $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right) = e^{\sqrt{x}\ln x}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln x\right)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(como en la solución 1)}$$

El número e como un límite

Hemos demostrado que si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = 1/x$. Debido a esto, $f'(1) = 1$. Utilizaremos este hecho para expresar el número e como un límite.

A partir de la definición de derivada como un límite, tenemos que

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}$$

Ya que $f'(1) = 1$, tenemos

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = 1$$

Luego, por el teorema 2.5.8 y la continuidad de la función exponencial, tenemos que

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

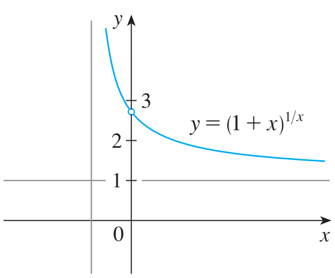


FIGURA 4

5 $$\boxed{e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}}$$

En la figura 4 se ilustra la fórmula 5 mediante la gráfica de la función $y = (1+x)^{1/x}$ y una tabla para valores pequeños de x. Con esto se ilustra una aproximación correcta hasta siete dígitos decimales

x	$(1+x)^{1/x}$
0.1	2.59374246
0.01	2.70481383
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71826824
0.000001	2.71828047
0.0000001	2.71828169
0.00000001	2.71828181

$$e \approx 2.7182818$$

Si hacemos $n = 1/x$ en la fórmula 5, entonces $n \to \infty$ cuando $x \to 0^+$ y, por consiguiente, una expresión alternativa para e es

6 $$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

3.6 Ejercicios

1. Explique por qué en Cálculo se usa con mucha más frecuencia la función logarítmica natural $y = \ln x$, que las otras funciones logarítmicas, $y = \log_a x$.

2-22 Derive cada una de las siguientes funciones.

2. $f(x) = x \ln x - x$

3. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$

4. $f(x) = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

5. $f(x) = \ln \dfrac{1}{x}$

6. $y = \dfrac{1}{\ln x}$

7. $f(x) = \log_{10}(x^3 + 1)$

8. $f(x) = \log_5(xe^x)$

9. $f(x) = \operatorname{sen} x \ln(5x)$

10. $f(u) = \dfrac{u}{1 + \ln u}$

11. $g(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$

12. $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

13. $G(y) = \ln \dfrac{(2y + 1)^5}{\sqrt{y^2 + 1}}$

14. $g(r) = r^2 \ln(2r + 1)$

15. $F(s) = \ln \ln s$

16. $y = \ln |1 + t - t^3|$

17. $y = \tan[\ln(ax + b)]$

18. $y = \ln |\cos(\ln x)|$

19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

20. $H(z) = \ln \sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

21. $y = 2x \log_{10} \sqrt{x}$

22. $y = \log_2(e^{-x} \cos \pi x)$

23-26 Encuentre y' y y'' en cada una de las siguientes funciones.

23. $y = x^2 \ln(2x)$

24. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

25. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

26. $y = \ln(\sec x + \tan x)$

27-30 Derive f y encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones.

27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$

28. $f(x) = \sqrt{2 + \ln x}$

29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

30. $f(x) = \ln \ln \ln x$

31. Si $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, determine $f'(1)$.

32. Si $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$, determine $f'(0)$.

33-34 Determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

33. $y = \ln(x^2 - 3x + 1)$, $(3, 0)$

34. $y = x^2 \ln x$, $(1, 0)$

35. Si $f(x) = \operatorname{sen} x + \ln x$, encuentre $f'(x)$. Compruebe si su respuesta es razonable comparando las gráficas de f y f'.

36. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = (\ln x)/x$, en los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1/e)$. Ilustre lo anterior dibujando la curva y sus rectas tangentes.

37. Sea $f(x) = cx + \ln(\cos x)$. ¿Para qué valores de c se cumple que $f'(\pi/4) = 6$?

38. Sea $f(x) = \log_a(3x^2 - 2)$. ¿Para qué valor de a se cumple que $f'(1) = 3$?

39-50 Utilice la derivación logarítmica para hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

39. $y = (x^2 + 2)^2(x^4 + 4)^4$

40. $y = \dfrac{e^{-x} \cos^2 x}{x^2 + x + 1}$

41. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^4 + 1}}$

42. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2 - x}(x + 1)^{2/3}$

43. $y = x^x$

44. $y = x^{\cos x}$

45. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

46. $y = \sqrt{x}^{\,x}$

47. $y = (\cos x)^x$

48. $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$

49. $y = (\tan x)^{1/x}$

50. $y = (\ln x)^{\cos x}$

51. Encuentre y' si $y = \ln(x^2 + y^2)$.

52. Halle y' si $x^y = y^x$.

53. Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = \ln(x - 1)$.

54. Encuentre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

55. Use la definición de derivada para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

56. Demuestre que $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ para cualquier $x > 0$.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

3.7 Razones de cambio en las ciencias naturales y sociales

Sabemos que si $y = f(x)$, entonces la derivada dy/dx puede interpretarse como la razón de cambio de y respecto a x. En esta sección se analizan algunas de las aplicaciones de esta idea a la física, la química, la biología, la economía y otras ciencias.

Con base en la sección 2.7, recuerde la idea básica que se encuentra detrás de las razones de cambio. Si x varía de x_1 a x_2, entonces el cambio en x es

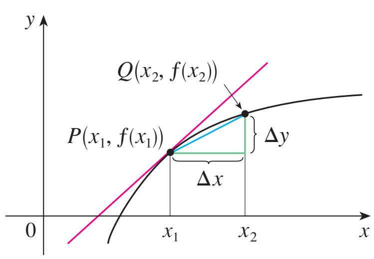
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



m_{PQ} = razón de cambio promedio
$m = f'(x_1)$ = razón de cambio instantánea

FIGURA 1

es la **razón de cambio promedio de y respecto a x** en el intervalo $[x_1, x_2]$ y puede interpretarse como la pendiente de la recta secante PQ en la figura 1. Su límite, cuando $\Delta x \to 0$ es la derivada $f'(x_1)$, la cual puede interpretarse como la **razón de cambio instantánea de y respecto a x**, o sea, la pendiente de la recta tangente en $P(x_1, f(x_1))$. Si se usa la notación de Leibniz, escribimos el proceso en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Siempre que la función $y = f(x)$ tenga una interpretación específica en una de las ciencias, su derivada tendrá una interpretación específica como razón de cambio. (Como se analizó en la sección 2.7, las unidades de dy/dx son las unidades correspondientes a y divididas por las de x.) Veamos ahora algunas de estas interpretaciones en las ciencias naturales y en las sociales.

Física

Si $s = (t)$ es la función posición de una partícula que se mueve en una línea recta, entonces $\Delta s/\Delta t$ representa el promedio de la velocidad en un periodo Δt, y $v = ds/dt$ representa la **velocidad** instantánea (la razón de cambio del desplazamiento respecto al tiempo). La razón de cambio instantáneo de la velocidad respecto al tiempo es la **aceleración**: $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Esto se discutió en las secciones 2.7 y 2.8, pero ahora que conocemos las formulas de derivación, podemos resolver con más facilidad problemas que involucran el movimiento de objetos.

V EJEMPLO 1 La posición de una partícula está dada por la siguiente función

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

donde t se mide en segundos y s en metros.

a) Encuentre la velocidad en el instante t.
b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 y 4 s?
c) ¿Cuándo está en reposo la partícula?
d) ¿Cuándo se mueve la partícula hacia adelante (es decir, en dirección positiva)?
e) Dibuje un diagrama que represente el movimiento de la partícula.
f) Encuentre la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros cinco segundos.
g) Halle la aceleración en el tiempo t y después de 4 s.

h) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 5$.
i) ¿Cuándo aumenta su rapidez la partícula? ¿Cuándo la disminuye?

SOLUCIÓN

a) La función velocidad es la derivada de la función posición.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

b) La velocidad después de 2 s significa la velocidad instantánea cuando $t = 2$; es decir,

$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}$$

La velocidad después de 4 s es

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}$$

c) La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$; esto es,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

y esto se cumple cuando $t = 1$ o $t = 3$. Por tanto, la partícula está en reposo después de 1 s y después de 3 s.

d) La partícula se mueve en dirección positiva cuando $v(t) > 0$; es decir,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0$$

Esta desigualdad se cumple cuando ambos factores son positivos ($t > 3$) o cuando los dos son negativos ($t < 1$). Así, la partícula se mueve en dirección positiva en los intervalos de tiempo $t < 1$ y $t > 3$. Se mueve hacia atrás (en la dirección negativa) cuando $1 < t < 3$.

e) En la figura 2 se esquematiza el movimiento de la partícula hacia atrás y hacia adelante a lo largo de una recta (el eje s), aplicando la información del inciso d).

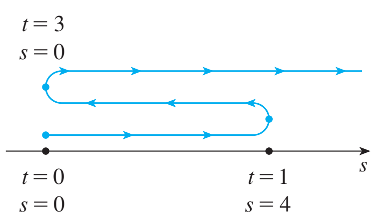


FIGURA 2

f) A partir de los incisos d) y e), necesitamos calcular las distancias recorridas durante los intervalos de tiempo [0, 1], [1, 3] y [3, 5], por separado.

La distancia recorrida en el primer segundo es

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

De $t = 1$ a $t = 3$, la distancia recorrida es

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$, la distancia recorrida es

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

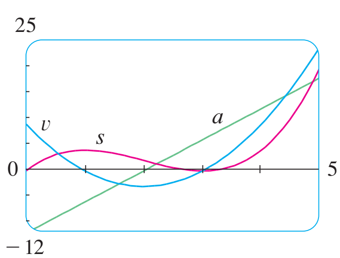


FIGURA 3

La distancia total es $4 + 4 + 20 = 28$ m.

g) La aceleración es la derivada de la función velocidad:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

$$a(4) = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/s}^2$$

h) La figura 3 muestra las gráficas de s, v y a.

i) La rapidez de la partícula aumenta cuando la velocidad es positiva y creciente (v y a son positivas) y también cuando la velocidad es negativa y decreciente (v y a son negativas). En otras palabras, la rapidez de la partícula aumenta cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo. (La partícula es empujada en la misma dirección en que se está moviendo.) De la figura 3 se ve que esto sucede cuando $1 < t < 2$ y cuando $t > 3$. La partícula disminuye su rapidez cuando v y a tienen signos opuestos; es decir, cuando $0 \leqslant t < 1$ y cuando $2 < t < 3$. La figura 4 resume el movimiento de la partícula.

TEC En Module 3.7 puede ver una animación de la figura 4 con una expresión para s que puede elegir usted mismo.

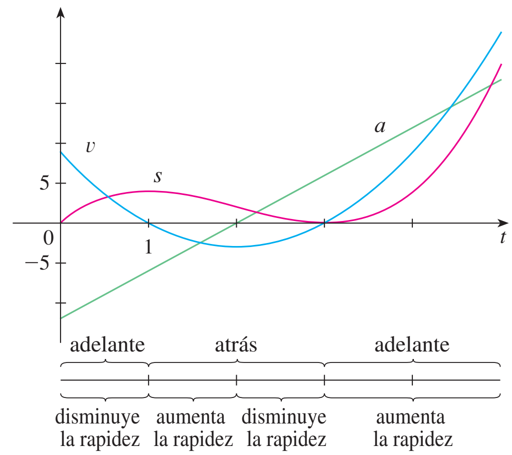


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Si una varilla o un trozo de alambre son homogéneos, entonces su densidad lineal es uniforme y se define como la masa por unidad de longitud ($\rho = m/l$) y se mide en kilogramos por metro. Pero suponga que la varilla no es homogénea, sino que su masa medida desde su extremo izquierdo hasta un punto x es $m = f(x)$, como se muestra en la figura 5.

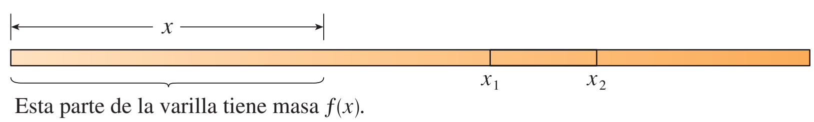


FIGURA 5

La masa de la parte de la varilla que se encuentra entre $x = x_1$ y $x = x_2$ está dada por $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$, de modo que la densidad promedio de esa sección de la varilla es

$$\text{densidad promedio} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si ahora hacemos que $\Delta x \to 0$ (es decir, $x_2 \to x_1$), calculamos la densidad promedio sobre un intervalo cada vez más pequeño. La **densidad lineal** ρ en x_1 es el límite de estas densidades promedio cuando $\Delta x \to 0$; es decir, la densidad lineal es la razón de cambio de masa respecto a la longitud. En forma simbólica,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

De este modo, la densidad lineal de la varilla es la derivada de la masa respecto a la longitud.

Por ejemplo, si $m = f(x) = \sqrt{x}$, donde x se mide en metros y m en kilogramos, entonces la densidad promedio de la parte de la varilla dada por $1 \leqslant x \leqslant 1.2$ es

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1.2) - f(1)}{1.2 - 1} = \frac{\sqrt{1.2} - 1}{0.2} \approx 0.48\,\text{kg/m}$$

en tanto que la densidad en $x = 1$ es

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0.50\,\text{kg/m}$$

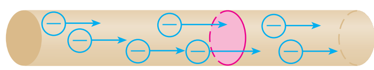


FIGURA 6

V EJEMPLO 3 Siempre que las cargas eléctricas se mueven, hay corriente. En la figura 6 se muestra parte de un alambre con electrones que se mueven a través de una superficie plana, sombreada en rojo. Si ΔQ es la carga neta que pasa por esta superficie durante un periodo Δt, entonces la corriente promedio durante este intervalo de tiempo se define como

$$\text{corriente promedio} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Si tomamos el límite de esta corriente promedio sobre lapsos de tiempo más y más pequeños, obtenemos lo que se llama **corriente** I en un instante dado t_1:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Así, la corriente es la rapidez con que la carga fluye por una superficie; se mide en unidades de carga por unidad de tiempo (a menudo coulombs por segundo, llamados amperes).

La velocidad, la densidad y la corriente no son las únicas razones de cambio de importancia para la física. Otras incluyen la potencia (la rapidez a la cual se realiza trabajo), la relación de flujo de calor, el gradiente de temperatura (la razón de cambio de la temperatura respecto a la posición) y la razón de decaimiento de una sustancia radiactiva en la física nuclear.

