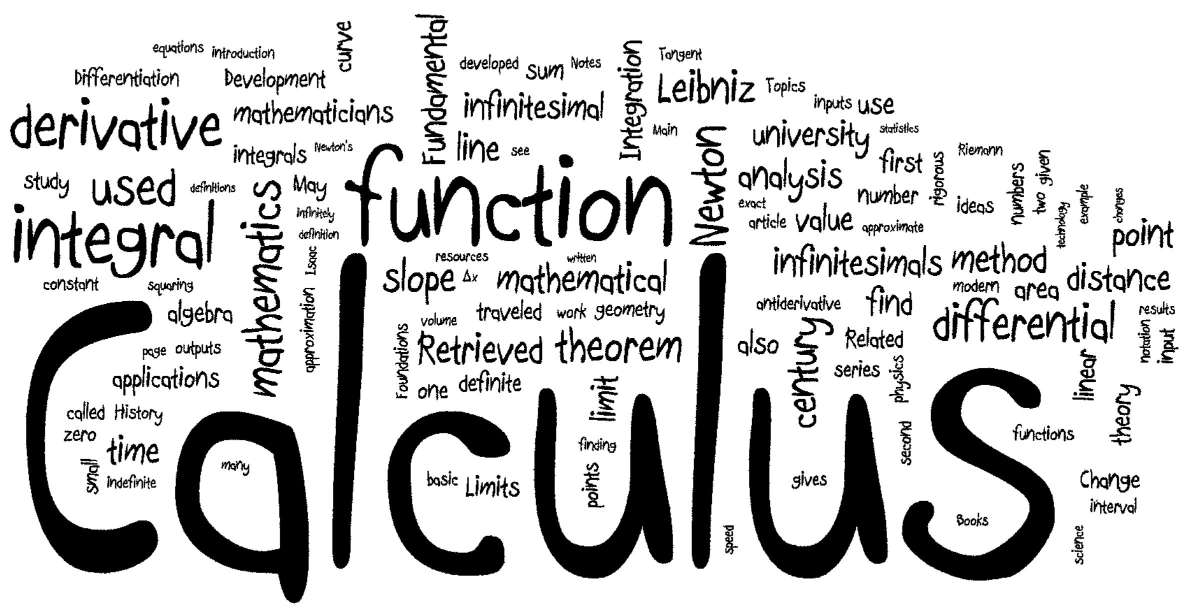
Resolución de problemas en Cálculo:

Un enfoque situado desde las Ciencias Biológicas



Autores: Dra. Prof. Ma. Angélica Vega U.
Ing. Agr. Prof. Gustavo Castro P.

Colaboradores: Orlando Campos J.
Julio Gallardo P.

1ra. edición

2018

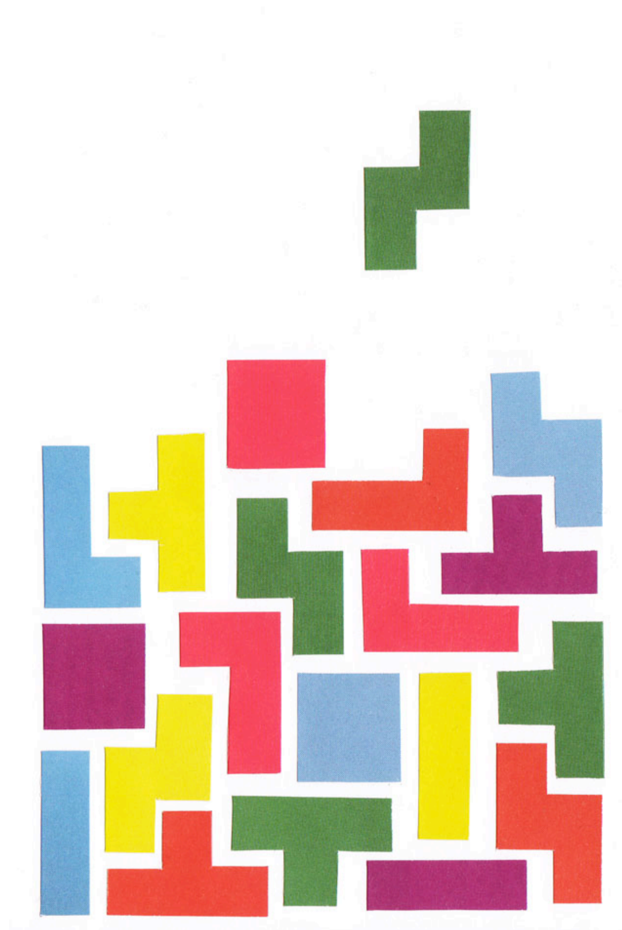
¡Bienvenidas y Bienvenidos al curso!

Estimado(a)s Estudiantes: El equipo docente del curso de Introducción al Cálculo, te brinda la más cordial bienvenida a este curso. Como equipo, esperamos poder cumplir con tus expectativas respecto de los contenidos y las habilidades que deseas aprender o potenciar, para así desempeñarte de forma efectiva como futuro(a) profesional.
Es importante que sepas que en este documento encontrarás diferentes actividades de aprendizaje que te servirán para poner en práctica los conocimientos socializados y construídos durante las sesiones teóricas.

¿Qué puedo esperar de este recurso?
Este documento, te servirá para complementar lo aprendido en las sesiones teóricas. En este contexto, el apunte te permitirá resolver problemas rutinarios (ejercicios) y problemas contextualizados (relacionados con temáticas propias de tu carrera), los cuales deberás resolver aplicando, siempre, una clara y rigurosa metodología de trabajo.
Debes tener en cuenta que cada sección de este documento contempla actividades de aprendizaje, que han sido diseñadas en base a una secuencia lógica de los contenidos que serán revisados durante el semestre.

¿Cómo puedo usar este recurso?

- Es importante que asistas de forma sistemática a las clases teóricas, pues en ellas te brindaremos los conceptos teóricos necesarios para abordar las diferentes situaciones de desempeño.
- Durante las clases teóricas focalízate en recoger las estrategias o metodologías que te sugerirá el profesor, más que a anotar al pie de la letra, los contenidos que serán expuestos.
- Utiliza lápices de colores o post-it para escribir estas estrategias. El hecho de tenerlas ordenadas y sistematizadas, será de mucha utilidad para tu aprendizaje en tu primer año.
- Recuerda que siempre tendrás acceso al material expuesto durante la hora teórica, por lo que valor agregado de asistir a clases está en que puedas discutir, consultar y aclarar dudas sobre los contenidos o metodologías expuestas en clases.
- Sé riguroso(a) y ordenado(a) para abordar las diferentes actividades de aprendizaje que se proponen en este documento. Te sugerimos utilizar un block de matemáticas y una carpeta, ya que de esta forma podrás tener todos tus documentos ordenados al momento de preparar tus evaluaciones.
- Si puedes, utiliza algún dispositivo electrónico *tablet* o *smartphone* para escanear los códigos QR presentes en cada una de las secciones de este documento. Estos códigos te permitirán explorar videos con diferentes usos y aplicaciones sobre los contenidos que se trabajarán. Recuerda además que estos videos estarán disponibles en la plataforma virtual.



- Registra los ejercicios o problemas de contexto que no puedas resolver y consúltalos con tu profesor(a), inmediatamente a la clase siguiente o a través de la plataforma U-Cursos.

Creemos que con estas orientaciones tanto tú como nosotros, tendremos mayor evidencia del nivel de avance que irás alcanzando en tu proceso formativo.

Cordialmente,
Equipo docente

ÍNDICE

Capítulo 1. Números Reales

Este capítulo permitirá que cada estudiante evidencie los siguientes desempeños:

- Aplica la operatoria básica (suma, resta, producto, cuociente, factorización) en expresiones algebraicas, a través de problemas rutinarios.
- Establece las condiciones necesarias para que una expresión algebraica pertenezca al cuerpo de los números reales.
- Analiza las restricciones de una expresión algebraica para que ésta represente un número real.
- Analiza la existencia de soluciones en ecuaciones (lineales, cuadráticas, radicales y polinomios factorizables), a través de problemas rutinarios.
- Resuelve ecuaciones (lineales, cuadráticas, radicales y polinomios factorizables) en problemas rutinarios.
- Resuelve inecuaciones (lineales, cuadráticas, con valor absoluto, radicales y polinomios factorizables) en problemas rutinarios.

Propósito del recurso

Este recurso de apoyo al aprendizaje reúne los conceptos teóricos básicos que definen a los números reales, los axiomas de campos y aquellos asociados a las relaciones de orden en $\mathbb{R}$. Es importante que manejes estas propiedades y axiomas para así abordar de forma estratégica cada uno de los desafíos y problemas que propone esta unidad temática.

Como debes recordar, los axiomas, son verdades evidentes que utilizas como parte de la argumentación al hacer demostraciones, algunos libros las nombra como axiomas, postulados o premisas, no requieren ser demostrados, se aceptan como ciertos.

Bibliografía

Barnett, R.; Ziegler, M. And Byleen K. Precálculo: funciones y gráficas. Editorial. McGraw-Hill. 2000. Edición: 4ª.

Haefner, J.W. Modeling Biological Systems: Principles and Applications, 2nd ed., New York: Springer Science+Business Media, 2005.

Joseph, E. Cálculo, *Editorial* : Pearson Educación, 2007. Edición: 9ª.

Neuhauser, C. Calculus for biology and medicine. 3rd Edition, Ed. Prentice Hall, 2010.

Thomas, Jr., George B. Cálculo. Una variable. Undécima edición, Editorial Pearson educación, México, 2006.

Ritchey, N., Lial, M. Calculus with Applications for the Life Sciences. 1st Edition, Ed. Pearson, 2003.

Sección 1. Fundamentos teóricos

I. Axiomas de campo

1. Propiedades de grupo aditivo en $\mathbb{R}$

a. **Clausura o cerradura:** $\mathbb{R}$ es cerrado bajo la suma.

$$Si\ x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow x + y \in \mathbb{R}$$

b. **Asociatividad de la suma:** $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$ **,** se verifica:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

c. **Existe elemento neutro para la suma:** Existe el número $0 \in \mathbb{R}$, tal que:

$$x + 0 = 0 + x = x, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

d. **Todo número real posee un inverso aditivo:** $\forall\ \boldsymbol{x \in}\ \mathbb{R}, \exists\ \boldsymbol{y \in}\ \mathbb{R},\ \ tal\ que$

$$x + y = y + x = 0$$

En lenguaje matemático, el número y se denota por $-x$.

Con estas propiedades los reales $(\mathbb{R}, +)$ tiene estructura de grupo. Si agregamos la conmutatitividad, el par $(\mathbb{R}, +)$, recibe el nombre de grupo abeliano aditivo o grupo conmutativo aditivo.

e. **Conmutatividad de la suma:** $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, se verifica que:

$$x + y = y + x$$

2. Propiedades de grupo multiplicativo en $\mathbb{R}$

a. **Clausura o cerradura:** $\mathbb{R}$ es cerrado bajo el producto.

$$Si\ \ x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}$$

b. **Asociatividad del producto:** $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$, se verifica

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

c. **Existe elemento neutro para el producto distinto del neutro aditivo:** Existe $1 \in \mathbb{R}$, tal que $1 \neq 0$ que satisface:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

d. **Todo número distinto de 0, posee un inverso multiplicativo:**

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, si\ x \neq 0, \Longrightarrow\ \exists\ z \in \mathbb{R}, tal\ que\ x \cdot z = 1$$

Con estas propiedades los reales $(\mathbb{R},\cdot)$ tiene estructura de grupo. Si agregamos la conmutatitividad, el par $(\mathbb{R},\cdot)$, recibe el nombre de grupo abeliano multiplicativo.

e. **Conmutatividad del producto:** $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, se verifica:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

f. **Distributividad del producto sobre la suma:** $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, se verifica

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

En base a las propiedades señalas anteriormente, la estructura $(\mathbb{R}, +,\cdot)$ es un campo.

II. Axiomas de orden

Sean $x, y \in \mathbb{R}$, se definen las relaciones $<, >, \leq, \geq$ por:

a. $x < y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{R}^+$
b. $x > y \Leftrightarrow y < x \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{R}^+$
c. $x \leq y \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y)$
d. $x \geq y \Leftrightarrow (x > y) \vee (x = y)$

Propiedades relevantes

Para abordar metodológicamente los ejercicios que involucran inecuaciones debes considerar las siguientes propiedades:

a. $x < y \wedge a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x + a < y + a$

b. Si $x < y \wedge a > 0 \Rightarrow a \cdot x < a \cdot y$

c. Si $x < y \wedge a < 0 \Rightarrow a \cdot x > a \cdot y$ (*)

(*) Esta última propiedad señala que es posible multiplicar por número ambos lados de una desigualdad, si el número es positivo, la desigualdad no cambia su sentido (o signo). Si el número es negativo, la desigualdad cambia su sentido o signo.

d. Propiedades: Si se tiene:

i) $x \cdot y < 0 \Leftrightarrow (x < 0) \wedge (y > 0) \vee (x > 0) \wedge (y < 0)$

ii) $x \cdot y > 0 \Leftrightarrow (x > 0) \wedge (y > 0) \vee (x < 0) \wedge (y < 0)$

e. Propiedades del Inverso multiplicativo. Si se tiene:

i) $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

ii) $x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$

f. Si $0 < x < y$, entonces $x^{-1} > y^{-1}$

Con estas propiedades, el conjunto de los números reales es un campo ordenado.

III. Definición de intervalos

A continuación se presenta la notación matemática utilizada para representar los conjuntos que satisfacen una desigualdad. Presta atención a cada una de ellas, pues así deberás presentar los resultados derivados de los diferentes ejercicios que se trabajarán en esta unidad.

Para clasificar los intervalos resulta necesario conocer que éstos pueden ser: (i) acotados o (ii) no acotados.

(i) Intervalos acotados.

- Intervalo abierto por ambos extremos:

$$]a, b[= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / a < x < b\}$$

- Intervalo cerrado por ambos extremos:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / a \leq x \leq b\}$$

- Intervalo cerrado por la derecha y abierto por la izquierda:

$$]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / a < x \leq b\}$$

- Intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha:

$$[a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / a \leq x < b\}$$

(i) Intervalos no acotados.

- $]-\infty, a] = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \ /x \leq a\}$
- $]-\infty, a[= (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \ /x < a\}$
- $[a, +\infty[= [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ /x \geq a\}$
- $]a, +\infty[= (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ /x > a\}$

Importante:

Es probable que al consultar la bibliografía del curso notes que la notación utilizada por los autores del texto difiere de la que hemos trabajado en clases. Presta atención a las siguientes orientaciones, pues dicha notación es homóloga a la nuestra:

Representar un intervalo de la forma: $]\ \ ]$,es equivalente a $(\ \ ]$.

De forma análoga al ejemplo anterior, representar un intervalo de la forma: $[\ \ [$,es equivalente a escribirlo de esta manera $[\ \ )$.

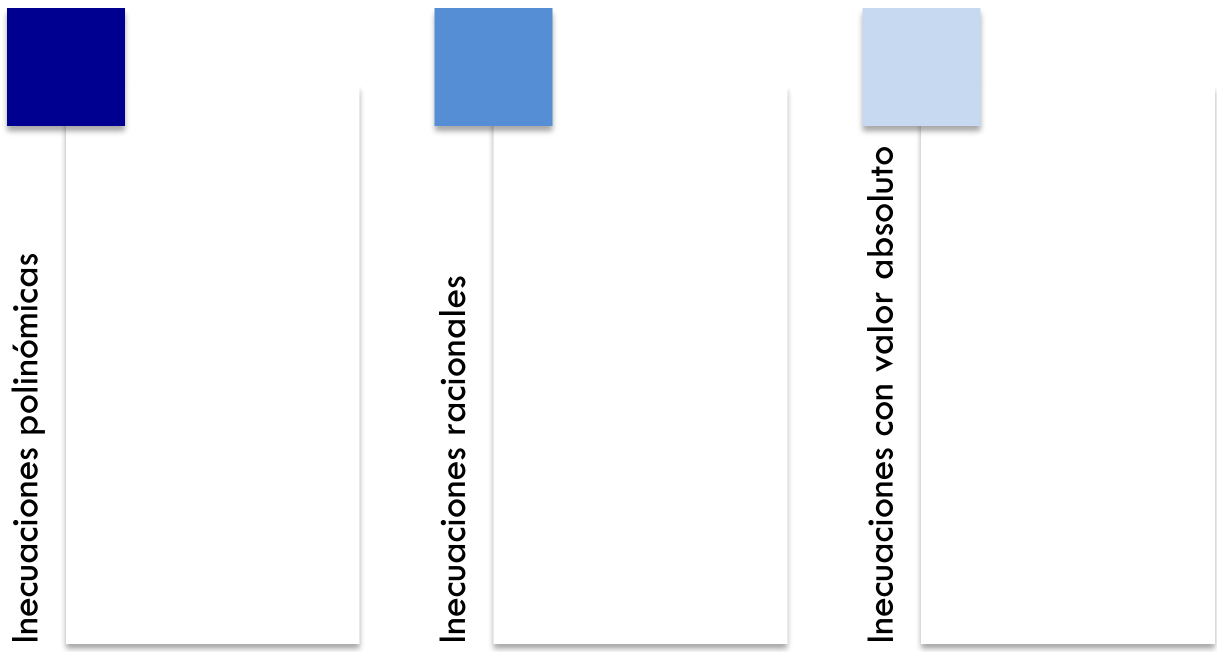
Sección 2. Inecuaciones

1. Concepto de inecuación

Presta atención a las siguientes orientaciones, pues ellas te brindarán información relevante sobre los aprendizajes que resultan claves para abordar de forma efectiva los futuros desafíos que propone este curso, y que por cierto, están relacionados con las diferentes aplicaciones que existen en el ámbito de las ciencias.

Preguntas claves:

¿Qué son las inecuaciones?	**Debes saber que las inecuaciones representan una desigualdad en la que intervienen una o más cantidades genéricas.**
¿Qué resulta al resolver una inecuación?	Cuando resuelves una inecuación estás determinando para qué valores, de las incógnitas genéricas, se satisface la desigualdad.
¿Existen diferentes tipos de inecuaciones?	Así es, dependiendo del número de cantidades genéricas es posible observar inecuaciones de una o más incógnitas, y entre las de una incógnita encontrarás inecuaciones de primer, segundo, tercer o mayor grado.
¿Qué tipo de inecuaciones aprenderé a trabajar en el contexto de este curso?	A continuación se presenta un esquema que considera los diferentes tipos de inecuaciones que se trabajarán durante las próximas sesiones:



Completa cada columna del esquema con características asociadas a cada tipo de inecuación. Para ello, utiliza como recurso tus apuntes y las orientaciones emanadas durante el transcurso de la clase teórico-práctica.

2. Inecuaciones polinómicas

Para explorar estrategias de resolución en torno al desarrollo de inecuaciones lineales, te invitamos a revisar el contenido que te proporcionan los siguientes recursos virtuales:

2.1. Inecuaciones factorizables inmediatas

A continuación, se presentan diferentes ejercicios, todos ellos resueltos paso a paso. para que puedas observar el estándar y la metodología correcta de resolución de una inecuación polinómica factorizable. Es importante que sepas que este procedimiento resulta de vital importancia para presentar de manera precisa y rigurosa los resultados obtenidos. Básate en ellos para desarrollar los diferentes ejercicios y problemas de contexto.

