Capítulo 2

La derivada y sus aplicaciones

2.1. Introducción

En 1604 Galileo formuló la ley de la caída de los cuerpos : *la caída de los cuerpos es un movimiento uniformemente acelerado.* Matemáticamente se expresa diciendo que el espacio $s(t)$ recorrido es proporcional al cuadrado del tiempo:

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2$$

Pero esto no satisfizo a Galileo, quien deseaba comprender la esencia del movimiento de la caída y fue aquí donde se equivocó, al igual que otros grandes del pensamiento científico como Leonardo y Descartes. Él creyó que el principio era: *la velocidad del cuerpo en caída libre es proporcional a la distancia recorrida.* Ahora, con el cálculo diferencial e integral no es difícil demostrar que este principio no conduce a la ley ya establecida. Mucho se ha escrito sobre este famoso error, de preferir formular la ley como la velocidad proporcional al espacio. Algunos historiadores de la ciencia lo atribuyen, además de la ausencia del cálculo, al rol jugado por la geometría en los albores de la ciencia moderna.

El proceso del cual salió la física clásica consistió en un esfuerzo para racionalizar, o dicho de otra forma, para geometrizar el espacio y matematizar las leyes de la naturaleza. A decir verdad, se trata del mismo esfuerzo, pues geometrizar el espacio no quiere decir otra cosa que aplicar al movimiento leyes geométricas. ¿Y cómo -antes de Descartes- se podía matematizar algo si no es geometrizándolo? [1]

Para llegar a comprender la esencia del movimiento, era necesario llegar a la idea física realmente difícil de *velocidad instantánea.* Sea

$$s = f(t)$$

[1] A. Koyré: Estudios Galileanos. Siglo veintiuno, 1988.

una función que nos da la posición de un móvil en el instante t. Para encontrar la velocidad v en un instante $t = t_0$, consideremos el intervalo de tiempo transcurrido entre t_0 y $t_0 + h$, $h \neq 0$. El camino recorrido en el intervalo dado es

$$\Delta s = f(t_0 + h) - f(t_0).$$

La velocidad promedio $\overline{v}$ es

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{h} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \ ,$$

para obtener la velocidad instantánea v es necesario hacer el intervalo de tiempo tan pequeño como queramos, es decir,

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Este límite corresponde a la derivada de una función y dice la rapidez con que está variando la función. Fue Newton en 1665 quien llegó a este concepto llevando el problema físico a una formulación geométrica, que establece la equivalencia entre la existencia del límite v y el problema de trazar la recta tangente en un punto t_0 al gráfico de la función f.

En primera instancia, no es claro qué es la tangente a una curva plana en un punto dado, pues no es equivalente al caso de la geometría elemental de la circunferencia, en que la tangente es la recta que tiene sólo un punto común con ella. Para una curva cualquiera esto pierde sentido.

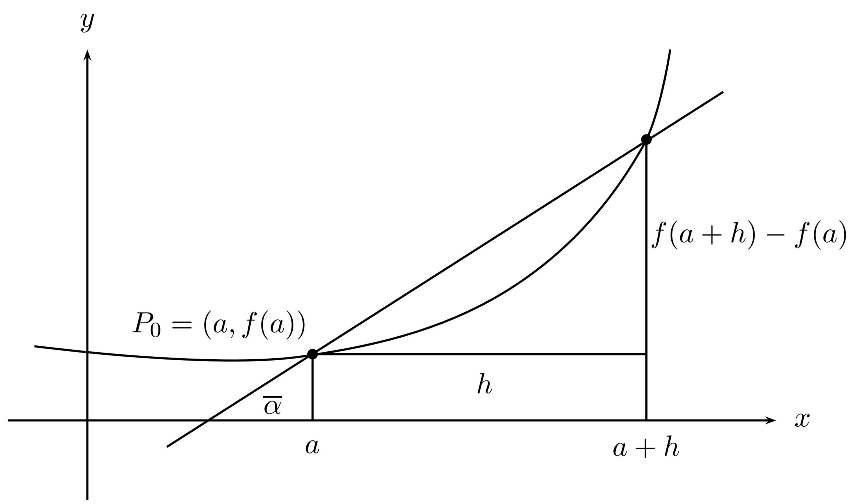
Consideremos la curva $y = f(x)$ y sobre ella un punto P_0 de abscisa a. Para definir la tangente en el punto P_0 consideremos otro punto P de abscisa $a + h$ y tracemos la secante P_0P que forma un ángulo $\overline{\alpha}$ con el eje X. Entonces, la recta tangente en el punto P_0 es la recta que se obtiene como caso límite de estas secantes cuando el punto P se acerca indefinidamente a P_0. La tangente del ángulo $\overline{\alpha}$ es:

$$\tan \overline{\alpha} = \frac{QP}{P_0Q} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Para tener la inclinación de la recta tangente debemos pasar al límite y obtenemos que:

$$\tan \alpha = \lim_{P \to P_0} \tan \overline{\alpha} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Con los conocimientos de geometría analítica sabemos que conociendo un punto y la inclinación de la recta, ella está completamente determinada.


y
f(a + h) − f(a)
P0 = (a, f(a))
h
α
x
a
a + h

2.2. Definición y fórmulas básicas de la derivada

2.2.1. Definiciones básicas

Definición 2.2.1 Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto a. Llamaremos la **derivada** de la función f en el punto a al límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \tag{2.1}$$

cuando existe. En tal caso lo denotaremos por $f'(a)$ ó $\dfrac{df}{dx}(a)$ ó $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$.