Química

EJEMPLO 4 El resultado de una reacción química en la formación de una o más sustancias (11amadas *productos*) a partir de uno o más materiales (*reactivos*). Por ejemplo, la "ecuación"

$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O$$

indica que dos moléculas de hidrógeno y una de oxígeno forman dos moléculas de agua. Consideremos la reacción

$$A + B \to C$$

donde A y B son los reactivos y C es el producto. La **concentración** de un reactivo A es el número de moles (1 mol $= 6.022 \times 10^{23}$ moléculas) por litro y se denota con [A]. La concentración varía durante una reacción, de modo que [A], [B] y [C] son funciones del tiempo (t). La rapidez promedio de reacción del producto C en un intervalo de tiempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ es

$$\frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{[\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)}{t_2 - t_1}$$

Pero los químicos tienen más interés en la **rapidez de reacción instantánea**, la cual se obtiene tomando el límite de la rapidez promedio de reacción cuando el intervalo Δt tiende a 0:

$$\text{rapidez de reacción} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}$$

Dado que la concentración del producto aumenta a medida que la reacción avanza, la derivada $d[\mathrm{C}]/dt$ será positiva, y así la rapidez de reacción de C es positiva. Sin embargo, las concentraciones de los reactivos disminuyen durante la reacción; por eso, para que la rapidez de reacción de A y B sean números positivos, ponemos signos negativos delante de las derivadas $d[\mathrm{A}]/dt$ y $d[\mathrm{B}]/dt$. Dado que $[\mathrm{A}]$ y $[\mathrm{B}]$ disminuyen con la misma rapidez que $[\mathrm{C}]$ crece, tenemos que

$$\text{rapidez de reacción} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{B}]}{dt}$$

De modo más general, resulta que para una reacción de la forma

$$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \rightarrow c\mathrm{C} + d\mathrm{D}$$

tenemos que

$$-\frac{1}{a}\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[\mathrm{B}]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[\mathrm{D}]}{dt}$$

La rapidez de reacción puede determinarse a partir de datos y con métodos gráficos. En algunos casos existen fórmulas explícitas para las concentraciones como funciones del tiempo, que permiten calcular la rapidez de reacción (véase el ejercicio 22).

EJEMPLO 5 Una de las cantidades de interés en termodinámica es la compresibilidad. Si una sustancia dada se mantiene a una temperatura constante, entonces su volumen V depende de su presión P. Podemos considerar la razón de cambio del volumen respecto a la presión: a saber, la derivada dV/dP. Conforme P crece, V decrece, de modo que $dV/dP < 0$. La **compresibilidad** se define al introducir un signo menos y dividir esta derivada entre el volumen V:

$$\text{compresibilidad isotérmica} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

En estos términos, β mide qué tan rápido, por unidad de volumen, decrece el volumen de una sustancia a medida que la presión aumenta, a temperatura constante.

Por ejemplo, se encontró que el volumen V (en metros cúbicos) de una muestra de aire a 25 °C está relacionado con la presión P (en kilopascales) mediante la ecuación

$$V = \frac{5.3}{P}$$

La razón de cambio de V respecto a P cuando $P = 50\,\text{kPa}$, es

$$\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = -\left.\frac{5.3}{P^2}\right|_{P=50}$$

$$= -\frac{5.3}{2\,500} = -0.00212\,\text{m}^3/\text{kPa}$$

La compresibilidad a esa presión es

$$\beta = -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = \frac{0.00212}{\frac{5.3}{50}} = 0.02\,(\text{m}^3/\text{kPa})/\text{m}^3$$

Biología

EJEMPLO 6 Sea $n = f(t)$ el número de individuos de una población de animales o plantas en el tiempo t. El cambio del tamaño de la población entre los tiempos $t = t_1$ y $t = t_2$ es $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, así que la razón de crecimiento promedio durante el periodo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ es

$$\text{razón de crecimiento promedio} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La **razón de crecimiento instantánea** se obtiene a partir de esta razón de crecimiento promedio al hacer que el periodo Δt tienda a 0:

$$\text{razón de crecimiento promedio} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

En términos estrictos, esto no es muy exacto porque la gráfica real de una función de población $n = f(t)$ sería una función escalón que es discontinua siempre que ocurre un nacimiento o una muerte y, por tanto, no es derivable. Sin embargo, para una población grande de animales o plantas, es posible reemplazar la gráfica con una curva de aproximación uniforme como en la figura 7.

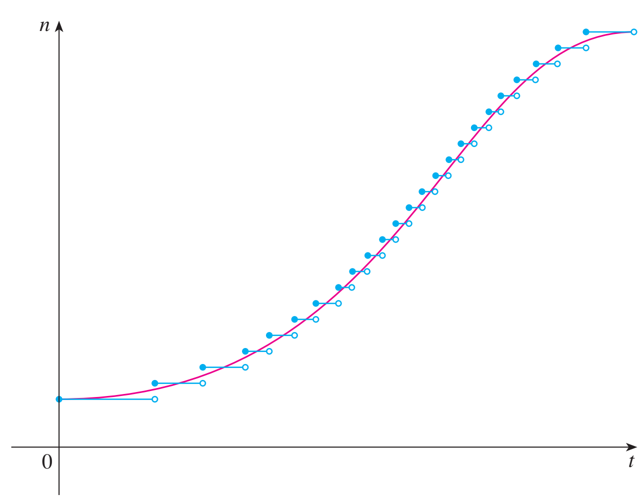
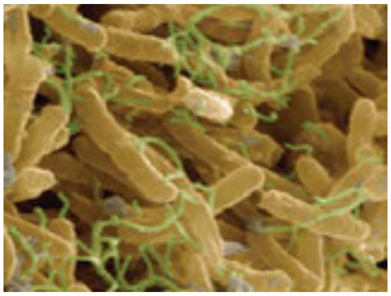


FIGURA 7
Una curva suave que se aproxima a una función de crecimiento



Las bacterias *E.coli* tienen aproximadamente dos micrómetros (μm) de longitud y 0.75 μm de ancho. La imagen fue obtenida con un microscopio electrónico de barrido.

Para ser más específicos, considere una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Suponga que, por medio de la toma de muestras de la población a ciertos intervalos, se determina que esa población se duplica cada hora. Si la población inicial es n_0 y el tiempo t se mide en horas, entonces

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0$$

$$f(2) = 2f(1) = 2^2n_0$$

$$f(3) = 2f(2) = 2^3n_0$$

y, en general,

$$f(t) = 2^t n_0$$

La función de población es $n = n_0 2^t$.

En la sección 3.4 se demostró que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Así que la razón de crecimiento de la población de bacterias en el tiempo t, es

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_0 2^t) = n_0 2^t \ln 2$$

Por ejemplo, suponga que inicia con una población inicial de $n_0 = 100$ bacterias. Entonces, la razón de crecimiento después de 4 horas es

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} = 100 \cdot 2^4 \ln 2 = 1600 \ln 2 \approx 1109$$

Esto significa que, después de 4 horas, la población de bacterias crece en una cantidad de casi 1109 bacterias por hora.

EJEMPLO 7 Cuando consideramos el flujo de sangre por un vaso sanguíneo, como una vena o una arteria, este vaso puede tomar la forma de un tubo cilíndrico con radio R y longitud l como se ilustra en la figura 8.

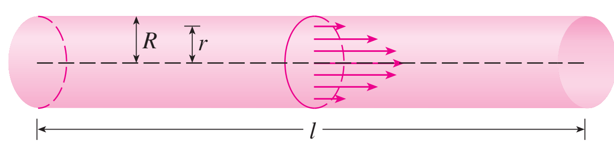


FIGURA 8
Flujo de sangre dentro de una arteria

Debido a la fricción en las paredes del tubo, la velocidad v de la sangre es máxima a lo largo del eje central del propio tubo y decrece conforme aumenta la distancia r al eje, hasta que v se vuelve 0 en la pared. La relación entre v y r está dada por la ley del **flujo laminar** descubierta por el físico francés Jean-Louis-Marie Poiseuille en 1840. En ésta se afirma que

$$\boxed{1} \qquad v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

donde η es la viscosidad de la sangre y P es la diferencia en la presión entre los extremos del tubo. Si P y l son constantes, entonces v es función de r, con dominio $[0, R]$.

Para información más detallada, véase W. Nichols y M. O'Rourke (eds.), *McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretic, Experimental, and Clinical Principles*, 5a. ed. (Nueva York, 2005).

La razón de cambio promedio de la velocidad, al moverse desde $r = r_1$ hacia afuera hasta $r = r_2$, está dada por

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

y si hacemos que $\Delta r \to 0$, obtenemos el **gradiente de velocidad**; es decir, la razón de cambio instantánea de la velocidad respecto a r:

$$\text{gradiente de velocidad} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Utilizando la ecuación 1, obtenemos

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{Pr}{2\eta l}$$

Para una de las arterias humanas más pequeñas, puede tomar $\eta = 0.027$, $R = 0.008$ cm, $l = 2$ cm y $P = 4\,000$ dinas/cm^2, lo cual da

$$\begin{aligned} v &= \frac{4\,000}{4(0.027)2}(0.000064 - r^2) \\ &\approx 1.85 \times 10^4(6.4 \times 10^{-5} - r^2) \end{aligned}$$

En $r = 0.002$ cm la sangre fluye a una rapidez de

$$\begin{aligned} v(0.002) &\approx 1.85 \times 10^4(64 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6}) \\ &= 1.11 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

y el gradiente de velocidad en ese punto es

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0.002} = -\frac{4\,000(0.002)}{2(0.027)2} \approx -74 \text{ (cm/s)/cm}$$

Para tener una idea de lo que esto significa, cambie las unidades de centímetros a micrómetros (1 cm = 10 000 μm). Entonces el radio de la arteria es de 80 μm. La velocidad en el eje central es de 11 850 μm/s, la cual disminuye hasta 11 110 μm/s a una distancia de $r = 20\,\mu$m. El hecho de que $dv/dr = -74\,(\mu\text{m/s})/\mu\text{m}$ significa que cuando $r = 20\,\mu$m, la velocidad disminuye en una cantidad de casi 74 μm/s por cada micrómetro que se aleja del centro.

Economía

V EJEMPLO 8 Suponga que $C(x)$ es el costo total en que una compañía incurre al producir x unidades de cierto artículo. La función C se llama **función de costo**. Si el número de artículos producidos se incrementa desde x_1 hasta x_2, entonces el costo adicional es $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, y la razón de cambio promedio del costo es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

El límite de esta cantidad conforme $\Delta x \to 0$, es decir, la razón de cambio instantánea del costo los economistas le llaman **costo marginal** respecto al número de artículos producidos:

$$\text{costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

[Dado que x suele tomar solo valores enteros, quizá no tenga sentido hacer que Δx tienda a 0, pero siempre podrá remplazar $C(x)$ con una función suave de aproximación uniforme, como en el ejemplo 6.]

Si tomamos $\Delta x = 1$ y n grande (de modo que Δx sea pequeño en comparación con n), tenemos que

$$C'(n) \approx C(n + 1) - C(n)$$

Así, el costo marginal de producir n unidades es aproximadamente igual al costo de elaborar una unidad más [la $(n + 1)$-ésima unidad].

A menudo resulta apropiado representar con un polinomio una función de costo total

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

donde a representa el costo de los gastos generales (alquiler, calefacción, mantenimiento) y los demás términos representan el costo de las materias primas, la mano de obra y demás. (El costo de las materias primas puede ser proporcional a x, pero los costos de la mano de obra podrían depender en parte de potencias mayores de x, debido a los costos del tiempo extra y a las faltas de eficiencia relacionadas con las operaciones a gran escala.)

Por ejemplo, suponga que una compañía ha estimado que el costo (en dólares) de producir x artículos es

$$C(x) = 10\,000 + 5x + 0.01x^2$$

Entonces, la función de costo marginal es

$$C'(x) = 5 + 0.02x$$

El costo marginal en el nivel de producción de 500 artículos es

$$C'(500) = 5 + 0.02(500) = \$15/\text{artículo}$$

Esto da la cantidad a la cual se incrementan los costos respecto al nivel de producción cuando $x = 500$ y predice el costo del artículo 501.

El costo real de producir el artículo 501 es

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10\,000 + 5(501) + 0.01(501)^2] \\ &\qquad - [10\,000 + 5(500) + 0.01(500)^2] \\ &= \$15.01 \end{aligned}$$

Note que $C'(500) \approx C(501) - C(500)$.

Los economistas también estudian la demanda, el ingreso y la utilidad marginales, que son las derivadas de las funciones de demanda, ingreso y utilidad. Éstas se consideran en el capítulo 4, después de desarrollar las técnicas para hallar los valores máximos y mínimos de funciones.

Otras ciencias

Las razones de cambio se presentan en todas las ciencias. Un geólogo se interesa en conocer la razón a la cual una masa incrustada de roca fundida se enfría por conducción del calor hacia las rocas que la rodean. Un ingeniero desea conocer la proporción a la cual el agua fluye hacia dentro o hacia fuera de una represa. Un geógrafo urbano se interesa en la razón de cambio de la densidad de población en una ciudad, al aumentar la distancia al centro de la propia ciudad. Un meteorólogo tiene interés por la razón de cambio de la presión atmosférica respecto a la altura. (Véase el ejercicio 17 de la sección 3.8.)

En psicología, quienes se interesan en la teoría del aprendizaje estudian la curva del aprendizaje, la cual presenta en forma de gráfica el rendimiento $P(t)$ de alguien que aprende una habilidad, como función del tiempo de capacitación t. Tiene un interés particular la razón a la cual mejora el rendimiento a medida que pasa el tiempo; es decir, dP/dt.

En sociología, el cálculo diferencial se aplica al análisis de la divulgación de rumores (o de innovaciones, novedades o moda). Si $p(t)$ denota la proporción de una población que conoce un rumor en el momento t, entonces la derivada dp/dt denota la razón de divulgación de ese rumor. (Véase el ejercicio 84 de la sección 3.4.)

Una sola idea, varias interpretaciones

La velocidad, la densidad, la corriente, la potencia y el gradiente de temperatura, en física; la velocidad de reacción y la compresibilidad, en química; la rapidez de crecimiento y el gradiente de velocidad de la sangre, en biología; el costo marginal y la utilidad marginal, en economía; la rapidez de flujo del calor, en geología; la rapidez de mejora del rendimiento, en psicología, y la rapidez de divulgación de un rumor, en sociología, son casos especiales de un concepto matemático: la derivada.

Esta es una ilustración del hecho de que parte del poder de las matemáticas descansa en su abstracción. Un solo concepto matemático abstracto (como la derivada) puede tener interpretaciones diferentes en cada ciencia. Cuando desarrollemos las propiedades del concepto matemático, de una vez y por todas, podrá dar la vuelta y aplicar estos resultados a todas las ciencias. Esto es mucho más eficiente que desarrollar propiedades de conceptos especiales en cada una por separado. El matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) lo expresó de manera sucinta: “Las matemáticas comparan los fenómenos más diversos y descubren las analogías secretas que los vinculan”.

3.7 Ejercicios

1-4 Una partícula se mueve según una ley del movimiento $s = f(t)$, $t \geqslant 0$, donde t se mide en segundos y s en pies.

a) Encuentre la velocidad en el instante t.
b) ¿Cuál es la velocidad después de 3 s?
c) ¿Cuándo está la partícula en reposo?
d) ¿Cuándo se mueve hacia la dirección positiva?
e) Encuentre la distancia total recorrida durante los primeros 8 s.
f) Dibuje un diagrama, como el de la figura 2, a fin de ilustrar el movimiento de la partícula.
g) Halle la aceleración en el tiempo t y después de 3 s.
h) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 8$.
i) ¿Cuándo la partícula aumenta su rapidez? ¿Cuándo disminuye?