Ejemplo ilustrativo 1.

Alternativa 1. Resuelve la siguiente desigualdad no lineal: $(x^2 + 2x - 8) < 0$

Sol:

PASO 1. Primero factorizamos, el trinomio:

$$(x-2)(x+4) < 0$$

PASO 2. Aplicamos la propiedad de orden de los números reales:

$a \cdot b < 0 \Leftrightarrow (a < 0 \ \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)$. Entonces:

$$((x-2) < 0 \wedge (x+4) > 0)) \vee ((x-2) > 0 \wedge (x+4) < 0)$$

Resolviendo las inecuaciones lineales y usando la propiedad de la suma de un número real, obtenemos:

$$(x < 2 \wedge x > -4) \vee (x > 2 \wedge x < -4)$$

Representando graficamente las expresiones, tenemos:

Los x que satisfacen la proposición: $x < 2 \wedge x > -4$, pertenecen al intervalo abierto (-4,2)

No existen valores reales x, que cumplan la proposición $x < -4 \ \wedge x > 2$. Por tanto este conjunto solución es vacío $\emptyset$.

c. Respuesta: Como $(-4,2) \cup \emptyset = (-4,2)$, el conjunto solución es el intervalo abierto $(-4,2)$

Ejemplo ilustrativo 2.

Establece y ejecuta una estrategia que permita resolver la siguiente inecuación:

$$(x+1)(x^2-5x+6) \geq 0$$

$(x+1)(x-2)(x-3) \geq 0$	**Paso 1.** Factorizamos y determinamos los números reales donde los factores son ceros, de acuerdo al axioma que a continuación se señala:
$a \cdot b \cdot c = 0 \ \Rightarrow a = 0 \ \vee b = 0 \vee c = 0$	
F1: $(x+1) = 0 \quad x = -1$ F2: $(x-2) = 0 \quad x = 2$ F3: $(x-3) = 0 \quad x = 3$	**Paso 2.** Resolver cada ecuación lineal, se obtienen los valores donde el polinomio de hace cero (puntos críticos), denotados por el valor de x.

PASO 3. Para determinar los signos de cada factor elaboramos una tabla para analizar los signos correspondientes de cada factor en la recta numérica.

	$-\infty$	-1	2	$3 \qquad \infty$	**Recta real**
F1: $(x+1)$	$-$	$+$	$+$	$+$	Cambios de signos de (x+1)
F2: $(x-2)$	$-$	$-$	$+$	$+$	Cambios de signos de (x-2)
F3: $(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$	Cambios de signos de (x-3)
$(x+1)(x-2)(x-3)$	$-$	$+$	$-$	$+$	Cambios de signos del producto entre los tres factores.
$(x+1)(x-2)(x-3)$	$]-\infty,-1]$	$[-1,2]$	$[2,3]$	$[3,\infty[$	Se analizan los intervalos del dominio.

Análisis final	(-)	(+) [-1,2]	(-)	(+) [3, ∞[	Se observa el signo de asociado a cada intervalo e identifica el/los intervalo(s) que se ajustan a los requerimientos del ejercicio, en este caso: x >0

PASO 4. La solución gráfica del ejercicio es la siguiente:	
PASO 5. Ya se sabe en qué valores de x, la expresión es cero (puntos críticos). En ese sentido se sabe que ésta es cero en los extremos reales de los intervalos. Sin embargo, como el signo de la inecuación es " $\geq$ " se debe analizar en qué valores el producto es “mayor” o ”igual” que cero. Dado el análisis efectuado en la tabla, se sabe que el conjunto solución es la unión de los intervalos donde la inecuación es estrictamente mayor o igual a cero, lo que matemáticamente se escribe de la siguiente manera:	$S = [-1,2] \cup [3,\infty[$

2.2. Inecuaciones factorizables mediante Ruffini

Establece y ejecuta una estrategia que permita resolver la siguiente inecuación:

$$-10x + x^4 > 15x^2 - 24$$

El plan de acción para resolver esta inecuación es similar al caso anterior. Sin embargo difiere en algunos aspectos, los cuales están relacionados con el abordaje de la resolución en la primera etapa del desarrollo.

En primera instancia, se debe ordenar el polinomio asociado a la inecuación de forma decreciente (según el grado):

$$P(x) > 0$$
$$x^4 + 0x^3 - 15x^2 - 10x + 24 > 0$$

Una vez efectuado este procedimiento, se debe aplicar el Método de Ruffini para determinar los ceros y factores del polinomio en cuestión. Dado que estamos trabajando con un polinomio cuártico, se sabe que son, al menos cuatro, los factores que componen este polinomio en su forma factorizable. Para determinar dichos factores, se procede de la siguiente manera:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i$$
$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$
$$P(x) = \left(x_1 \pm a\right)\left(x_2 \pm b\right)\left(x_3 \pm c\right)\left(x_4 \pm d\right)$$
$$\therefore \left(x_1 \pm a\right)\left(x_2 \pm b\right)\left(x_3 \pm c\right)\left(x_4 \pm d\right) > 0$$

De la expresión anterior, se sabe que: $x_1, x_2, x_3 \wedge x_4 \in \mathbb{R} \,/\, a, b, c \wedge d \in \mathbb{R}$, donde: $\left(x_1 \pm a\right)\left(x_2 \pm b\right)\left(x_3 \pm c\right)\left(x_4 \pm d\right)$son denominados factores del polinomio en cuestión.

Para determinar de forma concreta dichos factores, se procede a aplicar el **Método de Ruffini** sobre el los coeficientes del polinomio objetivo, tal como se muestra a continuación:

PASO 1: Se identifica el conjunto de dividores asociados al término independiente del polinomio.

$$D_{24} = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24\}$$

PASO 2: Se ordenan los coeficientes del polinomio en una tabla y en la primera columna de ésta se ubican (paulatinamente y al azar) los divisores seleccionados anteriormente.

Posterior a ello, se procede de la siguiente manera:

Divisor	x^4	x^3	x^2	x	x^0
1	1	0 1	-15 1	-10 -14	24 -24
	1	1	-14	-24	**0**

Al efectuar este procedimiento se determina si x=1 es cero del polinomio. Dado que el residuo es cero, este valor si es cero.

A partir del procedimiento anterior es posible establecer lo siguiente:

$x=1$ es **PUNTO CRÍTICO** de $P(x) \Rightarrow (x-1)$ es **FACTOR** de $P(x)$. En función de lo anterior, se obtiene que:

$P(x)=(x-1)\cdot Q(x)$, donde $Q(x)=(x^3+x^2-14x-24)$. Por lo tanto, $P(x)=(x-1)\cdot(x^3+x^2-14x-24)$

PASO 3: $Q(x)=(x^3+x^2-14x-24)$ es un polinomio que se debe factorizar y dado que el término independiente posee los mismos divisores que el caso anterior, entonces se procede a utilizar otro divisor (distinto de 1) para identificar si cumple con la condición de punto crítico.

Divisor	x^3	x^2	x	x^0
3	1	1 3	-14 12	-24 -6
	1	4	-2	-30

Al efectuar este procedimiento se determina si x=3 , se evidencia que éste no es punto crítico pues el residuo no es igual a cero. Por lo tanto se debe proceder a utilizar algún otro divisor que si cumpla con la característica requerida.

Divisor	x^3	x^2	x	x^0
- 3	1	1 -3	-14 6	-24 24
	1	-2	-8	**0**

Al efectuar este procedimiento se determina si x= - 3 , se evidencia que éste no es punto crítico pues el residuo no es igual a cero. Por lo tanto se debe proceder a utilizar algún otro divisor que si cumpla con la característica requerida.

A partir del procedimiento anterior es posible establecer lo siguiente:

$x=-3$ es **PUNTO CRÍTICO** de $Q(x) \Rightarrow (x+3)$ es **FACTOR** de $Q(x)$, y a su vez de $P(x)$ En función de lo anterior, y considerando el mismo procedimiento efectuado en el paso 2, se obtiene que $P(x)=(x-1)\cdot(x+3)\cdot Q'(x)$, donde $Q'(x)=(x^2-2x-8)$.

Por lo tanto, $P(x)=(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x^2-2x-8)$. En ese sentido, y a través de factorización simple, es posible establecer que $Q'(x)=(x-4)(x+2)$.

Finalmente entonces, se sabe que: $P(x)=(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x-4)\cdot(x+2)$. En ese contexto la inecuación en cuestión se resuelve aplicando los axiomas correspondientes a la expresión algebraica:

$$(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x-4)\cdot(x+2)>0$$

La resolución de esta inecuación sigue la misma estructura de la que ha sido presentada a través del ejemplo ilustrativo "a". Por lo tanto se sugiere, frente a eventuales dudas, consultar dicho ejemplo.

3. Inecuaciones racionales

Para explorar estrategias de resolución en torno al desarrollo de inecuaciones racionales, te invitamos a revisar el contenido que te proporcionan los siguientes recursos virtuales:

4. Inecuaciones con valor absoluto

Las inecuaciones con valor absoluto poseen diferentes y muy diversas aplicaciones. Generalmente, se utilizan en Física y Geometría para representar el concepto de distancia. En general, este concepto aparece de forma reiterada, ya sea de forma explícita o implícita, en la definición formal del concepto de "Límite de una función".

Sea $x\in\mathbb{R}$, llamaremos módulo de x, al real definido por:

$$|x|=\begin{cases} x & , si\ x\geq 0 \\ -x & , si\ x<0 \end{cases}$$

4.1. Propiedades relevantes

A continuación se presentan las principales propiedades que te permitirán resolver inecuaciones con valor absoluto:

a. $|x|\geq 0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$

b. $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$

c. $|x|=|-x|$

d. $|x^2|=|x|^2=x^2{}_*$

e. $-|x|\leq x\leq|x|$

f. $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$

g. $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$

h. $|x|\leq y \Leftrightarrow -y\leq x\leq y{}_*$

i. $|x|<y \Leftrightarrow -y<x<y$

j. $|x|\geq y \Leftrightarrow x\leq -y \vee x\geq y{}_*$

k. $|x|>y \Leftrightarrow x<-y \vee x>y$

Ejemplo ilustrativo 1.

Resuelve de forma gráfica y algebraica, y utilizando las propiedes, la siguiente desigualdad:

$$|2x-1|<3$$

Aplicación de la definición de valor absoluto:	$\lvert 2x-1\rvert<3 \Leftrightarrow -3<2x-1<3$
Operatoria en IR. Sumar 1 a ambos lados de la desigualdadd	$-2<2x<4$
Operatoria en IR. Multiplicar por el inverso multiplicativo de 2, es decir, $\frac{1}{2}$	$-1<x<2$
Respuesta: Conjunto solución usando notación de Intervalos	$S=(-1,2)$
Representación gráfica de la solución	

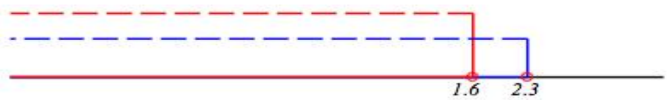
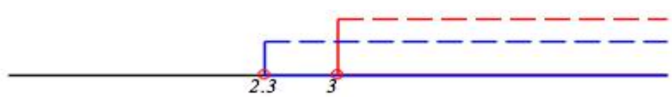
Ejemplo ilustrativo 2.

Resuelva usando la definición de valor absoluto, la inecuación:

$$|7-3x|>2$$

Sol: $|7-3x|=\begin{cases} 7-3x\,,\ si\ 7-3x\geq 0\ \lor\ x\leq\frac{7}{3} \\ -(7-3x), si\ \ 7-3x<0 \lor x>\frac{7}{3}\end{cases}$ Aplicación de la definición de valor absoluto

Caso 1: Si $x\leq\frac{7}{3}$, se obtiene la inecuación $$7-3x>2\quad\land\quad\left(x\leq\frac{7}{3}\right)$$	Considerar el primer trozo del dominio y simplificamos la primera inecuación.
$-3x>-5\land\ \left(x\leq\frac{7}{3}\right)$	Aplicar propiedad de la suma en IR para la primera inecuación. Sumamos (-7)
$x<\frac{5}{3}\land\ \left(x\leq\frac{7}{3}\right)$	Multiplicar la inecuación por $-\frac{1}{3}$. **¡Recuerda!** … La desigualdad cambia de sentido
$\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)\cap\left]-\infty,\frac{7}{3}\right]=\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)=(-\infty,1.\overline{6})$	El conjunto de los x reales menores que $5/3$ **y** menores o iguales que $7/3$. En notación de intervalos:

	**Solución Caso 1.** El conjunto de los números reales del intervalo, $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right) = (-\infty, 1.\bar{6})$
Caso 2: Si $x > \frac{7}{3}$, se obtiene la inecuación $-(7-3x) > 2 \quad \wedge \quad \left(x > \frac{7}{3}\right)$	Considerar el segundo trozo del dominio y simplificamos la primera inecuación. Multiplicamos por (-1) lo que implica un cambio de sentido.
$(7-3x) < -2 \quad \wedge \quad \left(x > \frac{7}{3}\right)$	Aplicar propiedad de la suma en IR para la primera inecuación. Sumamos (-7)
$-3x < -9 \quad \wedge \quad \left(x > \frac{7}{3}\right)$	Multiplicar la inecuación por $-\frac{1}{3}$. Se obtiene
$x > 3 \quad \wedge \quad \left(x > \frac{7}{3}\right) = (3, \infty)$	**Solución Caso 2.** Al intersectar se obtiene el intervalo $(3, \infty)$
	Intersección de los intervalos, graficamente
$\left(-\infty, \frac{5}{3}\right) \cup (3, \infty)$	**Solución de la inecuación:** Del caso 1 y 2, la solución de la inecuación es el conjunto de los reales que pertenecen al primer trozo o al segundo

5. Actividades de aprendizaje.

Las actividades propuestas a continuación, representan un recurso fundamental para tu aprendizaje, ya que ter permitirán ampliar tus conocimientos para así abordar de forma efectiva diferentes problemas contextualizados en el ámbito científico. Es importante que resuelvas cada uno de ellAs utilizando los axiomas y propiedades trabajados en clases.

ÍTEM I. En virtud de los contenidos y habilidades trabajados en clases anteriores, elabora un plan de acción que te permita determinar el conjunto solución para cada una de las inecuaciones que a continuación se presentan. Recuerda antes de terminar el ejercicio, graficar y formalizar con precisión los resultados obtenidos.

1. $9x-7 \leq 10+13x < 4+15x$
2. $7 < 5x-8 < 9$
3. $\dfrac{4}{5x-2} < 0$
4. $(2x+1)^2-(x-1)^2 > (3x+2)^2-5x-11$
5. Determina los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente expresión: $y = \sqrt{x^2-2x-15}$ **representa un número real.**

ÍTEM II. A continuación se presentan diferentes tipos de inecuaciones. Resuelve cada una de ellas, aplicando una metodología clara y ordenada.

1. $5\cdot(x-1)>2-(17-3x)$
2. $-2<7x-13\leq 15$
3. $4x+1\geq 3-5x>10-7x$
4. $x\cdot(3x+2)>(x+2)^2$
5. $(x-5)\cdot(x-4)\leq 6$
6. $21-4x-x^2>0$
7. $(x+1)\cdot(x^2-5x+6)\geq 0$
8. $1+\dfrac{2}{x+1}\leq\dfrac{2}{x}$
9. $\dfrac{x+1}{x-6}<7$
10. $\dfrac{x+1}{x}\leq\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{3}{x}$
11. $\dfrac{4x-3}{6x}\leq\dfrac{8x-6}{5x}$
12. $\dfrac{22}{2x-3}+\dfrac{23x+26}{4x^2-9}>\dfrac{51}{2x+3}$
13. $x^3<x$
14. $\dfrac{x^2+3x}{(x+2)(x-2)}\leq 0$
15. $\dfrac{x^2+x+2}{x+2}\geq 2$
16. $-x^3+81x<0$
17. $x^5-3x^4+4x^2\geq 0$
18. $\dfrac{x}{5}-\dfrac{2x-1}{3}>\dfrac{x-8}{5}+\dfrac{x-3}{3}$
19. $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2-1}\geq 2$
20. $x^4-4x^3-x^2\leq 12-16x$
21. $3x^2+4<x^4+3x^3+3x$
22. $(x-1)^3>4(x-1)$
23. $(x^2+4)(x-1)^3(x^2-9)\geq 0$
24. $\dfrac{2}{1-x}\geq\dfrac{14}{4x}$
25. $3-\dfrac{x}{2}\leq 6$
26. $x^2+x-6>0$
27. $2(x+3)>3(x-1)+6$
28. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{2x}\geq 5$
29. $\dfrac{x}{5}-\dfrac{2x-1}{3}>\dfrac{x-3}{3}$
30. $(x-2)^2>2(x-2)-1$
31. $8-3x\leq 7-5x\leq 5-6x$
32. $\dfrac{3x^2+2x-5}{x^2-1}>2$
33. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}>\dfrac{x+4}{x+3}$
34. $5(3x-2)+4(x+10)<6(5x-2)-(4x+15)$
35. $\left|\dfrac{-2x-1}{3}\right|\leq 5$
36. $|x-2|+|4-3x|>20$
37. $|x-5|<|x+1|$
38. $\left|\dfrac{2x-1}{x+3}\right|\leq 1$
39. $|3-2x|<|x+4|$

40. $|x-2| \leq 5$

41. $\left|\dfrac{x-10}{7}\right| \leq 5$

42. $|8x+1| > 3$

43. $|x+6| \geq 1$

44. $|x-3| \leq 3x$

45. $|x^2-4| \geq -2x+4$

46. $|x-1| < 2|x-3|$

47. $\left|\dfrac{x}{2}+7\right| \geq 2$

48. $\left|\dfrac{x+2}{x-6}\right| - \left|\dfrac{x-1}{x-3}\right| < 0$

49. $\left|\dfrac{3x+12}{x+2}\right| > 1$

50. $\left|\dfrac{d}{d-4}\right| \leq 1$

ÍTEM III. A continuación identifica cada una de las siguientes inecuaciones (lineal, cuadrática, racional o polinómica de orden superior), y en virtud de ello aplica formalmente una estrategia de resolución:

1. $-5\cdot[2-(1+x)] \geq 25+7\cdot(2x-5)$

   $S = \left]-\infty, \dfrac{5}{9}\right]$

   Tipo de inecuación:

2. $(x+1)^2-(x-2)^2 \leq 5x+4$

   $S =]-\infty, 7]$

   Tipo de inecuación:

3. $(2x-3)^2-(3x+1)(3x-1) < 15-6x-5x^2$

   $S = \left]-\dfrac{5}{6}, +\infty\right[$

   Tipo de inecuación:

4. $x^4-4x^3-x^2+16x-12 < 0$

   $S =]-2,-1[\cup]2,3[$

   Tipo de inecuación:

5. $(2x+1)^2-(x-1)^2 > (3x+2)^2-5x-11$

   $S = \left]-\dfrac{7}{6}, 1\right[$

   Tipo de inecuación:

6. $(x+5)(x^2-3x+2) < 0$

   $S =]-\infty,-5[\cup]1,2[$

   Tipo de inecuación:

7. $(x^2-4x<5) \wedge (x^2-6x>-5)$

   $S = IR$

   Tipo de inecuación:

8. $x^2(x-2)^2 > 0$

   $S = IR - \{2,0\}$

   Tipo de inecuación:

9. $\dfrac{x-18}{x-2} \leq \dfrac{2x}{2-x} - \dfrac{x^2}{x-2}$

   $S =]-\infty,-6[\cup]2,3]$

   Tipo de inecuación:

10. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+6} < 3$

    $S = IR$

    Tipo de inecuación:

Sección 3. Ecuaciones

1. Ecuaciones racionales
Las ecuaciones racionales se utilizan en la resolución de problemas que modelan fenómenos de carácter geométrico y del ámbito de la física. Para la resolución de este tipo de ecuaciones y de la mayoría de las ecuacione de carácter polinómica, es importante recordar los principales productos notables, principalmente aquellos de uso común:

Nombre	Producto notable	Expresión algebraica
Cuadrado de Binomio	$(a \pm b)^2$	$a^2 \pm 2ab + b^2$
Cubo de Binomio	$(a \pm b)^3$	$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2$	$(a-b)(a+b)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3$	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
Suma de cubos	$a^3 + b^3$	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
Término común	$x^2+(a+b)x+ab$	$(x+a)(x+b)$

Ejemplo ilustrativo 1. Ecuación racional.