Ejemplo 2.2.2 1. Si $f(x)=c$; donde c es una constante, entonces $f'(a)=0$. Ya que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{c-c}{h}=0 \text{ ; para todo } h\neq 0.$$

2. Si $f(x)=mx+p$, con m y p números fijos, entonces $f'(a)=m$. Ya que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h}=\frac{mh}{h}=m \text{ ; para todo } h\neq 0.$$

Por tanto, $f'(a)=m$.

3. Si $f(x)=x^2$, entonces $f'(a)=2a$. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\ &= \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}\\ &= \frac{h(2a+h)}{h}\\ &= 2a+h.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}2a+h=2a.$$

4. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$, cuando $a \neq 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}\\ &= \frac{a-(a+h)}{ha(a+h)}\\ &= \frac{-h}{ha(a+h)}\\ &= \frac{-1}{a(a+h)}\end{aligned}$$

   Por tanto,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}.$$

5. Si $f(x) = \mid x \mid$, entonces f no tiene derivada en $x = 0$. Esto es consecuencia de la no existencia del límite 2.1 que define la derivada:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\mid h \mid}{h}.$$

   Cuando $h > 0$, $\lim_{h\to 0^+}\dfrac{\mid h\mid}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h} = 1$. Cuando $h < 0$, $\lim_{h\to 0^-}\dfrac{\mid h\mid}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{h} = -1$.

6. $Sif(x) = \sqrt[3]{x}$, entonces f no tiene derivada en $x = 0$. Como

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}-0}{h} = \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}},$$

   $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$. Por tanto $f'(0)$ no existe.

7. Si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(a) = -\operatorname{sen} a$. Esto es consecuencia del límite relevante 6 de la sección 1.4, que nos dice que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = -\operatorname{sen} a.$$

Observación 2.2.3 Según lo visto en la sección 1.5, el límite que define la derivada puede escribirse como:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}.$$

Interpretación geométrica de la derivada. Consideremos la curva $y = f(x)$. Tracemos la recta secante a la curva que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ tomando h positivo y fijo. Esta recta forma un ángulo $\alpha(h)$ con la parte positiva del eje X, cuya tangente es:

$$\tan\alpha(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Cuando hacemos tender h a 0, la recta secante va transformándose en una recta que tiende a tocar a la curva solamente en el punto $(a, f(a))$. La pendiente de esta recta es por tanto,

$$\tan\alpha = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

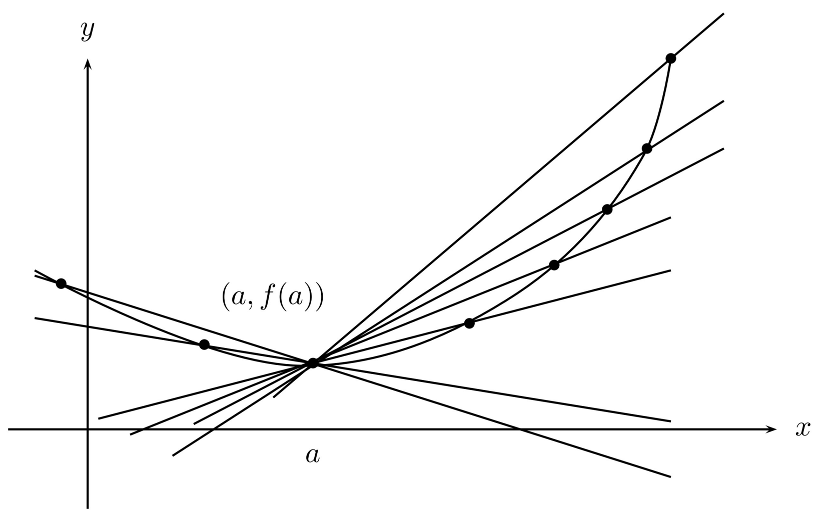


Figura 2.2.1: Interpretación geométrica de la derivada.

Definición 2.2.4 (i) Si f es una función con derivada en $x = a$, llamaremos recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ a la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ y cuya pendiente es $f'(a)$. Esta recta tiene por ecuación:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a). \tag{2.2}$$

(ii) Si $f'(a) = \infty$, entonces la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ es $x = a$.

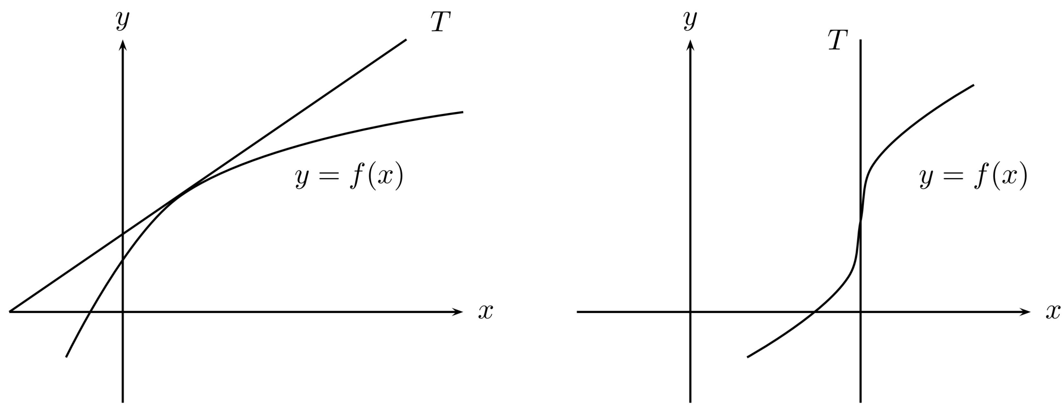


Figura 2.2.2: Recta tangente.