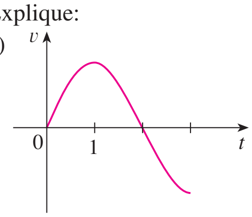
1. $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$

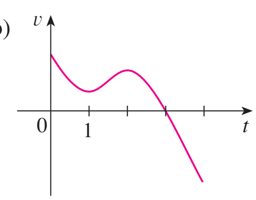
2. $f(t) = 0.01t^4 - 0.04t^3$

3. $f(t) = \cos(\pi t/4), \quad t \leqslant 10$

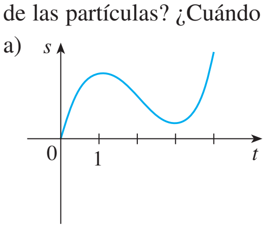
4. $f(t) = te^{-t/2}$

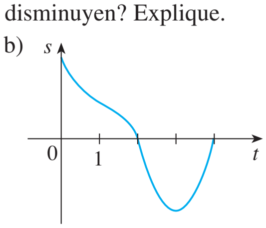
5. Se muestran las graficas de los funciones *velocidad* de dos partículas, donde t se mide en segundos. ¿Cuándo incrementa su rapidez cada partícula? ¿Cuándo disminuyen su rapidez? Explique:

a) 

b) 

6. Se muestran las funciones *posición* de dos partículas, donde t se mide en segundos. ¿Cuándo incrementa su rapidez cada una de las partículas? ¿Cuándo la disminuyen? Explique.

a) 

b) 

7. La altura (en metros) de un proyectil disparado verticalmente hacia arriba, desde un punto 2 m por encima del nivel del suelo con una velocidad inicial de 24.5 m/s es $h = 2 + 24.5t - 4.9t^2$ después de t segundos.

a) Encuentre la velocidad después de 2 segundos y después de 4 segundos.
b) ¿Cuándo alcanza el proyectil su altura máxima?
c) ¿Cuál es su altura máxima?
d) ¿En qué momento cae al suelo?
e) ¿Con qué velocidad cae al suelo?

8. Si un balón es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 80 pies/s, entonces su altura después de t segundos es $s = 80t - 16t^2$.

a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el balón?
b) ¿Cuál es la velocidad del balón cuando está 96 pies por encima del suelo en su camino ascendente? ¿En su camino en descenso?

9. Si se lanza una roca verticalmente hacia arriba desde la superficie de Marte, con una velocidad de 15 m/s, su altura después de t segundos es $h = 15t - 1.86t^2$.

a) ¿Cuál es la velocidad de la roca después de que transcurren 2 s?
b) ¿Cual es la velocidad de la roca una vez que ha alcanzado 25 m durante el ascenso? ¿Y en su descenso?

10. Una partícula se mueve de acuerdo con la función posición

$$S = t^4 - 4t^3 - 20t^2 + 20t \qquad t \geqslant 0$$

a) ¿En qué momento la partícula tiene una velocidad de 20 m/s?
b) ¿En qué momento su aceleración es 0? ¿Cuál es el significado de este valor de t?

11. a) Una compañía fabrica *chips* para computadora a partir de placas cuadradas de silicio. Se desea conservar la longitud del lado de esas placas muy próxima a 15 mm y, asimismo, saber cómo cambia el área $A(x)$ de ellas cuando varía la longitud x del lado. Encuentre $A'(15)$ y explique su significado en esta situación.

b) Demuestre que la rapidez de cambio del área de uno de los cuadrados respecto a la longitud de su lado es la mitad de su perímetro. Trate de explicar geométricamente por qué esto es cierto, dibujando un cuadrado cuya longitud x del lado se incrementa en una cantidad Δx. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área, ΔA, si Δx es pequeño?

12. a) Es fácil hacer crecer cristales de clorato de sodio en forma de cubos dejando que una solución de esta sal en agua se evapore con lentitud. Si V es el volumen de uno de esos cubos, con longitud x por lado, calcule dV/dx cuando $x = 3$ mm y explique su significado.

b) Demuestre que la razón de cambio del volumen de un cubo respecto a la longitud de su arista es igual a la mitad del área superficial de ese cubo. Explique geométricamente por qué este resultado es cierto; básese en el ejercicio 11b) para establecer una analogía.

13. a) Encuentre la razón de cambio promedio del área de un círculo respecto a su radio r cuando éste cambia de
i) 2 a 3 ii) 2 a 2.5 iii) 2 a 2.1

b) Encuentre la razón de cambio instantánea cuando $r = 2$.

c) Demuestre que la razón de cambio del área de un círculo respecto a su radio (a cualquier r) es igual a la circunferencia del círculo. Intente explicar geométricamente por qué esto es cierto dibujando un círculo cuyo radio se incrementa en una cantidad Δr. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área ΔA si Δr es pequeño?

14. Se deja caer una piedra en un lago, lo que crea una onda circular que viaja hacia afuera con una rapidez de 60 cm/s. Encuentre la razón a la cual aumenta el área dentro del círculo después de a) 1 s, b) 3 s y c) 5 s. ¿Qué puede concluir?

15. Se está inflando un globo esférico. Encuentre la razón de aumento del área superficial ($S = 4\pi r^2$) respecto al radio r, cuando éste es de a) 1 pie, b) 2 pies y c) 3 pies. ¿A qué conclusiones llega?

16. a) El volumen de una célula esférica en crecimiento es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde el radio r se mide en micrómetros ($1\ \mu\text{m} = 10^{-6}$ m). Encuentre la razón de cambio promedio de V respecto a r, cuando éste cambia de
i) 5 a 8 μm ii) 5 a 6 μm iii) 5 a 5.1 μm

b) Halle la razón de cambio instantánea de V respecto a r, cuando $r = 5\ \mu$m.

c) Demuestre que la razón de cambio del volumen de una esfera respecto a su radio es igual a su área superficial. Explique geométricamente por qué esto es cierto. Argumente por analogía con el ejercicio 13c).

17. La masa de parte de una varilla metálica que se encuentra entre su extremo izquierdo y un punto x metros a la derecha es $3x^2$ kg. Encuentre la densidad lineal (véase el ejemplo 2) cuando x es a) 1 m, b) 2 m y c) 3 m. ¿En dónde es más alta la densidad y dónde es más baja?

18. Si un tanque contiene 5 000 galones de agua, la cual se drena desde el fondo del tanque en 40 min, entonces la ley de Torricelli da el volumen V de agua que queda en el tanque después de t minutos como

$$V = 5\,000\left(1 - \tfrac{1}{40}t\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 40$$

Encuentre la rapidez de drenado de agua después de a) 5 min, b) 10 min, c) 20 min y d) 40 min. ¿En qué momento fluye el agua más rápido hacia afuera? ¿Con mayor lentitud? Resuma sus hallazgos.

19. La cantidad de carga, Q, en coulombs c) que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo t (medido en segundos) se expresa con $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encuentre la corriente cuando a) $t = 0.5$ s y b) $t = 1$ s. [Véase el ejemplo 3. La unidad de corriente es el ampere (1 A = 1 C/s).] ¿En qué momento la corriente es la más baja?

20. La ley de Newton de la gravitación afirma que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre otro de masa M es

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

donde G es la constante gravitacional y r es la distancia entre los cuerpos.

a) Encuentre dF/dr y explique su significado. ¿Qué indica el signo menos?

b) Suponga que se sabe que la Tierra atrae un objeto con una fuerza que disminuye a razón de 2 N/km, cuando $r = 20\,000$ km. ¿Con qué rapidez cambia esta fuerza cuando $r = 10\,000$ km?

21. La fuerza F que actúa sobre un cuerpo con masa m y velocidad v es igual a la razón de cambio del momentum o cantidad de movimiento: $F = (d/dt)(mv)$. Si m es constante, esto se convierte en $F = ma$, donde $a = dv/dt$ es la aceleración. Pero en la teoría de la relatividad, la masa de una partícula varía con v como sigue: $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la velocidad de la luz. Demuestre que

$$F = \frac{m_0 a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

22. Algunas de las mareas más altas en el mundo se producen en la Bahía de Fundy en la costa atlántica de Canadá. En el cabo de Hopewell, la profundidad del agua durante la marea baja es aproximadamente dos metros y durante la marea alta es cerca de doce metros. El periodo natural de oscilación es un poco más de doce horas, y el 30 de junio de 2009, la marea alta se produjo a las 6:45. Esto ayuda a explicar el siguiente modelo para la profundidad del agua D (en metros) en función del tiempo t (en horas después de la medianoche) ese día:

$$D(t) = 7 + = \cos[0.503(t - 6.75)]$$

¿Con qué rapidez fue subiendo la marea (o cayendo) en los siguientes momentos?

a) 15:00 b) 6:00

c) 9:00 d) mediodía

23. La ley de Boyle establece que, cuando se comprime una muestra de gas a una temperatura constante, el producto de la presión y el volumen se mantiene constante: $PV = C$.

a) Encuentre la razón de cambio del volumen respecto a la presión.

b) Una muestra de gas está en un recipiente a baja presión y se le comprime paulatinamente a temperatura constante durante 10 minutos. ¿El volumen disminuye con mayor rapidez al principio o al final de los 10 minutos? Explique.

c) Demuestre que la compresibilidad isotérmica (véase el ejemplo 5) se expresa mediante $\beta = 1/P$.

24. Si en el ejemplo 4 una molécula del producto C está formada por una molécula del reactivo A y una molécula del reactivo B y la concentración inicial de A y B tienen un valor común $[A] = [B] = a$ moles/L, entonces

$$[C] = a^2kt/(akt + 1)$$

donde k es una constante.

a) Encuentre la rapidez de reacción en el tiempo t.

b) Demuestre que si $x = [C]$, entonces

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2$$

c) ¿Qué pasa con la concentración conforme $t \to \infty$?

d) ¿Qué sucede con la velocidad de reacción conforme $t \to \infty$?

e) ¿Qué significan los resultados de los incisos c) y d) en términos prácticos?

25. En el ejemplo 6 consideramos una población de bacterias que se duplica cada hora. Supongamos que otra población de bacterias se triplica cada hora y comienza con 400 bacterias. Encuentre una expresión para el número n de bacterias después de t horas y utilícela para estimar la tasa de crecimiento de la población de bacterias después de 2.5 horas.

26. El número de células de levadura en un cultivo de laboratorio aumenta rápidamente al principio, pero finalmente se nivela. La población es modelada por la función

$$n = f(t) = \frac{a}{1 + be^{-0.7t}}$$

donde t es medido en horas. En el tiempo $t = 0$ la población es de 20 celdas y está aumentando a un ritmo de 12 células/hora. Encuentre los valores de a y b. De acuerdo con este modelo, ¿qué sucede con la población de levadura a largo plazo?

27. La tabla da la población del mundo en el siglo XX.

Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)
1900	1 650	1960	3 040
1910	1 750	1970	3 710
1920	1 860	1980	4 450
1930	2 070	1990	5 280
1940	2 300	2000	6 080
1950	2 560		

a) Estime la tasa de crecimiento poblacional en 1920 y en 1980 mediante el promedio de las pendientes de dos rectas secantes.

b) Utilice una calculadora graficadora o computadora para encontrar una función cúbica (una polinomial de tercer grado) que modele los datos.

c) Utilice el modelo del inciso b) para encontrar un modelo para la tasa de crecimiento de la población en el siglo XX.

d) Utilice el inciso c) para estimar las tasas de crecimiento en 1920 y 1980. Compare con sus estimaciones del inciso a).

e) Estime la tasa de crecimiento en 1985.

28. La tabla muestra cómo varía la edad promedio del primer matrimonio de la mujer japonesa en la última mitad del siglo XX.

t	$A(t)$	t	$A(t)$
1950	23.0	1980	25.2
1955	23.8	1985	25.5
1960	24.4	1990	25.9
1965	24.5	1995	26.3
1970	24.2	2000	27.0
1975	24.7		

a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para modelar estos datos con una función polinomial de cuarto grado.

b) Utilice el inciso a) para encontrar un modelo para $A'(t)$.

c) Estime la tasa de cambio de la edad de matrimonio de la mujer en 1990.

d) Grafique los puntos de datos y los modelos para A y A'.

29. Considere la ley de flujo laminar del ejemplo 7. Considere también un vaso sanguíneo con radio 0.01 cm, longitud 3 cm, diferencia de presión de 3 000 Dinas/cm^2 y una viscosidad de $\eta = 0.027$.

a) Encuentre la velocidad de la sangre a lo largo de la línea central $r = 0$, en un radio $r = 0.005$ cm y en la pared $r = R = 0.01$ cm.

b) Encuentre el gradiente de velocidad en $r = 0$, $r = 0.005$ y $r = 0.01$.
c) ¿Donde es más mayor la velocidad? ¿Dónde está el mayor cambio de velocidad?

30. La frecuencia de vibración de una cuerda de violín está dada por

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

donde L es la longitud de la cuerda, T es su tensión y ρ es su densidad lineal. [Véase el capítulo 11 en D. E. Hall, Musical Acoustic, 3a. ed. (Pacific Grove, California, 2002).]

a) Encuentre la rapidez de cambio de la frecuencia respecto a
   i) la longitud (cuando T y ρ son constantes),
   ii) la tensión (cuando L y ρ son constantes) y
   iii) la densidad lineal (cuando L y T son constantes).
b) El tono de una nota (qué tan altas o bajas son las notas) está determinado por la frecuencia f. (Cuanto mayor sea la frecuencia, mayor será el tono.) Utilice los signos de los derivadas en el inciso a) para determinar lo que sucede con el tono de una nota
   i) cuando se reduce la longitud efectiva colocando un dedo sobre la cuerda, haciendo que vibre sólo una porción menor que la cuerda,
   ii) cuando se incrementa la tensión girando la llave de ajuste,
   iii) cuando aumenta la densidad lineal por cambiar la cuerda.

31. El costo en dólares de producir x yardas de un determinado tejido es

$$C(x) = 1\,200 + 12x - 0.1x^2 + 0.0005x^3$$

a) Encuentre la función de costo marginal.
b) Obtenga $C'(200)$ y explique su significado. ¿Qué predice?
c) Compare $C'(200)$ con el costo de fabricar la yarda 201 de tela.

32. La función de costo de producción de una mercancía es

$$C(x) = 339 + 25x - 0.09x^2 + 0.0004x^3$$

a) Obtenga e interprete $C'(100)$.
b) Compare $C'(100)$ con el costo de producir el artículo 101.