Recuerde que una expresión racional, no siempre está definida para todos los números reales. Por tanto, se debe analizar, qué valores reales se deben excluir del dominio de la ecuación, que llamaremos "*restricciones del problema*".

Resuelva la siguiente ecuación: $\frac{x-2}{x^2+2x-3} - \frac{x+1}{x^2-9} = \frac{4}{x^2-4x+3}$

Solución:

Aplicar propiedad distributiva (factorizar)	$\frac{x-2}{x^2+2x-3} - \frac{x+1}{x^2-9} = \frac{4}{x^2-4x+3}$
Determinar el mínimo común múltiplo (MCM) denominador : $(x+3)(x-1)(x-3)$ **Observemos que esta ecuación tiene las siguientes restricciones**: $x \neq -3, x \neq 1 \; y \; x \neq 3$	$\frac{x-2}{(x+3)(x-1)} - \frac{x+1}{(x-3)(x+3)} = \frac{4}{(x-3)(x-1)}$
Multiplicar **la ecuación** por el MCM, para transformarla en una ecuación lineal	$(x-3)(x-2)-(x+1)(x-1) = 4 \cdot (x+3)$
Resolver paréntesis	$(x^2-5x+6)-(x^2-1) = 4x+12$
Operatoria algebraica (Reunir términos semejantes)	$x^2-5x+6-x^2+1-4x-12 = 0$
Operatoria algebraica (Resolver una ecuación lineal)	$-9x-5=0 \Longrightarrow \;$ x$= -\frac{5}{9}$
Respuesta: Al comprobar, observamos que el resultado pertenece al dominio de solución.	$x = -\frac{5}{9}$

1.1. Actividad de aprendizaje. Resuelva las siguientes ecuaciones fraccionarias, indicando las restricciones pertinentes:

a. $\frac{3}{2x+1}-\frac{2}{2x-1}-\frac{x+3}{4x^2-1}=0$

b. $\frac{x+m}{x-n}=\frac{x+n}{m+x}$

c. $\frac{2x-5}{2x-6}+\frac{2(x-1)}{x-3}=\frac{3}{8}+\frac{3(2x-15)}{4x-12}$

d. $\frac{x^2}{x-4}-\frac{16}{x^2-7x+12}-\frac{x^2}{x-3}=0$

e. $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}=0$

f. $\frac{6x+5}{15}-\frac{5x+2}{3x+4}=\frac{2x+3}{5}-1$

g. $\frac{x-3}{x-4}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+3}{x+2}$

h. $\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x+2}=\frac{20}{x^2-4}$

i. $\frac{4}{x+3}+\frac{6}{x-3}=\frac{10}{x^2-9}$

j. $\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x-1}$

k. $\frac{1}{x+a}+\frac{x^2}{a^2+ax}=\frac{x+a}{a}$

l. $\frac{5}{x-1}-\frac{3}{x-4}-\frac{3}{x^2+3x-4}=\frac{5}{x-1}$

2. Ecuaciones Cuadráticas

Las funciones cuadráticas modelan numerosos fenómenos de la naturaleza y diversas situaciones problemáticas donde se requiere determinar un máximo o un mínimo y las intersecciones con los ejes coordenados. Para ello hay que resolver una ecuación cuadrática, tal como lo veremos en esta sección.

Las ecuaciones cuadráticas se utilizan, por ejemplo, en cinética química para describir la variación en la concentración de reactantes respecto a la concentración de productos en un determinado tiempo; en física para el movimiento parabólico. En el ámbito militar lo usan en artillería de cañones para hallar las trayectorias de las balas y en economía se usan las ecuaciones cuadráticas para representar modelos económicos de oferta y demanda.

En el tratamiento de resolver una ecuación cuadrática, se puede aplicar la fórmula de resolución de una ecuación de segundo grado o factorizar el polinomio cuadrático, cuando es posible.

Observación: Recuerde que una ecuación de grado 2, tiene dos raíces que pueden ser de 3 tipos:

1. Raíces reales y distintas
2. Raíces reales e iguales. (una raíz de multiplicidad 2)
3. Raíces complejas conjugadas

Ecuación de segundo grado: ax^2+bx+c	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
La cantidad subradical b^2-4ac , se denomina discriminante, se denota por Δ, y permite clasificar las raíces de la ecuación según su signo.	$\Delta\ >0 \Longrightarrow b^2>4ac \Longrightarrow$ raíces reales y distintas $\Delta=0 \Longrightarrow b^2=4ac \Longrightarrow$ raíces reales e iguales $\Delta<0 \Longrightarrow b^2<4ac \Longrightarrow$ raíces complejas conjugadas: $a+bi\ y\ a-bi$, donde $i=\sqrt{-1}$; es decir, raíces imaginarias (no reales).
Propiedad Importante: $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0\ \vee b=0$	$(x-a)\cdot(x-b)=0 \ \Longrightarrow$ 1. $[(x-a)=0 \Longrightarrow x=a\,]\ \vee$ 2. $[(x-b)=0 \ \Longrightarrow\ x=b]$ Por lo tanto, se obtienen 2 respuestas.

2.1. Actividad de aprendizaje. Resuelva, paso a paso, las siguientes ecuaciones cuadraticas:

a. $2x^2 - 18 = 0$

b. $(2x+3)(x-6) = 0$

c. $ax^2 + bx = 0, a \neq 0$

d. $(x-3)(x+2) = 1$

e. $(2x+1)^2 + 3(x+2)^2 = (x+\frac{1}{2})^2$

f. $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+2} = 7$

g. $(5x-2)^2 = 16$

h. $(x-3)^3 = x^3 - 63$

i. $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{13}{12}$

j. $\frac{2x+3}{x+4} = x - 1$

k. $2(2x^2 - 5) = 3(2 - 3x^2)$

l. $\frac{3}{x-4} + \frac{x-3}{x} = 2$

3. Ecuaciones irracionales

Las ecuaciones con radicales, se pueden usar para resolver problemas del mundo real. Se presentan en muchas disciplinas desde ingeniería hasta disciplinas relacionadas con el área de la salud.

Cuando se aplica el teorema de Pitágoras a menudo se producen radicales porque la fórmula contiene tres términos al cuadrado.

Por ejemplo, en el ámbito de la medicina, cuando se quiere determinar la dosis de una droga para administrar a un paciente, los doctores calculan su Área de Superficie Corporal (Body Surface Area, BSA), una forma de hacerlo es usando la fórmula de MOOSE & DOC:

$$BSA = \sqrt{\frac{wh}{3600}}$$

donde, ***w*** es el peso en libras, ***h*** la altura en cm y el BSA se mide en m^2. Las ecuaciones con radicales o ecuaciones irracionales son aquellas en que las incógnitas aparecen dentro de una raíz cuadrada. Puedes calcular tu BSA en el link: http://www.medcalc.com/body.html

Orientaciones para la resolución de ecuaciones irracionales:

- Por medio de operaciones algebraicas aislar las raíces donde aparece la incógnita y analizar las restricciones para que los argumentos del problema estén bien definidos.
- En el caso en que aparezca más de una raíz en la ecuación, se recomienda para la simplicidad del método, dejar en cada miembro de la ecuación solo una raíz.
- Elevar al cuadrado la ecuación. Esto implica ambos miembros, recuerde que una igualdad tiene 2 miembros.
- Reunir términos semejantes y resolver la ecuación que se obtiene.
- Comprobar si los resultados son soluciones de la ecuación original. Esto quiere decir, si ésta(s) satisface(n) la ecuación y corroborar que no se indefina la expresión.

Ejemplo ilustrativo.

Resuelva la siguiente ecuación: $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6$

Solución:

$\sqrt{2x-1}=6-\sqrt{x+4}$

Analizar y determinar las restricciones del dominio de la ecuación.

i) $2x-1\geq 0 \Leftrightarrow (x\geq \frac{1}{2})$

ii) $x+4\geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$

Para ello, resolver las inecuaciones lineales

iii) Luego,

$(6-\sqrt{x+4})\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq \sqrt{x+4}\leq 6 \quad \Rightarrow x+4 \leq 36 \Rightarrow x\leq 32$

$(x\geq \dfrac{1}{2}) \ \wedge (x\geq -4) \Leftrightarrow x\leq 32$

Al realizar la intersección indicada, la ecuación es válida para los $x \,\epsilon \left[\frac{1}{2}, 32\right]$

$(\sqrt{2x-1})^2=(6-\sqrt{x+4})^2$

Elevar al cuadrado a la ecuación, para eliminar los radicales.

$2x-1=36-12\sqrt{x+4}+x+4$

Resolver los cuadrados de binomio

$x-41=-12\sqrt{x+4}$

Reducir términos semejantes

$x^2-82x+1681=144x+576$

Resolver ambos cuadrados

$x^2-226x+1105=0$

Reducir términos semejantes

$x_1=5\ x_2=221\}$ Observamos que, $221\notin \left[\frac{1}{2}, 32\right]$

Resolver la ecuación de segundo grado obtenida y observar que ambas soluciones satisfacen: $x\geq \frac{1}{2}$

$\sqrt{2\cdot 5-1}+\sqrt{5+4} \Rightarrow \sqrt{9}+\sqrt{9}=6$

Comprobación. Observamos que

$x=5$, es la solución de esta ecuación.

3.1. Actividad de aprendizaje. Resuelva las siguientes ecuaciones radicales, indicando las restricciones pertinentes:

a. $\sqrt{2x-3}+1=x$

b. $\sqrt{x+1}+4=2x$

c. $\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}=1$

d. $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+7}=4$

e. $\frac{9-t}{3-\sqrt{t}}=5$

f. $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=2$

Sección 4. Problemas de contexto

En virtud de los contenidos y habilidades trabajados en clases anteriores, establece un plan de acción que te permita resolver los siguientes problemas aplicados:

Problema 1.
Los costos mensuales asociados a la producción de un fertilizante químico están dados por la expresión: $C(x) = 2.500 \cdot x^0 + 100 \cdot x$, donde x representa las unidades producidas mensualmente por la industria. Si se sabe que el precio de venta es de US$150.

En función de lo anterior:

a. Establece una expresión algebraica que permita determinar las ganancias de la empresa por concepto de producción y comercialización del producto.
b. Determina las unidades que debe comercializar la empresa, de manera tal que, no se produzcan pérdidas económicas.

Problema 2.
Para realizar un proyecto de paisajismo, la persona a cargo está comprando alfombras de pasto cuadradas (área = 1 pie^2); con el fin de cubrir uma determinada superficie. Si cada pastelón de pastos cuesta US$3 y el presupuesto destinado para este gasto debe ser menor a US$1200. Con esa información:

a. Determina el número máximo de pastelones de pastos que se pueden comprar, según el presupuesto dado.
b. Determina el tamaño de la superficie verde que se desea habilitar.

Problema 3.
La relación entre grados Celsius (C) y Farenheit (F), está dada por la expresión:

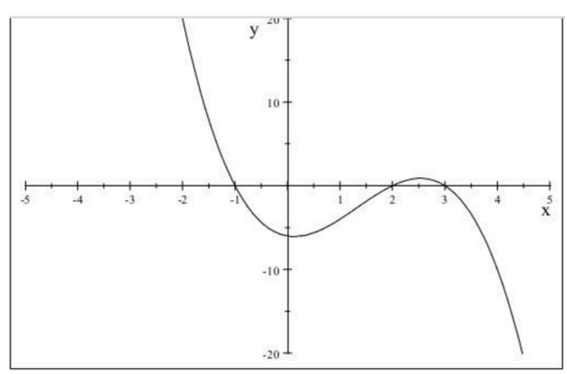
$$C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$$

En base a lo anterior:
a. Determina el intervalo en la escala Farenheit que corresponde a $20 \leq C \leq 30$
b. Determina el intervalo en la escala Celsius que corresponde a $50 \leq F \leq 95$

Problema 4.
La temperatura T del motor (°F), t minutos después de que una maquinaria industrial se encuentra en reposo, está representada por medio de la siguiente expresión algebraica: $\ln\left(\frac{T-20}{200}\right) = -0{,}11t$. Considerando dicha información y utilizando inecuaciones, determina las condiciones para que la expresión algebraica señalada anteriormente represente un número real.

Problema 5.
La desigualdad $\left|\frac{2h-1}{h}\right| > 2$ permite determinar los intervalos de profundidad (o superficie) de suelo para los cuales es posible encontrar partículas de materia orgánica presentes en el suelo. En este contexto, ¿qué intervalo(s) satisface(n) dicha desigualdad?

Problema 6.
La siguiente imagen muestra una curva representada por la expresión $y(x)$. Con estos antecedentes, usted diría que el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la expresión $y(x) \leq 0$ está dado por:



Capítulo 2. Funciones Reales

Este capítulo permitirá que cada estudiante evidencie los siguientes desempeños:

- Utiliza el lenguaje matemático para expresar el dominio y recorrido de una función real.
- Modela una función afín y cuadrática, a partir de situaciones contextualizadas en el ámbito de las ciencias.
- Describe *matemáticamente* las variables asociadas a un modelo matemático en situaciones contextualizadas.
- Uitiliza el lenguaje matemático para comunicar de forma escrita el dominio y recorrido de una función contextualizada.
- Infiere información explícita, a partir de una tabla de observaciones.
- Determina las variaciones medias de una función, representada por medio de una tabla de observaciones.
- Utiliza variaciones medias para determinar las características cualitativas de una función, tales como: (a) intervalos de monotonía, y (b) intervalos de concavidad y convexidad.
- Analiza un modelo matemático (en situaciones contextualizadas), a fin de determinar: (a) intersecciones con los ejes coordenadas, (b) existencia de asíntotas, (c) valores asociados a la variable dependiente, entre otros.
- Elabora rigurosamente el gráfico de una función polinómica (afín, cuadrática y/o cúbica), raíz cuadrada, definida a tramos, exponencial, logarítmica y trigonométrica, en situaciones contextualizadas en el ámbito de las ciencias.
- Utiliza el gráfico de una función para argumentar matemáticamente el comportamiento cualitativo (monotonía y crecimiento) de la curva.
- Infiere información relevante, a partir del análisis gráfico y/o algebraico de un modelo matemático contextualizado.
- Infiere, a partir de una situación contextualizada, el modelo matemático (gráfico y/o algebraico) de una función real.
- Evalúa una función, a fin de interpretar las implicancias que un modelo matemático tiene en un contexto dado.

Propósito del recurso

Este recurso de apoyo al aprendizaje reúne los conceptos teóricos básicos asociados al contenido de funciones reales de variable real. A continuación, podrás visualizar diferentes conceptos y términos asociados a la unidad, todos ellos representan un insumo fundamental para que puedas enfrentar las futuras situaciones de aprendizaje.

Debido a lo anterior, frente a cualquier inquietud, no dudes en consultar la bibliografía propuesta por el programa del curso o dirigir oportunamente tus consultas al equipo docente de forma presencial o a través de la plataforma virtual.

Bibliografía

Barnett, R.; Ziegler, M. And Byleen K. Precálculo: funciones y gráficas. Editorial. McGraw-Hill. 2000. Edición: 4ª.

Haefner, J.W. Modeling Biological Systems: Principles and Applications, 2nd ed., New York: Springer Science+Business Media, 2005.

Joseph, E. Cálculo, *Editorial* : Pearson Educación, 2007. Edición: 9ª.

Neuhauser, C. Calculus for biology and medicine. 3rd Edition, Ed. Prentice Hall, 2010.

Thomas, Jr., George B. Cálculo. Una variable. Undécima edición, Editorial Pearson educación, México, 2006.

Ritchey, N., Lial, M. Calculus with Applications for the Life Sciences. 1st Edition, Ed. Pearson, 2003.

Sección 1. Conceptos fundamentales

1. Aproximación al concepto de función.

Si has cursado alguna asignatura de Introducción al Cálculo, debes haber tenido alguna aproximación al concepto de producto cartesiano *A* × *B* entre dos conjuntos *A* y *B*. Bajo esta premisa entonces, si entre ellos tuvieras que definir algún tipo de correspondencia; es decir, asociar de algún modo elementos de *A* con elementos de *B*. **¿Cuál sería?**

Una de las posibles formas de hacer esto es mediante una función, la cual formalmente se denota de la siguiente manera:

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in B) / (a,b) \in f$$

Se usará la notación $f : A \rightarrow B$ si es que *f* es una función de *A* en *B*. En ese sentido, una función se podrá entender como **una regla de asociación** que, dado un elemento cualquiera de *A*, le asigna un **único elemento de *B***.

En virtud de lo anterior, si f es función y $(a, b) \in f$, entonces la notación para formalizar dicha relación estará dada por:

$$f(a) = b,$$

Donde $f(a)$ será el único elemento $b \in B$, tal que $(a, b) \in f$.

2. Funciones reales de variable real.

En el caso en que $A \subseteq IR$, se dice que la función es de variable real. Si además $B = IR$, entonces se dirá que la función es **real de variable real.**

En base a lo anterior, es posible plantear que una función real de variable real se denota formalmente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f:\quad & A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \\ & \quad x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

3. Elementos básicos de una función.

Sea $f: A \rightarrow B$ una función:

- Si $(x,y) \in f$, entonces se dirá que: "*y*" es imagen de "*x*", y que "*x*" es preimagen de "*y*". Lo anterior se formaliza de la forma: $f(x) = y$.

- Se llama **Dominio** de f al conjunto:
$$Dom(f) = \{x \in A / \exists y \in B / f(x) = y\}$$

- Se llama **Recorrido** de f al conjunto:
$$\mathrm{Re}c(f) = \{y \in B \wedge B = \mathbb{R} / \exists x \in A / f(x) = y\}$$

- Se llama **Codomonio** de f al conjunto:
$$Codom(f) = \{y \in B / \exists x \in A / f(x) = y\}$$

- Se llama **Gráfico** de f al conjunto:

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 / x \in Dom(f) \wedge y = f(x)\}$$

4. Definiciones importantes.

- **Ceros de una función.**

Sea f: $A \subseteq IR \rightarrow IR$.

Se denominarán ceros de f a todos los reales de su dominio, tales que $f(x) = 0$. En estos puntos el gráfico de f intersecta al eje OX. Adicionalmente, la intersección con el eje Y estará dada por las coordenadas *(0, f(0))*.