Ejemplo 2.2.5 1. La recta tangente a $f(x) = x^2$ en $x = 1$ es, según ejemplo 2.2.2 parte 3:

$$\begin{aligned} y &= 2(x-1)+1 \\ y &= 2x-1. \end{aligned}$$

2. La recta tangente a $f(x) = \cos x$ en $x = \dfrac{\pi}{6}$ es, según ejemplo 2.2.2 parte 7:

$$\begin{aligned} y &= -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}(x-\frac{\pi}{6}) + \cos\frac{\pi}{6} \\ y &= -\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{6}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

3. La recta tangente a $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$ es, según ejemplo 2.2.2 parte 6:

$$x = 0.$$

Definición 2.2.6 ▪ Si f es una función con derivada en $x = a$ distinta de 0, llamaremos **recta normal** al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ a la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto y que pasa por él. Es decir, es la recta cuya ecuación es:

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a) \tag{2.3}$$

- Si $f'(a) = 0$, entonces la **recta normal** al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ es $x = a$.
- Si $f'(a) = \infty$, entonces la **recta normal** al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ es $y = f(a)$.

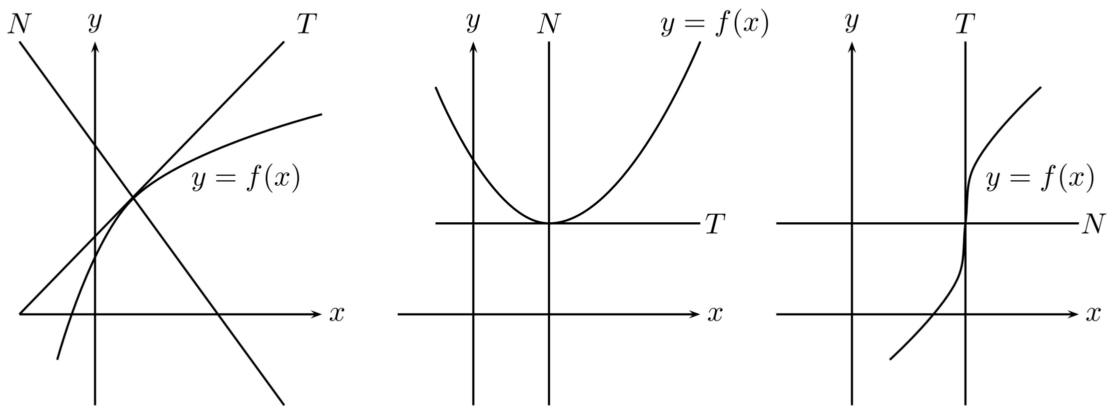


Figura 2.2.3: Recta normal.

Ejemplo 2.2.7 1. La recta normal a $f(x) = x^2$ en $x = 1$ es, según ejemplo 2.2.2 parte 3:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}(x-1)+1 \\ y &= -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ 2y &= -x+3. \end{aligned}$$

2. La recta normal a $f(x) = \cos x$ en $x = \frac{\pi}{6}$ es, según ejemplo 2.2.2 parte 7:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{-\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}(x-\frac{\pi}{6})+\cos\frac{\pi}{6} \\ y &= -\frac{1}{-\frac{1}{2}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y &= 2(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y &= 2x-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

3. La recta normal a $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$ es, según ejemplo 2.2.2 parte 6:

$$y = 0.$$

Definición 2.2.8 Diremos que una función f es **derivable o diferenciable** en un intervalo abierto I si existe la derivada en cada punto del intervalo. En este caso podemos definir la **función derivada** f' cuyo dominio es I y su valor en cada punto x es $f'(x)$.

Ejemplo 2.2.9
1. La función lineal y cuadrática son derivables en cualquier intervalo abierto, según ejemplo 2.2.2, partes 2 y 3.
2. Las funciones valor absoluto y raíz cúbica no son derivables en ningún intervalo abierto que contiene al cero, pues ellas no son derivables en $x = 0$. Ver ejemplo 2.2.2, parte 6.

Derivadas laterales. Para poder extender la definición 2.2.12 a un intervalo cerrado y acotado en algún extremo, es necesario definir las derivadas laterales tomando el límite a la derecha o a la izquierda del punto en la expresión que define a la derivada, según sea el caso.

Definición 2.2.10 (i) Llamaremos **derivada a la derecha** del punto $x = a$ al límite:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \tag{2.4}$$

y lo denotaremos $f'_+(a)$.

(ii) Llamaremos **derivada a la izquierda** del punto $x = a$ al límite:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \tag{2.5}$$

y lo denotaremos $f'_-(a)$.

Observación 2.2.11 Es consecuencia inmediata de las propiedades de límite que si las derivadas a la derecha y a la izquierda de un punto son iguales, entonces existe la derivada en el punto.