33. Si $p(x)$ es el valor total de la producción cuando hay x trabajadores en una planta, entonces la *productividad promedio* de la fuerza de trabajo en la planta es

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

a) Obtenga $A'(x)$. ¿Por qué quiere la empresa contratar a más trabajadores si $A'(x) > 0$?
b) Demuestre que $A'(x) > 0$ si $p'(x)$ es mayor que la productividad promedio.

34. Si R denota la reacción del cuerpo a cierto estímulo de esfuerzo x, la *sensibilidad* S se define como la rapidez de cambio de la reacción respecto a x. Un ejemplo concreto es que cuando el brillo x de una fuente de luz aumenta, el ojo reacciona disminuyendo la zona R de la pupila. La fórmula experimental

$$R = \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}$$

ha sido utilizada para modelar la dependencia de R sobre x cuando R se mide en milímetros cuadrados y x se mide en unidades apropiadas de brillo.

a) Encuentre la sensibilidad.
b) Ilustre el inciso a) graficando R y S como funciones de x. Haga comentarios relacionados con los valores de R y S en bajos niveles de brillo. ¿Esto es lo que esperaría?

35. La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta T (en kelvin), la presión P (en atmósferas) y el volumen V (en litros) es $PV = nRT$, donde n es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante del gas. Suponga que, en cierto instante, $P = 8.0$ atm y está aumentando a razón de 0.10 atm/min y $V = 10$ L y está disminuyendo a razón de 0.15 L/min. Encuentre la razón de cambio de T respecto al tiempo en ese instante si $n = 10$ mol.

36. En una granja piscícola se introduce una población de peces en un estanque y se cosechan con regularidad. Un modelo para la razón de cambio de la población se expresa con la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

donde r_0 es la tasa de nacimientos de peces, P_c es la población máxima que el estanque puede contener (llamada *capacidad de contención*) y β es el porcentaje de la población que se cosecha.

a) ¿Cuál valor de dP/dt correspondiente a una población estable?
b) Si el estanque puede sostener 10 000 peces, la tasa de nacimiento es del 5% y la cantidad de cosecha es de 4%, encuentre el nivel estable de la población.
c) Si β se eleva hasta 5%, ¿qué sucede?

37. En el estudio de los ecosistemas, a menudo se usan los modelos *depredador-presa* para estudiar la interacción entre las especies. Considere una población de lobos de la tundra, dada por $W(t)$, y de caribúes, dada por $C(t)$, en el norte de Canadá. La interacción se ha modelado mediante las ecuaciones

$$\frac{dC}{dt} = aC - bCW \quad \text{y} \quad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW$$

a) ¿Cuáles valores de dC/dt y dW/dt corresponden a poblaciones estables?
b) ¿Cómo se representaría matemáticamente la afirmación "Los caribúes van hacia la extinción"?
c) Suponga que $a = 0.05$, $b = 0.001$, $c = 0.05$ y $d = 0.0001$. Encuentre todas las parejas de poblaciones (C, W) que conducen a poblaciones estables. De acuerdo con este modelo, ¿es posible que las especies vivan en armonía o una de ellas, o ambas, se extinguirán?

3.8 Crecimiento y decaimiento exponenciales

En muchos fenómenos naturales, las cantidades crecen o decrecen en una cantidad proporcional a su tamaño. Por ejemplo, si $y = f(t)$ es el número de individuos en una población de animales o bacterias en el tiempo t, entonces parece razonable esperar que la razón de crecimiento $f'(t)$ sea proporcional a la población $f(t)$; es decir, $f'(t) = kf(t)$ para alguna constante k. A propósito, bajo condiciones ideales (ambientes sin límites, nutrición adecuada, inmunidad a las enfermedades) el modelo matemático conocido por la ecuación $f'(t) = kf(t)$ predice, sin duda, con precisión lo que realmente sucede. Otro ejemplo sucede en física nuclear donde la masa de una sustancia radiactiva decae en una cantidad proporcional a su masa. En química la velocidad de una reacción de primer orden unimolecular es proporcional a la concentración de la sustancia. En finanzas, el valor de una cuenta de ahorros con interés compuesto se incrementa de manera continua en una cantidad proporcional a ese valor.

En general, si $y(t)$ es el valor de una cantidad y en el tiempo t y si la razón de cambio de y respecto a t es proporcional a su tamaño $y(t)$ en cualquier tiempo, entonces

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\frac{dy}{dt} = ky}$$

donde k es una constante. Algunas veces la ecuación 1 se llama **ley de crecimiento natural** (*si* $k > 0$) o **ley de decaimiento natural** (*si* $k < 0$). También, a la expresión 1 se le denomina **ecuación diferencial** porque involucra una función desconocida, y y su derivada dy/dt.

No es difícil intuir una solución de la ecuación 1. Esta ecuación pide hallar una función cuya derivada es un múltiplo constante de sí misma. En este capítulo encontraremos tales funciones. Cualquier función exponencial en la forma $y(t) = Ce^{kt}$, donde C es una constante, satisface

$$y'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = ky(t)$$

Veremos en la sección 9.4 que *cualquier* función que satisface $dy/dt = ky$ debe ser en la forma $y = Ce^{kt}$. Para ver el significado de la constante C, observe que

$$y(0) = Ce^{k \cdot 0} = C$$

En consecuencia, C es el valor inicial de la función:

> $\boxed{2}$ **Teorema** Las únicas soluciones de la ecuación diferencial $dy/dt = ky$ son las funciones exponenciales
>
> $$y(t) = y(0)e^{kt}$$

Crecimiento de población

¿Cuál es el significado de la constante de proporcionalidad k? En el panorama del crecimiento de la población, cuando $P(t)$ es el tamaño de una población en el tiempo t, escribimos

$$\boxed{3} \qquad \frac{dP}{dt} = kP \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

La cantidad

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$$

es la rapidez de crecimiento dividida entre el tamaño de la población; a aquélla se le denomina la **rapidez** o **tasa de crecimiento relativa**. De acuerdo con $\boxed{3}$, en lugar de decir "la rapidez o tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población" podríamos decir "la razón o tasa de crecimiento relativo es constante". Por tanto, $\boxed{2}$ indica que una población con crecimiento relativo constante debe crecer en forma exponencial. Note que la tasa de crecimiento relativa k aparece como el coeficiente de t en la función exponencial Ce^{kt}. Por ejemplo, si

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P$$

donde t se mide en años, entonces la rapidez de crecimiento relativo es $k = 0.02$ y el crecimiento de población a una rapidez relativa es de 2% por cada año. Si la población en el tiempo 0 es P_0, entonces la expresión para la población es

$$P(t) = P_0 e^{0.02t}$$

V EJEMPLO 1 Utilice el hecho de que la población mundial fue 2 560 millones en 1950 y 3 040 millones en 1960, para modelar la población del mundo en la segunda mitad del siglo XX. (Suponga que la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población). ¿Cuál es la rapidez de crecimiento relativa? Utilice el modelo para estimar la población mundial en 1993 y, del mismo modo, predecir la población en el año 2020.

SOLUCIÓN Mida el tiempo t en años y haga $t = 0$ en el año 1950. Medimos la población $P(t)$ en millones de personas. Entonces, $P(0) = 2\,560$ y $P(10) = 3\,040$. Ya que estamos suponiendo que $dP/dt = kP$, el teorema 2 proporciona

$$P(t) = P(0)e^{kt} = 2\,560e^{kt}$$

$$P(10) = 2\,560e^{10k} = 3\,040$$

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{3\,040}{2\,560} \approx 0.017185$$

La rapidez de crecimiento relativo es casi 1.7% por cada año, y el modelo es

$$P(t) = 2\,560e^{0.017185t}$$

Se estima que en 1993 la población mundial fue

$$P(43) = 2\,560e^{0.017185(43)} \approx 5\,360 \text{ millones}$$

El modelo predice que en 2020 la población será

$$P(70) = 2\,560e^{0.017185(70)} \approx 8\,524 \text{ millones}$$

La gráfica en la figura 1 muestra que el modelo ya es bastante exacto para finales del siglo XX (los puntos representan la población actual); de esta manera, la estimación para 1993 es completamente confiable, pero la predicción para el 2020 es aventurada.

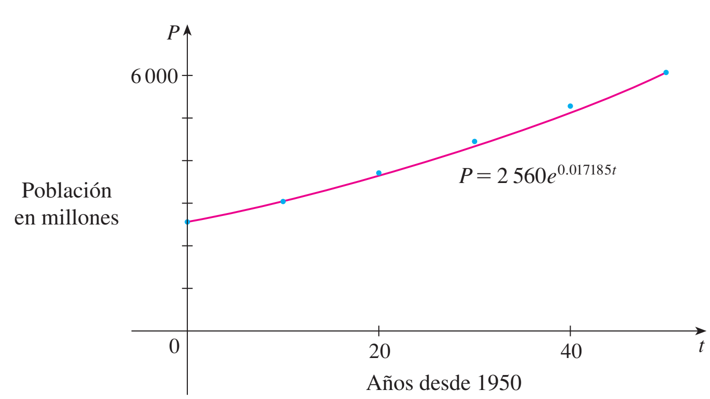


FIGURA 1
Un modelo para el crecimiento de la población mundial en la segunda mitad del siglo XX

Decaimiento radiactivo

Una sustancia radiactiva decae emitiendo radiación de manera espontanea. Si $m(t)$ es la masa que queda a partir de una masa inicial m_0 de la sustancia después del tiempo t, entonces la rapidez de decaimiento relativo

$$-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

es constante. (Ya que dm/dt es negativa, la rapidez de desintegración relativa es positiva.) Se sigue que

$$\frac{dm}{dt} = km$$

donde k es una constante negativa. En otras palabras, las sustancias radiactivas decaen en una cantidad proporcional a la masa restante. Esto significa que podemos utilizar $\boxed{4}$ para demostrar que la masa decae de manera exponencial:

$$m(t) = m_0 e^{tk}$$

Los físicos expresan la rapidez de decaimiento en términos del **tiempo de vida media**: el tiempo que se requiere para que la mitad de cualquier cantidad conocida se desintegre.

V EJEMPLO 2 El tiempo de vida media del radio-226 es 1590 años.

a) Una muestra de radio-226 tiene una masa de 100 mg. Halle una fórmula para la masa de la muestra que permanece después de t años.
b) Halle la masa exacta en miligramos, después de 1000 años.
c) ¿Cuándo se reducirá la masa a 30 mg?

SOLUCIÓN

a) Sea $m(t)$ la masa de radio-226 (en miligramos) que permanece después de t años. Entonces $dm/dt = km$ y $y(0) = 100$, así que $\boxed{2}$ da

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 100e^{kt}$$

A fin de determinar el valor de k, utilizamos el hecho de que $y(1590) = \frac{1}{2}(100)$. Así,

$$100e^{1590k} = 50 \qquad e^{1590k} = \tfrac{1}{2}$$

y

$$1590k = \ln\tfrac{1}{2} = -\ln 2$$

$$k = -\frac{\ln 2}{1590}$$

En consecuencia

$$m(t) = 100e^{-(\ln 2)t/1590}$$

Podemos utilizar el hecho de que $e^{\ln 2} = 2$ para escribir la expresión para $m(t)$ en la forma alternativa

$$m(t) = 100 \times 2^{-t/1590}$$

b) La masa después de 1000 años es

$$m(1000) = 100e^{-(\ln 2)1000/1590} \approx 65\text{ mg}$$

c) Queremos encontrar el valor de t tal que $m(t) = 30$, es decir,

$$100e^{-(\ln 2)t/1590} = 30 \text{ o bien } e^{-(\ln 2)t/1590} = 0.3$$

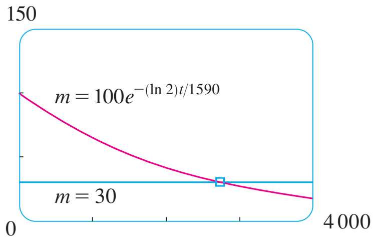


FIGURA 2

Resolviendo esta ecuación para t tomando el logaritmo natural de ambos lados:

$$-\frac{\ln 2}{1590}t = \ln 0.3$$

Por tanto, $$t = -1590\frac{\ln 0.3}{\ln 2} \approx 2762 \text{ años}$$

Para una verificación del ejemplo 2, utilice un dispositivo de graficación para dibujar la gráfica de $m(t)$ de la figura 2 junto con la recta horizontal $m = 30$. Estas curvas se intersecan cuando $t \approx 2800$, y ello está de acuerdo con la respuesta del inciso c).

Ley de enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton establece que la rapidez de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su ambiente, siempre que esta diferencia no sea muy grande. (Esta ley también se aplica al calentamiento.) Si se hace $T(t)$ la temperatura del objeto en el tiempo t y T_s la temperatura del ambiente, entonces podemos formular la ley de enfriamiento de Newton como una ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$$

donde k es una constante. Esta ecuación no es completamente la misma que la ecuación 1, así que hacemos el cambio de variable $y(t) = T(t) - T_s$. Ya que T_s es constante, tenemos que $y'(t) = T'(t)$, así que la ecuación se convierte en

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Por tanto, podemos utilizar $\boxed{2}$ para hallar una expresión para y en la que podemos encontrar T.

EJEMPLO 3 Una botella con una bebida gasificada a temperatura ambiente (72 °F) se coloca dentro de un refrigerador donde la temperatura es 44 °F. Después de media hora la bebida se ha enfriado hasta 61 °F.

a) ¿Cuál es la temperatura de la bebida después de otra media hora?

b) ¿Cuánto tardará la bebida en enfriarse a 50 °F?

SOLUCIÓN

a) Sea $T(t)$ la temperatura de la bebida después de t minutos. La temperatura ambiente es $T_s = 44$ °F, por consiguiente, la ley de enfriamiento de Newton establece que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 44)$$

Si hacemos $y = T - 44$, entonces $y(0) = T(0) - 44 = 72 - 44 = 28$, así que y satisface

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = 28$$

y mediante $\boxed{2}$ tenemos que

$$y(t) = y(0)e^{kt} = 28e^{kt}$$

Tenemos que $T(30) = 61$, así que $y(30) = 61 - 44 = 17$ y

$$28e^{30k} = 17 \qquad e^{30k} = \tfrac{17}{28}$$

Tomando logaritmos, tenemos que

$$k = \frac{\ln\left(\frac{17}{28}\right)}{30} \approx -0.01663$$

Así que

$$y(t) = 28e^{-0.01663t}$$

$$T(t) = 44 + 28e^{-0.01663t}$$

$$T(60) = 44 + 28e^{-0.01663(60)} \approx 54.3$$

Por tanto, después de la otra mitad de la hora, la bebida se ha enfriado a casi 54 °F.
b) Tenemos $T(t) = 50$ cuando

$$44 + 28e^{-0.01663t} = 50$$

$$e^{-0.01663t} = \tfrac{6}{28}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{6}{28}\right)}{-0.01663} \approx 92.6$$

La bebida se enfría a 50 °F después de casi 1 hora 33 minutos.

