Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas
Universidad de Chile

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Guía Nº 3

Indicadores de desempeño

Este recurso de apoyo al aprendizaje permitirá que los estudiantes:

- Evidencien el aprendizaje de conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral, proporcionando justificaciones matemáticamente válidas para determinadas situaciones que les serán presentadas.
- Analicen, rigurosamente, situaciones contextualizadas que pueden ser resueltas utilizando herramientas matemáticas propias del cálculo diferencial e integral.
- Integren conocimientos del cálculo diferencial en el marco de la resolución de problemas asociados a máximos, mínimos, puntos de inflexión y optimización.
- Utilicen estrategias que permiten expresar la primitiva de una función, en situaciones contextualizadas.
- Resuelvan problemas que involucran el cálculo de integrales; reconociendo el método que debe utilizar, es decir, sustitución o integración por partes.
- Realicen el cálculo de integrales definidas en situaciones con o sin contexto científico.

Actividades de aprendizaje

I. Máximos, mínimos, puntos de inflexión y optimización.

Problema 1.

La mayoría de los organismos crecen durante un período de tiempo antes de madurar reproductivamente. Para muchas especies de insectos y peces, cuanto más tarde se alcance la edad a en la madurez, más grande será el individuo, y esto se traduce en un mayor rendimiento reproductivo, traducido en cientos de individuos.

Sin embargo, al mismo tiempo, la probabilidad de sobrevivir hasta la madurez disminuye a medida que aumenta la edad de madurez. Estos efectos contrastantes pueden combinarse de diferentes maneras en una única medida del éxito reproductivo.

Supongamos que $\mu = 0.1$ es una constante que representa la tasa de mortalidad.

En virtud de lo anterior, encuentre la edad óptima de madurez para los siguientes modelos; verbalizando su respuesta:

(a) $r(a) = \dfrac{\ln(ae^{-\mu a})}{a}$ (b) $R(a) = ae^{-\mu a}$

En ambos casos, use Geogebra para trazar $r(a)$ y $R(a)$ y así pueda verificar sus resultados.

Problema 2.

Se sabe que un pez que nada a una velocidad v, su gasto de energía por unidad de tiempo es proporcional a v^3. Se cree que los peces migratorios tratan de minimizar la energía total requerida para nadar una distancia fija. Si los peces están nadando contra una corriente u $(u < v)$, entonces el tiempo requerido para nadar una distancia L es $\frac{L}{(v-u)}$ y la energía total E requerida para nadar la distancia viene dada por el modelo:

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v-u}$$

donde a es la constante de proporcionalidad.

a) Determinar el valor de v que minimiza E.

b) Usando geogebra, trace el gráfico de $E(v)$ para verificar sus resultados.

II. Integrales: Método de sustitución.

1.

$$\int \frac{(4 - In|x+3|)^3\, dx}{x+3} =$$

2.

$$\int \frac{\left(\sqrt{x} - b\right)^2}{\sqrt{x}}\, dx =$$

3.

$$\int \frac{(2x-3)dx}{(x^2-3x+6)^2} =$$

III. Integrales: Método de integración por partes.

1. Considere: $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = e^{-0.5x}(2-x)$ y $f(0) = 1$. Determine $f(x)$
2. Realice un desarrollo algebrico, sin apoyo de software, para calcular:

$$\int \sqrt{t}\ln(t)dt$$

3. Realice un desarrollo algebrico, sin apoyo de software, para calcular:

$$\int x^n \ln(x)\, dx$$

4. Realice un desarrollo algebrico, sin apoyo de software, para calcular la antiderivada de:

$$f(x) = e^{ax} sen(bx)$$

IV. Integral definida:

Problema 1.

Calcular las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(t\pi)^2 dt$

Problema 2.

Calcular el área del plano limitado por:

$$y = 0 \quad y = e^{-x}\cos(\pi x) \quad x = 0 \quad e \quad x = 1{,}5$$

Hint: Recuerde que x=0 y x=1.5 representan los límites de integración inferior y superior, respectivamente.

Problema 3.

Determinar el área comprendida en el intervalo [0,10] de las curvas:

$$\mathrm{y = 3 \ e \ y = Ln(5x + 2)}$$

Problema 4.

El estudio del área farmacéutica señala que la concentración de un medicamento inyectado al torrente sanguíneo, a las t horas se modela mediante la función:

$$c(t) = -10(e^{-0.3t} - e^{-0.05t})$$

Calcular:

a) El área bajo la curva en el intervalo de [0,8].

V. Item verdadero y falso.

Indique si la expresión es verdadera (V) o falsa (F). Justifique tanto aquellas que sean verdaderas como aquellas que sean falsas.

a) _____ Siempre que f’(x) = 0 estamos frente en un punto máximo o mínimo de la función.

b) _____ Las integrales se clasifican en definidas e indefinidas, en donde sólo las definidas llevan la correspondiente constante “C”.

c) _____ Integrar la función f(x) significa buscar su función primitiva que es F(x), la cual al derivarse nuevamente presenta a la función f(x).

d) _____ Para integrar una función, se puede usar integración inmediata o los métodos de integración.

e) _____ En el método de integración por partes es importante simplificar a través de un cambio de variable y posterior a esto integrar directamente.

f) _____ En el área de la ciencia se utiliza sólo el método de integración por fracciones parciales debido a que es la más exacta y de mayor precisión.

g) _____ En el método de integración por partes se debe usar una fórmula específica, para la cual debemos encontrar en la función valores que reemplacen “u”,”v”,”du” y “dv”.

h) _____ En el cálculo de áreas a través de integración mientras mayor sea Δx el resultado obtenido será el más correcto.

i) _____ El teorema fundamental del cálculo integral indica que una integral definida se puede calcular mediante procedimientos de las integrales indefinidas, para luego reemplazar en el resultado los extremos y luego restar entre sí ambos reemplazos.

j) _____ Si el área de una integral se encuentra bajo el eje de las abscisas, se convierte en área negativa y por lo tanto se debe descartar automáticamente para el cálculo de una integral definida.