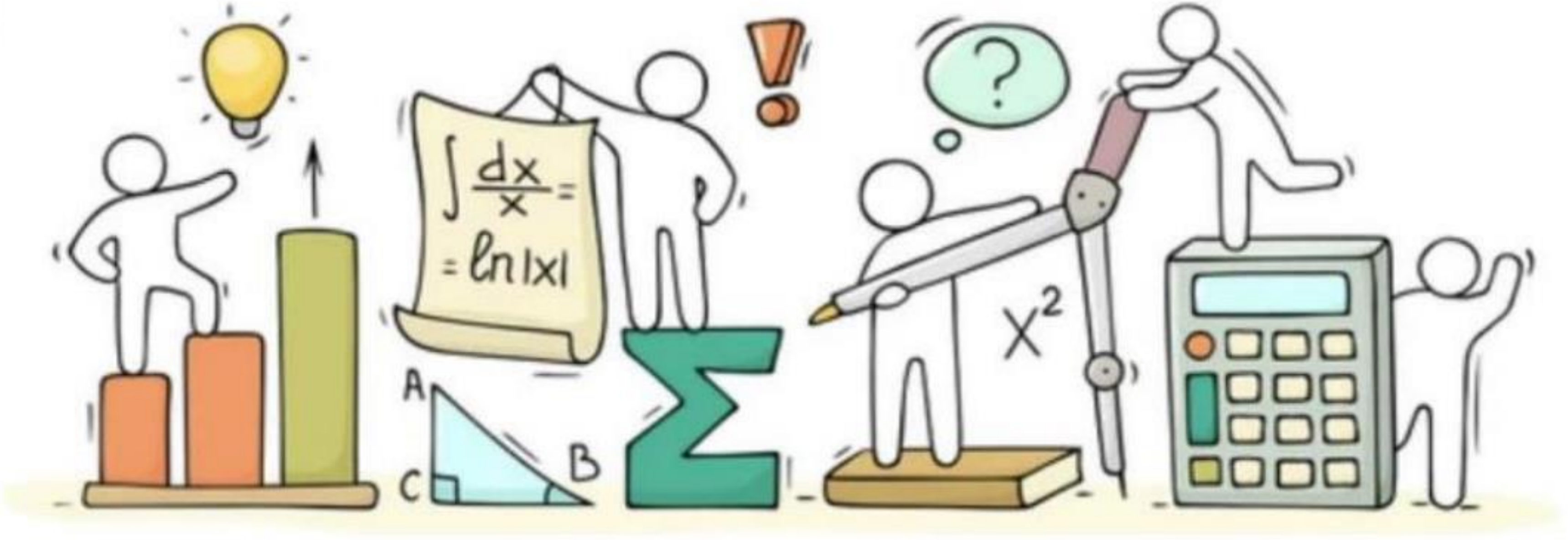
UNIVERSIDAD DE CHILE



Grupo de Estudio Matemática

Preparación Examen: Evaluación A3

Prof. Gonzalo Campos

Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas

Tabla de especificaciones – Evaluación A3

Unidad temática	Indicadores de desempeño Información extraída del programa del curso	
Derivada de funciones reales.	Aplica el álgebra de límites y procesos algebraicos para calcular la derivada por definición.	1
	Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función.	2
	Aplica las reglas de derivación, tales como; suma/resta, producto/cociente, regla de la cadena en situaciones contextualizadas.	3
	Determina derivada de funciones literales, reconociendo cuales son variables y cuales son constantes.	4
	Determina la razón de cambio de funciones compuestas (variables relacionadas) dados los modelos matemáticos que las relacionan.	5
	Interpreta el resultado de la derivada de funciones en situaciones contextualizadas a las ciencias.	6

Determina la derivada de las siguientes funciones.

$$T(x) = x^2 \cdot e^x$$

$$T'(x) = \frac{dT}{dx} = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$$

$$R(p) = \frac{\cos(6p) \cdot e^{-3p}}{p^2}$$

$$R'(p) = \frac{(-\operatorname{sen}(6p) \cdot 6 \cdot e^{-3p} + \cos(6p) \cdot e^{-3p} \cdot -3) \cdot p^2 - \cos(6p) \cdot e^{-3p} \cdot 2p}{p^4}$$

$$R'(p) = \frac{-6\operatorname{sen}(6p) \cdot e^{-3p} - 3\cos(6p) \cdot e^{-3p} \cdot p^2 - 2\cos(6p) \cdot e^{-3p} \cdot p}{p^4}$$

Determina la derivada de las siguientes funciones.

