Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas
Universidad de Chile

# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

## Guía Nº 2

## Indicadores de desempeño

Este recurso de apoyo al aprendizaje permitirá que los estudiantes:

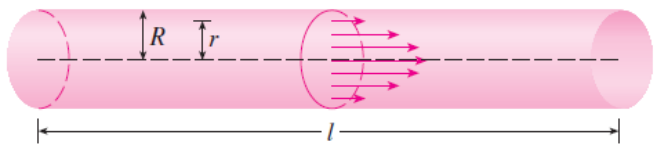
- Analicen, rigurosamente, situaciones contextualizadas que pueden ser resueltas utilizando las herramientas matemáticas del cálculo diferencial; específicamente aquellas vinculadas a variables relacionadas.
- Determinen, por medio del cálculo diferencial, la aproximación afín de una función.
- Resuelven problemas que involucran el uso de diferenciales en una o más variables.
- Resuelvan problemas que involucren máximos, mínimos, puntos de inflexión de una curva y optimización.

## Actividades de aprendizaje

### I. Variables relacionadas

1. La ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión $P$ y el volumen $V$ satisfacen la ecuación $PV = c$, donde $c$ es una constante. Suponga que se está comprimiendo un gas y en un determinado instante el volumen es de $100\ [\mathrm{cm}^3]$, la presión es de $4\ [\mathrm{kPa}]$ y la presión aumenta a una velocidad de $2\left[\frac{\mathrm{kPa}}{\mathrm{min}}\right]$. ¿A qué tasa cambia el volumen del gas, en este instante?

2. Cuando consideramos el flujo de sangre por un vaso sanguíneo, como una vena o una arteria, este vaso puede tomar la forma de un tubo cilíndrico con radio $R$ y longitud $l$ como se ilustra en la imagen.




Debido a la fricción en las paredes del tubo, la velocidad $y$ de la sangre es máxima a lo largo del eje central del propio tubo y decrece conforme aumenta la distancia $r$ al eje. La relación entre $(r, y(r))$ está dada por la ley del **flujo laminar**. En ésta se afirma que:

$$y = \frac{P}{4 \cdot n \cdot l}(R^2 - r^2$$

Para una arteria muy pequeña $n = 0{,}028$ es la viscosidad de la sangre, $R = 0{,}007\ cm,\ l = 2\ cm$ y $P = 4000\ dinas/cm^2$ es la diferencia en la presión entre los extremos del tubo. ¿Cuál es razón de cambio de la velocidad cuando $r = 0{,}003$?

3. Cuando el aire se expande adiabáticamente (sin ganar ni perder calor), su presión $P$ y su volumen $V$ se relacionan mediante la ecuación: $P\,V^{0.4} = C$, donde $C$ es una constante. En el instante $t_0$el volumen es 400 cm$^3$, la presión es $80\,kPa$ y disminuye a razón de $10\,\frac{kPa}{min}$. Calcule la razón a la que está cambiando el volumen en el instante $t_0$.

4. La ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión $P$ y el volumen $V$ satisfacen la ecuación $PV = C$, donde $C$ es una constante. En determinado instante $t_0$ el volumen es 600 cm$^3$, la presión es $150\,kPa$ y crece a razón de $80\,\frac{kPa}{min}$. Calcule la razón a la que está cambiando el volumen en el instante $t_0$.

## II. Aproximación afín de una función alrededor de un punto y recta tangente

1. Encuentre la aproximación afín de $f(x)$ en $a$ y úsela para aproximar el valor de $f$ cuando el valor de $a$ aumenta en un $0.1$ por ciento y cuando el valor de $a$ disminuye en un 0.2 por ciento.

   a) $f(x) = x^4 + 3x^2,\quad a = -1$

   b) $f(x) = \ln\left(\frac{e}{x^3}\right)$, $\quad a = 1$

   c) $f(x) = sen(2x),\ a = 0$

   d) $f(x) = x^{3/4},\quad a = 16$

   e) $f(x) = e^{-2x}\cos(\pi x),\ a = 0$

   f) $f(x) = \sqrt{x}\,tg\left(\frac{x}{2}\right),\quad a = 1$

2. Efectuando un desarrollo matemático, determine en qué puntos de la curva $y = [\ln{(x+4)}]^2$ posee una recta tangente es horizontal.