- **Función par.**

Sea f: $A \subseteq IR \rightarrow IR$.

Una función se dirá par, si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

i. $(\forall x \in A), -x \in A$
ii. $(\forall x \in A), f(-x) = f(x)$

Tomando como recurso el análisis gráfico de una función, ésta será **PAR** si la curva es simétrica al eje OY , esto se puede formalizar matemáticamente de la siguiente manera:

$$(x,y) \in Gf \Rightarrow (-x,y) \in Gf$$

- **Función impar.**

Sea f: $A \subseteq IR \rightarrow IR$. Una función se dirá impar, si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

i. $(\forall x \in A), -x \in A$
ii. $(\forall x \in A), f(-x) = -f(x)$

Tomando como recurso el análisis gráfico de una función, ésta será **IMPAR** si resulta una curva simétrica al origen O del sistema de coordenadas. Lo anterior se puede formalizar matemáticamente por medio de la siguiente expresión:

$$(x,y) \in Gf \Rightarrow (-x,-y) \in Gf$$

- **Crecimiento de una función.**

La monotonía de una función permite estudiar el tipo de crecimiento que ésta tiene en un intervalo determinado. Inicialmente, distinguiremos entre funciones crecientes, decrecientes o constantes, pues más adelante y gracias al concepto de variaciones medias podremos observar aspectos cualitativos asociados al comportamiento de una función real.

De acuerdo a lo anterior:
i. Se dirá que f es **creciente** en $B \subseteq A$, si y solo si se cumple la siguiente condición:
$(\forall x_1, x_2 \in B), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

ii. Se dirá que f es **decreciente** en $B \subseteq A$, si y solo si se cumple la siguiente condición:
$(\forall x_1, x_2 \in B), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

iii. Se dirá que f es **constante** en $B \subseteq A$, si y solo si se cumple la siguiente condición:
$(\forall x_1, x_2 \in B), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Importante:
En los casos donde las desigualdades se cumplan de forma estricta en todo el dominio de f, entonces se dirá que dicha función es estrictamente creciente, estrictamente decreciente o constante en todo su dominio.

¡Cuidado!
La negación de la frase *f(x)* es creciente no es la frase *f(x)* es decreciente, ya que existen funciones crecientes y decrecientes a la vez y otras que no son ni crecientes ni decrecientes.

5. Monotonía de una función
A continuación revisaremos algunas estrategias que nos permitan analizar algunas propiedades básicas de las funciones reales, tales como: monotonía (crecencia o decrecencia), concavidad y convexidad. En este sentido, debes saber que identificar correctamente estos parámetros en las funciones reales, te permitirán efectuar un análisis riguroso respecto del comportamiento de la curva, y adicionalmente, efectuar de forma efectiva la representación gráfica de su modelo matemático.

Definición de **variación media:** Sean $x_1, x_2 \in [a, b]$ se define la variación media de f entre x_1 y x_2 como:

$$V_m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Definición de función **creciente** en un intervalo, a través de variaciones medias: Diremos que f es creciente en el intervalo $]a, b[$ si:

$\forall\ x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ se cumple que $\overline{Vf}_{[a,b]} > 0$ (variaciones medias positivas).

Definición de función **decreciente** en un intervalo a través de variaciones medias: Diremos que f es decreciente en el intervalo $]a, b[$ si:

$\forall\ x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ se cumple que $\overline{Vf}_{[a,b]} < 0$ (variaciones medias negativas).

Definición de **función cóncava** en un intervalo a través de variaciones medias: Diremos que f es cóncava en el intervalo $]a, b[$, si:

$\forall\ x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2 < x_3$ las variaciones medias son decrecientes.

Definición de **función convexa** en un intervalo a través de variaciones medias: Diremos que f es convexa en el intervalo $]a, b[$, si:

$\forall\ x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2 < x_3$ las variaciones medias son crecientes.

Registra aquí tus apuntes o ideas clave

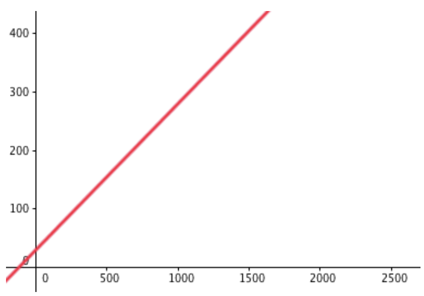
5.1. Variaciones medias positivas.

Crecimiento uniforme

Características:

Variaciones medias constantes y positivas en todo el dominio de f.

Se observa en:

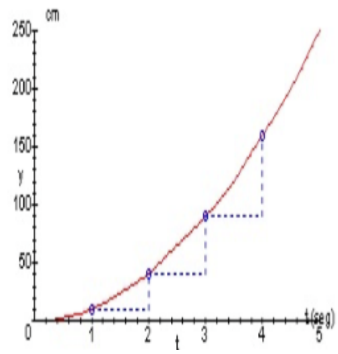


Crecimiento rápido

Características:

Variaciones medias positivas y crecientes en todo el dominio de f.

Se observa en:

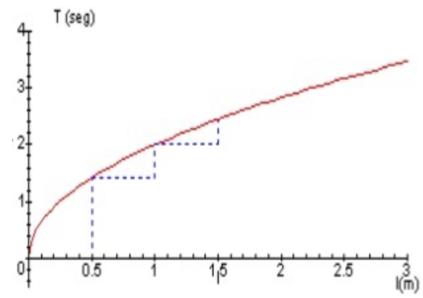


Crecimiento lento

Características:

Variaciones medias positivas y decrecientes en todo el dominio de f.

Se observa en:



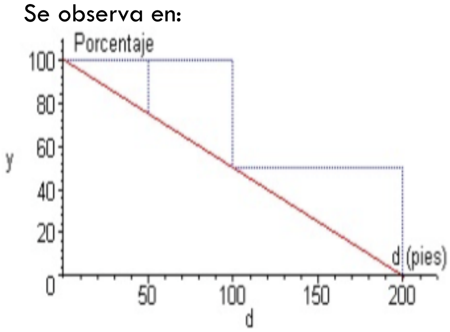
5.2. Variaciones medias negativas

Decrecimiento uniforme

Características:

Variaciones medias constantes y negativas.

Se observa en:

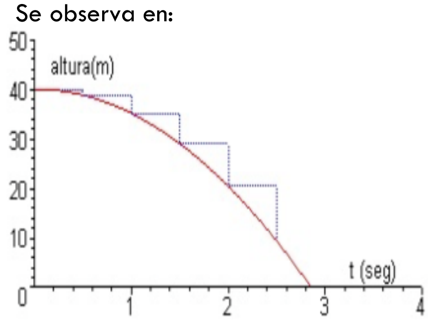


Decrecimiento rápido

Características:

Variaciones medias negativas y decrecientes en todo el dominio de f.

Se observa en:

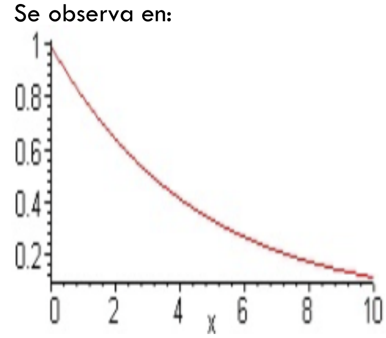


Decrecimiento lento

Características:

Variaciones medias negativass y crecientes en todo el dominio de f.

Se observa en:



6. Actividades de aprendizaje

En función de los conceptos revisados anteriormente y de la práctica guiada llevada a cabo durante la clase, resuelve los ejercicios asociados a las diferentes actividades de aprendizaje que a continuación se plantean.

ÍTEM I. Determina de forma algebraica el dominio y recorrido para las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x - 1$
2. $f(x) = -1$
3. $f(x) = \dfrac{a}{x+b} - c$
4. $f(x) = \sqrt{2x}$
5. $f(x) = -1 + \dfrac{2}{x-5}$
6. $f(x) = x^2$
7. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$
8. $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x - 5}$
9. $f(x) = -\dfrac{1}{x+7} - \dfrac{1}{2}$
10. $f(x) = x^3 - 3x$
11. $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+4}$
12. $f(x) = \sqrt{4-2x}$
13. $f(x) = -\dfrac{10}{\sqrt{3x-5}}$
14. $f(x) = \ln(3x-2)$
15. $f(x) = 2^x$

Sección 2. Funciones polinómicas

1. Orientaciones y estándares para la resolución de problemas

Antes de presentar los diferentes problemas que te permitirán desarrollar las habilidades matemáticas necesarias para abordar los contenidos de esta unidad, debes considerar que el abordaje metodológico de un problema está constituido por **3 etapas fundamentales**:

Etapa 1. Formalización de datos y variables.

Para que logres un aprendizaje efectivo, es importante que en esta etapa: (i) **describas** cada una de las variables involucradas en el problema, (ii) **relaciones** los datos proporcionados por el problema con las respectivas variables, (iii) **esquematices** la situación (si ésta así lo amerita), (iv) **explicites** la(s) incógnita(s) del problema, utilizando un lenguaje matemático, y (v) **identifiques** los conocimientos previos necesarios para el abordaje metodológico del problema.

Etapa 2. Abordaje metodológico del problema.

En esta fase existen elementos que darán sustento al desarrollo matemático del problema. En ese contexto, resulta necesario que logres: (i) **proponer** un modelo matemático que responda al contexto del problema planteado, (ii) **formalizar** las diferentes estrategias de resolución que utilizarás para resolver el problema, (iii) **Ejecutar** de forma clara, precisa y rigurosa cada una de las estragias propuestas, (iv) **concluir y formalizar** los resultados derivados del desarrollo, y (v) **representar graficamente** el modelo matemático involucrado, si la situación así lo amerita.

Etapa 3. Comunicación correcta de los resultados.
Todo procedimiento matemático, en el contexto de un problema (rutinario o contextualizado), requiere como requisito básico la comunicación (oral o escrita) de los resultados derivados de dicho problema. En ese sentido, antes de dar por terminado el ejercicio debes considerar: (i) la **pertinencia** de la soluciones obtenidas (según el contexto del problema), (ii) la **interpretación** de las soluciones, en base al contexto, y (iii) la redacción escrita de forma **clara** y **legible** de los resultados que responden de forma certera a los requerimientos del problema, en el contexto dado.

2. Modelo lineal

Los siguientes problemas representan un recurso fundamental para tu aprendizaje, ya que te permitirán abordar de forma efectiva situaciones contextualizadas en el ámbito científico, las cuales resultan relevantes para tu formación profesional.

ÍTEM I. Modelamiento de una función lineal.

Ejemplo ilustrativo 1.

Contexto

Con el objeto de poder evaluar la resistencia de un resorte, se cuelga de él un objeto de masa "m".
A través de las leyes físicas, se conoce que el alargamiento de un resorte es directamente proporcional a la masa del objeto que de él se cuelga.
Observaciones efectuadas en laboratorio, dan cuenta que cuando se cuelga un objeto de masa 10 gramos, el largo del resorte es de 7 centímetros. Mientras que, cuando se cuelga un objeto cuya masa es de 80 gramos, el largo – del mismo resorte – es de 13 centímetros.

Requerido

En virtud de lo anterior:

a. Propone un modelo matemático que relacione las variables señaladas en el contexto del problema e interpreta sus parámetros, considerando sus respectivas unidades de medida.

Si se desea colgar un objeto en el resorte, sin que este se destruya:

b. ¿Qué recomendaciones darías tú respecto a la masa máxima de dicho objeto?. Justifica matemáticamente tus resultados.

Solución:

Etapa 1: Comprender el problema. Del contexto se desprende que el largo que adquiere el resorte depende de la masa del objeto que colgamos.

Variables:
$l(m)$: largo del resorte en centímetros, cuando se han colgado m gramos, (variable dependiente)
m: masa en gramos del objeto que colgamos, (variable independiente)

Datos:
El resorte tiene un largo natural en reposo que llamaremos l_0. Luego:

$$l(0) = l_0$$

Cuando colgamos una masa m, la variación experimentada por la función aumentará desde l_0 a $l(m)$. Es decir se alargará $l(m) - l_0$ cm cuando colgamos $m$gramos.

Observe que corresponde a la variación de la función $V_{[0,m]]}l\ (m)$

Como el alargamiento (variación de la función) es directamente proporcional a la masa que colgamos, entonces:

$$\frac{l(m) - l_0}{m} = k, \qquad k\ cte \Rightarrow l(m) = k \cdot m + l_0 \qquad (1)$$

$l(10) = 7$ (largo es 7 cuando la masa es 10 gramos)

$l(80) = 13$ (largo es 13 cuando la masa es 80 gramos)

Requerido:

Modelo para $l(m)$

m^*: valor de m, tal que $l(m^*)$ no se destruya. Luego, $l(m) - l_0 > 5l_0$

2. Elaborar un plan de acción

i) Con los datos dados hay que plantear una fórmula o modelo. A priori, se conoce que, las variaciones medias de la función son constantes, dado que se señala que el alargamiento del resorte es directamente proporcional a la masa del objeto que de él se cuelga. Por lo tanto, se deduce que el modelo es afín.

ii) Resolver la inecuación que representa la masa máxima (o crítica) para que no se destruya el resorte.

3. Ejecutar el plan

a) Modelo Matemático: $l(m) = km + l_0$ (*)

De (1) se obtiene:
$l(10) = 7$ y $l(80) = 13$ reemplazando en (*) se obtiene el sistema de ecuaciones

$10k + l_0 = 7$: (3)
$80k + l_0 = 13$ (4)

De (3) obtenemos: $l_0 = 7 - 10k$ (5)

Reemplazando en (4) deducimos que
$80k + 7 - 10k = 13$. Despejando k de esta ecuación tenemos que $k = \frac{6}{70}$.

Reemplazando k en (5) concluimos que:

$$l_0 = \frac{43}{7}.$$

Por lo tanto, obtenemos:

$$\boxed{l(m) = \frac{6}{70}m + \frac{43}{7}}$$

b) Para determinar el dominio de esta función necesitamos responder b).

Para que el resorte no se destruya, se debe calcular primero el valor del máximo estiramiento que puede tener.

El enunciado dice que si el resorte se estira más de 5 veces su longitud natural, se deforma. Por lo tanto, en lenguaje matemático, el resorte se destruye si:

$$l(m) - l_0 > 5l_0 \qquad (6)$$

Como, $l_0 = \frac{43}{7}$, debemos encontrar el valor de m para el cual $l(m) - l_0 > 5l_0$

$$l(m) - l_0 > 5(\tfrac{43}{7}) \qquad (7)$$

Como $l(m) - l_0 = \frac{6}{70}m$ reemplazando en (7) obtenemos que:

$$\frac{6}{70}m > 5\left(\frac{43}{7}\right) \Leftrightarrow m > 5 \cdot \left(\frac{43}{7}\right) \cdot \left(\frac{70}{6}\right) \Leftrightarrow m > \frac{2150}{6}$$

4. Interpretación de los resultados

El modelo matemático es: $l(m) = \frac{6}{70}m + \frac{43}{7}$ con dominio $0 \leq m \leq 358.3$

Para que el resorte no se destruya, se aconseja no colgar de él objetos cuya masa sea superior o igual a $\frac{2150}{6} \approx 358.3$ gramos.

Ejemplo ilustrativo 2.

Contexto

La ley de acción de masas establece que la velocidad con que se forma un compuesto C, a partir de dos compuestos A y B, es directamente proporcional a las cantidades (en gramos) de A y B que aún no se combinan para formar el compuesto C (conjuntamente proporcional).

De esta reacción se conoce lo siguiente:

a. Para formar 1 gramo de C participan $\frac{2}{7}$ gramos de A y $\frac{5}{7}$ gramos de B.

b. Se dispone de 10 gramos de A y 15 gramos de B para formar un compuesto C.

c. Desde que se inició la reacción entre A y B para formar C, se han formado x gramos de C

Requerido

En virtud del contexto:

a. Modela la velocidad de reacción $v = v(x)$, en [g/min], en función de x, indicando el dominio de $v(x)$.

Se sabe que cuando se han formado 5 gramos de C, la velocidad de reacción del compuesto C es de 0.4 [g/min].

b. Con este dato, calcula la constante de proporcionalidad de la función $v(x)$.

c. Determina cuántos gramos se formarán de C al finalizar la reacción, así como cuántos gramos de A y B quedarán sin reaccionar.

Solución:

1. **Comprender el Problema: Variables, datos, incógnitas.**

Variables:

$v(x)$: velocidad de reacción, medida en [g/min], variable dependiente.
x: cantidad de compuesto en gramos, variable independiente.

Datos:

Compuesto A= 10 gramos.

Compuesto B= 15 gramos.

Compuesto C, para formar 1 gramo se requiere $\frac{2}{7}$ gramos de A y $\frac{5}{7}$ gramos de B.

$v(0) = v_0 = x$ gramos de C.

$v(5) = 0.4$ [g/min] de compuesto C.

Requerido:

Modelo $v = v(x)$

k: constante de proporcionalidad de $v(x)$

Cantidad de compuestos A, B y C que quedan al finalizar la reacción.

2. Configurar un plan.

(i) Analizando enunciado y datos, determinar el modelo, (ii) A partir del modelo y datos calcular la constante de proporcionalidad, (iii) Usando datos y modelo determinar la cantidad de compuestos sobrantes.

3. Ejecución del Plan

Modelo Matemático

Razonamiento:

- Si se han formado x g. de C, desde que se inició la reacción, entonces se han ocupado $\frac{2}{7}x$ g de A y $\frac{5}{7}x$ grs de B.

- Luego, quedan $10-\frac{2}{7}x$ g. de A y $15-\frac{5}{7}x$ g. de B sin reaccionar.

- La ley de acción de masas dice que en ese momento, la velocidad con que se forma C en [g/min], es directamente proporcional al producto (conjuntamente proporcional) de $(10-\frac{2}{7}x)$ y $(15-\frac{5}{7}x)$, es decir:

$$v(x)=k\left(10-\frac{2}{7}\right)\left(15-\frac{5}{7}x\right)$$; donde k es la constante de proporcionalidad.

- Para determinar el dominio del modelo, debemos darnos cuenta que la reacción concluye cuando alguno de los compuestos A o B se termina. Dado que $(10-\frac{2}{7}x)$ y $(15-\frac{5}{7}x)$ son las cantidades de A y B, respectivamente, que quedan cuando ya se formaron x grs de C. Es posible establecer que:

$$(10-\tfrac{2}{7}x)\geq 0 \text{ y } (15-\tfrac{5}{7}x)\geq 0.$$

Resolviendo estas desigualdades tenemos que:

$$x\leq 35 \text{ y } x\leq 21$$

Por lo tanto, el dominio es la intersección de ambos conjuntos, corresponde al conjunto de los x, tales que:

$$0\leq x\leq 21 \text{ o el intervalo } [0,21].$$

Valor de la constante k:

Reemplazamos $v(5)=0.4$ en el modelo (*)

$$0{,}4=k(10-\left(\tfrac{2}{7}\right)\cdot 5)(15-\left(\tfrac{5}{7}\right)\cdot 5)=k(\tfrac{60}{7})(\tfrac{80}{7})=k(\tfrac{4800}{49})\Rightarrow k=\frac{49}{12000}\approx 0.00408\underline{3}$$

Por lo tanto, el valor de la constante de proporcionalidad es:

$$k=\frac{49}{12000}$$

Luego el modelo es:

$$v(x)=\left(\frac{49}{12000}\right)\left(10-\frac{2}{7}x\right)\left(15-\frac{5}{7}x\right)$$

$$v(x)=0.004(10-\frac{2}{7}x)(15-\frac{5}{7})x$$

La reacción termina cuando se acaba alguno de los componentes A o B. Ya sabemos que B se acaba primero y esto ocurre cuando $15-\frac{5}{7}x=0$, o sea, cuando $x=21$. Es decir, la reacción concluye cuando se han formado 21 g. de C. En dicho instante, quedan:

$$10-\frac{2}{7}(21)=4 \text{ g. de A y 0 grs de B.}$$

4. Interpretación de los resultados y respuestas

(a) En virtud de los requerimientos del problema, es posible establecer que el modelo matemático que modela la velocidad de la reacción química está dado por la espresión: $v(x)=(\frac{49}{12000})(10-\frac{2}{7}x)(15-\frac{5}{7}x)$

(b) El valor de la constante de proporcionalidad k es $\frac{49}{12000}\approx 0.004$

(c) La reacción concluye cuando se formaron 21 g. del compuesto C y quedan 4 g. del compuesto A y 0 g. de B.