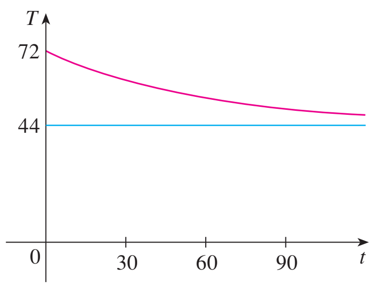


FIGURA 3

Observe que en el ejemplo 3, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty} (44 + 28e^{-0.01663t}) = 44 + 28 \cdot 0 = 44$$

lo cual se esperaba. La gráfica de la función temperatura se muestra en la figura 3.

Interés compuesto continuamente

EJEMPLO 4 Si se invierten 1000 dólares a 6% de interés compuesto anualmente, entonces, después de 1 año la inversión es valorada en $1000(1.06) = 1060$ dólares, después de 2 años su valor es $[1000(1.06)]1.06 = 1123.60$ dólares y después de t años su valor es $1000(1.06)^t$ dólares. En general, si se invierte una cantidad A_0 a una tasa de interés r ($r = 0.06$, en este ejemplo), entonces, después de t años su valor es de $A_0(1 + r)^t$. No obstante, por lo general el interés es compuesto con más frecuencia; es decir, n veces al año. Por tanto, en cada periodo de capitalización, la tasa de interés es r/n y hay nt periodos en t años, así que el valor de la inversión es

$$A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Por ejemplo, una inversión de 1 000 dólares después de 3 años a 6% de interés estarán valorados en

$$\$1000(1.06)^3 = \$1191.02 \quad \text{compuesto al año}$$

$$\$1000(1.03)^6 = \$1194.05 \quad \text{compuesto cada seis meses}$$

$$\$1000(1.015)^{12} = \$1195.62 \quad \text{compuesto cada tres meses}$$

$$\$1000(1.005)^{36} = \$1196.68 \quad \text{compuesto cada mes}$$

$$\$1000\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365 \cdot 3} = \$1197.20 \quad \text{compuesto diario}$$

Podemos ver que el pago del interés se incrementa cuando el número de periodos compuesto (n) se incrementa. Si hacemos que $n \to \infty$, entonces estará componiendo el interés **continuamente**, y el valor de la inversión será

$$\begin{aligned} A(t) &= \lim_{n\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \\ &= \lim_{n\to\infty} A_0\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0\left[\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \qquad \text{(donde } m = n/r\text{)} \end{aligned}$$

Pero el límite en esta expresión es igual al número e (véase la ecuación 3.6.6). Así que, componiendo en forma continua con una tasa de interés r, la cantidad después de t años es

$$A(t) = A_0 e^{rt}$$

Si derivamos esta función, obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = rA_0e^{rt} = rA(t)$$

la cual dice que, componiendo continuamente el interés, la tasa de incremento de una inversión es proporcional a su tamaño.

Regresando al ejemplo de 1000 dólares invertidos por 3 años a 6% de interés anual, el valor de la inversión será

$$A(3) = \$1000e^{(0.06)3} = \$1197.22$$

Observe cómo se acerca esto a la cantidad calculada por componer diariamente 1197.20 dólares, pero es más fácil calcular la cantidad si aplicamos la composición continua.

3.8 Ejercicios

1. Una población de protozoarios se desarrolla con una tasa de crecimiento relativo constante de 0.7944 por miembro por cada día. En el día cero la población consiste de dos miembros. Encuentre el tamaño de la población después de 6 días.

2. Un habitante común del intestino humano es la bacteria *Escherichia coli*. Una célula de esta bacteria en un caldo nutriente se divide en dos células cada 20 minutos. La población inicial de un cultivo es de 60 células
   a) Halle la tasa de crecimiento relativo.
   b) Encuentre una expresión para el número de células después de t horas.
   c) Calcule el número de células después de 8 horas.
   d) Establezca la tasa de crecimiento después de 8 horas.
   e) ¿Cuándo alcanzará la población 20 000 células?

3. Un cultivo de bacterias al inicio contiene 100 células y crece en una cantidad proporcional a su tamaño. Después de 1 hora la población se ha incrementado a 420.
   a) Establezca una expresión para el número de bacterias después de t horas.
   b) Calcule el número de bacterias después de 3 horas.
   c) Encuentre la tasa de crecimiento después de 3 horas.
   d) ¿Cuándo alcanza la población 10 000?

Se requiere calculadora graficadora o computadora   1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

4. Un cultivo de bacterias crece con una tasa de crecimiento relativo constante. Después de 2 horas existen 400 bacterias y después de 6 horas la cuenta es de 25 600.
a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativo? Exprese su respuesta en porcentaje.
b) ¿Cuál fue el tamaño inicial del cultivo?
c) Encuentre una expresión para el número de bacterias después de t horas.
d) Encuentre el número de células después de 4.5 horas.
e) Encuentre la tasa de crecimiento después de 4.5 horas.
f) ¿Cuándo alcanzará la población 50 000?

5. La tabla proporciona estimados de la población mundial, en millones, desde 1750 hasta el 2000.
a) Aplique el modelo exponencial y las cifras de población para 1750 y 1800 para predecir la población mundial en 1900 y en 1950. Compare con las cifras actuales.
b) Utilice el modelo exponencial y las cifras de población para 1850 y 1900 para predecir la población mundial en 1950. Compare con la población actual.
c) Emplee el modelo exponencial y las cifras de población en 1900 y 1950 para predecir la población mundial en el 2000. Compare con la población actual e intente explicar la discrepancia.

Año	Población	Año	Población
1750	790	1900	1 650
1800	980	1950	2 560
1850	1 260	2000	6 080

6. La tabla proporciona la población de India, en millones, para la segunda mitad del siglo XX.

Año	Población
1951	361
1961	439
1971	548
1981	683
1991	846
2001	1 029

a) Aplique el modelo exponencial y las cifras de censo para 1951 y 1961 para predecir la población en el 2001. Compare con las cifras actuales.
b) Utilice el modelo exponencial y las cifras del censo para 1961 y 1981 para predecir la población en el 2001. Compare con la población actual. Después utilice este modelo para predecir la población en los años 2010 y 2020.
c) Grafique ambas funciones exponenciales de los incisos a) y b) junto con una gráfica de la población actual. ¿Alguno de estos modelos es razonable?

7. Los experimentos muestran que si la reacción química

$$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \tfrac{1}{2}O_2$$

se realiza a 45 °C, la velocidad de reacción del pentóxido de dinitrógeno es proporcional a su concentración como sigue:

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0.0005[N_2O_5]$$

(Véase el ejemplo 4 en la sección 3.7.)
a) Halle una expresión para la concentración $[N_2O_5]$ después de t segundos si la concentración inicial es C.
b) ¿Cuánto tiempo le toma a la reacción para reducir la concentración de N_2O_5 a 90% de su valor original?

8. El estroncio-90 tiene un tiempo de vida media de 28 días.
a) Una muestra tiene originalmente una masa de 50 mg. Establezca una fórmula para la masa que queda después de t días.
b) Calcule la masa restante después de 40 días.
c) ¿Cuánto tiempo le toma a la muestra reducir su masa a 2 mg?
d) Bosqueje la gráfica de la función masa.

9. El tiempo de vida media del cesio-137 es de 30 años. Suponga que tenemos una muestra de 100 mg.
a) Establezca la masa que permanece después de t años.
b) ¿Cuánto de la muestra permanece después de 100 años?
c) ¿Después de cuánto tiempo permanece únicamente 1 mg?

10. Una muestra de tritio-3 se desintegró a 94.5% de su cantidad original después de 1 año.
a) ¿Cuál es el tiempo de vida media del tritio-3?
b) ¿Cuánto tardaría en decaer a 20% de su cantidad original?

11. Los científicos pueden establecer la edad de objetos antiguos mediante el método de *datación por radiocarbono*. El bombardeo de la atmósfera superior por los rayos cósmicos convierte al nitrógeno en un isótopo radioactivo de carbono, ^{14}C, con un tiempo de vida media aproximado de 5 730 años. La vegetación absorbe dióxido de carbono a través de la atmósfera, y la vida animal asimila ^{14}C a través de la cadena alimenticia. Cuando una planta o un animal mueren, se detiene la sustitución de su carbono, y la cantidad de ^{14}C inicia su disminución a través de la desintegración radiactiva. En consecuencia el nivel de radiactividad también decae de manera exponencial.

En un fragmento de pergamino se descubrió que había aproximadamente setenta y cuatro por ciento tanta radioactividad ^{14}C como en el material con el que se hace el pergamino que hay sobre la Tierra hoy en día. Estime la edad del pergamino.

12. Una curva pasa a través del punto (0, 5) y tiene la propiedad de que la pendiente de la curva en cualquier punto P es dos veces la coordenada y de P. ¿Cuál es la ecuación de la curva?

13. De un horno se toma un pavo rostizado cuando su temperatura ha alcanzado 185 °F y se coloca sobre una mesa en un espacio donde la temperatura es 75 °F.
a) Si la temperatura del pavo es 150 °F después de media hora, ¿cuál es la temperatura 45 minutos después?
b) ¿Cuándo se enfriará el pavo a 100 °F?

14. En una investigación de asesinato, la temperatura del cadáver fue de 32.5 °C a las 13:30 y de 30.3 °C una hora más tarde. La temperatura corporal normal es 37.0 °C y la temperatura del ambiente era de 20.0 °C. ¿Cuándo tuvo lugar el asesinato?

15. Cuando se saca una bebida fría del refrigerador, su temperatura es 5 °C. Después de 25 minutos dentro de una habitación a 20 °C su temperatura se incrementa a 10 °C.
a) ¿Cuál es la temperatura de la bebida 50 minutos después?
b) ¿Cuándo estará su temperatura a 15 °C?

16. Una taza de café recién preparado tiene 95 °C de temperatura en una habitación a 20 °C. Cuando la temperatura es de 70 °C, se enfría con una rapidez de 1 °C por cada minuto. ¿Cuándo sucede esto?

17. La rapidez de cambio de la presión atmosférica P respecto a la altitud h es proporcional a P, siempre que la temperatura sea constante. A 15 °C la presión es 101.3 kPa al nivel del mar y 87.14 kPa en $h = 1000$ m.
a) ¿Cuál es la presión a una altitud de 3 000 m?
b) ¿Cuál es la presión en la cima del monte McKinly, a una altitud de 6 187 m?

18. a) Si se prestan 1000 dólares a 8% de interés, calcule la cantidad que se debe al final de 3 años si el interés es compuesto: i) anual, ii) trimestral, iii) mensual, iv) semanal, v) diario, vi) por hora y vii) de manera continua.
b) Suponga que se prestan 1000 dólares y el interés es compuesto de manera continua. Si $A(t)$ es la cantidad que se debe después de t años, donde $0 \leqslant t \leqslant 3$, grafique $A(t)$ en una pantalla común, para cada una de las tasas de interés 6, 8 y 10 por ciento.

19. a) Si invierten 3 000 dólares a 5% de interés, calcule el valor de la inversión al final de 5 años si el interés es compuesto i) anual, ii) semestral, iii) mensual, iv) semanal, v) por día y vi) de manera continua.
b) Si $A(t)$ es la cantidad de la inversión al tiempo t para el caso de composición continua, establezca una ecuación diferencial y una condición inicial que satisfaga $A(t)$.

20. a) ¿Cuánto transcurrirá para que una inversión se duplique en valor si la tasa de interés anual es de 6% compuesto de manera continua?
b) ¿Cuál es la tasa de interés anual equivalente?

3.9 Razones relacionadas

Si estamos inflando un globo, tanto su volumen como su radio se incrementan, y sus razones de incremento están relacionadas entre sí. Pero es mucho más fácil medir de modo directo la rapidez de aumento de volumen que la rapidez de crecimiento del radio.

En un problema de razones de cambio relacionadas, la idea es calcular la razón de cambio de una cantidad en términos de la razón de cambio de otra cantidad (la cual podría medirse con más facilidad). El procedimiento es determinar una ecuación que relacione las dos cantidades y aplicar la regla de la cadena para derivar ambos miembros respecto al tiempo.

V EJEMPLO 1 Se infla un globo esférico y su volumen crece a razón de 100 cm³/s. ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 50 cm?

RP De acuerdo con los principios de la resolución de problemas estudiados en la página 75, el primer paso es entender el problema. Ahí está incluida la lectura cuidadosa del problema, la identificación de los datos con que se conoce y lo que se desconoce y la introducción de una notación conveniente.

SOLUCIÓN Empezamos por identificar dos aspectos:

la *información dada:*

la razón de incremento del volumen del globo es 100 cm³/s

y *lo que se desconoce:*

la rapidez de incremento del radio cuando el diámetro es 50 cm

Con objeto de expresar estas cantidades en forma matemática, introduzca una *notación* sugerente:

sea V el volumen del globo y r su radio.

La clave que se debe tener presente es que las razones de cambio son derivadas. En este problema, tanto el volumen como el radio son funciones del tiempo t. La rapidez de incremento del volumen respecto al tiempo es la derivada dV/dt, y la rapidez del incremento del radio es dr/dt. Por tanto, replantee lo que conoce y lo que desconoce de la manera siguiente:

$$\textit{Conocido:} \qquad \frac{dV}{dt} = 100\ \text{cm}^3/\text{s}$$

$$\textit{Desconocido:} \qquad \frac{dr}{dt} \quad \text{cuando } r = 25\ \text{cm}$$

RP La segunda etapa de la resolución de problemas es concebir un plan para relacionar la información conocida con la desconocida.

Con objeto de relacionar dV/dt y dr/dt, primero relacionamos V y r mediante la fórmula del volumen de una esfera:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

A fin de utilizar la información dada, derive respecto a t a ambos miembros de la ecuación. Para derivar el lado derecho necesita aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Ahora resuelva para la cantidad desconocida:

Observe que, aunque dV/dt es constante, dr/dt no lo es.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Si sustituimos $r = 25$ y $dV/dt = 100$ en esta ecuación, obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}$$

El radio del globo se incrementa a razón de $1/(25\pi) \approx 0.0127$ cm/s.

EJEMPLO 2 Una escalera de 10 pies de largo está apoyada contra un muro vertical. Si la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a razón de 1 pie/s, ¿qué tan rápido la parte superior de la escalera resbala hacia abajo por la pared cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro?

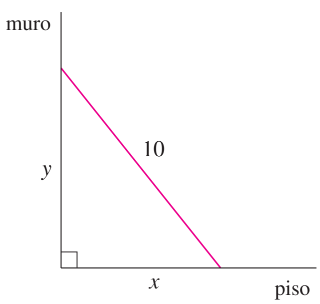


FIGURA 1

SOLUCIÓN Primero dibuje un esquema y ponga los datos como se muestra en la figura 1. Sea x pies la distancia desde la parte inferior de la escalera al muro y y pies la distancia desde la parte superior de la escalera al piso. Observe que x y y son funciones del tiempo t (medido en segundos).

