Grupo de Estudio Matemática

Preparación Examen: Evaluación A2

Prof. Gonzalo Campos
Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas

Tabla de especificaciones – Evaluación A2

Desglose por contenidos:

Unidad temática	Indicadores de desempeño Información extraída del programa del curso	
Modelación matemática.	Identifica variables dependientes, e independiente de una función, en situaciones contextualizadas.	1
	Extrae información, a partir de un contexto científico, con el propósito de comunicar resultados derivados del análisis matemático de dicho contexto.	2
	Modela funciones, a partir de un contexto dado, con énfasis en el modelamiento de una función exponenciales y racionales.	3
	Reconoce y traza gráficas de funciones exponenciales y/o racionales.	4
	Utiliza el proceso de cambio de variables para relacionar un modelo matemático con la recta linealiza de éste.	5
Límite de funciones reales.	Aplica el álgebra de límites y procesos algebraicos para calcular el límite de funciones reales, con coeficiente numéricos y/o literales.	6
	Determina asíntotas verticales y/o horizontales utilizando álgebra de límites.	7
	Utiliza límites notables para determinar otros límites de funciones reales.	8
	Calcula límite de funciones en situaciones contextualizadas, interpretando los resultados obtenidos en el contexto del problema.	9

En un hospital del sur de Chile, los ingresados por problemas respiratorios en la primera semana de Julio es:

$$R(t) = 3t^2 + 5t$$

Donde t se mide en meses.

En una reacción química, se ha determinado que la relación entre la velocidad de reacción (r) y la concentración de un reactivo (c) está dada por la función:

DEPEND.

INDEPEND.

$$r(c) = \frac{2c + 3}{6c + 2}$$

DEPEND.

Para describir la cantidad de calor transferido (Q) entre dos objetos debido a la radiación térmica que emite el de mayor temperatura (T_1) al de menor temperatura (T_2), se plantea la siguiente ecuación:

$$Q = \varepsilon \cdot \sigma \cdot \mathrm{A} \cdot (\mathrm{T_1}^4 - \mathrm{T_2}^4)$$

IND. IND. IND.

Donde ε y σ son constantes.

La Ley de Ohm es una ley básica para entender los fundamentos principales de los circuitos eléctricos, porque establece que la intensidad de corriente (I) que viaja por un material de resistencia R es producida por la diferencia de potencial o voltaje V, de tal modo que:

$$\downarrow V = I \cdot R \downarrow$$

Para un conductor de tipo cable, la resistencia está dada por la siguiente fórmula:

$$\downarrow R = \frac{\rho \cdot L}{A \uparrow}$$

Donde ρ es la resistividad del material, L es la longitud del cable y A el área de la sección transversal del mismo.

Verdadero o falso

Si la intensidad aumenta, aumenta el voltaje. V

Si el área aumenta, aumenta la resistencia. F

Si el área aumenta, aumenta el voltaje. F

Modelo exponencial

Se cultivan bacterias en un ambiente controlado en cuanto a temperatura y humedad, pasando de 300 bacterias (tras 1 hora) a 1000 bacterias (después de 3 horas del inicio). ¿Cuál es la función exponencial de la que se habla? Plantea la misma función con otra base.

t	N
1	300
3	1000

Modelo exponencial

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$$

Se quiere analizar la resistencia de los protozoos a la modificación de temperatura y humedad de un ambiente, obteniéndose que la población va disminuyendo en un 30% cada hora. Si inicialmente habían 630 protozoos, ¿cuál es la función que moldea esta población? Plantea la misma función con otra base.

t	N
0	630
1	$630 \cdot 0{,}7 = 441$
2	$630 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7$
⋮	⋮
x	$630 \cdot 0{,}7^x$

$$\boxed{N(t) = 630 \cdot 0{,}7^x}$$

$$N(0) = N_0 \cdot e^{0 \cdot k} = 630 \Rightarrow 630 \cdot \cancel{e^0} = 630$$

$$N(1) = N_0 \cdot e^{k \cdot 1} = 441 \qquad 630 \cdot e^k = 441$$

$$e^k = \frac{441}{630}$$

$$k = \ln\left(\frac{441}{630}\right)$$

$$\Rightarrow N(t) = 630 \cdot e^{\ln\left(\frac{441}{630}\right) \cdot t}$$

$$\boxed{N(t) = 630 \cdot \left(\frac{441}{630}\right)^t}$$

$$\frac{441}{630} \rightarrow 0{,}7$$

Ítem I: Determine la recta linealizada del modelo propuesto.