ÍTEM II. Problemas de contexto. Utilizando los recursos y herramientas provistas en clases, elabora y ejecuta un plan de acción que te permita resolver matemáticamente los siguientes problemas del ámbito profesional.

Problema 1.

Contexto	Requerido
La cantidad de calor H (en Joules) requerida para convertir un gramo de agua en vapor está, linealmente, relacionada con la temperatura T (en °C) de la atmósfera. A 10°C esta conversión requiere 2480 Joules y por 15°C de aumento en la temperatura del agua, dicho requerimiento de calor, disminuye en 40 Joules la cantidad de calor necesaria.	En virtud de lo anterior, modela H en función de T.

Problema 2.

Contexto	Requerido
El punto de congelación y ebullición del agua puede ser expresado en dos escalas de medición (Celsius o Farenheit). En ese sentido, se sabe que el punto de congelación del agua es 0°C ó 32°F y el de ebullición es 100°C ó 212°F.	Considerando los antecedentes proporcionados por el contexto, expresa la temperatura F (en grados Fahrenheit) como función lineal de la temperatura C (en grados Celsius).

Problema 3

Contexto	Requerido
La dilatación de una barra metálica es proporcional al aumento de temperatura que ella soporta. Se ha medido que su longitud es 76.4 cm a 20°C y 76.55 cm a 100°C.	En virtud de lo anterior: a. Modela la longitud de la barra, medida en centímetros, en función de la temperatura medida en grados Celsius. Considerando el modelo obtenido anteriormente: b. Determina la longitud de la barra cuando la temperatura es 15°C.

Problema 4.

Contexto

Investigaciones llevadas a cabo por científicos que estudian diferentes fenómenos que ocurren en la atmósfera, señalan que cuando el aire seco se eleva, se expande y se enfría.

Adicionalmente, los científicos lograron determinar que el cambio de la temperatura del aire varía de forma proporcional a la altura que éste alcanza respecto del suelo.

Por otro parte, se sabe que la temperatura del aire a nivel del suelo es de 20°C, mientras que a un kilómetro de altura es de 10°C.

Requerido

a. La expresión matemática que muestre la relación entre la temperatura del aire en (°C), en función de la altitud (km).

b. La representación gráfica de la situación planteada (sé riguroso(a) en dicha representación).

c. El estudio analítico de la monotnía de la función.

d. La temperatura a una altitud de 2,5 kilómetros.

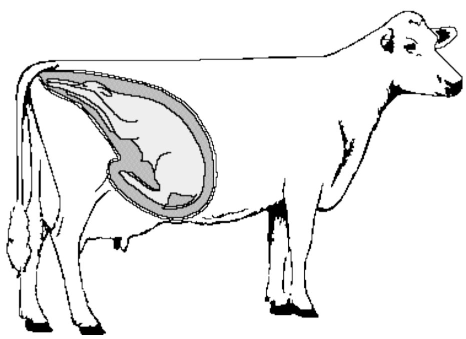
e. La altura a la cual, la temperatura del aire es igual a cero Kelvin.

Problema 5.

Contexto

En Chile, la producción de carne bovina alcanza aproximadamente las 191.000 toneladas al año (ODEPA, 2011).

Con el fin de garantizar el bienestar animal y minimizar la mortandad de las crías durante la gestación, se ha estudiado que en el caso de los bovinos, no se les puede suministrar medicamentos de ningún tipo, cuando el feto ha alcanzado el **60% del período de gestación promedio** de un ejemplar bovino.



Se sabe que el período de gestación de una vaca oscila entre un mínimo de 276 y un máximo de 290 días* (UC, 2013).

Para el suministro de un medicamento entonces, resulta necesario conocer la dinámica de crecimiento del feto. En ese sentido, estudios médicos señalan que el crecimiento de un feto, de a lo menos 12 semanas de gestación se modela mediante una función afín; donde " L " es la longitud (en cm.) y " t " es el tiempo de gestación (en semanas).

Requerido

Determine:

a. El modelo matemático que relaciona el crecimiento del feto, en función del tiempo de gestación. Si se sabe que la longitud de un feto de 12 semanas es 4 cm y crece 1,53 cm. cada semana.

b. La fecha crítica de suministro de medicamentos a las vacas en gestación.

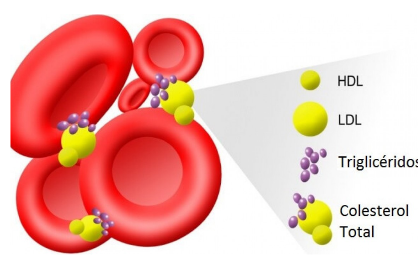
c. ¿Será posible administrar medicamentos a una vaca, cuyo feto posee una longitud es de 28 cm?. **Fundamenta matemáticamente tu respuesta.**

*Para efectos de cálculo, considera 1 semana igual a 7 días.

Problema 6.

El colesterol es una sustancia grasa (un lípido) que puede encontrarse en algunos alimentos, pero también es producida por el hígado. Biológicamente es una sustancia vital, porque se utiliza para producir estrógeno, testosterona, vitamina D y otros componentes vitales que, en su conjunto, son transportados hacia el torrente sanguíneo.

Científicos vinculados a la producción de alimentos saludables han descubierto que gran diversidad de semillas aptas para el consumo humano contienen esteroles vegetales y estanoles, que imitan el papel del colesterol en el intestino y bloquean su absorción.



En general, se admiten los siguientes valores en los niveles de colesterol $\left[\frac{mg}{dL}\right]$:

- Ideal: $C < 200$
- Ligeramente alto: $200 \leq C < 240$
- Alto: $240 \leq C \leq 300$
- Muy alto: $C \geq 300$

En este contexto, y a fin de elaborar nuevas recetas alimentaras que contribuyan a mitigar los efectos negativos que provoca el colesterol en la salud humana, se ha comprobado que en mujeres de entre 20 y 29 años, la relación entre el riesgo coronario R (expresado en términos porcentuales), y el nivel de colesterol C en $\left[\frac{mg}{dL}\right]$, cuando éste está por encima de 210 es un modelo afín.

Con esta información de base se sabe que el incremento de riesgo coronario (R) a un nivel de colesterol de 210 es de un 0,1621 y a un nivel de 231 de un 0,1920.

Hint: El porcentaje es una notación matemática que representa una cantidad dada como una fracción en 100 partes. Dicha notación se expresa en una escala de 1 a 100.

Dado el contexto, responde a los siguientes requerimientos del problema:

a. Describe las variables involucradas en el problema.

b. Modela, con los datos proporcionados, la función que relaciona las variables involucradas en el fenómeno de estudio.

c. Establece, por medio de un procedimiento algebraico, el dominio y recorrido de la función.

d. Traza, rigurosamente, la curva $R(C)$en su dominio.

e. ¿Cuál es el riesgo coronario para una mujer que presenta niveles de colesterol iguales a 260 $\left[\frac{mg}{dL}\right]$? . Justifica, por medio de un procedimiento matemático, tu respuesta.

f. ¿Qué niveles de colesterol debe presentar una persona para que su riesgo coronario sea del 100%? . Justifica, por medio de un procedimiento matemático, tu respuesta.

Problema 7.

Contexto

Una empresa productora de cereales adquiere una maquina cosechadora en US$20.000, la cual se deprecia linealmente hasta un valor de venta US$1.000 al cabo del décimo año.

Requerido

a. El modelo matemático que exprese el valor de la maquina cosechadora en función de su edad.

b. El gráfico asociado a dicho modelo matemático, considerando como intervalo el instante de adquisición y venta de la maquinaria.

c. El estudio analítico de la monotonía de la función.

d. La estimación del valor de la maquinaria al cuarto, sexto y octavo año.

e. Dos argumentos que sustenten el instante de venta oportuno de la maquinaria.

f. Una discusión (máximo 3 líneas), en términos de qué ocurrirá con el valor de la maquinaria al año número 25.

Problema 8.

Investigaciones llevadas a cabo por científicos que estudian diferentes fenómenos que ocurren en la atmósfera, señalan que cuando el aire seco se eleva, se expande y se enfría.
Adicionalmente, los científicos lograron determinar que el cambio de la temperatura del aire varía de forma proporcional a la altura que éste alcanza respecto del suelo.
En este contexto, se sabe que la temperatura del aire a nivel del suelo es de 30°C, mientras que a dos kilómetros de altura es de 7,5°C.

En virtud de lo anterior:

a. Modela, algebraicamente, el fenómeno del contexto planteado; estableciendo matemáticamente su respectivo dominio y recorrido.
b. Representa rigurosamente, y de manera gráfica, la situación planteada.
c. Establece, matemáticamente, (i) la temperatura del aire a una altitud de 2,5 kilómetros, y (ii) la altura a la cual la temperatura del aire es igual a cero Kelvin.

3. Modelo cuadrático

Ejemplo ilustrativo 1.

Dada $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por : $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 3x - 4}$. Determina:

a. $A = Domf$

b. El conjunto de los $x \in Domf$, para los cuales $i)\ f(x) = 0$;

$ii)\ f(x) > 0$; $iii)\ f(x) < 0$

c. $f(-a)$ y $f\left(\frac{1}{a}\right)$, $a \in A,\ a \neq 0$

d. $f(a+h)$ y $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

Solución:

a. Como las funciones afines y cuadráticas están definidas $\forall\, x \epsilon\, \mathbb{R}$, el dominio de f es $\mathbb{R}$.

b. Determinamos los ceros de la función, donde es positiva y donde es negativa.

(i) Ceros de la función

$$f(x) = 0 \iff x^2 + 3x - 4 = 0 \iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} \iff x = 1, x = -4$$

Por lo tanto, $f(x) = 0 \iff x = 1,\ x = -4$.

Utilizando el resultado anterior, $f(x) = (x-1)(x+4)$, de tal manera que:

$f(x) > 0 \iff x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4) > 0$, de acuerdo a la operatoria en $\mathbb{R}$ $(x-1)(x+4) > 0 \iff [(x - 1 > 0) \wedge (x + 4 > 0)] \vee [(x - 1 < 0) \wedge (x + 4 < 0)]$

De aquí $f(x) > 0 \iff (x > 1 \wedge x > -4) \vee (x < 1 \wedge x < -4)$

(ii) Finalmente: $f(x) > 0 \iff x \in]-\infty, -4[\cup]1, \infty[$

(iii) Usando lo anterior, se desprende que: $f(x) < 0 \iff x \in]-4,1[$

c. $f(-a) = a^2 - 3a - 4$ y $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a} - 4$, con $a \in IR - \{0\}$.

d. $f(a+h) = (a+h)^2 - 3(a+h) - 4 = a^2 + 2ah + h^2 + 3a + 3h - 4$ y

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{([\![1+h)]\!]^2 - 3(1+h) - 4 - 0}{h} = \frac{h^2 + 5h}{h} = \frac{h(h+5)}{h} = h + 5, \quad h \neq 0$$

Ejemplo ilustrativo 2.

Expresa el siguiente modelo $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$ en su forma canónica. Posteriormente, determina sus raíces, valor máximo y/o mínimo y su respectiva gráfica.

Solución:

$$f(x) = -2x^2 + 6x - 4 = -2(x^2 - 3x + 2) = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2\right] = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$$

Por tanto: $f(x) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

De donde el vértice de la función cuadrática es: $V(h,k) = \left(\frac{3}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$

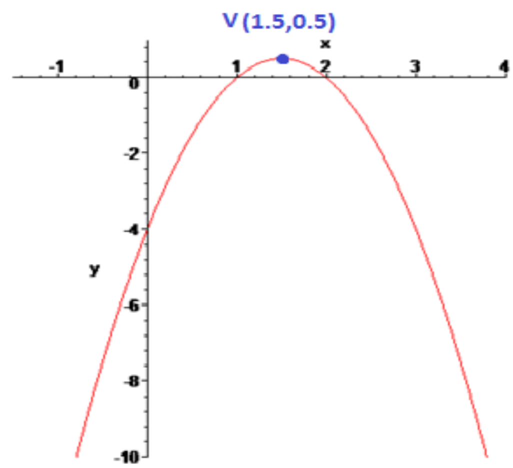
Y Las raíces de $f(x) = 0$ vienen dadas por: $x = h \pm \sqrt{-\frac{k}{a}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{1/2}{-2}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

Es decir $x_1 = \frac{4}{2} = 2$ y $x_2 = \frac{2}{2} = 1$

Por tanto, los interceptos con el eje X, corresponden a los puntos: $(1{,}0)$ y $(2{,}0)$

Además, $f(0) = -4$, de donde el intercepto con el eje Y , es el punto $(0, -4)$

Finalmente, como $a = -2 < 0$, trazamos el gráfico de la función cuadrática dada, tal como se muestra a contunuación



Importante: Recuerda que el vértice de la función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, se obtiene desde su forma canónica: $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Donde, $V(h,k)$ es el vértice de la función cuadrática y los parámetros a , h, k representan:

a: parámetro de amplificación, que determina la amplitud de la parábola.
h: traslación horizontal.
k: traslación vertical.

Además, recuerda que las raíces de la ecuación cuadrática $f(x) = 0$, reales o complejas, se obtienen fácilmente desde su forma canónica, como vemos a continuación:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x - h)^2 = -\frac{k}{a} \quad \Leftrightarrow \quad |x - h| = \sqrt{-\frac{k}{a}} \quad \Leftrightarrow \quad x = h \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$$

ÍTEM I. Modelos gráficos

1. Considera $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que su representación está dada por:

1.1. $f(x) = 3 - 4x$

1.2. $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$

1.3. $f(x) = 4x^2 - 15x - 25$

1.4. $f(x) = -\frac{4}{5}x^2 - 3x + 5$

1.5. $f(x) = \sqrt{x - 25}$

1.6. $f(x) = \sqrt{(2 - x)(x - 6)}$

En este contexto, determina:

a. $A = Domf$

b. El conjunto de los $x \in Domf$, para los cuales: $i)\ f(x) = 0$; $ii)\ f(x) > 0$; $iii)\ f(x) < 0$

c. $f(-a)$ y $f\left(\frac{1}{a}\right)$, $a \in A,\ a \neq 0$

d. $f(a+h)$ y $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

2. Utiliza las funciones: $g(x) = 4x$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$ para realizar las siguientes evaluaciones, con $a > 0$, realizando las restricciones necesarias de tal manera que cada operación defina un número real:

a. $g\left(\frac{1}{a}\right)$ b. $\frac{1}{g(a)}$ c. $g(\sqrt{a})$ d. $\sqrt{g(a)}$

3. Para cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = -3x + \frac{7}{3}$; b. $f(x) = -2x^2 + 3$; c. $f(x) = \sqrt{x-3}$

Determina $F(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, donde h es cualquier número real fijo y no nulo. Para cada caso, expresa matemáticamente el dominio correspondiente de F.

4. Ilustra de forma manual, la gráfica asociada a los siguientes modelos matemáticos. Compara la curva realizada por ti versus la realizada por el software (Geogebra u otro) y a partir de ello, establece semajanzas entre los modelos ilustrados.

GRUPO A	GRUPO B	GRUPO C	GRUPO D
$F(x) = (x+3)^2$	$T(x) - 1 = (x+2)^2$	$H(x) = 3(x+1)^2 + 4$	$G(x) = \frac{(x-3)^2}{3} + 1$
$f(x) = -(x+3)^2$	$t(x) - 1 = (x-2)^2$	$h(x) = 3(x-1)^2 + 4$	$g(x) = -\frac{(x-3)^2}{3} - 1$

5. *"Una función cuadrática convexa y centrada en el origen, se ha trasladado 0,75 unidades a la izquierda y tres unidades hacia abajo del eje de las abscisas"*. Con esos antecedentes, determina:

a. La fórmula general de la función trasladada.
b. El modelo matemático de la función trasladada, en su forma canónica.
c. La ilustración de la curva en IR^2.
d. El análisis de la monotonía de la curva.

ÍTEM II. Representa de la forma canónica e ilustra de forma manual, la curva asociada a los siguientes modelos matemáticos cuadráticos:

a. $f(x) = 4x^2 - 8x - 21$

b. $g(x) = 2x^2 + 4x + 5$

c. $h(x) = x^2 - 8x + 17$

d. $l(x) = x^2 + 2x + 4$

e. $m(x) = 2x^2 - 8x + 5$

f. $T(x) = -3x^2 + 2x + 1$

ÍTEM III. Problemas de contexto. Utilizando los recursos y herramientas provistas en clases, elabora y ejecuta un plan de acción que te permita resolver matemáticamente los siguientes problemas del ámbito profesional.

Problema 1.

En el laboratorio de fisiología animal se realizó una investigación orientada a describir el número de impulsos emitidos después que se ha estimulado el nervio de un animal equino. En ese contexto, "r" es el número de respuestas por milisegundos (ms) y "s" es el número de milisegundos transcurridos desde que es estimulado el nervio.

En virtud de los antecedentes proporcionados y la siguiente tabla:

s (ms)	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r(s) respuestas	0	7	12	15	16	15	12	7	0

Responde a los siguientes requerimientos:

a. ¿Cuántas respuestas se obtuvieron a los 8 milisegundos desde que fue estimulado el nervio.
b. ¿En qué instante(s) el número de respuesta es de 7 impulsos después de estimular el nervio?
c. Determina las variaciones medias del fenómeno de estudio, a partir de los valores observados.
d. Determina los intervalos de monotonía, es decir, donde $r(s)$ es creciente y donde es decreciente, usando las variaciones medias calculadas anteriormente.
e. Formaliza matemáticamente: (i) Dominio y recorrido de la función y (ii) Existencia del máximo y/o mínimo de la función.
f. Valida tus respuestas, a través de la representación gráfica del modelo matemático $r(s)$

Problema 2.
La industria de alimentos ha estado permanentemente preocupada por la dinámica de poblaciones de salmones. En ese sentido, se ha observado que los salmones emigran desde las zonas bajas de los ríos a las zonas altas de los mismos con el fin de desovar.

Es así como los salmones a medida que suben en el río, van ganando masa a razón de 200 gramos por cada kilómetro que avanzan, pero así también mueren 30 ejemplares por cada kilómetro recorrido.