Definición 2.2.12 Diremos que una función f es **derivable o diferenciable** en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ si existe la derivada en cada punto del intervalo abierto (a, b), existe la derivada a la derecha en $x = a$ y existe la derivada a la izquierda en $x = b$.

Ejemplo 2.2.13 La función $f(x) =\mid x \mid$ es derivable en intervalos de la forma $[0, b], [a, 0]$, con $a < 0$ y $b > 0$.

2.2.2. Fórmulas elementales

Ahora comenzaremos a estudiar las propiedades básicas de la derivada.

Teorema 2.2.14 Si una función es derivable en un punto a, entonces ella es continua en ese punto.

Demostración: Para demostrar que f es continua en a, basta demostrar, según la ecuación 1.16 de la sección 1.5 que $\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]=0$. Como,

$$f(a+h)-f(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h.$$

Entonces:

$$\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]=f'(a)\cdot \lim_{h\to 0} h=0. \blacksquare$$

Observación 2.2.15 Como puede verse fácilmente del ejemplo 2.2.2, una función continua en un punto puede no tener derivada en él, como sucede con $|\, x\,|$, $\sqrt[3]{x}$ en $x=0$.

Teorema 2.2.16 Sean f y g funciones derivables en a. Entonces:

(i) $f\pm g$ es derivable en a y $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$.

(ii) $f\cdot g$ es derivable en a y $(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$.

(iii) $\dfrac{f}{g}$ es derivable en a si $g(a)\neq 0$ y se tiene:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Demostración:

(i)

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\
&= f'(a)+g'(a).
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)+f(a+h)\cdot g(a)-f(a+h)\cdot g(a)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)[g(a+h)-g(a)]+g(a)[f(a+h)-f(a)]}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0} f(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+g(a)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ &= f(a)g'(a)+g(a)f'(a).\end{aligned}$$

(iii) Para probar la fórmula de la derivada de un cuociente probaremos primero que:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{1}{(g(a))^2}\cdot g'(a).$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}\right]\\ &= -\frac{1}{\lim_{h\to 0} g(a+h)}\cdot\frac{1}{g(a)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\ &= -\frac{1}{(g(a))^2}\cdot g'(a).\end{aligned}$$

Ahora, escribiendo $\frac{f}{g} = f\cdot\frac{1}{g}$ aplicamos la fórmula del producto y se obtiene sin dificultad la fórmula buscada. ■

Ejemplo 2.2.17 Si $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x^2$, entonces:

1.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f+g)(x) &= \frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= -\frac{1}{x^2}+2x\\ &= \frac{2x^3-1}{x^2}\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f\cdot g)(x) &= x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\\
&= x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}2x\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{x}2x}{x^4}\\
&= -\frac{3}{x^4}\\
&= -3x^{-4}.
\end{aligned}
$$

Corolario 2.2.18 (i) Si $f(x)=c\,g(x)$, entonces $f'(x)=c\,g'(x)$, donde c es una constante.

(ii) Si $f(x)=x^n$, entonces $f'(x)=nx^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$.

(iii) Si $f(x)=x^{-n}$, entonces $f'(x)=-nx^{-n-1}$, $n\in\mathbb{N}$.

Demostración: Por ser aplicaciones directas del teorema 2.2.16 se deja como ejercicio. ■

Ejemplo 2.2.19 1. $\frac{d}{dx}\left(x^{100}\right)=100x^{99}$.

2. $\frac{d}{dx}\left(x^{-100}\right)=-100x^{-101}$.

3. $\frac{d}{dx}\left(x^7+9x^6-7x^3+10\right)=7x^6+54x^5-21x^2$.

4.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+2x}{x^2-1}\right) &= \frac{(3x^2+2)(x^2-1)-(x^3+2x)\,2x}{(x^2-1)^2}\\
&= \frac{x^4-5x^2-2}{(x^2-1)^2}.
\end{aligned}
$$

Teorema 2.2.20 Si $f(x)=x^{\frac{1}{q}}$, $q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$. Entonces $f'(x)=\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$.

Demostración: $f(x) = x^{\frac{1}{q}}$, $f(x+h) = (x+h)^{\frac{1}{q}}$, $\dfrac{\Delta f}{h} = \dfrac{(x+h)^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}}{h}$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}}{h}.$$

Para calcular este límite debemos racionalizar el numerador", usando la fórmula de factorización:

$$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}).$$

Tomando $a = (x+h)^{\frac{1}{q}}$, $b = x^{\frac{1}{q}}$, $m = q$, amplificamos por:

$$a^{q-1} + a^{q-2}b + \ldots + ab^{q-2} + b^{q-1},$$

y nos queda que:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{h} &= \frac{(x+h)^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}}{h} \cdot \frac{(x+h)^{\frac{q-1}{q}} + (x+h)^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \ldots + x^{\frac{q-1}{q}}}{(x+h)^{\frac{q-1}{q}} + (x+h)^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \ldots + x^{\frac{q-1}{q}}} \\
&= \frac{[(x+h)-x]}{h} \cdot \frac{1}{(x+h)^{\frac{q-1}{q}} + (x+h)^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \ldots + x^{\frac{q-1}{q}}} \\
&= \frac{1}{(x+h)^{\frac{q-1}{q}} + (x+h)^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \ldots + x^{\frac{q-1}{q}}}
\end{aligned}$$

Entonces, cuando $h \to 0$, se tiene que,

$$\frac{\Delta f}{h} \to f'(x) = \frac{1}{x^{\frac{q-1}{q}} + x^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + x^{\frac{q-3}{q}} x^{\frac{2}{q}} + \ldots} = \frac{1}{qx^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q} - 1}. \blacksquare$$

Ejemplo 2.2.21 $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{100}}\right) = \dfrac{1}{100} x^{\frac{1}{100} - 1} = \dfrac{1}{100} x^{-\frac{99}{100}}$.