1. $f(x) = 7e^{5x}$ EXP.
2. $f(x) = e^{x-3}$
3. $f(x) = 5x^4$
4. $f(x) = 0.8x^6$
5. $f(x) = \frac{3x-2}{x}$
6. $f(x) = \frac{7x}{x+5}$
7. $f(x) = \frac{x-5}{2x-14}$

SEMILOGARITMICO

① $y = 7e^{5x} \quad / \ln$

$\underbrace{\ln(y)}_{} = \ln(7 \cdot e^{5x})$

$z = \ln(7) + \ln(e^{5x})$

$z = \underbrace{\ln(7)}_{A} + \underbrace{5}_{B}\underbrace{x}_{V}$

③ $y = 5x^4$

$\ln(y) = \ln(5 \cdot x^4)$

$\underbrace{\ln(y)}_{z} = \underbrace{\ln(5)}_{A} + \ln(x^4)$

$+ \underbrace{4}_{B} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{V}$

$z = \ln(5) + 4 \cdot V$

LOGARITMICO.

Ítem I: Determine la recta linealizada del modelo propuesto.

1. $f(x) = 7e^{5x}$
2. $f(x) = e^{x-3}$
3. $f(x) = 5x^4$
4. $f(x) = 0.8x^6$
5. $f(x) = \frac{3x-2}{x}$
6. $f(x) = \frac{7x}{x+5}$
7. $f(x) = \frac{x-5}{2x-14}$

5

$$y = \frac{3x-2}{x}$$

$$y = \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{2}{x}$$

$$y = 3 - 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$z = y$

$V = \frac{1}{x}$

$$z = A + BV$$

$$z = 3 - 2V$$

6

$$y = \frac{7x}{x+5}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{x+5}{7x}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{\cancel{x}}{7\cancel{x}} + \frac{5}{7x}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{7} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{x}$$

$z = \frac{1}{y}$

$V = \frac{1}{x}$

$$z = \frac{1}{7} + \frac{5}{7}V$$

Fracciones parciales

$$\frac{3x-1}{(x+3)\cdot(x-2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \quad /\cdot (x+3)\cdot(x-2)^2$$

$$3x-1 = A\cdot(x-2)^2 + B\cdot(x+3)\cdot(x-2) + C\cdot(x+3)$$

$$3x-1 = A\cdot(x^2-4x+4) + B\cdot(x^2+x-6) + C\cdot(x+3)$$

$$3x-1 = Ax^2 - 4Ax + 4A + B\cdot x^2 + Bx - 6B + Cx + 3C$$

$$\begin{cases} 0 = A + B \longrightarrow B = -A \\ 3 = -4A + B + C \\ -1 = 4A - 6B + 3C \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 3 &= -4A - A + C \\ -1 &= 4A + 6A + 3C \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 3 &= -5A + C \quad \cdot 2 \\ -1 &= 10A + 3C \end{aligned}$$

$$6 = -10A + 2C$$

$$5 = \cancel{0A} + 5C$$

$$\boxed{C = 1}$$

$$3 = -5A + 1$$

$$2 = -5A$$

$$\boxed{A = -2/5}$$

$$\boxed{B = 2/5}$$

Fracciones parciales

$$\frac{3x-1}{(x+3)\cdot(x-2)^2} = \frac{-2}{5(x+3)} + \frac{2}{5(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2}$$

División de polinomios:

$$\frac{x^4-7x^2-6x}{(x-2)} = \underbrace{x^3+2x^2-3x-12}_{\text{COCIENTE}} - \frac{24}{x-2}$$

RESTO

$$x^4-7x^2-6x : x-2 = x^3+2x^2-3x-12$$

$$-(x^4-2x^3)$$

$$+2x^3-7x^2$$

$$-(2x^3-4x^2)$$

$$-3x^2-6x$$

$$-\ \ -3x^2+6x$$

$$-12x$$

$$-\ \ -12x+24$$

$$-24$$

División de polinomios:

$$\frac{x^4 - 7x^2 - 6x}{x - 3} = x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x^4 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 & \\
 & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 & \\
 & & 3 & -9 & 6 & 0 & \\
\hline
 & 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\
 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 & \text{RESTO} &
\end{array}$$

$x^4 - 7x^2 - 6x$

$3^4 - 7 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3$

$81 - 7 \cdot 9 - 18$

$81 - 63 - 18 = 0$

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 7x - 5}{x^2 - 6x + 5} = \frac{x^3 + 3x^2 + 7x - 5}{(x-5)(x-1)}$$

Análisis de límites

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ 8 - 2x, & 2 < x < 4 \\ 4, & x \geq 4 \end{cases}$$

¿Existe el límite de f cuando x tiende a 2? ¿Y cuándo tiende a 4?

- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$

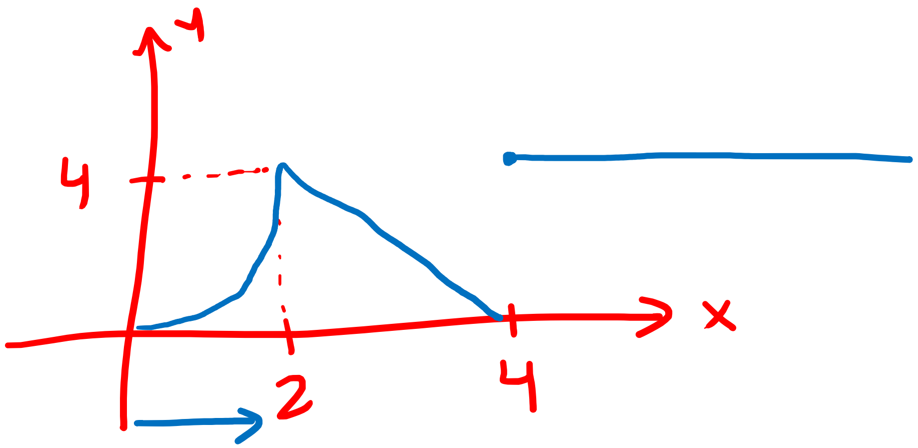
$x < 2$

- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 8 - 2x = 8 - 2 \cdot 2 = 4$

Sí existe:

$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$

Análisis de límites



$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 2\\ 8-2x, & 2<x<4 \\ 4, & x\ge 4\end{cases}$$

¿Existe el límite de f cuando x tiende a 2? ¿Y cuándo tiende a 4?

IZQ.

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4} 8-2x = 8-2\cdot 4=0$$

DER.

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+} 4 = 4$$

NO EXISTE EL LÍMITE EN $x=4$.

Cálculo de límites

DEL TIPO $0/0$.
POR LHOPITAL:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x\to 4} \frac{2x-5}{2x-2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(x-4)}\cdot(x-1)}{\cancel{(x-4)}\cdot(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{x-1}{x+2}$$

$$= \frac{4-1}{4+2} = \frac{3}{6} = 1/2.$$

Cálculo de límites

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(3x)}{5e^{3x}-5} = \frac{1}{5}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(3x)}{e^{3x}-1}\ \begin{matrix} :3x \\ :3x \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\text{sen}(3x)}{3x}\to 1}{\frac{e^{3x}-1}{3x}\ \ 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(3x)}{5e^{3x}-5} = \frac{1}{5}}$$

- $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\text{sen}\,\alpha}{\alpha} = 1$
- $\lim_{p\to 0}\frac{e^{p}-1}{p} = 1$

ES DEL TIPO $\frac{0}{0}$.

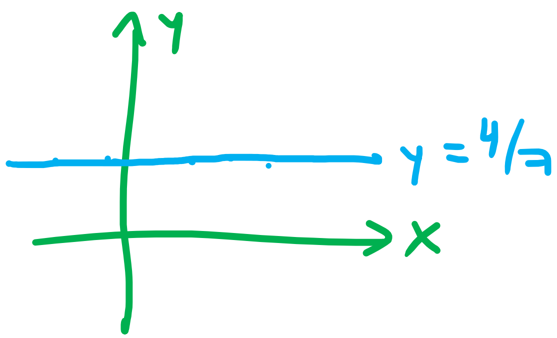
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)\cdot \cancel{3}}{5\cdot e^{3x}\cdot \cancel{3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)}{5\cdot e^{3x}} = \frac{\cos(0)}{5\cdot e^{0}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(3x)}{5e^{3x}-5} = \frac{1}{5}}$$

Asíntotas

$$f(x)=\frac{4x^2-8x-60}{7x^2-21x-70}=\frac{4(x^2-2x-15)}{7(x^2-3x-10)}=\frac{4\cdot(x-5)\cdot(x+3)}{7\cdot(x-5)\cdot(x+2)}$$



HORIZONTALES:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-8x-60}{7x^2-21x-70}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4\cancel{(x-5)}(x+3)}{7\cancel{(x-5)}(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4(x+3)}{7(x+2)}$$

TIPO $\frac{+\infty}{+\infty}$ LHÔPITAL

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{7}=\frac{4}{7}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+12}{7x+14}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(4+\frac{12}{x}\right)}{\cancel{x}\left(7+\frac{14}{x}\right)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{4+0}{7+0}=4/7}$$

$\therefore$ $y=4/7$ ES UNA ASÍNTOTA HORIZONTAL.

Asíntotas

$$f(x) = \frac{4x^2 - 8x - 60}{7x^2 - 21x - 70} = \frac{4(x-5)(x+3)}{7\underbrace{(x-5)}_{0}\underbrace{(x+2)}_{0}}$$

VERTICALES

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{4\cancel{(x-5)}(x+3)}{7\cancel{(x-5)}(x+2)}$$

$$= \frac{4\cdot(5+3)}{7\cdot(5+2)} = \frac{4\cdot 8}{7\cdot 7} = \frac{32}{49}$$

$x=5$ NO ES ASINTOTA VERTICAL.

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{4\cancel{(x-5)}(x+3)}{7\cancel{(x-5)}(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{4(x+3)}{7(x+2)} = +\infty$$

$\to x=-2$ ES ASINTOTA VERTICAL.