Si una empresa salmonera deja en un punto "A" de un río 4500 ejemplares de salmones con una masa promedio de 2 kilos cada uno.

Requerido:

a. Modela la masa, en kilos, de la población de salmones en función de la distancia respecto de A que han avanzado los peces río arriba.
b. Establece el dominio e imagen de la función que modela la masa (Kg) de la población de salmones señalada en el punto anterior.
c. ¿A cuántos kilómetros más arriba de "A" se deben recoger los peces para que la masa de la población de salmones sea lo más grande posible?
d. Caracteriza el comportamiento de la función en su dominio.

Problema 3.
Al administrar 500 miligramos de un antibiótico inyectable a un ternero, se obtuvieron las siguientes concentraciones plasmáticas (Cpl) medidas en (μg/mL):

t **(minutos)**	30	45	60	75	90	120	180	240	300	360
t **(horas)**										
$\mathrm{Cpl}(t)$ **(μg/mL)**	1,2	6,7	10,2	12,1	12,6	11,1	5,1	2,5	1,1	0,6

En función del contexto:

a. Determina las variaciones medias en los intervalos dados, en función del tiempo en horas.
b. Determina los intervalos de monotonía, es decir, donde $\mathrm{Cpl}(t)$ es creciente y donde es decreciente. Para ello, utiliza las variaciones medias calculadas anteriormente.
c. Indica el tipo de crecimiento y decrecimiento, y la forma de la gráfica asociada. Justifique su respuesta.
d. ¿A qué hora la concentración es máxima y a qué hora es mínima?
e. ¿Cuántas horas deben transcurrir para administrar la siguiente dosis de antobiótico?
f. Esboza el gráfico de la curva $\mathrm{Cpl}(t)$, considerando el tiempo **en horas**.

Problema 4.

Contexto

El ozono se presenta en todos los niveles de la atmósfera terrestre y su densidad varía según la estación del año y la altitud. En Edmonton, Canadá, la densidad D(*h*) del ozono (en 10^{-3} cm/km) para altitudes *h* entre 20 km y 35 km se determinó a nivel experimental. En ese contexto, para cada D(*h*) y estación del año, los modelos matemáticos estimados son los siguientes:

Otoño:

$D_{oo}(h) = -0{,}058h^2 + 2{,}867h - 24{,}239$

Primavera:

$D_{op}(h) = -0{,}078h^2 + 3{,}811h - 32{,}433$

Requerido

a. Formaliza matemáticamente cada variable.

b. Determina dominio y recorrido para cada modelo matemático.

c. Determina la altitud donde la densidad del ozono es máxima, durante el mes de abril en Edmonton, Canadá.

d. Determina la altitud donde la densidad del ozono es máxima, durante el mes de septiembre en Edmonton, Canadá.

e. Con apoyo de software, grafica $D_{oo}(h)$ y $D_{op}(h)$.

f. Analiza la monotonía de $D_{oo}(h)$ y $D_{op}(h)$.

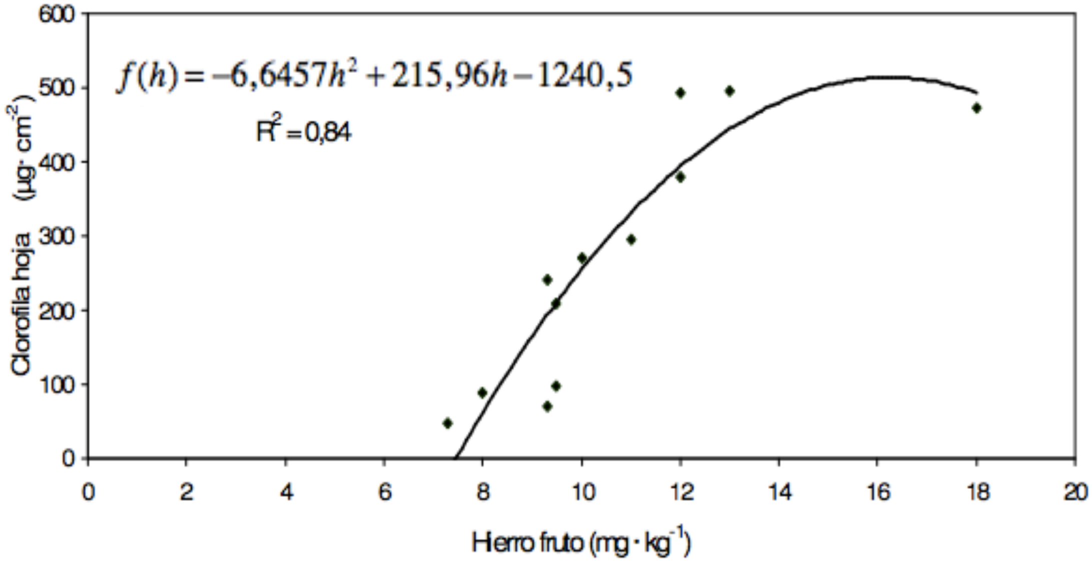
g. Determina $D_{oo}(h) = D_{op}(h)$ e interpreta dicho resultado.

Problema 5.

A diferencia de lo que ocurre con los otros nutrientes, el hierro de las hojas - determinado mediante análisis foliar - generalmente no resulta confiable para diagnosticar su carencia (clorosis férrica) en palto y otros frutales. Con el objetivo de encontrar una mejor herramienta para evaluar el nivel de hierro del árbol, se realizó un estudio en un huerto variedad "Hass", donde se seleccionaron, aleatoriamente, 4 árboles con follaje normal, 4 árboles con clorosis férrica leve y 4 con clorosis férrica intensa.

En cada árbol se colectaron, 15 hojas, 15 frutos y 40 inflorescencias. En estos tejidos se determinó concentración de hierro, mediante espectrofotometría de absorción atómica, previa calcinación y extracción con ácido clorhídrico. En las hojas, además se midió concentración de clorofila con espectrofotometría, previa extracción con etanol.

La concentración de Hierro en la hoja y en la inflorescencia no presentó diferencias significativas entre los árboles. En cambio, en la pulpa del fruto fue mayor en los árboles normales y menor en los otros, según el nivel de clorosis presente. Además, la concentración de hierro de la pulpa, se presentó altamente asociada ($R^2 = 0{,}84$) con la concentración de clorofila de la hoja, lo cual no ocurrió en el caso del hierro de la hoja y de la inflorescencia. Estos resultados, junto con descartar al análisis de hierro en la hoja y en la inflorescencia, permiten postular **al análisis de hierro en la pulpa del fruto, como un promisorio método de diagnóstico, para evaluar el nivel de este nutriente en el árbol de palto** (Razeto y Palacios, 2007).



Requerido. Considerando tus conocimientos previos, los contenidos teóricos vistos en clases, la información contenida en el gráfico y el contexto de la investigación realizada:

a. Determina el dominio y recorrido de la función *f (h)*.
b. Determina, fundamenta y luego interpreta el máximo de la función *f (h)*.
c. Según el estudio, *f* (12) condiciona el nivel crítico de Hierro en el fruto. Calcula *f* (12) y explica la significancia de dicho resultado.
d. Determina los niveles de clorofila en la hoja para concentraciones de Hierro de 8,5 mg · kg^{-1} , 10,5 mg · kg^{-1} y 16 mg · kg^{-1}
e. Investiga y escribe (en un máximo de tres líneas) la relevancia del factor R^2 = 0,84 para efectos del presente estudio.

Problema 6.
Producto del proceso de implementación de una planta faenadora de cerdos, se han debido realizar labores de limpieza del río Aconcagua. En función de ello, se observó que en un período de 5 días se habían retirado 11,5 toneladas de desechos, mientras que en 8 días dicha cantidad aumentó a 20,8 toneladas. Si se sabe que el modelo que relaciona la cantidad de material de desecho, en función del tiempo, es cuadrático; responda a los siguientes requerimientos:

a. Modela, algebraicamente, la expresión que relaciona la cantidad de material de desecho en función del tiempo.
b. Traza la curva asociada al modelo matemático.
c. Determina, a través de algún procedimiento algebraico, el instante en que se produce el valor extremo de la función; indicando si es un máximo o mínimo valor.
d. Establece y ejecuta una estrategia algebraica que permita determinar el número de días y horas que han de transcurrir para que la cantidad de deshechos sea 54,4 toneladas.

Problema 7.
La polilla del racimo de la vid (*Lobesia botrana*) ataca a los viñedos de la zona central de Chile. Su larva provoca un daño directo al alimentarse de los racimos, generando una pudrición y deshidratación de las bayas, situación que hace disminuir considerablemente el rendimiento de productivo en los viñedos.

En base a este antecedente, se han estudiado diversos insecticidas volátiles, relacionando su actividad larvicida $A(L)$ con su respectiva solubilidad en grasas o lipofilia (L). Cabe señalar que la actividad larvicida se mide en larvas muertas por hora [L_m/h], mientras que la lipofilia es adimensional, dado que es un cuociente entre dos concentraciones.

Luego de la aplicación del producto, las viñas entran en un período de cuarentena para permitir que el insecticida se evapore. Tú, como jefe de la sección de investigación y desarrollo de la Viña Undurraga, tienes como misión investigar a qué valor de lipofilia le corresponde la máxima actividad larvicida y buscar el modelo matemático que más se ajuste a la situación planteada.

Insecticidas volátiles	Lipofilia* (L)	Actividad Larvicida $A(L)$
1	-0,8	0,866
2	-0,7	1,156
3	**-0,3**	**1,222**
4	-0,2	1,372
5	**0,6**	**1,871**
6	0,8	1,869
7	**0,9**	**1,416**
8	1,0	1,781
9	1,2	1,390

*La interpretación de la lipofilia negativa es que mientras más negativa esta sea, el insecticida es más soluble en agua. Los datos del estudio, corresponden a nueve insecticidas y están recopilados en la tabla correspondiente.

En función de lo anterior y si se sabe que los datos responden de mejor manera a un modelo cuadrático, determina por medio de un procedimiento rigurso, claro y ordenado:

a. La estructura algebraica del modelo.
b. Los valores para los cuales la actividad larvicida es nula.
c. La actividad larvicida mínima o máxima.
d. El modelo gráfico correspondiente.

Revisa otros problemas de contexto:

Problema 8.

Botrytis cinerea Pers es agente causal de la pudrición gris de la vid (*Vitis vinifera L.*), ésta ocasiona importantes pérdidas tanto en uva de mesa como en variedades destinadas a la vinificación, especialmente en zonas con climas templados y húmedos durante la cosecha (Bulit y Dubos, 1988; Latorre, 1986; Latorre y Vásquez, 1996).

Los síntomas de esta enfermedad aparecen cuando las bayas tienen sobre 8% de sólidos solubles y concurren condiciones ambientales favorables. Sin embargo, también son frecuentes las infecciones durante la brotación y floración, produciendo lesiones cancrosas y necrosamiento de brotes y racimos (Bulit y Dubos, 1988; Latorre, 1986). Adicionalmente, ocurren infecciones latentes las que tienen importancia como fuente de inóculo para el posterior desarrollo de esta enfermedad, particularmente en la postcosecha de la uva de mesa (Latorre y Vásquez, 1996).

Previamente se ha reportado el efecto de la temperatura sobre el desarrollo de B. cinerea in vitro y el efecto de la temperatura sobre el desarrollo de la infección en vid y otros cultivos (Eden, et al., 1996).

En este contexto, este trabajo tuvo el propósito de estudiar el efecto de la temperatura en la infección de flores y de bayas maduras de uva de mesa.

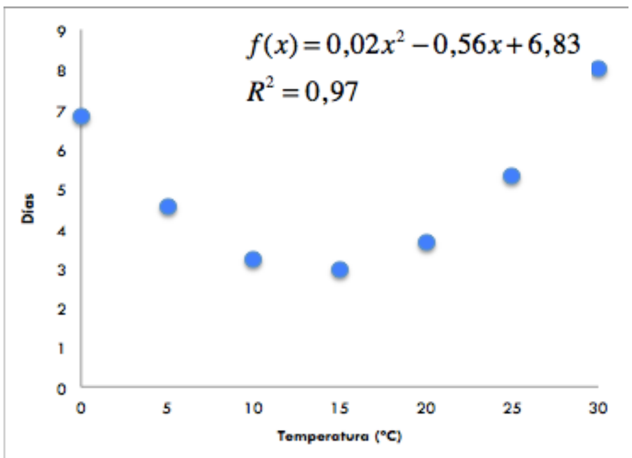


Figura A: Período de incubación estimado para el desarrollo de la pudrición gris (*Botrytis cinerea*) en bayas de la vid de los cvs. Flame seedless (Latorre *et al,* 2002).

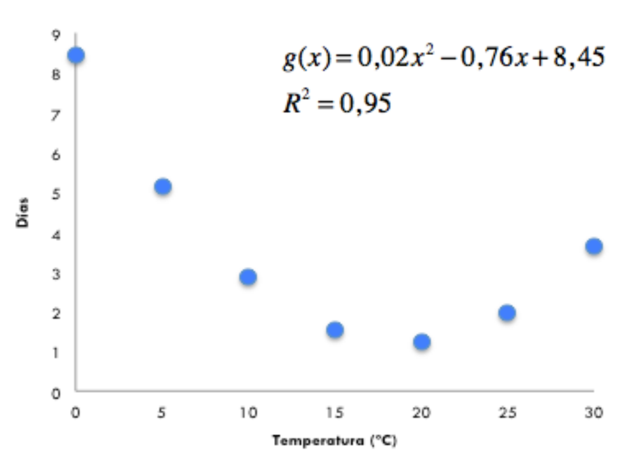


Figura B: Período de incubación estimado para el desarrollo de la pudrición gris (*Botrytis cinerea*) en bayas de la vid de los cvs. Thompson seedless (Latorre *et al,* 2002).

En virtud del contexto, se requiere:

a. Determinar el intervalo para el cual está definida $f(x)$ y $g(x)$, en base a la información que proporciona la Figura 1.

b. Determinar algebraicamente el dominio y recorrido de la función que modela período de incubación estimado para el desarrollo de la pudrición gris, en el cultivar *Flame Seedless* y *Thompson Seedless.*

c. Determinar algebraicamente si $f(x)$ y $g(x)$ alcanza un máximo o mínimo. Luego determine dicho parámetro y interprételo de acuerdo al contexto en que se éste se inserta.

d. Determinar el período de incubación (días y horas) de *Botrytis cinerea* en las bayas del cv. *Flame seedless*, si se sabe que una estación meteorológica ubicada en el Valle de Casablanca ha registrado temperaturas promedio del orden de los 22°C en los primeros 15 días del mes de abril.

e. Determinar e interpretar el punto de equilibrio de las funciones que modelan el período de incubación en la bayas de los cvs. *Flame seedless* y *Thompson seedless.*

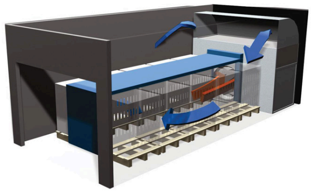
f. Con la información obtenida anteriormente, ¿Qué orientaciones entregarías a los productores de uva de mesa de estos cultivares?

Sección 3. Otras funciones elementales

1. Función raíz cuadrada

Contexto

El preenfriamiento (precooling) por aire forzado es un método muy utilizado para enfriar frutas, vegetales o flores cortadas. Esta técnica consiste en pasar altos volúmenes de aire frío a alta presión a través del producto, extrayendo de una forma rápida y uniforme el calor contenido en el producto.



Casi todos los productos frescos del supermercado pueden ser preenfriados por aire forzado, aunque es más usado para las frutos provenientes de árboles así como también moras, melones y flores cortadas.

En un laboratorio de postcosecha de fruta se midió la temperatura que alcanza una cámara de refrigeración, luego de cinco y hasta 15 horas, de ingresado el total de volumen de fruta a dicha cámara. En ese contexto, la temperatura (°C) de la cámara, en función del tiempo (horas) está representada por el siguiente modelo matemático:

$$T(t) = \frac{-5\sqrt{t-5}-1}{5}$$

Requerido

a. Elabora el gráfico de la curva, considerando el contexto y el modelo matemático dado.

b. Redefine algebraicamente la función $T(t)$, en función del contexto dado.

c. Caracteriza el comportamiento de la curva, considerando las variables involucradas.

d. Interpreta la temperatura de la cámara de refrigeración, al inicio y término de las mediciones efectuadas.

e. Determina e interpreta la hora exacta (horas y minutos) en que la cámara de refrigeración alcanza una temperatura de -3°C.

2. Funciones definidas a tramos

ÍTEM I. Para la siguientes funciones, determina su dominio, recorrido y respectivo modelo gráfico:

$$p(x) = \begin{cases} |-4| & \text{si} \quad x < -\frac{1}{2} \\ -4 - x & \text{si} \quad -\frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{2} \\ 3x+2 & \text{si} \quad x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x-3} & \text{si} \quad -6 \leq x < 0 \\ 2x-3 & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ -3x+5 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$$m(x) = \begin{cases} |-x+6| & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2 - x^2 & \text{si} \quad 1 < x < 5 \\ \frac{-6+2x}{3} & \text{si} \quad x \geq 5 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} t^2+2t-1 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ \frac{6\sqrt{t+4}\ -1}{2} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

ÍTEM II. Problemas de contexto. Utilizando los recursos y herramientas provistas en clases, elabora y ejecuta un plan de acción que te permita resolver matemáticamente los siguientes problema del ámbito profesional.

Problema 1.

La absorción Fósforo $\left(\mathrm{ppm}\cdot\mathrm{Kg}^{-1}\right)$ para una determinada especie de leguminosas, en función del tiempo (horas), desde que se aplicó un fertilizante fosfatado; está dada por la función:

$$\mathrm{P}(t)=\begin{cases}\mathrm{P}_1(t) & 0\le t\le t_n\\ \mathrm{P}_2(t) & t_n<t\le t_N\end{cases} \text{ ; donde: } \begin{matrix}\mathrm{P}_1(t)=-t^2+10t\\ \mathrm{P}_2(t)=-4t+48\end{matrix}$$

En base a lo anterior:

a. Establece el dominio de $\mathrm{P}(t)$, sabiendo que:

(i) $t_n\in\left]6,\infty\right[$ y se obtiene de la intersección de $\mathrm{P}_1(t)\wedge\mathrm{P}_2(t)$

(ii) t_N es el instante donde la absorción de Fósforo por parte de la planta, es nula.

b. Ejecuta un procedimiento matemático para modelar $\mathrm{P}_1(t)$ en su forma canónica. Utilice el método de completación de cuadrados de binomio.

c. Grafica función en su dominio.

d. Señala, utilizando lenguaje matemático, el intervalo de tiempo donde la absorción del fertilizante es estrictamente creciente. Justifica tu respuesta, utilizando variaciones medias.

Problema 2.

Varias proteínas que contienen cobre (Cu) desempeñan un papel fundamental en procesos tales como la fotosíntesis, respiración, desintoxicación y lignificación. Cuando se presenta una deficiencia de Cu, la actividad de estas enzimas se reduce drásticamente.

En relación a lo anterior, existe evidencia científica que la deficiencia de Cu afecta el crecimiento reproductivo (formación de granos, semillas y fruto) mucho más que al crecimiento vegetativo. En las flores de plantas con adecuado suministro de Cu, las anteras (que contienen polen) y los ovarios tienen mayor contenido y demanda de este nutriente. En ese contexto, el polen proveniente de plantas con deficiencia de Cu no es viable.