Regla de la cadena. La regla de la cadena es la fórmula que permite derivar funciones compuestas y es uno de los teoremas más importantes del cálculo. Para poder demostrarlo necesitaremos algunos resultados intermedios.

Teorema 2.2.22 Si f tiene derivada en el punto $x = a$, entonces

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + G(h),$$

donde G es una función tal que $G \to 0$ cuando $h \to 0$.

Demostración: Por hipótesis existe el número $f'(a)$, por tanto, si $h \neq 0$ podemos definir la función:

$$G(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a).$$

Es inmediato de la definición de derivada que

$$G(h) \to 0 \text{ cuando } h \to 0,$$

y además cumple con la propiedad del enunciado. ■

Corolario 2.2.23 (i) La función G definida en el teorema anterior se puede extender para $h = 0$ definiéndola como $G(0) = 0$ y además resulta continua en este punto.

(ii) $\Delta f(x) = [f'(x) + G(h)]h$ o equivalentemente, $\Delta f(x) = [f'(x) + G(\Delta x)]\Delta x$.

Teorema 2.2.24 Regla de la cadena Sean f, g, u funciones tales que $f(x) = g(u(x))$, g y u derivables. Entonces, f es derivable y $f'(x) = g'(u(x))u'(x)$.

Demostración: Como $f(x) = g(u(x))$ y

$$\begin{aligned} f(x+h) &= g(u(x+h)) \\ &= g(u(x+h) + u(x) - u(x)) \\ &= g(u + \Delta u)(x). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\Delta f(x) = g(u + \Delta u)(x) - f(x) = g(u + \Delta u) - g(u(x)).$$

Por corolario 2.2.23, podemos escribir:

$$\Delta f = [g'(u) + G(\Delta u)]\Delta u.$$

Por tanto,

$$\frac{\Delta f}{h} = [g'(u) + G(\Delta u)] \cdot \frac{\Delta u}{h}.$$

En virtud del teorema 2.2.22 $G(\Delta u) \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$ y por definición de derivada $\dfrac{\Delta u}{h} \to u'(x)$ cuando $h \to 0$, tenemos que:

$$\frac{\Delta f}{h} \to g'(u(x))u'(x) \text{ cuando } h \to 0. \blacksquare$$

Corolario 2.2.25 (i) Si $f(x) = x^r$ con $r \in \mathbb{Q}$, entonces $f'(x) = rx^{r-1}$.

(ii) Si $f(x) = [u(x)]^n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $f'(x) = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$.

Ejemplo 2.2.26 1. $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{7}{8}}\right) = \dfrac{7}{8}\left(x^{\frac{7}{8}-1}\right) = \dfrac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$.

2.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sqrt{3x^2-5x+2} &= \frac{d}{dx}\left(3x^2-5x+2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(3x^2-5x+2\right)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\left(3x^2-5x+2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(3x^2-5x+2\right)^{-\frac{1}{2}}(6x-5) \\
&= \frac{(6x-5)}{2\sqrt{3x^2-5x+2}}.
\end{aligned}$$

2.2.3. Las derivadas de las funciones trigonométricas

Teorema 2.2.27 (i) Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = \cos x$.

(ii) Si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

(iii) Si $f(x) = \tan x$, entonces $f'(x) = \sec^2 x$.

(iv) Si $f(x) = \operatorname{cotan} x$, entonces $f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$.

(v) Si $f(x) = \sec x$, entonces $f'(x) = \sec x \tan x$.

(vi) Si $f(x) = \operatorname{cosec} x$, entonces $f'(x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x$.

Demostración:

(i)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\cdot\operatorname{sen}\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{h}\cdot \operatorname{sen}\frac{h}{2}\cdot \operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right) \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right) \\ &= -\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

(iii) Usando la definición de la función $\tan x$ y la fórmula para derivar cuocientes, tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x}\left(\cos x \cdot \frac{d \operatorname{sen} x}{dx} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{d \cos x}{dx}\right) \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\left(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\right) = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Las partes (iv), (v) y (vi) se hacen de manera análoga y se dejan como ejercicios. ■

2.2.4. Las derivadas de orden superior

La derivada de una función en un punto, como ya hemos visto, es una medida de la inclinación de la recta tangente en el punto considerado. Ahora necesitamos medir cuán **separado** está el gráfico de la función de su recta tangente. Por ejemplo, las tangencias de las curvas $y = x^2$, $y = x^3$ o $y = x^4$ con la recta $y = 0$ son muy diferentes. Lo que realmente queremos medir es cómo se **curva** el gráfico de f en una vecindad del punto de tangencia.