$$T(p) = \cos(6p) \cdot e^{-3p}$$

$$T'(p) = -\operatorname{sen}(6p) \cdot 6 \cdot e^{-3p} + \cos(6p) \cdot e^{-3p} \cdot -3$$

$$A(x) = \ln(\cos(x^3-1))$$

$$A'(x) = \frac{1}{\cos(x^3-1)} \cdot -\operatorname{sen}(x^3-1) \cdot 3x^2$$

Determina las derivadas de las siguientes funciones.

$$B = \frac{3pL + 7mL^2}{5n - m}$$

$$\frac{dB}{dp} = \frac{3L + 0}{5n - m}$$

$$\boxed{\frac{dB}{dp} = \frac{3L}{5n - m}}$$

$$\boxed{\frac{dB}{dL} = \frac{3p + 14m \cdot L}{5n - m}}$$

$$\frac{dB}{dm} = \frac{7L^2 \cdot (5n - m) - (3pL + 7mL^2) \cdot -1}{(5n - m)^2}$$

$$\boxed{\frac{dB}{dm} = \frac{7L^2 (5n - m) + (3pL + 7mL^2)}{(5n - m)^2}}$$

Determina las derivadas de las siguientes funciones.

$$T = \frac{\cos(3a - p^2)}{x^5}$$

Es decir,

$$T'(x) =$$

$$T'(a) =$$

$$T'(p) =$$

Determina la recta tangente de la función R:
$R(n) = 3n \cdot e^n$ en $n = -1$.

• PUNTO: $R(-1) = 3 \cdot -1 \cdot e^{-1}$

$$\boxed{R(-1) = \frac{-3}{e}}$$

• PENDIENTE: $R'(n) = 3 \cdot e^n + 3n \cdot e^n$

$R'(-1) = 3e^{-1} + 3 \cdot -1 \cdot e^{-1}$

$R'(-1) = 0$

$R'(-1) = 3e^{-1} - 3e^{-1} = 0$

$\rightarrow y - \underbrace{R(-1)}_{\checkmark} = \underbrace{R'(-1)}_{m} \cdot (n+1)$

$y - R(-1) = R'(-1) \cdot (n+1)$

$y - R(-1) = 0$

$y = R(-1)$

$$\boxed{y = \frac{-3}{e}}$$

RECTA TANGENTE

Determina la recta tangente de la función R:
$R(n) = 3n \cdot e^n$ en $n = 1$.

PUNTO: $R(1) = 3 \cdot 1 \cdot e^1$

$\boxed{R(1) = 3 \cdot e}$

PENDIENTE:

$R'(n) = 3 \cdot e^n + 3n \cdot e^n$

$R'(1) = 3e^1 + 3 \cdot 1 \cdot e^1$

$R'(1) = 3e + 3e$

$\boxed{R'(1) = 6e}$

$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$y - R(1) = R'(1) \cdot (n - 1)$

$y - 3e = 6e \cdot (n - 1)$

$y = 6e \cdot n - 6e + 3e$

$\boxed{y = \underbrace{6e}_{\text{PENDIENTE}} \cdot n \underbrace{- 3e}_{\text{INTERCEPTO}}}$

Determina la recta tangente de la función L:

$L(a) = \frac{3-a^3}{(a+2)}$ en a = 2.

Análisis de funciones

$$T(x) = \frac{3x+5}{2x-1}$$

¿Para qué valores de x, T = 3?

¿Es posible que T sea 0?

¿Cuál es el límite de la función cuando x va al infinito?

¿Qué significado tiene el resultado del límite cuando x va a 1/2?

Cuando el aire se expande de forma adiabática (no gana ni pierde calor), su presión P y volumen V se relacionan mediante la ecuación $P \cdot V^{1,3} = C$, donde C es una constante.

a) ¿Cómo se define la función $V(P)$?

b) ¿Cuál es la razón de cambio de la presión respecto al volumen?

c) De acuerdo con los resultados anteriores, ¿es cierto que cuando la presión aumenta, el volumen también? Explica basándote en la derivada.

d) Suponga que en cierto instante el volumen es $400\ cm^3$, la presión es $80kPa$ y está disminuyendo a razón de $10kPa/min$. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen, en ese instante?

A

$$P \cdot V^{1,3} = C$$

$$V^{1,3} = \frac{C}{P} \qquad /(\ )^{1/1,3}$$

$$\boxed{V(P) = \left(\frac{C}{P}\right)^{1/1,3}}$$

B

$$P \cdot V^{1,3} = C$$

$$P(V) = \frac{C}{V^{1,3}} = \underline{C \cdot V^{-1,3}}$$

$$P'(V) = C \cdot -1,3 \cdot V^{-1,3-1}$$

$$P'(V) = -1,3C \cdot V^{-2,3}$$

$$\boxed{P'(V) = \frac{-1,3C}{V^{2,3}}}$$

C

No es cierto, pues la derivada de la presión respecto al volumen es negativa. Lo que indica que, cuando la presión aumente, el volumen disminuirá.