Sabemos que $dx/dt = 1$ pie/s, y se pide determinar dy/dt cuando $x = 6$ pies (véase figura 2). En este problema, la relación entre x y y la define el teorema de pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 100$$

Al derivar con respecto a t ambos miembros aplicando la regla de la cadena tenemos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

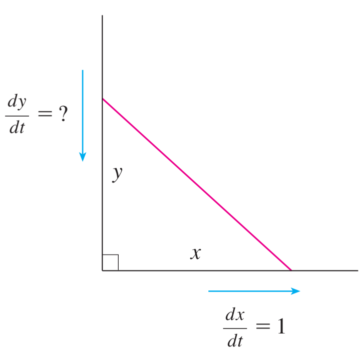


FIGURA 2

y al resolver esta ecuación para determinar la rapidez deseada, obtenemos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = 6$, el teorema de Pitágoras da $y = 8$ y al sustituir estos valores y $dx/dt = 1$, llegamos a

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8}(1) = -\frac{3}{4} \text{ pies/s}$$

El hecho de que dy/dt sea negativa quiere decir que la distancia desde la parte superior de la escalera al suelo está *decreciendo* a razón de $\frac{3}{4}$ pies/s. En otras palabras, la parte superior de la escalera se resbala hacia abajo de la pared a razón de $\frac{3}{4}$ pies/s.

EJEMPLO 3 Un depósito para agua tiene la forma de un cono circular invertido; el radio de la base es de 2 m, y la altura es de 4 m. Si el agua se bombea hacia el depósito a razón de 2 m^3/min, determine la rapidez a la cual el nivel del agua sube cuando el agua tiene 3 m de profundidad.

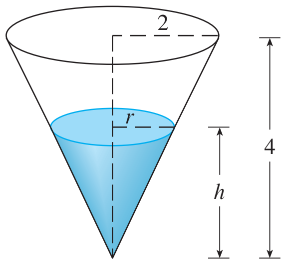


FIGURA 3

SOLUCIÓN Primero elabore un diagrama del cono y denote la información como en la figura 3. Sean V, r y h el volumen del agua, el radio de la superficie circular y la altura en el tiempo t, respectivamente, donde t se mide en minutos.

Sabemos que $dV/dt = 2\,\text{m}^3/\text{min}$, y se nos pide determinar dh/dt cuando h es $3\,\text{m}$. Las cantidades V y h se relacionan mediante la ecuación

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

pero es muy útil expresar V sólo en función de h. Con objeto de eliminar r, recurra a los triángulos semejantes en la figura 3 para escribir

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

y la expresión para V se vuelve

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Ahora podemos derivar cada miembro respecto a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

de modo que
$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Al sustituir $h = 3\,\text{m}$ y $dV/dt = 2\,\text{m}^3/\text{min}$ tenemos que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2}\cdot 2 = \frac{8}{9\pi}$$

El nivel del agua está subiendo a razón de $8/(9\pi) \approx 0.28\,\text{m/min}$.

RP Reflexione: ¿qué ha aprendido de los ejemplos 1 a 3 que lo ayude a resolver problemas futuros?

Estrategia de resolución de problemas Es útil recordar algunos de los principios para resolver problemas que se encuentran en la página 75 y adaptarlos a las razones de cambio relacionadas, luego de lo que aprendió en los ejemplos 1 a 3:

1. Lea con cuidado el problema.
2. Si es posible, dibuje un diagrama.
3. Introduzca la notación. Asigne símbolos a todas las cantidades que están en función del tiempo.
4. Exprese la información dada y la razón requerida en términos de derivadas.
5. Escriba una ecuación que relacione las diferentes cantidades del problema. Si es necesario, utilice las propiedades geométricas de la situación para eliminar una de las variables por sustitución, como en el ejemplo 3.
6. Utilice la regla de la cadena para derivar respecto a t ambos miembros de la ecuación.
7. Sustituya la información dada en la ecuación resultante y resuelva para la razón de cambio desconocida.

ADVERTENCIA: un error común es la sustitución de la información numérica conocida (por cantidades que varían con el tiempo) muy pronto. La sustitución se efectúa sólo *después* de la derivación. (El paso 7 va después del paso 6.) Es decir, en el ejemplo 3 se tratan valores generales de h hasta que finalmente sustituye $h \neq 3$ en la última etapa. (Si hubiera sustituido $h \neq 3$ desde antes, habría obtenido $dV/dt = 0$, lo cual es evidentemente erróneo.)

Los ejemplos siguientes son ilustraciones adicionales de la estrategia.

V EJEMPLO 4 El automóvil A se dirige hacia el oeste a 50 millas/h y el automóvil B viaja hacia el norte a 60 millas/h. Ambos se dirigen hacia la intersección de los dos caminos. ¿Con qué rapidez se aproximan los vehículos entre sí cuando el automóvil A está a 0.3 millas y el automóvil B está a 0.4 millas de la intersección?

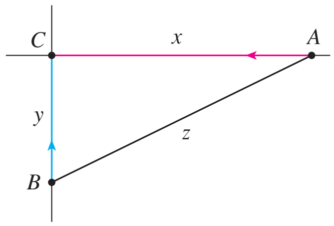


FIGURA 4

SOLUCIÓN Dibuje la figura 4, donde C es la intersección de los caminos. En un tiempo dado t, sea x la distancia entre el automóvil A y C, sea y la distancia del automóvil B a C y sea z la distancia entre los vehículos, donde x, y y z se miden en millas.

Sabemos que $dx/dt = -50$ millas/h y $dy/dt = -60$ millas/h. Las derivadas son negativas porque x y y son decrecientes. Se pide calcular dz/dt. La ecuación que relaciona x, y y z la proporciona el teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Al derivar ambos lados respecto a t obtenemos

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Cuando $x = 0.3$ millas y $y = 0.4$ millas, el teorema de Pitágoras da $z = 0.5$ millas, de modo que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.5}[0.3(-50) + 0.4(-60)]$$

$$= -78 \text{ mi/h}$$

Los vehículos se aproximan entre sí a razón de 78 millas/h.

V EJEMPLO 5 Un hombre camina a lo largo de una trayectoria recta a una rapidez de 4 pies/s. Un faro está situado sobre el nivel de la tierra a 20 pies de la trayectoria y se mantiene enfocado hacia el hombre. ¿Con qué rapidez el faro gira cuando el hombre está a 15 pies del punto sobre la trayectoria más cercana a la fuente de luz?

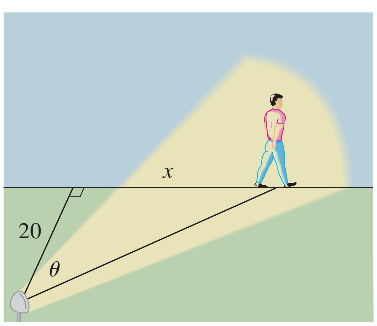


FIGURA 5

SOLUCIÓN Trace la figura 5 y haga que x sea la distancia desde el hombre hasta el punto sobre la trayectoria que esté más cercana al faro. Sea θ el ángulo entre el rayo desde el faro y la perpendicular a la trayectoria.

Sabemos que $dx/dt = 4$ pies/s, y se pide calcular $d\theta/dt$ cuando $x = 15$. La ecuación que relaciona x y θ puede escribirse a partir de la figura 5:

$$\frac{x}{20} = \tan\theta \qquad x = 20\tan\theta$$

Al derivar respecto a t ambos miembros, obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 20\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt},$$

por lo que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\,\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{20}\cos^2\theta\,(4) = \frac{1}{5}\cos^2\theta$$

Cuando $x = 15$, la longitud del rayo es 25, así que $\cos\theta = \frac{4}{5}$ y

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0.128$$

El faro gira con una rapidez de 0.128 rad/s.

3.9 Ejercicios

1. Si V es el volumen de un cubo con arista x, y el cubo se expande a medida que transcurre el tiempo, exprese dV/dt en términos de dx/dt.

2. a) Si A es el área de un círculo cuyo radio es r, y el círculo se expande a medida que pasa el tiempo, exprese dA/dt en términos de dr/dt.
b) Suponga que se derrama aceite de un depósito agrietado y que se extiende siguiendo una circular. Si el radio del derrame de aceite se incrementa con una rapidez constante de 1 m/s, ¿qué tan rápido se incrementa el área del derrame cuando el radio es de 30 m?

3. Cada lado de un cuadrado se incrementa a razón de 6 cm/s. ¿Con qué rapidez se incrementa el área del cuadrado cuando su área es de 16 cm^2?

4. El largo de un rectángulo se incrementa a razón de 8 cm/s y el ancho a razón de 3 cm/s. Cuando el largo es 20 cm y el ancho es 10 cm, ¿qué tan rápido se incrementa el área del rectángulo?

5. Un tanque cilíndrico con 5 m de radio se está llenando con agua a razón de 3 cm^3/min. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura de agua?

6. El radio de una esfera se incrementa a razón de 4 mm/s. ¿Qué tan rápido se incrementa el volumen cuando el diámetro es de 80 mm?

7. Suponga que $y = \sqrt{2x + 1}$, donde x y y son funciones de t.
a) Si $dx/dt = 3$, encuentre dy/dt cuando $x = 4$.
b) Si $dy/dt = 5$, encuentre dx/dt cuando $x = 12$.

8. Suponga que $4x^2 + 9y^2 = 36$, donde x y y son funciones de t.
a) Si $dy/dt = \frac{1}{3}$, encuentre dx/dt cuando $x = 2$ y $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.
b) Si $dx/dt = 3$, encuentre dy/dt cuando $x = -2$ y $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

9. Si $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $dx/dt = 5$ y $dy/dt = 4$, encuentre dz/dt cuando $(x, y, z) = (2, 2, 1)$.

10. Una partícula se desplaza a lo largo de la hipérbola $xy = 8$. Cuando alcanza el punto $(4, 2)$, la coordenada y se incrementa con una rapidez de 3 cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la coordenada x del punto en movimiento en ese instante?

11-14
a) ¿Qué cantidades se conocen en el problema?
b) ¿Qué cantidades se desconocen?
c) Trace un diagrama de la situación para cualquier tiempo t.
d) Plantee una ecuación que relacione las cantidades.
e) Termine de resolver el problema.

11. Un avión que vuela horizontalmente a una altitud de 1 milla y a una rapidez de 500 millas/h pasa directamente sobre una estación de radar. Calcule la rapidez con la que se incrementa la distancia desde el avión a la estación cuando éste se encuentra a 2 millas de la estación.

12. Si una bola de nieve se derrite de tal modo que el área superficial disminuye a razón de 1 cm^2/min, calcule la rapidez con la que disminuye el diámetro cuando éste es 10 cm.

13. Una lámpara está instalada en lo alto de un poste de 15 pies de altura. Un hombre de 6 pies de estatura se aleja caminando desde el poste con una rapidez de 5 pies/s a lo largo de una trayectoria rectilínea. ¿Qué tan rápido se desplaza la punta de su sombra cuando el hombre está a 40 pies del poste?

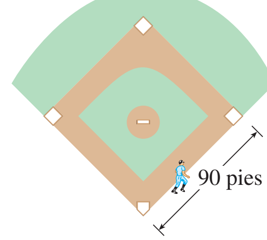
14. A mediodía, un barco A está a 150 km al oeste del barco B. El barco A navega hacia el este a 35 km/h y el barco B navega hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 16:00?

15. Dos automóviles parten desde el mismo punto. Uno se dirige hacia el sur a 60 millas/h y el otro hacia el oeste a 25 millas/h. ¿Con qué rapidez se incrementa la distancia entre los automóviles dos horas después?

16. Una foco sobre el piso ilumina una pared a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de estatura camina desde el foco hacia el edificio a una rapidez de 1.6 m/s, ¿qué tan rápido disminuye la longitud de su sombra sobre la pared cuando está a 4 m del edificio?

17. Un hombre empieza a caminar hacia el norte a 4 pies/s desde un punto P. Cinco minutos más tarde, una mujer empieza a caminar hacia el sur a 5 pies/s desde un punto a 500 pies directo al este de P. ¿Con qué rapidez se están separando las personas 15 min después de que la mujer empezó a caminar?

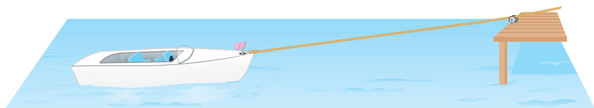
18. Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 pies por lado. Un bateador golpea la pelota y corre hacia la primera base con una rapidez de 24 pies/s.
a) ¿Con qué rapidez decrece su distancia desde la segunda base cuando está a medio camino de la primera base?
b) ¿Con qué rapidez se incrementa su distancia desde la tercera base en el mismo momento?



19. La altura de un triángulo se incrementa a razón de 1 cm/min, mientras que el área del triángulo aumenta a razón de

2 cm²/min. ¿Con qué rapidez cambia la base del triángulo cuando la altura es de 10 cm y el área es de 100 cm²?

20. Un bote se jala hacia un muelle mediante una soga unida a la proa y que pasa por una polea que se encuentra instalada en el muelle a 1 m más arriba que la proa del bote. Si la soga se jala a una rapidez de 1 m/s, ¿qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando éste se encuentra a 8 m de éste?



21. A mediodía, el barco A está a 100 km al oeste del barco B. El barco A se dirige hacia el sur a 35 km/h, y el barco B va hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 16:00?

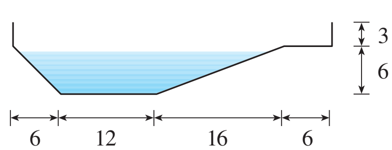
22. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $y = 2\operatorname{sen}(\pi x/2)$. Cuando la partícula pasa por el punto $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, su coordenada x se incrementa a razón de $\sqrt{10}$ cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la distancia desde la partícula al origen en este instante?

23. El agua sale de un depósito en forma de cono invertido a razón de 10 000 cm³/min al mismo tiempo que se bombea agua al depósito a razón constante. El depósito mide 6 m de altura, y el diámetro en la parte superior es de 4 m. Si el nivel del agua se eleva a razón de 20 cm/min cuando la altura del agua es de 2 m, calcule la razón a la cual el agua está siendo bombeada hacia el tanque.

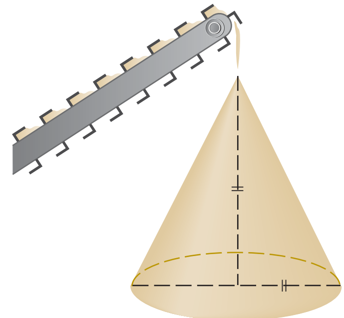
24. Se tiene un canal de 10 pies de largo con extremos en forma de triángulos isósceles con 3 pies de ancho en la parte superior y con una altura de 1 pie. Si el canal se está llenando de agua a razón de 12 pies³/min, ¿qué tan rápido está aumentando el nivel del agua cuando ésta se encuentra a 6 pulgadas de profundidad?