Definición 2.2.28 (i) Diremos que una función f es dos veces derivable en un punto a si f' tiene derivada en a. A este número lo llamaremos **segunda derivada de** f **en** a y lo denotaremos $f''(a)$. Es decir,

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}. \tag{2.6}$$

(ii) Diremos que la función f es dos veces diferenciable en $I \subset \mathbb{R}$, si f es dos veces derivable en todo punto de I.

Otras notaciones usadas son:

$$f''(a) = \frac{d^2 f}{d\,x^2}(a) = \left.\frac{d^2 f}{d\,x^2}\right|_{x=a}.$$

(iii) Análogamente podemos definir para $n \geq 2$, la **derivada de orden n en el punto** a como la derivada de $f^{(n-1)}$ en el punto a. Las notaciones usadas para este caso son:

$$f^{(n)}(a) = \frac{d^n f}{d\,x^n}(a) = \left.\frac{d^n f}{d\,x^n}\right|_{x=a}.$$

Ejemplo 2.2.29 Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$, etc.

En general, $f^{(4n+1)}(x) = \cos x$; $f^{(4n+2)}(x) = -\operatorname{sen} x$, $f^{(4n+3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4n+4)}(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(4n)} = \operatorname{sen} x$, $n \neq 0$.

Definición 2.2.30 Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Si f es continua diremos que es de clase $C^{(0)}$ en (a,b); si f' es continua diremos que f es de clase $C^{(1)}$ en (a,b); en general, diremos que f es de clase $C^{(n)}$ en (a,b) si $f^{(n)} : (a,b) \to \mathbb{R}$ es continua.

Ejemplo 2.2.31 Sea $f(x) = x^k \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Entonces, si

- $k = 0$, f es discontinua en 0.
- $k = 1$, f es de clase $C^{(0)}$, pero no es diferenciable en 0.
- $k = 2$, f es diferenciable , pero no de clase $C^{(1)}$.

2.2.5. Ejercicios resueltos

1. Dada la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$:

   a) Usando la definición, calcule $\dfrac{df}{dx}(x)$.

   b) Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1,6)$.

   c) Encuentre la ecuación de la recta normal al gráfico de f en el punto $(1,6)$.

   d) ¿Existe otro punto sobre la curva f donde su tangente sea paralela a la tangente en $(1,6)$?

   Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{((x+h)^2+3(x+h)+2)-(x^2+3x+2)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{x^2+2xh+h^2+3x+3h+2-x^2-3x-2}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+3+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(2x+3+h)\\
&= 2x+3.
\end{aligned}$$

b) Si $x=1$, entonces $f'(1)=2x+3|_{x=1}=5$. Esto nos dice que la recta tangente en el punto $(1,6)$ tiene pendiente 5 y por tanto su ecuación es:

$$\begin{aligned}
y &= 5(x-1)+6\\
y &= 5x+1.
\end{aligned}$$

c) La pendiente de la recta normal en el punto $(1,6)$ es $-\dfrac{1}{5}$ y su ecuación es :

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{5}(x-1)+6\\
5y &= 31-x.
\end{aligned}$$

d) Para que una recta sea paralela a la tangente en el punto $(1,6)$, su pendiente debe ser 5. Sea $(z,f(z))$ un punto sobre la curva donde la tangente tiene pendiente 5, entonces se debe tener:

$$f'(z)=2z+3=5.$$

Lo que implica $z=1$. Por tanto, no existe sobre la curva otro punto en el cual la recta tangente tenga pendiente 5.

2. Dada la función $f(x)=x^3+3x^2-1$:

a) Usando la definición calcule $\dfrac{df}{dx}(x)$.

b) Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1,3)$.

c) Encuentre la ecuación de la recta normal al gráfico de f en el punto $(1,3)$.

d) ¿Existe otro punto sobre la curva f donde su tangente sea paralela a la tangente en $(1,3)$?

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{((x+h)^3+3(x+h)^2-1)-(x^3+3x^2-1)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{x^3+3xh^2+3x^2h+h^3+3x^2+6xh+3h^2-1-x^3-3x^2+1}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(3xh+h^2+3h+3x^2+6x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(3xh+h^2+3h+3x^2+6x)\\
&= 3x^2+6x.
\end{aligned}$$

b) Cuando $x = 1$,$f'(1) = 3x^2 + 6x|_{x=1} = 9$. Lo que nos dice que la recta tangente en el punto $(1,3)$ tiene pendiente 9 y por tanto su ecuación es:

$$\begin{aligned}
y &= 9(x-1)+3\\
y &= 9x-6.
\end{aligned}$$

c) La recta normal en el punto $(1,3)$ tiene ecuación:

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{9}(x-1)+3\\
9y &= 28-x.
\end{aligned}$$

d) Sea $(z, f(z))$ un punto sobre la curva donde la tangente tiene pendiente 9, entonces se debe tener que $f'(z) = 9$. Es decir,

$$\begin{aligned}
3z^2+6z &= 9\\
3z^2+6z-9 &= 0\\
z^2+2z-3 &= 0\\
(z-1)(z+3) &= 0
\end{aligned}$$

Ecuación que tiene dos soluciones $z = 1$ y $z = -3$. Por tanto en el punto $(-3, f(-3)) = (-3,-1)$ la recta tangente es paralela a la recta tangente en $(1,3)$.