3. La siguiente tabla muestra la población de Nepal (en millones) al 30 de junio del respectivo año. Use una aproximación afín para estimar la población al 30 de junio del año 1989 y, a su vez, use aproximación afín para predecir la población en 2010, 2015 y 2020.

| $t$ | 1985 | 1990 | 1995 | 2000 | 2005 |
|---|---|---|---|---|---|
| $N(t)$ | 17.04 | 19.33 | 21.91 | 24.70 | 27.68 |

## III. Diferenciales

**Problema resuelto.**

Sea $L(c) = \sqrt{\frac{1}{c} + 3}$. Determine el diferencial de $L$ en $c = 1$.

**Desarrollo:**

Sabemos que si $L(c) = \sqrt{\frac{1}{c} + 3}$ es diferenciable en $c = 1$, entonces su diferencial en $c = 1$ se denota por $dL$ y está dado por $dL = L'(1) \cdot dc$ . Por lo tanto, debemos calcular $L'(1)$.

Para calcular $L'(1)$ determinamos primero la función derivada $L'(c)$, $y$ luego la evaluamos en $c = 1$.

Tenemos que $L(c)$ es una composición, así por regla de la cadena tenemos que:

$$L'(c) = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dc} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\frac{-1}{c^2} = \frac{-1}{2c^2\sqrt{\frac{1}{c}+3}}$$

Ahora evaluamos $L'(c)$ en $c = 1$: $\quad L'(1) = -\frac{1}{4}$ . Luego $L$ es diferenciable en $c = 1$ y por lo tanto el diferencial de $L$ en $c = 1$, está dado por: $\quad dL = -\frac{1}{4} \cdot dc$.

**Problemas propuestos.**

1. Sea $E(v) = \frac{cv^3}{v-v_0}$. Determine el diferencial de $E$ en $v = \frac{3}{2}v_0$, donde $c, v_0$ son constantes positivas.

2. Sea $F(s) = K\,ln(as+1)$. Determine el diferencial de $F$ en $s = \frac{1}{a}$, $K\ y\ a$ son constantes positivas.

3. Sea $F(v) = \left[4 + \frac{kv}{\sqrt{c-v^2}}\right]$. Determine el diferencial de $F$ en $v = 0$, donde $k, c$ son ctes. positivas.

4. Para las siguientes funciones determine su diferencial en los puntos donde él exista.

a) $y(x) = \frac{1}{x}$ b) $z(u) = \frac{u+1}{u-1}$ c) $V(r) = (1+r^3)^{-2}$ d) $P(z) = \sqrt{1+lnz}$

## IV. Diferencial en varias variables.

1. Si las funciones $a, b$ y $c$ están relacionadas con la función $T$ mediante la igualdad:

$$T = a^2 \cdot \mathrm{b} - c \cdot ln(b).$$

Aplique las propiedades de los diferenciales para expresar el diferencial de $T$ en términos de los diferenciales de las funciones $a, b$ y $c$.

2. Si las funciones $L, T$ y $P$ están relacionadas mediante la igualdad: $\ln\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{P}\right) = e^{-L}$, aplique las propiedades de los diferenciales para expresar el diferencial de $L$ en función de $T$ y $P$ y de los diferenciales de $T$ y $P$.

3. Si las funciones $P, V$ y $T$ están relacionadas mediante la igualdad: $\mathrm{PV} = \mathrm{nRT}$, aplique las propiedades de los diferenciales para expresar el diferencial de $T$ en función de los diferenciales de $V$ y $P$.

4. Si dos resistores con resistencias $R_1$ y $R_2$ se conectan en paralelo, entonces la resistencia total $R$, medida en ohms ( $\Omega$ ), está dada por $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Exprese el diferencial de $R$ en función de los diferenciales de $R_1$ y $R_2$.

## V. Máximos, mínimos y puntos de inflexión

1. Para cada una de las siguientes funciones realice un análisis matemático que permita determinar la existencia de máximos, mínimos y puntos de inflexión, si los hubiere.