25. Un canal de agua tiene 10 m de longitud y una sección transversal en forma de un trapecio isósceles con 30 cm de ancho en la parte inferior, 80 cm de ancho en la parte superior, y una altura de 50 cm. Si el canal se llena con agua a razón de 0.2 m³/min, ¿qué tan rápido está aumentando el nivel del agua cuando ésta se encuentra a 30 cm de profundidad?

26. Una piscina mide 20 pies de ancho, 40 pies de largo, 3 pies de profundidad en el extremo de poco fondo y 9 pies de profundidad en la parte más honda. En la figura se muestra una sección transversal de la piscina. Si ésta se está llenando a razón de 0.8 pies³/min, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando tiene 5 pies en el punto más hondo?



27. Se descarga grava por medio de una banda transportadora a razón de 30 pies³/min, y el grosor de granos es tal que forma una pila en forma de cono cuyo diámetro y altura son siempre iguales. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura de la pila cuando ésta mide 10 pies de alto?



28. Un papalote que está a 100 pies por arriba de la superficie de la tierra se desplaza en forma horizontal a una rapidez de 8 pies/s. ¿Con qué rapidez disminuye el ángulo entre la cuerda y la horizontal cuando se han soltado 200 pies de cuerda?

29. Dos lados de un triángulo miden 4 m y 5 m, y el ángulo entre ellos se incrementa a razón de 0.06 rad/s. Calcule la razón a la cual el área del triángulo se incrementa cuando el ángulo entre los lados de longitud constante es $\pi/3$.

30. ¿Con qué rapidez cambia el ángulo entre el muro y la escalera en el ejemplo 2, cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro?

31. La parte superior de una escalera se desliza por una pared a una rapidez vertical de 0.15 m/s. En el momento en que la parte inferior de la escalera está a 3 m de la pared, se desliza alejándose de ésta con una rapidez de 0.2 m/s. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

32. Un grifo está llenando un recipiente hemisférico de 60 cm de diámetro, con agua a razón de 2 L/min. Encuentre la rapidez a la que está aumentando el agua en el recipiente cuando está medio lleno. [Utilice los siguientes hechos: 1 L = 1000 cm³. El volumen de la parte de una esfera con radio r desde la parte inferior a una altura h es $V = \pi\left(rh^2 - \frac{1}{3}h^3\right)$, como lo demostraremos en el capítulo 6].

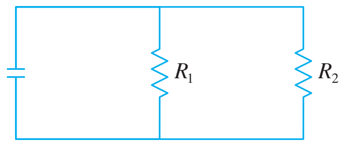
33. La ley de Boyle establece que, cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $PV = C$, donde C es una constante. Suponga que en un cierto instante el volumen es de 600 cm³, la presión es de 150 kPa y que la presión se incrementa a razón de 20 kPa/min ¿Con qué rapidez disminuye el volumen en ese instante?

34. Cuando el aire se expande en forma adiabática, (no gana ni pierde calor), su presión P y su volumen V se relacionan mediante la ecuación $PV^{1.4} = C$, donde C es una constante. Suponga que en un cierto instante el volumen es 400 cm³ y que la presión es 80 kPa y está disminuyendo a razón de 10 kPa/min. ¿Con qué rapidez se incrementa el volumen en este instante?

35. Si se conectan dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, como se muestra en la figura, entonces la resistencia total R, medida en ohms (Ω) está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

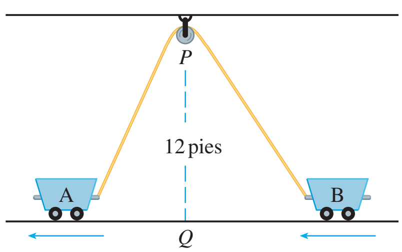
Si R_1 y R_2 se incrementan a razón de 0.3 Ω/s y 0.2 Ω/s, respectivamente, ¿qué tan rápido cambia R cuando $R_1 = 80\,\Omega$ y $R_2 = 100\,\Omega$?



36. El peso B del cerebro en función del peso del cuerpo W en los peces ha sido modelado mediante la función potencia $B = 0.007\,W^{2/3}$, donde B y W se dan en gramos. Un modelo para el peso corporal en función de la longitud del cuerpo L (medido en centímetros), es $W = 0.12\,L^{2.53}$. Si en 10 millones de años la longitud promedio de ciertas especies de peces evolucionaron de 15 a 20 cm a rapidez constante, ¿qué tan rápido creció el cerebro de estas especies cuando la longitud promedio era de 18 cm?

37. Los lados de un triángulo tienen longitudes de 12 y 15 m. El ángulo entre ellos se incrementa a razón de 2°/min. ¿Qué tan rápido se incrementa la longitud del tercer lado cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de 60°?

38. Dos carros A y B están conectados por medio de una soga de 39 pies de longitud que pasa por una polea P (véase la figura). El punto Q está en el suelo a 12 pies directamente abajo de P y entre los carros. El carro A es jalado a partir de Q a una rapidez de 2 pies/s. ¿Qué tan rápido se mueve el carro B hacia Q en el instante en que el carro A está a 5 pies de Q?



39. Una cámara de televisión se instala a 4 000 pies de la base de una plataforma de lanzamiento de cohetes. El ángulo de elevación de la cámara tiene que cambiar con la rapidez correcta con el objeto de tener siempre a la vista al cohete. Asimismo, el mecanismo de enfoque de la cámara tiene que tomar en cuenta la distancia creciente de la cámara al cohete que se eleva. Suponga que el cohete se eleva verticalmente y que su rapidez es 600 pies/s cuando se ha elevado 3 000 pies.

a) ¿Qué tan rápido cambia la distancia de la cámara de televisión al cohete en ese momento?

b) Si la cámara de televisión se mantiene dirigida hacia el cohete, ¿qué tan rápido cambia el ángulo de elevación de la cámara en ese momento?

40. Un faro se localiza en una pequeña isla a 3 km de distancia del punto P más cercano que se encuentra en una playa recta, y su luz da cuatro revoluciones por minuto. ¿Qué tan rápido se mueve el haz de luz a lo largo de la playa cuando está a 1 km de P?

41. Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 5 km y pasa directamente sobre un telescopio de seguimiento en la superficie de la Tierra. Cuando el ángulo de elevación es $\pi/3$, este ángulo está disminuyendo a razón de $\pi/6$ rad/min. ¿Con qué rapidez está viajando el avión en ese instante?

42. Una rueda de la fortuna de 10 m de radio está girando a razón de una revolución cada 2 min. ¿Qué tan rápido se está elevando un pasajero cuando su silla está a 16 m del nivel del suelo?

43. Un avión que vuela con rapidez constante de 300 km/h pasa sobre una estación terrestre de radar a una altitud de 1 km y se eleva con un ángulo de 30°. ¿Con qué rapidez se incrementa la distancia del avión a la estación de radar un minuto más tarde?

44. Dos personas parten del mismo punto. Una camina hacia el este a 3 mi/h, y la otra camina hacia el noreste a 2 mi/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las personas después de 15 minutos?

45. Un individuo corre por una pista circular de 100 m de radio a una rapidez constante de 7 m/s. Un amigo del corredor está parado a una distancia de 200 m del centro de la pista. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los amigos cuando la distancia entre ellos es de 200 m?

46. La manecilla de los minutos de un reloj mide 8 mm de largo y la manecilla de las horas mide 4 mm de largo. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las puntas de las manecillas cuando es 13:00?

3.10 Aproximaciones lineales y diferenciales

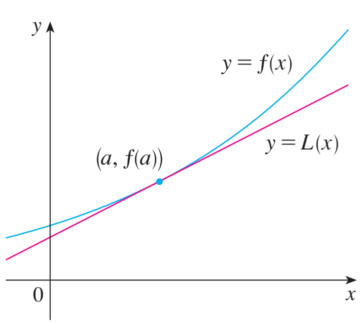


FIGURA 1

Hemos visto que una curva se encuentra muy cerca de su recta tangente cerca del punto de tangencia. De hecho, al realizar un acercamiento hacia el punto en la gráfica de una función derivable, observamos que la gráfica se parece cada vez más a su recta tangente. (Véase la figura 2 en la sección 2.7.) Esta observación es la base de un método para hallar valores aproximados de funciones.

La idea es que puede resultar fácil calcular un valor $f(a)$ de una función, pero difícil (si no es que imposible) calcular valores cercanos de f. Por tanto, recurrimos a los valores calculados fácilmente de la función lineal L cuya gráfica es la recta tangente de f en $(a, f(a))$. (Véase la figura 1.)

En otras palabras, utilizamos la recta tangente en $(a, f(a))$ como una aproximación a la curva $y = f(x)$ cuando x está cerca de a. Una ecuación para la recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación

$$\boxed{1} \qquad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

se conoce con el nombre de **aproximación lineal** o **aproximación de la recta tangente** de f en a. A la función lineal cuya gráfica es esta recta tangente, es decir,

$$\boxed{2} \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

se le llama **linealización** de f en a.

V EJEMPLO 1 Encuentre la linealización de la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ en $a = 1$ y úsela para obtener una aproximación de los números $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$. ¿Estas aproximaciones son sobreestimaciones o subestimaciones?

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x + 3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$$

y tenemos que $f(1) = 2$ y $f'(1) = \frac{1}{4}$. Si ponemos estos valores en la ecuación 2, la linealización es

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

La aproximación lineal correspondiente $\boxed{1}$ es

$$\sqrt{x + 3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \qquad \text{(cuando } x \text{ está cerca de 1)}$$

En particular, tenemos que

$$\sqrt{3.98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0.98}{4} = 1.995 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4.05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1.05}{4} = 2.0125$$

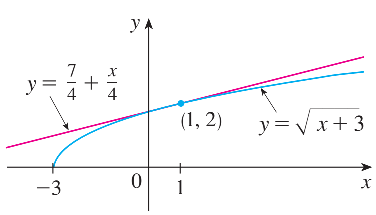


FIGURA 2

En la figura 2 se ilustra la aproximación lineal. En efecto, la recta tangente es una buena aproximación a la función dada cuando x esta cerca de 1. También vemos que las aproximaciones son sobreestimaciones porque la recta tangente se encuentra por arriba de la curva.

Por supuesto, una calculadora podría dar aproximaciones para $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$, pero la aproximación lineal da una aproximación *sobre todo un intervalo*.

En la tabla siguiente se comparan las estimaciones de la aproximación lineal del ejemplo 1 con los valores reales. Observe en esta tabla, y también en la figura 2, que la aproximación con la recta tangente da buenas estimaciones cuando x está cerca de 1, pero la precisión de la aproximación disminuye cuando x está más lejos de 1.

	x	De $L(x)$	Valor real
$\sqrt{3.9}$	0.9	1.975	1.97484176 . . .
$\sqrt{3.98}$	0.98	1.995	1.99499373 . . .
$\sqrt{4}$	1	2	2.00000000 . . .
$\sqrt{4.05}$	1.05	2.0125	2.01246117 . . .
$\sqrt{4.1}$	1.1	2.025	2.02484567 . . .
$\sqrt{5}$	2	2.25	2.23606797 . . .
$\sqrt{6}$	3	2.5	2.44948974 . . .

¿Qué tan buena es la aproximación obtenida en el ejemplo 1? El ejemplo siguiente muestra que usando una calculadora graficadora o una computadora es posible determinar un intervalo a lo largo del cual una aproximación lineal proporciona una precisión específica.

EJEMPLO 2 ¿Para cuáles valores de x la aproximación lineal

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

es exacta con una diferencia menor que 0.5? ¿Qué puede decir de una exactitud con una diferencia menor que 0.1?

SOLUCIÓN Una exactitud con una diferencia menor que 0.5 significa que las funciones deben diferir en menos de 0.5:

$$\left| \sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4} \right) \right| < 0.5$$

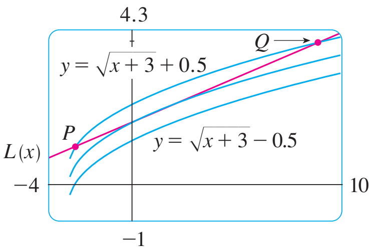


FIGURA 3

De modo equivalente, podríamos escribir

$$\sqrt{x+3} - 0.5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0.5$$

Esto expresa que la aproximación lineal debe encontrarse entre las curvas que se obtienen al desplazar la curva $y = \sqrt{x+3}$ hacia arriba y hacia abajo en una cantidad de 0.5. En la figura 3 se muestra la recta tangente $y = (7 + x)/4$ que interseca la curva superior $y = \sqrt{x+3} + 0.5$ en P y en Q. Al hacer un acercamiento y usar el cursor, en la computadora estimamos que la coordenada x de P se aproxima a -2.66, y la coordenada x de Q es más o menos 8.66. Así, con base en la gráfica, la aproximación

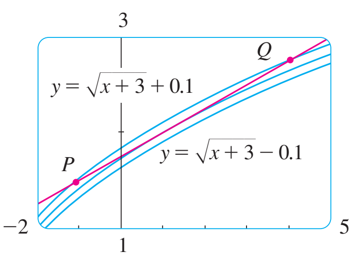


FIGURA 4

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

es exacta con una diferencia menor que 0.5 cuando $-2.6 < x < 8.6$. (Se ha redondeado para quedar dentro del margen de seguridad).

De manera análoga, en la figura 4 vemos que la aproximación es exacta con una diferencia menor que 0.1 cuando $-1.1 < x < 3.9$.

Aplicaciones en la física

Las aproximaciones lineales se usan con frecuencia en la física. Al analizar las consecuencias de una ecuación, a veces un físico necesita simplificar una función sustituyéndola con una aproximación lineal. Por ejemplo, al derivar una fórmula para el periodo de un péndulo, los libros de texto de física obtienen la expresión $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para la aceleración tangencial, y luego sustituyen sen θ por θ haciendo la observación de que sen θ está muy cerca de θ si éste no es demasiado grande. [Véase, por ejemplo, *Physics: Calculus*, 2a. edición, por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000), p. 431.] Podemos comprobar que la linealización de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = 0$ es $L(x) = x$, de manera que la aproximación lineal en 0 es

$$\operatorname{sen} x \approx x$$

(véase el ejercicio 42). Así que, en efecto, la derivación de la fórmula para el periodo de un péndulo utiliza la aproximación a la recta tangente para la función seno.

Otro ejemplo se presenta en la teoría de la óptica, donde los rayos de luz que llegan con ángulos bajos en relación con el eje óptico se llaman *rayos paraxiales*. En la óptica paraxial (o gaussiana) tanto sen θ como cos θ se sustituyen con sus linealizaciones. En otras palabras, las aproximaciones lineales

$$\operatorname{sen} \theta \approx \theta \qquad \text{y} \qquad \cos \theta \approx 1$$

se utilizan porque θ está cerca de 0. Los resultados de los cálculos que se efectúan con estas aproximaciones se convierten en la herramienta teórica básica que se utiliza para diseñar lentes. [Véase *Optics*, 4a. edición, por Eugene Hecht (San Francisco: Addison Wesley, 2002), p. 154.]