3. Se dice que dos curvas son tangentes en un punto P si ellas se intersectan en P y sus rectas tangentes en P son iguales. Considere la función $h(x) = \dfrac{1}{x}\operatorname{sen} x$. Demuestre que los gráficos de $h(x)$ y $f(x) = \pm\dfrac{1}{x}$ son tangentes en todos los puntos de contacto.

Solución:

Supongamos $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Entonces x_0 es un punto de contacto entre los gráficos si y sólo si $f(x_0) = h(x_0)$, es decir, $\dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{x_0}\operatorname{sen} x_0$, lo que implica $\operatorname{sen} x_0 = 1$, por tanto, $x_0 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

$f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2} = -\dfrac{4}{(4k+1)^2\pi^2}$ y por otro lado,

$h'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}\operatorname{sen} x_0 + \dfrac{1}{x_0}\cos x_0 = -\dfrac{4}{(4k+1)^2\pi^2}$. Se procede de modo análogo para la función $f(x) = -\dfrac{1}{x}$, en que los puntos de intersección son $x_0 = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

4. Dada la función polinomial de grado 3

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

encuentre a, b, c, d, de modo que se satisfagan las siguientes condiciones:

- La curva pasa por $(0,0)$.
- En $(0,0)$ la recta tangente forma un ángulo de 60 grados con la parte positiva del eje X.
- En $x = 1$ y $x = -1$ la curva es paralela al eje X.

Solución: Si la curva pasa por el punto $(0,0)$, entonces $y(0) = 0$ lo cual implica que $d = 0$. Si la pendiente de la recta tangente en el origen es $\tan\dfrac{\pi}{3}$, entonces tenemos la ecuación: $y'(0) = \sqrt{3}$. Como $y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, tenemos que $y'(0) = c = \sqrt{3}$.

Que la curva sea paralela al eje X en un punto, quiere decir que en ese punto su recta tangente es paralela al eje X, lo que a su vez implica que en ese punto su derivada es nula. Por tanto, tenemos dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} y'(1) &= 3a + 2b + c \\ y'(-1) &= 3a - 2b + c \end{aligned}$$

La resolución de este sistema nos da los valores de $a = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y $b = 0$.

Así, tenemos que el polinomio que satisface las condiciones pedidas es:

$$y(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^3 + \sqrt{3}\,x.$$

5. Calcule la derivada de la función $\operatorname{sen} x^o$ expresada en grados.

   Solución:

   Como x^o no es un número real, debemos expresar la función sen en radianes antes de derivarla, $\operatorname{sen} x^o = \operatorname{sen} \dfrac{\pi\, x}{180}$. Por tanto tenemos la función $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi\, x}{180}$, la cual se deriva usando la regla de la cadena con función $u(x) = \dfrac{\pi\, x}{180}$, obteniéndose que

$$f'(x) = \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi\, x}{180}.$$

6. Derive las siguientes funciones usando las fórmulas de derivación:

   a) $(x+1)^2(x-3)^5$

   b) $\sqrt{x^2+1}$

   c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   d) $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}}$

   e) $x\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$

   f) $(8x-3)^{\frac{8}{9}}$

   g) $\dfrac{1}{(4x-1)^5}$

   h) $\operatorname{sen}(4x-3)$

   i) $\cos(4x-3)^2$

   j) $x^2 \tan \dfrac{1}{x}$

   Solución:

   a) Si $f(x) = (x+1)^2(x-3)^5$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+1)(x-3)^5 + (x+1)^2 5(x-3)^4 \\ &= (x+1)(x-3)^4(2(x-3) + 5(x+1)) \\ &= (x+1)(7x-1)(x-3)^4 \end{aligned}$$

   b) Si $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}(2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

c) Si $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{x+5}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{x-5}{x+5}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{x+5}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{10}{(x+5)^2} \\ &= \frac{5}{(x+5)^{\frac{3}{2}}(x-5)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

d) Si $f(x) = x\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{2}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{a-x}{a+x}\right) + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \\ &= x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\left[\frac{-a}{(a+x)^2}\right] + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \\ &= \frac{-ax}{(a+x)^2}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \end{aligned}$$

e) Si $f(x) = (8x-3)^{\frac{8}{9}}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{8}{9}(8x-3)^{-\frac{1}{9}} \cdot 8 \\ &= \frac{64}{9(8x-3)^{\frac{1}{9}}} \end{aligned}$$

f) Si $f(x) = \dfrac{1}{(4x-1)^5}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= -5\left(\frac{1}{4x-1}\right)^4 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4x-1}\right) \\ &= -\frac{20}{(4x-1)^6}. \end{aligned}$$

g) Si $f(x) = \operatorname{sen}(4x-3)$, entonces $f'(x) = 4\cos(4x-3)$.

h) Si $f(x) = \cos(4x-3)^2$, entonces $f'(x) = -8(4x-3)\operatorname{sen}(4x-3)^2$.

i) Si $f(x) = x^2 \tan \dfrac{1}{x}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\,\tan\frac{1}{x} + x^2\,\frac{d}{dx}\left(\tan\frac{1}{x}\right) \\ &= 2x\,\tan\frac{1}{x} + x^2\sec^2\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x\,\tan\frac{1}{x} - \sec^2\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

7. Determine los puntos donde la derivada de las siguientes funciones no existe.

a) $|\operatorname{sen} x|$

b) $\sqrt[3]{\cos x}$

c) $\left|\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right|$

d) $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

Solución:

a) Aplicando la regla de la cadena y el ejemplo 2.2.2, parte 5, sabemos que $|\operatorname{sen} x|$ es derivable en todos los puntos en que $\operatorname{sen} x \neq 0$, es decir, la derivada no existe en los múltiplos pares de $\dfrac{\pi}{2}$.

b) La regla de la cadena y el ejemplo 2.2.2, parte 6, nos dicen que el único punto en que la derivada no existe es para aquellos valores que anulan el coseno. Es decir, si $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$.

c) es fácil ver que esta función es derivable en cada punto de su dominio $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

d) En la sección 1.5, hemos dicho que esta función es discontinua en todos sus puntos, por tanto no puede ser derivable en ningún punto.