En trigo, el efecto más marcado de la deficiencia de Cu[1] es la reducción del crecimiento del sistema reproductivo, condición que luego se expresa en la producción de granos. Investigaciones llevadas a cabo en esta línea han permitido monitorear la distribución de este nutriente (mol/cm^3) en el tejido vascular de plantas de trigo, en función del período de análisis en laboratorio (días).

A partir de ello, el modelo matemático que relaciona ambas variables es:

$$D(t)=\begin{cases}4\left(t-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{2} & ,si\quad 0<t\le 3\\ -25\sqrt{t-4}+62 & ,si\quad 3<t\le 8\\ 3\sqrt{t-10} & ,si\quad 8<t\le 10\end{cases}$$

Donde:

---

[1] Se estima que el tejido vascular presenta **déficit** nutricional, cuando se cumple la siguiente condición: $6\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{cm3}}\le[Cu]<0\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{cm3}}$; presenta **rangos normales** cuando: $20\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{cm3}}\le[Cu]<6\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{cm3}}$; y **rangos óptimos** cuando: $35\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{cm3}}\le[Cu]<20\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{cm3}}$

$t \in]0,3]$: Corresponde al período de muestreo (corte del tejido) para su posterior análisis.

$t \in]3,8]$: Corresponde al período de reposo del tejido vegetal para su posterior análisis.

$t \in]8,10]$: Corresponde al período en que se aplica un suplemento de Cu sobre el tejido vegetal.

En base a los elementos presentados anteriormente:

a. Grafica la relación $(t, D(t))$ en el contexto dado (intersecciones con los ejes, máximo y/o mínimo (si corresponde) y asíntotas (si las hubiere)).

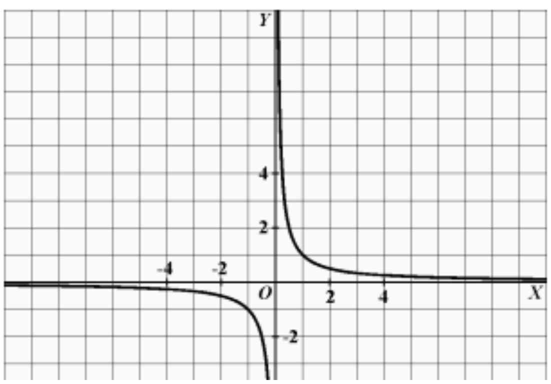
b. Analiza el comportamiento *cualitativo y cuantitativo* de la curva en cada intervalo. **Argumente su respuesta** en base a resultados empíricos que se puedan obtener del modelo matemático.

Sección 4. Función inversa proporcional

1. Conceptos básicos

Las funciones cuya expresión es $y = \dfrac{k}{x}$ se llaman ***funciones de proporcionalidad inversa*** y su gráfica recibe el nombre de ***hipérbola,*** siendo $\boldsymbol{k}$ la constante de proporcionalidad.

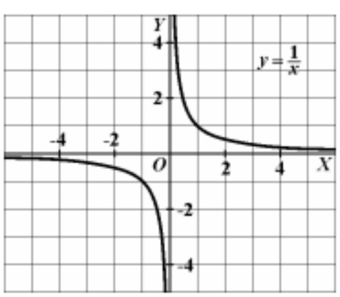
Representando las dos ramas en los mismos ejes se obtiene la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x}$.

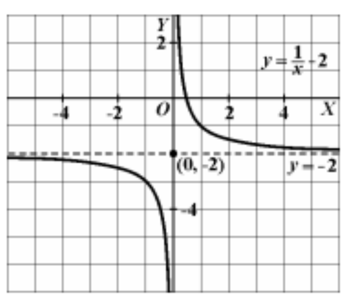


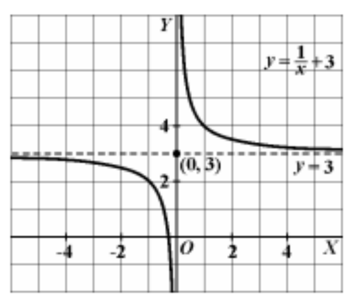
A la vista de la gráfica observamos que:

- La función no está definida en el origen.
- Es continua en todos los puntos salvo en $x = 0$, que no pertenece al dominio.
- Es siempre decreciente.
- Es simétrica respecto al origen de coordenadas.
- Las rectas de ecuación $y = 0$ y $x = 0$ (ejes de coor-

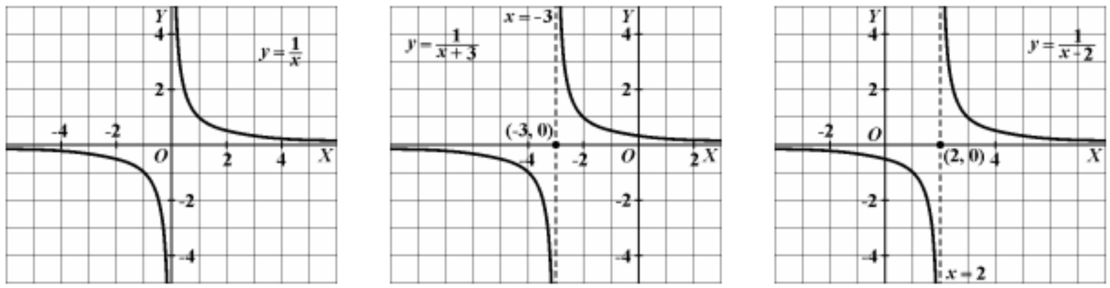
Traslación vertical: $y = \dfrac{k}{x} + p$







Traslación horizontal: $y = \dfrac{k}{x+h}$



> Las ***funciones racionales*** del tipo $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ se pueden expresar siempre de la forma $y = \dfrac{k}{x+h} + p$.
>
> Su representación gráfica es una ***hipérbola*** cuya ***asíntota horizontal*** es el cociente de dividir el numerador entre el denominador, y la ***asíntota vertical*** se obtiene en el valor de x que anula al denominador.

Importante: Sea la función $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0}$. En base a este modelo, se puede establecer:

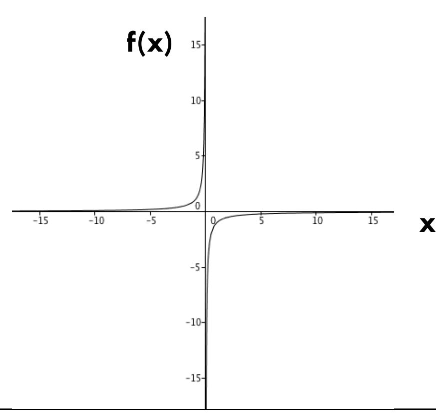
i) Si $n > m \Rightarrow f(x)$ **NO** posee asíntota horizontal, por ejemplo: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x+1}$.

ii) Si $n = m \Rightarrow f(x)$ **SI** posee asíntota horizontal y es la recta $y = \dfrac{a}{b}$, por ejemplo para $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$, la asíntota horizontal es $y = 1$.

iii) Si $n < m \Rightarrow f(x)$ **SI** posee asíntota horizontal y es el eje x. Por ejemplo para $f(x) = \dfrac{2}{x}$, la asíntota horizontal es $y = 0$.

¡Recuerda!

Todas las funciones se obtienen a partir de una **función identidad**, para este caso, todas las funciones de la forma $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ se obtienen a partir de la función inversa proporcional, cuyo modelo matemático es: $f(x) = \dfrac{1}{x}$, que gráficamente se representa de la siguiente manera:



Ejemplo ilustrativo 1.

A continuación se presentan un ejercicio, cuyo propósito radica en obtener la curva asociada al modelo, mediante sucesivas traslaciones. Para ello, observa cuáles son los procedimientos y la lógica de trabajo para lograr tal cometido.

Importante: El método que se presenta a continuación es un ejemplo ilustrativo pues existen otros métodos para obtener el gráfico de la curva. Por ejemplo, a través de la división sintética de polinomios.

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ una función definida por $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}$. A partir de dicho modelo algebraico debes obtener:

a. El dominio y recorrido de $f(x)$
b. La(s) ecuacione(s) de las asíntotas.
c. El gráfico de la función.

Desarrollo:

PASO 1. Para abordar metodológicamente el ejercicio, se debe considerar expresar el modelo $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}$ de la forma: $f(x)=\dfrac{k}{x+h}+p$. Para ello se procede de la siguiente forma:

a. Transformación **algebraica** de la expresión $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}$

$$f(x)=\frac{2x+3}{x+4}=\frac{2x+(-x)+x+3+(1)-1}{x+4}$$

El principal objetivo es "eliminar" la variable independiente del numerador. Para ello, se suman factores en el numerador con el fin de igualar el numerador con el denominador. En ese caso se debe prestar **especial atención al desarrollo pues no se debe alterar el valor general de la expresión algebraica.** Esto implica que si se "suma" un factor, este se debe "restar" y viceversa.

$$f(x)=\frac{x+4}{x+4}+\frac{x-1}{x+4}$$

Si se observa, claramente se cumplió el propósito. El numerador logró igualarse (en parte) con el denominador de la expresión. Lo anterior permite efectuar el siguiente procedimiento:

$$f(x)=\frac{x+4}{x+4}+\frac{x-1}{x+4}$$

Se separan los componentes de la expresión en dos componentes diferentes (fracciones). A partir de ello, es posible observar que la expresión de la izquierda es 1, y por tanto, se escribe como tal.

$$f(x)=1+\frac{x-1}{x+4}$$

A partir de esta expresión es posible identificar que ya ha aparecido el factor "p", el cual señala la posible ubicación de una asíntota horizontal. Sin embargo, **el modelo aún no toma la forma de una función inversa proporcional** trasladada, pues aún permanece la variable "x" en el numerador. Lo anterior es un indicio de que la expresión debe seguir trabjándose algebraicamente hasta lograr su completa transformación:

$$f(x) = 1 + \frac{x - 1 + (-x) + x + 5 + (-5)}{x + 4}$$

Como se observa en el desarrollo matemático, nuevamente el objetivo es igualar la expresión que posee a la **variable independiente**, con su respectivo denominador. Al efectuar las operaciones, se logra obtener lo siguiente:

$$f(x) = 1 + \frac{x + 4}{x + 4} + \frac{-x + x - 5}{x + 4}$$

Al observar detenidamente este procedimiento, es posible identificar lo siguiente:

a. Aparece otro "uno" en la expresión, a partir del segundo factor.
b. En el tercer factor de la expresión muestra que la variable independiente "x" desaparece del numerador.

$$f(x) = 1 + 1 + \frac{0 - 5}{x + 4}$$

$$f(x) = 2 + \frac{-5}{x + 4}$$

$$f(x) = -\frac{5}{x + 4} + 2$$

En base a la expresión anterior, y efectuando operaciones algebraicas elementales, se obtiene el siguiente modelo matemático:

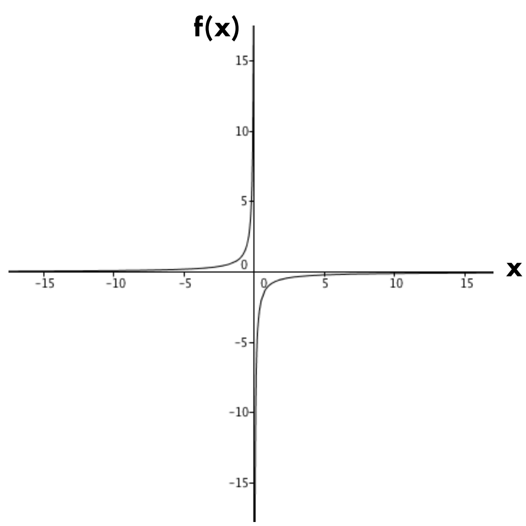
$$f(x) = -\frac{5}{x + 4} + 2$$

Si se desarrolla algebraicamente este modelo matemático, será posible observar que es idéntico al modelo matemático propuesto inicialmente:

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x + 4}$$

PASO 2. La obtención del modelo matemático $f(x) = -\frac{5}{x + 4} + 2$ resulta relevante, pues éste permite obtener inmediatamente:

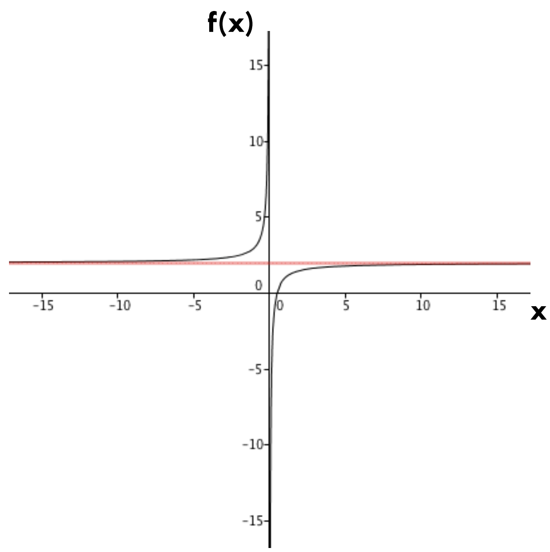
- **Orientación de la curva:** Se sabe que la función inversa proporcional es positiva si k>0. Sin embargo, en el modelo matemático se observa que k<0, ya que existe un signo negativo asociado al "5". Esto resulta relevante, pues al graficar el modelo matemático, la curva estará ubicada en el segundo y cuarto cuadrante del plano cartesiano. Tal como se muestra a continuación:



- **Ecuación de la asíntota horizontal:** Que está dada por la expresión "p" del modelo matemático, en este caso "2". En ese contexto, la ecuación de la asíntota horizontal será:

$$y = 2$$

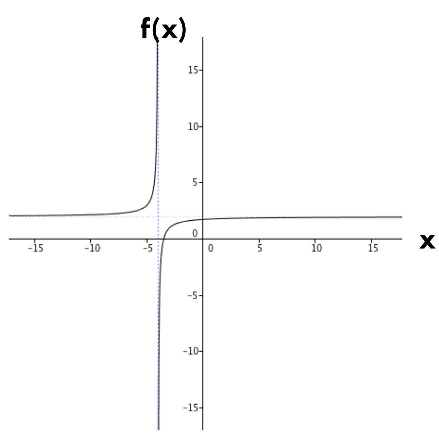
Lo anterior se traduce en que la curva se desplaza verticalmente desde su posición anterior, **<u>dos unidades</u>** sobre el eje "x". En ese contexto, la curva adopta la siguiente forma:



- **Ecuación de la asíntota vertical:** Que está dada por la expresión "h" del modelo matemático, en este caso "4". En ese contexto, la ecuación de la asíntota vertical será:

$$x + 4 = 0$$
$$x = -4$$

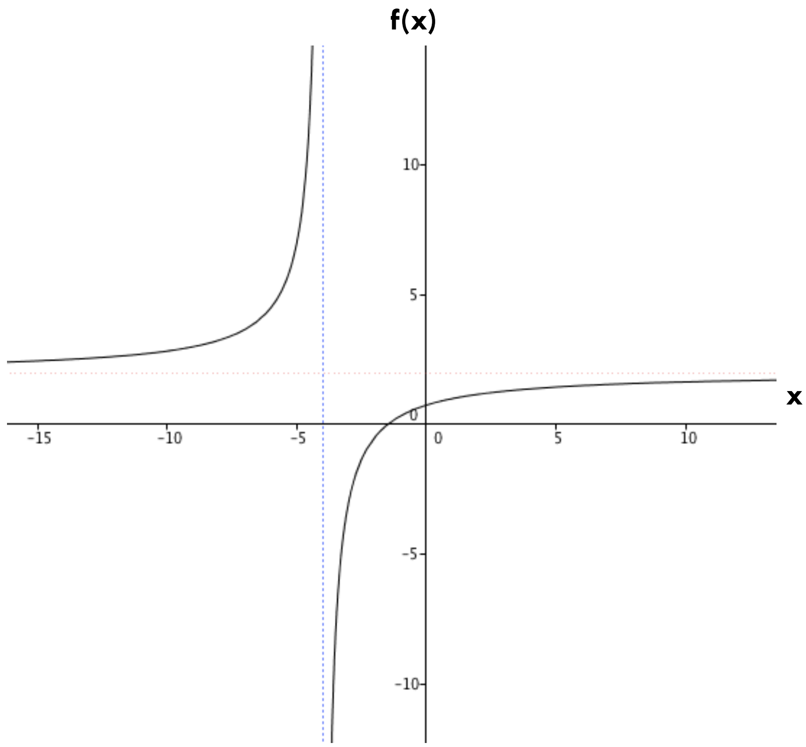
Lo anterior se traduce en que la curva se desplaza horizontalmente desde su posición anterior, **<u>cuatro unidades</u>** a la izquierda del origen. En ese contexto, la curva adopta la siguiente forma:



Importante.
Cabe señalar que conforme se generan las asíntotas (vertical u horizontal), se modifica la ubicación del centro de la hipérbola.

- **Ubicación del centro de la hiperbola:** La curva identidad f(x) = 1/x tiene su centro en el origen (0,0). Esto se debe a que el coeficiente "k" del modelo matemático, en este caso es 1. Sin embargo, ya se sabe que cuando se modifica un coeficiente del modelo matemático, la curva cambia significativamente su forma en términos gráficos.

  Lo anterior es un elemento clave al momento de graficar todo modelo matemático, ya que ***" a mayor "k", mayor será el alejamiento de la curva respecto a su centro original, es decir, el origen"***, sin considerar por supuesto el desplazamiento que puede sufrir este centro debido a la ubicación relativa, de acuerdo a la naturaleza de sus asíntotas. En ese contexto, y considerando que k=5, el gráfico representativo del modelo matemático es:



Importante:

- Nótese la ubicación del centro de la hipérbola.
- La relación que existe entre las asíntotas (vertical y horizontal) y la ubicación del centro.
- El alejamiento de la curva, respecto de su centro.
- El acercamiento de la curva con las asíntotas.

PASO 3. Una vez elaborado el gráfico del modelo matemático se procede a formalizar cada uno de los requerimientos del ejercicio:

a. Dominio y recorrido de $f(x)$

Dominio de la función: El dominio estará dado por todos aquellos reales, excluyendo a la asíntota verticial. Lo anterior es posible determinar realizando el análisis del dominio, a partir de la expresión que podría indeterminar la función; es decir, el denominador:

$$x + 4 = 0$$
$$x = -4$$

Por lo tanto, el dominio de la función corresponderá a todos los números reales, excepto x=-4. Matemáticamente esto se formaliza de la siguiente manera:

$$Domf = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -4\}$$

Recorrido de la función: El recorrido estará dado por todos aquellos reales, excluyendo a la asíntota horizontal. Lo anterior es posible determinar realizando el análisis del recorrido; es decir, despejando la expresión en función de x. Para ello, se procede de la siguiente manera.

Sea f(x) = y, entonces:

$$\begin{aligned}
&y = -\frac{5}{x+4} + 2 \\
&y - 2 = -\frac{5}{x+4} \\
&(y-2)\cdot(x+4) = -5 \\
&xy + 4y - 2x - 8 = -5 \\
&x(y-2) + 4y - 8 = -5 \\
&x = \frac{-4y + 8 - 5}{y-2} \\
&x = \frac{-4y+3}{y-2} \\
&x = -\frac{4y+3}{y-2}
\end{aligned}$$

Si se observa, en el denominador existe una variable que puede indeterminar la expresión, para ello, se analiza el denominador de la expresión, obteniéndose:

$$\begin{aligned}
&y - 2 = 0 \\
&y = 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el dominio corresponderá a todos los números reales, excepto y=2. Matemáticamente esto se formaliza de la siguiente manera:

$$\operatorname{Re} cf = \{y \in \mathbb{R} / y \neq 2\}$$

b. Ecuaciones de las asíntotas.