En la sección 11.11 aparecen varias aplicaciones de la idea de aproximación lineal a la física.

Diferenciales

Las ideas detrás de las aproximaciones lineales se formulan en ocasiones en la terminología y la notación de *diferenciales*. Si $y = f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la **diferencial** dx es una variable independiente; esto es, dx es cualquier número real. La **diferencial** dy es entonces definida en términos de dx mediante la ecuación

Si $dx \neq 0$, podemos dividir ambos lados de la ecuación 3 entre dx para obtener

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Antes hemos visto ecuaciones similares, pero ahora el lado izquierdo puede interpretarse en forma genuina como una razón de diferenciales.

3 $$dy = f'(x)dx$$

Así que dy es una variable dependiente: depende de los valores de x y dx. Si a dx se le da un valor específico, y x se considera como algún número específico en el dominio de f, entonces se determina el valor numérico de dy.

En la figura 5 se muestra el significado geométrico de los diferenciales. Sean $P(x, f(x))$ y $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ puntos sobre la gráfica de f, y sea $dx = \Delta x$. El cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

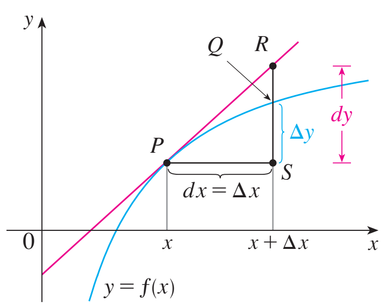


FIGURA 5

La pendiente de la recta tangente PR es la derivada $f'(x)$. Por consiguiente, la distancia dirigida de S a R es $f'(x)dx = dy$. Por tanto, dy representa la cantidad que la recta tangente se levanta o cae (el cambio en la linealización), mientras que Δy representa la cantidad que la curva $y = f(x)$ se levanta o cae cuando x cambia en una cantidad dx.

EJEMPLO 3 Compare los valores de Δy y dy si $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ y x cambia a) de 2 a 2.05 y b) de 2 a 2.01.

SOLUCIÓN

a) Tenemos que

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$$

$$f(2.05) = (2.05)^3 + (2.05)^2 - 2(2.05) + 1 = 9.717625$$

$$\Delta y = f(2.05) - f(2) = 0.717625$$

En general, $$dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)\,dx$$

Cuando $x = 2$ y $dx = \Delta x = 0.05$, esto se transforma en

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.05 = 0.7$$

La figura 6 muestra la función del ejemplo 3 y una comparación de dy y Δy cuando $a = 2$. El rectángulo de vista es $[1.8, 2.5]$ por $[6, 18]$.

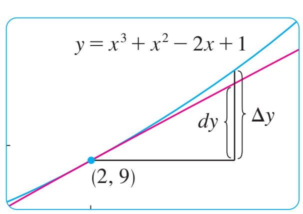


FIGURA 6

b) $$f(2.01) = (2.01)^3 + (2.01)^2 - 2(2.01) + 1 = 9.140701$$

$$\Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.140701$$

Cuando $dx = \Delta x = 0.01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]\,0.01 = 0.14$$

Observe que, en el ejemplo 3, la aproximación $\Delta y \approx dy$ mejora a medida que Δx se hace más pequeña. Observe también que es más fácil calcular dy que Δy. En el caso de funciones más complicadas, sería imposible calcular exactamente Δy. En estos casos, la aproximación mediante diferenciales es especialmente útil.

En la notación de diferenciales, la aproximación lineal $\boxed{1}$ puede escribirse como

$$f(a + dx) \approx f(\mathrm{a}) + dy$$

Por ejemplo, para la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ del ejemplo 1, tenemos que

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Si $a = 1$ y $dx = \Delta x = 0.05$, entonces

$$dy = \frac{0.05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0.0125$$

y $$\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx f(1) + dy = 2.0125$$

igual a lo que halló en el ejemplo 1.

Nuestro ejemplo final ilustra el uso de diferenciales al estimar los errores que ocurren debido a mediciones aproximadas.

V EJEMPLO 4 Se midió el radio de una esfera y se encontró que es 21 cm con un posible error en la medición de cuanto mucho 0.05 cm. ¿Cuál es el error máximo al usar este valor del radio para calcular el volumen de la esfera?

SOLUCIÓN Si el radio de la esfera es r, entonces el volumen es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si el error en el valor medido de r se denota por medio de $dr = \Delta r$, entonces el error correspondiente en el valor calculado de V es ΔV, el cual puede aproximarse mediante el diferencial

$$dV = 4\pi r^2\,dr$$

Cuando $r = 21$ y $dr = 0.05$, esto se convierte en

$$dV = 4\pi(21)^2\,0.05 \approx 277$$

El error máximo en el volumen calculado es de alrededor de 277 cm^3.

NOTA Si bien el posible error en el ejemplo 4 puede parecer bastante grande, el **error relativo** ofrece un mejor panorama del error; se calcula dividiendo el error entre el volumen total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\,dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

Por esto, el error relativo en el volumen es aproximadamente tres veces el error relativo en el radio. En el ejemplo 4, el error relativo en el radio es $dr/r = 0.05/21 \approx 0.0024$ y produce un error relativo de alrededor de 0.007 en el volumen. Los errores pueden expresarse asimismo como **errores de porcentaje** de 0.24% en el radio y 0.7% en el volumen.

3.10 Ejercicios

1-4 Encuentre la linealización $L(x)$ de cada una de las siguientes funciones en $x = a$.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2, \quad a = -1$

2. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/6$

3. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$

4. $f(x) = x^{3/4}, \quad a = 16$

5. Encuentre la aproximación lineal a la función $f(x) = \sqrt{1 - x}$ en $a = 0$ y úsela para hacer una aproximación a los números $\sqrt{0.9}$ y $\sqrt{0.99}$. Ilustre graficando f y la recta tangente.

6. Encuentre la aproximación lineal de la función $g(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ en $a = 0$ y utilícela para hacer una aproximación a los números $\sqrt[3]{0.95}$ y $\sqrt[3]{1.1}$. Ilustre graficando g y la recta tangente.

7-10 Compruebe la aproximación lineal dada en $a = 0$. A continuación determine los valores de x para los cuales la aproximación lineal es exacta hasta un valor menor que 0.1.

7. $\ln(1 + x) \approx x$

8. $(1 + x)^{-3} \approx 1 - 3x$

9. $\sqrt[4]{1 + 2x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

10. $e^x \cos x \approx 1 + x$

11-14 Obtenga la derivada de cada una de las siguientes funciones.

11. a) $y = x^2 \operatorname{sen} 2x$ b) $y = \ln\sqrt{1 + t^2}$

12. a) $y = s/(1 + 2s)$ b) $y = e^{-u}\cos u$

13. a) $y = \tan\sqrt{t}$ b) $y = \dfrac{1 - v^2}{1 + v^2}$

14. a) $y = e^{\tan \pi t}$ b) $y = \sqrt{1 + \ln z}$

15-18 a) Encuentre la diferencial dy y b) evalúe dy para los valores dados de x y dx en cada una de las siguientes funciones.

15. $y = e^{x/10}, \quad x = 0, \quad dx = 0.1$

16. $y = \cos \pi x, \quad x = \frac{1}{3}, \quad dx = -0.02$

17. $y = \sqrt{3 + x^2}, \quad x = 1, \quad dx = -0.1$

18. $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}, \quad x = 2, \quad dx = 0.05$

19-22 Calcule Δy y dy para los valores dados de x y $dx = \Delta x$. Luego elabore un diagrama como el de la figura 5 en el que se muestren los segmentos de recta con longitudes dx, dy y Δy.

19. $y = 2x - x^2, \quad x = 2, \quad \Delta x = -0.4$

20. $y = \sqrt{x}, \quad x = 1, \quad \Delta x = 1$

21. $y = 2/x, \quad x = 4, \quad \Delta x = 1$

22. $y = e^x, \quad x = 0, \quad \Delta x = 0.5$

23-28 Utilice la aproximación lineal (o diferenciales) para estimar cada uno de los siguientes números dados.

23. $(1.999)^4$

24. $e^{-0.015}$

25. $\sqrt[3]{1\,001}$

26. $1/4.002$

27. $\tan 44°$

28. $\sqrt{99.8}$

29-31 Explique, en términos de aproximaciones lineales o diferenciales, por qué es razonable la aproximación de cada uno de los siguientes números.

29. $\sec 0.08 \approx 1$

30. $(1.01)^6 \approx 1.06$

31. $\ln 1.05 \approx 0.05$

32. Sean $\quad f(x) = (x - 1)^2 \quad g(x) = e^{-2x}$

y $\quad h(x) = 1 + \ln(1 - 2x)$

a) Encuentre la linealización de f, g y h en $a = 0$. ¿Qué observa? ¿Cómo explica lo que sucedió?

b) Grafique f, g y h y su aproximación lineal. ¿Para cuál función es mejor la aproximación lineal? ¿Para cuál es peor? Explique.

33. Se encontró que la arista de un cubo es 30 cm, con un posible error en la medición de 0.1 cm. Utilice diferenciales para estimar el error máximo posible, el error relativo y el porcentaje de error al calcular a) el volumen del cubo y b) el área superficial del cubo.

34. Se da el radio de un disco circular como de 24 cm, con un error máximo en la medición de 0.2 cm.

a) Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del disco.

b) ¿Cuál es el error relativo? ¿Cuál es el porcentaje de error?

35. La circunferencia de una esfera se midió como 84 cm, con un posible error de 0.5 cm.

a) Use diferenciales para estimar el error máximo en el área superficial calculada. ¿Cuál es el error relativo?

b) Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el volumen calculado. ¿Cuál es el error relativo?

36. Utilice diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de 0.05 cm de espesor a un domo hemisférico que tiene un diámetro de 50 m.

37. a) Utilice diferenciales para determinar una fórmula para el volumen aproximado de un cascarón cilíndrico de altura h, radio interno r y espesor Δr.

b) ¿Cuál es el error que hay al utilizar la fórmula del inciso a)?

38. Se sabe que un lado de un triángulo rectángulo es de 20 cm de longitud, y se mide el ángulo opuesto como 30°, con un posible error de $\pm 1°$.

a) Utilice diferenciales para estimar el error al calcular la longitud de la hipotenusa.

b) ¿Cuál es el porcentaje de error?

Se requiere calculadora graficadora o computadora

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

39. Si una corriente I pasa a través de un resistor con resistencia R, la ley de Ohm establece que la caída de voltaje es $V = RI$. Si V es constante y R se mide con un cierto error, utilice diferenciales para demostrar que el cálculo de I es aproximadamente el mismo (en magnitud) que el error relativo en R.

40. Cuando la sangre fluye por un vaso sanguíneo, el flujo F (el volumen de sangre por unidad de tiempo que corre por un punto dado) es proporcional a la cuarta potencia del radio R de ese vaso:

$$F = kR^4$$

(Ésta se conoce como ley de Poiseuille; en la sección 8.4 se muestra el porqué es verdadera.) Una arteria parcialmente obstruida puede expandirse por medio de una operación llamada angioplastia, en la cual un catéter provisto de un globo en la punta se infla dentro del vaso a fin de ensancharlo y restituir el flujo sanguíneo normal.

Demuestre que el cambio relativo en F es alrededor de cuatro veces el cambio relativo en R. ¿Cómo afectará un aumento de 5% en el radio al flujo de sangre?

41. Establezca las reglas siguientes para trabajar con diferenciales (donde c es una constante y u y v son funciones de x).

a) $dc = 0$

b) $d(cu) = c\,du$

c) $d(u + v) = du + dv$

d) $d(uv) = u\,dv + v\,du$

e) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

f) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

42. En la página 431 de *Physics: Calculus*, 2a. edición, por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000), al derivar la fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ para el periodo de un péndulo de longitud L, el autor obtiene la ecuación $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para la aceleración tangencial del breve movimiento del péndulo. Luego dice "para ángulos pequeños, el valor de θ en radianes está muy cerca del valor de sen θ; difieren menos que 2% hasta alrededor de 20°".

a) Compruebe la aproximación lineal en θ para la función seno:

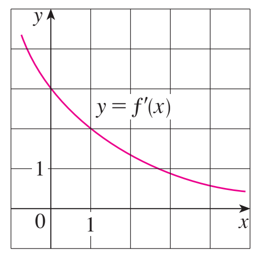
$$\operatorname{sen} x \approx x$$

b) Utilice un dispositivo graficador para determinar los valores de x para los cuales sen x y x difieren menos de 2%. Enseguida compruebe la afirmación de Hecht convirtiendo de radianes a grados.

43. Suponga que la única información acerca de una función f es que $f(1) = 5$ y la gráfica de su *derivada* es como se muestra.

a) Use una aproximación lineal para estimar $f(0.9)$ y $f(1.1)$.

b) ¿Sus estimaciones para el inciso a) son demasiado grandes o demasiado pequeñas? Explique.



44. Suponga que no tiene una fórmula para $g(x)$, pero sabe que $g(2) = -4$ y $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ para toda x.

a) Use una aproximación lineal para estimar $g(1.95)$ y $g(2.05)$.

b) ¿Sus estimaciones para el inciso a) son demasiado grandes o demasiado pequeñas? Explique.

PROYECTO DE LABORATORIO — POLINOMIOS DE TAYLOR

La aproximación por medio de una recta tangente de $L(x)$ es la mejor aproximación de primer grado (lineal) a $f(x)$ cerca de $x = a$ porque $f(x)$ y $L(x)$ tienen la misma razón de cambio (derivada) en $x = a$. Para tener una mejor aproximación que una lineal, intentemos una aproximación de segundo grado (cuadrática) $P(x)$. En otras palabras, aproximemos una curva mediante una parábola, en lugar de utilizar una recta. Para tener la seguridad de que la aproximación es buena, establecemos lo siguiente:

i) $P(a) = f(a)$ (P y f deben tener el mismo valor en $x = a$.)

ii) $P'(a) = f'(a)$ (P y f deben tener la misma razón de cambio en $x = a$.)

iii) $P''(a) = f''(a)$ (Las pendientes de P y f deben tener la misma razón de cambio en $x = a$.)

1. Encuentre la aproximación cuadrática $P(x) = A + Bx + Cx^2$ para la función $f(x) = \cos x$, que satisfaga las condiciones i), ii) y iii), con $a = 0$. Grafique P, f y la aproximación lineal $L(x) = 1$ en una pantalla común. Comente qué tan bien las funciones P y L se aproximan a f.

2. Determine los valores de x para los que la aproximación cuadrática $f(x) \approx P(x)$ del problema 1 es exacta con una diferencia menor que 0.1. [*Sugerencia:* grafique $y = P(x)$, $y = \cos x - 0.1$ y $y = \cos x + 0.1$ en una pantalla común.]

Se requiere calculadora graficadora o computadora