8. Pruebe que si $f(x)$ es una función polinomial de grado n, entonces:

a) $f^{(n)}(x)$ es una constante independiente de x.

b) $f^{(n+1)}(x) = 0$, para todo x.

Solución: Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$, entonces $f'(x)$ es a lo más un polinomio de grado $n-1$. En efecto,

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1\ ,$$

$$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \ldots + a_2 \,.$$

Podemos observar que en cada etapa de derivación va desapareciendo el término constante, por tanto, al derivar n veces nos queda:

$$f^{(n)}(x) = n!a_n.$$

Esta función ya no depende de x y por consiguiente su derivada, o la derivada de orden $(n+1)$ del polinomio inicial, es la función constante 0.

9. Calcule:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3\frac{d^2y}{dx^2}\right) &= \frac{d}{dx}\left(x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2}\right)\\
&= x^3\frac{d^4y}{dx^4} + 3x^2\frac{d^3y}{dx^3} + 6x\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^2\frac{d^3y}{dx^3}\\
&= x^3\frac{d^4y}{dx^4} + 6x^2\frac{d^3y}{dx^3} + 6x\frac{d^2y}{dx^2}.
\end{aligned}$$

10. Demuestre que si $y = 3\cos 2x + \operatorname{sen} 2x$, entonces $y'' + 4y = 0$.

Solución:

$y' = -6\operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x$, entonces $y'' = -12\cos 2x - 4\operatorname{sen} 2x = -4y$.

2.2.6. Ejercicios propuestos

1. Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$:

   a) Usando la definición, calcule $\dfrac{df}{dx}(x)$.

   b) Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(-1,1)$.

   c) Encuentre la ecuación de la recta normal al gráfico de f en el punto $(-1,1)$.

   d) ¿Existe otro punto sobre la curva f donde su tangente sea paralela a la tangente en $(-1,1)$?

2. Usando la definición de derivada, analice la existencia de la derivada en el origen para las funciones:

a) $y = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

b) $y = \cos \sqrt{x}$

3. Derive las siguientes funciones usando las fórmulas de derivadas:

   a) $\dfrac{3x^5 - 4x^3 + 2x - 6}{x^2 - 3x + 9}$.

   b) $\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

   c) $\sqrt{\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}}$.

   d) $\sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$.

   e) $\operatorname{sen}(4x^4 + 3x^2 - 6)$.

   f) $\sqrt{\dfrac{6}{\operatorname{sen} x \cos 5x}}$.

   g) $\cos \tan(x^2 - 5x + 1)$.

   h) $\tan(x^2 + 1)^o$, la función está expresada en grados.

4. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes y normales a la curva $y(x)$ en el punto (x_0, y_0).

   a) $y(x) = x^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$; $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

5. Encuentre los puntos de tangencia entre las curvas:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = -\dfrac{1}{x}$.

6. Dada la función $y_n(x) = x^n$:

   a) Grafique en un mismo diagrama y_2, y_3 e y_4.

   b) Calcule $y_n'(x)$.

   c) La tangente en el punto $(1, 1)$ a la curva y_n corta al eje de las abscisas en $(z, 0)$, calcule $\lim\limits_{n \to \infty} y_n(z)$.

   d) ¿ Para qué punto (x_n, y_n) de la curva y_n su tangente es paralela a la secante que pasa por $(0, 0)$ y $(1, 1)$?

e) Calcule $\lim_{n\to\infty} y_n$.

7. Determine una función polinomial de grado seis de modo que en los puntos $(1,1)$, $(-1,1)$ la tangente sea horizontal y que además pase por el origen.

8. Dada la función $y(x) = x\sqrt[n]{\cos x}$, calcule: $y(0), y'(0), y''(0), y'''(0)$.

9. Dada una parábola $y = ax^2 + bx + c$.

   a) ¿Desde qué puntos se puede trazar dos tangentes a la curva?

   b) ¿Desde qué puntos puede trazarse solamente una tangente a la curva?

   c) ¿Desde qué puntos no se puede trazar ninguna tangente a la curva?

10. Dada la función:
$$f(x) = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2},$$
con $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$.

    a) ¿En qué puntos la función f no es derivable ? (ver ejercicios resueltos de la sección 3.4).

    b) ¿En qué puntos la función f tiene tangente paralela al eje X ?

11. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $f(x) = |x|^k$. Demuestre que $f(x)$ es de clase $C^{(n)}$ si $n < k$, pero $f(x)$ no es clase $C^{(n)}$ si $n > k$. ¿Qué sucede para $n = k$?