Sea $f: D \to IR$ donde $D$ y $f$ se definen a continuación:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7 \quad, x \in IR$

b) $f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2},\ x \in IR$

c) $f(x) = \frac{3x}{x^2-1} \quad, x \in IR — \{-1,1\}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{2x^2+1}, \quad, x \in IR$

e) $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad, x \in IR$

f) $f(x) = e^{-ax^2} \quad, x \in IR,\ a > 0.$

g) $f(x) = axe^{-bx},\ x \in IR,\ a > 0,\ b > 0.$

h) $f(x) = x^2 \ln(x),\ x > 0.$

2. La velocidad de reacción $v$ de una reacción química, está dada por la función $v = K[C]^n$, donde $[C]$ es la concentración del reactante y $n$ es el orden de la reacción. La constante $K$ es la constante específica de velocidad y depende de la temperatura $T$ a la que ocurre la reacción. Esta se modela por la ecuación de Arrhenius, $K(T) = Ae^{\frac{-E_0}{RT}}$ donde $R$ es la constante de los gases $(R \approx 8{,}31451)$. Las constantes $A$ y $E_0$ se establecen una vez que se especifica la reacción ($A, E_0$ y $T$ son positivas).
Describa cómo cambia la constante específica de velocidad a medida que la temperatura $T$ a la que ocurre la reacción se va aumentando.

3. La familia de curvas en forma de campana: $y = e^{-(x-\mu)^2/(b)}$, es un múltiplo de la función de densidad normal usada en probabilidad y estadística. La constante $\mu$ se denomina media y b es una constante la constante positiva. Así estudiaremos la función:

$$f(x) = e^{-(x-\mu)^2/(b)}$$

a) Realice un análisis de curva y grafique $f$.
b) ¿Qué papel desempeñan $\mu$ y $b$ en la forma de la curva?

4. Sea $f(x) = \frac{L}{1+e^{-(b+mx)}}$, $x \in IR$ donde $L, b$ y $m$ son constantes y además $L$ y $b$ son positivas. A la función $f(x)$ se le denomina función logística. La *función logística* fue introducida por el biólogo matemático alemán Verhulst hacia el año 1840 para describir el crecimiento de poblaciones con recursos alimentarios limitados.

En virtud de lo anterior, se requiere que:

a) Demuestre que si $m > 0$ entonces $f(x)$ es creciente para todo $x \epsilon IR$ y si $m < 0$ entonces $f(x)$ es decreciente para todo $x \epsilon IR$.

b) Demuestre que si $m > 0$ entonces a medida que $x$ aumenta $f(x)$ se irá acercando a $L$.

c) Demuestre que si $m < 0$ entonces a medida que $x$ disminuye $f(x)$ se irá acercando a $L$.

d) Verifique que $\frac{f'(x)}{f(x)} = a + cf(x)$ y exprese las constantes $a$ y $c$ en función de las constantes $L, b$ y $m$.

Una característica de esta función es que su gráfica presenta un punto de inflexión.

e) Determine el punto de inflexión y demuestre que en el caso en que $m > 0$ el cambio de concavidad es de convexa a cóncava y en el caso de es de cóncava a convexa.

f) Demuestre que: $ln\left(\frac{f(x)}{L-f(x)}\right) = b + mx$ . Esta transformación, se denomina transformación logística y es una transformación estándar para linealizar modelos logísticos.

g) Ajuste los siguientes datos al modelo logístico $f(x) = \frac{L}{1+e^{-(b+mx)}}$, utilizando la transformación logística del ítem e) y luego grafique $f(x)$.

| $x$ | -5 | -1 | 0 | 1 | 5 | 10 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2.3270 | 3.1149 | 3.3333 | 3.5591 | 4.5186 | 5.7612 | 9.8670 | 9.9991 |

## VI. Optimización

1. La cantidad (en mg de carbón/$m^3/h$) a la que tiene lugar la fotosíntesis para una especie de fitoplancton está modelada por la función: $P = \frac{100I}{I^2+I+4}$ , $I \geq 0$, donde $I$ es la intensidad de la luz (medida en miles de pies – candelas). ¿Para qué intensidad de la luz es $P$ un máximo?

2. Se desea construir un silo con una capacidad de $15[dm^3]$ que tenga forma de un cilindro rematado por una semiesfera. Determinar las dimensiones del silo que tiene superficie mínima.

   Datos que pueden servir para resolver el problema:

   - Superficie de la parte lateral de un cilindro de radio $r$ y altura $h = 2\pi rh$
   - Superficie de una esfera de radio $r = 4\pi r^2$

3. Una lata cilíndrica sin tapa está hecha para contener $Vcm^3$ de líquido. Determine las dimensiones que reducirán al mínimo el costo del metal para hacer la lata.

4. Un recipiente en forma de cono está diseñado para contener $27cm^3$ de agua. Determine la altura y radio del recipiente que utiliza la mínima cantidad de papel.