$$\overset{\uparrow}{P} \cdot \overset{\downarrow}{V}^{1,3} = \overset{=}{C}$$

Cuando el aire se expande de forma adiabática (no gana ni pierde calor), su presión P y volumen V se relacionan mediante la ecuación $P \cdot V^{1,3} = C$, donde C es una constante.

a) ¿Cómo se define la función $V(P)$?

b) ¿Cuál es la razón de cambio de la presión respecto al volumen?

c) De acuerdo con los resultados anteriores, ¿es cierto que cuando la presión aumenta, el volumen también? Explica basándote en la derivada.

d) Suponga que en cierto instante el volumen es $400\ cm^3$, la presión es $80kPa$ y está disminuyendo a razón de $10kPa/min$. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen, en ese instante?

$V = 400 cm^3$

$P = 80 kPa$

$\frac{dP}{dt} = -10 \frac{kPa}{min}$

$\frac{dV}{dt}$

$P = \frac{C}{V^{1,3}}$

$80 = \frac{C}{400^{1,3}}$

$\boxed{C = 193093}$

$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dV} \cdot \frac{dV}{dt}$

$-10 = -\frac{1,3 C}{V^{2,3}} \cdot \frac{dV}{dt}$?

$+10 = +1,3 \cdot \frac{193093}{400^{2,3}} \cdot \frac{dV}{dt}$

$\boxed{38,46 = \frac{dV}{dt}}$

Dos átomos interactúan vía Potencial Lennard-Jones 6-12. Esto es, la energía de interacción V depende del espacio entre los átomos r, según la función:

$$V(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^{6}}, \qquad r > 0$$

Donde $a \ y \ b$ son constantes positivas.

a) Determine $\frac{dV}{dr}$ e interprete el resultado en el contexto.

b) Cuando la distancia es $r = 3\ m$, ésta disminuye a razón de 0,5 m/s, en función del tiempo. Determina $\frac{dV}{dt}$ e interprete el resultado en el contexto. (Considere a y b valores positivos)

Dos átomos interactúan vía Potencial Lennard-Jones 6-12. Esto es, la energía de interacción V depende del espacio entre los átomos r, según la función:

$$V(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^{6}}, \qquad r > 0 \longrightarrow V(r) = ar^{-12} - br^{-6}$$

Donde a y b son constantes positivas.

a) Determine $\frac{dV}{dr}$ e interprete el resultado en el contexto.

b) Cuando la distancia es $r = 3\ m$, ésta disminuye a razón de 0,5 m/s, en función del tiempo. Determina $\frac{dV}{dt}$ e interprete el resultado en el contexto. (Considere a y b valores positivos)

A

$$\Rightarrow \frac{dV}{dr} = a \cdot -12\, r^{-13} - b \cdot -6 \cdot r^{-7}$$

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{12a}{r^{13}} + \frac{6b}{r^{7}}$$

$\frac{dV}{dt}$ es la razón de cambio de la energía de interacción V entre dos átomos, en función de la distancia r que los separa.
No es posible indicar si aumenta o disminuye, pues no conocemos a y b.

Dos átomos interactúan vía Potencial Lennard-Jones 6-12. Esto es, la energía de interacción V depende del espacio entre los átomos r, según la función:

$$V(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6}, \qquad r > 0$$

Donde a y b son constantes positivas.

a) Determine $\frac{dV}{dr}$ e interprete el resultado en el contexto.

b) Cuando la distancia es $r = 3\ m$, ésta disminuye a razón de 0,5 m/s, en función del tiempo. Determina $\frac{dV}{dt}$ e interprete el resultado en el contexto. (Considere a y b valores positivos)

$$\frac{dr}{dt}$$

B

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(-\frac{12a}{3^{13}} + \frac{6b}{3^7}\right) \cdot (-0{,}5)$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = \frac{6a}{3^{13}} - \frac{3b}{3^7}}$$

$\frac{dV}{dt}$ es la razón de cambio de la energía de interacción V entre dos átomos, en función del tiempo.
No es posible indicar si aumenta o disminuye, pues no conocemos a y b.

En una reacción química, se ha determinado que la relación entre la velocidad de reacción (r) y la concentración de un reactivo (c) está dada por la función:

$$r(c) = \frac{2c + 3}{6c + 2}$$

donde la concentración del reactivo se expresa en mol/L y la velocidad de reacción en (mol/(L·s).

A) ¿Cómo es la variación de la velocidad, respecto a la concentración del reactivo?

B) Si la concentración aumenta, ¿la velocidad será mayor o menor? Explica utilizando el concepto de la derivada.

C) Si por medio de un proceso de entrega de calor la concentración aumenta a un ritmo de 0,6 mol/s. ¿Cuál es la razón de cambio de la velocidad de la reacción cuando la concentración es 3 mol?