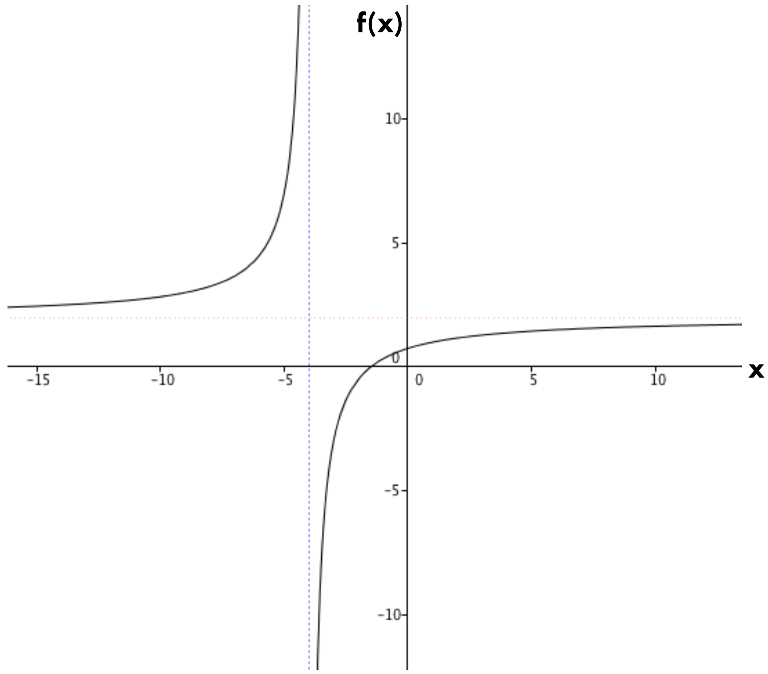
Ecuación de la asíntota vertical: En "p" en el modelo matemático y se obtiene a partir del dominio, así entonces, la ecuación será:

$$x = -4$$

Ecuación de la asíntota horizontal: Es "h" en el modelo matemático y se obtiene a partir del recorrido, así entonces, la ecuación será:

$$y = 2$$

c. Gráfico de la curva: Dado que se trata de un modelo matemático NO contextualizado, la representación gráfica de dicho modelo es:



2. Actividades de aprendizaje

Las siguientes actividades te permitirán conocer y aplicar conceptos teóricos asociados al estudio de una función muy relevante, la función racional. Se espera que este recurso te permita analizar la función inversa proporcional, o también llamada por algunos autores como hiperbólica, a fin de de puedas interpretar, deducir, inferir y concluir información relevante, a partir diferentes modelos matemáticos en situaciones con y sin contexto científico.

ÍTEM I. Transformación algebraica del modelo y construcción de su gráfica.

A continuación encontrarás ejercicios rutinarios para que pongas en práctica el método de obtención del gráfico de una función hiperbólica. En esa misma línea, se espera que puedas determinar todos sus elementos, es decir, dominio, recorrido, asíntostas (si las hubiere) y su centro.

1. $f(x)=\dfrac{3x-3}{x+4}$
2. $f(x)=\dfrac{3x}{x+5}$
3. $f(x)=\dfrac{x-5}{2x-14}$
4. $f(x)=\dfrac{4x-6}{3x-18}$
5. $f(x)=\dfrac{4x+2}{2x-1}$
6. $f(x)=\dfrac{3x+5}{x+1}$
7. $f(x)=\dfrac{-x}{-x+1}$
8. $f(x)=\dfrac{4x-2}{2x+1}$
9. $f(x)=\dfrac{-6x+12}{2x+3}$
10. $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x-4}$
11. $f(x)=-\dfrac{2}{x}+3$
12. $f(x)=\dfrac{3x-9}{x-2}$
13. $f(x)=-\dfrac{2}{x+5}$
14. $f(x)=\dfrac{9}{x-4}-2$
15. $f(x)=-\dfrac{2}{x+5}+3$

ÍTEM II. Problemas de contexto. Utilizando los recursos y herramientas provistas en clases, elabora y ejecuta un plan de acción que te permita resolver matemáticamente los siguientes problemas del ámbito profesional.

Ejemplo ilustrativo.

Contexto	**Requerido**
En la industria de alimentos, es usual el uso de bombas para evacuar el agua contenida en un estanque de desechos derivados de un proceso productivo.	En base a lo anterior: a. Describe las variables involucradas.
La función que modela el tiempo (horas) que tarda en vaciarse el depósito, en función del número de bombas utilizadas está dada por el modelo: $$f(b) = \frac{6}{b}$$	b. Determina el dominio de la función en el contexto dado. c. Ilustra el gráfico de $f(b)$ en el contexto dado.

Solución:

Etapa 1. Comprender el Problema

Razonamiento Previo: Observemos que, a mayor cantidad de bombas para llenar el depósito, menos tiempo tardará en llenarse. Esto es lo que llamamos una proporcionalidad inversa, o más técnicamente, decimos que estamos en presencia de una función hiperbólica.

Variables involucradas:
b: número de bombas utilizadas para el llenado del depósito. (variable independiente)
$f(b)$: horas que demora el proceso de llenado con b bombas. (variable dependiente)

Datos:

- Modelo matemático, $f(x) = \frac{6}{x}\ ,\ x > 0$

- Relación para establecer entre el número de bombas y el tiempo que tarda en llenarse el depósito.

Así, si una bomba llena el depósito, se tiene la relación: $f(1) = \frac{6}{1} = 6$ hrs.

Si se tienen 3 bombas, entonces el tiempo de llenado es: $f(3) = \frac{6}{3} = 2$ hrs. (menos tiempo).

En general, N bombas llenarán nuestro estanque en: $f(N) = \frac{6}{N}$ hrs.

Observar que la función se va aproximando a cero, a medida que las bombas aumentan, es decir el llenado demora cada vez menos.

Incógnitas: $Dom\ f$ y gráfico.

Etapa 2. Elaborar un plan de acción

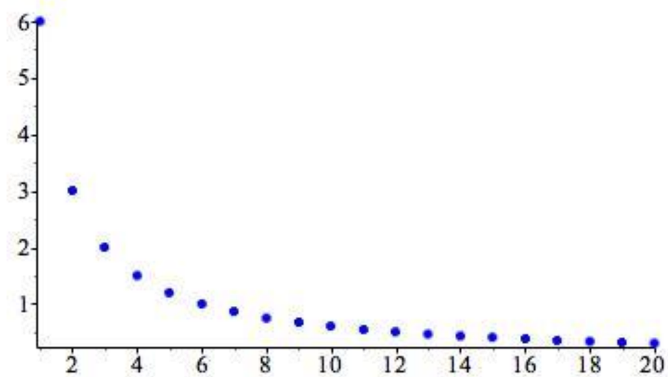
- **i)** De la lectura reflexiva del enunciado se extrajo la información correspondiente a: variables, datos e incógnitas.
- **ii)** Del modelo matemático que está dado se analiza dominio y esbozo del gráfico reconociendo los parámetros involucrados.

Etapa 3. Ejecución del Plan
En relación al requerimiento "b", analizamos la expresión algebraica y observamos las restricciones de la expresión.

i) Para que f sea un número real $N \neq 0$.
ii) A partir del contexto del problema, se infiere que el dominio considera solo valores enteros positivos.
iii) Este dominio además está acotado por el tiempo de llenado del depósito.

Luego, el dominio es en notación matemática: $D_f = Z^+$

En relación al requerimiento "c", observamos que el gráfico, de acuerdo al contexto es:



Eje de las abscisas: b ; Eje de las ordenadas: $f(b)$

Etapa 4. Interpretación de los resultados y respuestas.

En relación al requerimiento "b": Tiene sentido analizar solo resultados de los cálculos de la etapa 3.
El dominio son todos los números enteros positivos, aunque observamos que habrá un momento en que el estanque se llenará y de acuerdo al contexto del problema no tiene mucho sentido un análisis a centésimos de horas, aunque la función matemáticamente no se hará 0.

En relación al requerimiento "c": En el gráfico se puede observar la afirmación sostenida en el punto anterior.

Problemas propuestos

Problema 1.
Un Centro de Investigación de Flora y Fauna de una consultora medioambiental monitorea permanentemente el comportamiento de las poblaciones de fauna silvestre, con el objetivo de registrar y evaluar su tasa migratoria en diferentes períodos críticos del año.

En ese contexto, observaciones realizadas durante cuatro meses y medio (antes y después) de ocurrido un desastre natural en una localidad "A", permitieron determinar el siguiente modelo matemático:

$$M(t) = \frac{3t-17}{t-5}$$

Este modelo relaciona el número de individuos (decenas) de una población de aves que migra desde una localidad "A" a una localidad "B", en función del tiempo (meses). **Cabe señalar que $t=0$ representa el <u>1 de octubre de 2011</u>, instante en que se produjo el desastre natural en la localidad "A".**

En ese contexto:

a. Formaliza matemáticamente las variables involucradas (variable dependiente e independiente)
b. Determina algebraicamente las intersecciones con los ejes coordenados.
c. Formaliza matemáticamente la(s) ecuación(es) de la(s) asíntota(s), en caso de que la(s) hubiere.
d. Establece un plan de acción que le permita ilustrar **<u>paso a paso</u>** la curva M (t).
e. Grafica la curva M(t), **<u>en el contexto dado</u>**.
f. Redefine matemáticamente el modelo, formalizando el respectivo dominio y recorrido de M(t), en virtud del contexto dado.
g. Determina porcentualmente el incremento de la tasa migratoria entre M(4,5) y M(0), interpretando dicho resultado.
h. Evalúa el impacto que tuvo el desastre natural en la tasa migratoria de la población de aves silvestres. Para ello, **<u>básate en el comportamiento de la curva M(t), en contexto</u>**.

Problema 2.

Un grupo de Ingenieros en Alimentos recién titulados han generado un negocio en el rubro vitivinícola, el cual se basa en la producción de vinos de exportación, específicamente al mercado europeo.
Interesados en expandir su modelo negocio, y junto a ello, ingresar a nuevos mercados (asiático y americano) es que han estudiado el nivel de rentabilidad[2] (cientos de millones de pesos) de la empresa, realizando una proyección (en meses) desde que ésta comienza a abrirse mercado ($t > 0$) hasta un período de estabilidad ($t = 24$).

El modelo matemático representativo de la proyección elaborada por el grupo de Ingenieros es:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ R(t) = \frac{2t-1}{t+2}; \forall t \in \left]0,24\right]$$

En ese contexto:

a. Explica la(s) ventaja(s) que tiene transformar el modelo matemático de la forma: $R(t) = \dfrac{at+b}{ct+d}$ a la forma: $R(t) = \dfrac{k}{t+h} + p$.

b. Elabora un plan de acción que permita **graficar** de la curva, en el contexto dado.

c. Analiza las siguientes condiciones del modelo $R(t) < 0 \ \wedge \ R(t) > 0$ y utilícelas como recurso para estudiar el fenómeno planteado.

d. Elabora, al menos 2 conclusiones relevantes respecto del comportamiento de la curva, en el contexto dado.

Problema 3.
En el marco de una investigación para el desarrollo de una nueva técnica de conservación de célular, se debe criopreservar[3] una muestra de un tejido vegetal a una temperatura de -83ºC. Sabiendo que la temperatura de la muestra del tejido es de 36 grados Celsius y la evolución de esta (en minutos) se modela, a partir de la siguiente función:

$$T_m(t) = \frac{36-90t}{t+1}$$

Considerando además que $t = 0$ corresponde al instante en que la muestra se coloca en el congelador, responde a los siguientes requerimientos:

a. Grafica la función $T_m(t)$, **en el contexto dado**. Para ello, señala todos sus elementos (dominio, recorrido, intersecciones y asíntotas, en caso de que las hubiere).

b. Señala, a partir de un procedimiento algebraico, la temperatura que tendrá la muestra de tejido vegetal a los cinco minutos de haber ingresado al congelador.

c. Señala en qué instante la muestra alcanzará su estado de criopreservación.

d. ¿Cuál es la mínima temperatura de criopreservación que tendrá la muestra?. Indica cuál sería esa temperatura y justifica tu respuesta mediante una expresión algebraica pertinente; junto a su respectivo desarrollo matemático.

---

[2] Considere el concepto de rentabilidad, en términos muy simples, como las ganancias $R(t) > 0$, pérdidas $R(t) < 0$ o equilibro $R(t) = 0$ monetario de una empresa; producto del análisis de los ingresos $I(t)$ menos los costos $C(t)$ de ésta, en un período específico de tiempo.

[3] La criopreservación es el proceso en el cual células o tejidos son congelados a muy bajas temperaturas, generalmente entre -80 ºC y -196 ºC (el punto de ebullición del nitrógeno líquido) para disminuir las funciones vitales de una célula o un organismo y poderlo mantener en condiciones de vida suspendida por mucho tiempo. A esas temperaturas, cualquier actividad biológica, incluidas las reacciones bioquímicas que producirían la muerte de una célula, quedan efectivamente detenidas.

Problema 4.

Contexto

Un grupo de bioquímicos informa que la velocidad $\boldsymbol{v}$ de una reacción enzimática está dada por la ecuación:

$$v = \frac{v_{max} \cdot [S]}{K_m + [S]} \text{ ; con } [S] \geq 0$$

Donde, K_m es la constante de Michaelis, v_{max} es la velocidad máxima posible y $[S]$ es la concentración de sustrato.

Requerido

En virtud de lo anterior:

a. Reescribe esta ecuación de modo que $y = \frac{1}{v}$ se exprese como una función de $x = \frac{1}{[S]}$.

b. Esboza el gráfico de la función que encontró arriba. Este gráfico que se denomina representación recíproca boble de Lineweaber-Burk.

c. Grafica $\boldsymbol{v}$, a partir de los parámetros asociados al modelo.

Problema 5.

Contexto

Un estanque de cemento ha sido diseñado para almacenar Tolueno, compuesto químico utilizado para la elaboración de pinturas, resinas, recubrimientos, gomas, detergentes, químicos (ácido benzoico), perfumes, medicinas, sacarinas, entre otros productos.

Dicho estanque tiene capacidad de $375\ [m^3]$ y es llenado en $8\ [h]$ por una bomba B_1, y en $12\ [h]$ por una bomba B_2 .

Ingenieros químicos a cargo de la industria desean conocer qué bomba es más eficiente (menor tiempo de llenado) para este proceso.

Requerido

En este contexto:

a. Plantea un procedimiento matemático que permita determinar el tiempo en que ambas bombas, trabajando conjuntamente, llenan el estanque.

b. Determina el tiempo de llenado para un volumen de $250\ [m^3]$

Sección 5. Función polinómicas de orden superior

En esta sección del documento, el objetivo principal está centrado en que los estudiantes aprendan a dividir y factorizar polinomios, identificando una raíz racional. Esta estrategia se utiliza en: (i) el cálculo de algunos límites, (ii) en la descomposición de una expresión algebraica, a través del método de fracciones parciales, (iii) en el cálculo de primitivas de funciones racionales, y (iii) en la aplicación del método de los coeficientes indeterminados para quienes cursen – a futuro – la asignatura de ecuaciones diferenciales.

1. Algoritmo de Euclides

A partir de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, encontrar los polinomios $S(x)$ y $R(x)$, llamados *cociente* y *resto* respectivamente, de manera que $P(x)$ pueda ser expresado en la forma : $P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$, donde $R(x)$ tiene grado menor que $Q(x)$, o bien $R(x) = 0$

Objetivo de algoritmo de Euclides:
Se utiliza para transformar expresiones racionales, factorizando $P(x)$, cuando $R(x) = 0$.

Ejemplo ilustrativo 1. Dividir $P(x) = 4x^3 - 3x + 5$ por $Q(x) = 2x - 3$

Solución: Estrategia del algoritmo:

PASO 1. Se reescriben ambos polinomios en orden descendente de las potencias de x, incluyendo los coeficientes que son cero.

$4x^3 + 0 \cdot x^2 - 3x + 5 \ : 2x - 3$

PASO 2. Usamos el término $\frac{4x^3}{2x} = 2x^2$ para multiplicar a $Q(x)$ y el resultado de esta multiplicación, restarlo a $P(x)$, es decir :

$4x^3 + 0 \cdot x^2 - 3x + 5 \ : 2x - 3 = 2x^2$
$-4x^3 + 6x^2$

$6x^2 - 3x + 5$

PASO 3. Repetimos el proceso, pero ahora usando $6x^2 - 3x + 5$ y $Q(x) = 2x - 3$ en lugar de $P(x)$ y $Q(x)$, es decir:

$6x^2 - 3x + 5 \ : 2x - 3 \ ; \ 3x$
$-6x^2 + 9x$

$6x + 5$

PASO 4. Seguimos el algoritmo hasta obtener después de la línea segmentada un polinomio de grado menor que el grado de $Q(x)$, que es uno, esto es, un polinomio constante:

$6x + 5 \ : 2x - 3 \ ; \ 3$
$-6x + 9$

14

PASO 5. Fin del proceso porque se obtuvo un polinomio constante, que tiene grado cero, es decir menor que uno.

Así pues, hemos encontrado el polinomio cociente $S(x) = 2x^2 + 3x + 3$ y el polinomio resto $R(x) = 14$.

Ahora podemos expresar $P(x)$ en la forma: $P(x) = (2x^2 + 3x + 3)(2x - 3) + 14$ de donde se deduce que la expresión racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$, puede escribirse como :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(2x^2 + 3x + 3)(2x - 3) + 14}{2x - 3} = 2x^2 + 3x + 3 + \frac{14}{2x - 3}$$

2. División sintética de polinomios

La división sintética es un algoritmo que ocupa solo los coeficientes de los polinomios, y se usa para dividir un polinomio $P(x)$ por otro que debe tener la forma $x - a$.

Este método se explicará a través del siguiente ejemplo:

Si queremos dividir $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - x - 5$ por $x + 2$, procedemos como se indica a continuación :

Raíz conocida	**Coeficientes del dividendo**				
	2	3	0	-1	-5
		-4	2	-4	10
r = -2	2	-1	2	-5	5

PASO 1. En la segunda fila, a partir de la segunda columna, se escriben los coeficientes numéricos del polinomio dividendo $P(x)$, ordenados de mayor a menor grado.

PASO 2. En la cuarta fila se escriben: En la primera columna, el coeficiente del divisor (-2), se repite el coeficiente de la mayor potencia del dividendo es decir, de x^4, que es (2).

PASO 3. Se multilplica la raíz conocida (-2) por 2 y el resultado (-4) se escribe en la tercera fila debajo del siguiente coeficiente (3), al 3 se le suma el resultado y la suma es (-1) y se escribe bajo del (-4). Luego, se repite el procedimiento. Es decir, se multiplica la raíz (-2) por el resultado de la suma (-1) y el resultado (2) se escribe debajo del siguiente coeficiente (0), se suma al 0 y el resultado se anota bajo el 2. Se multiplica la raíz (-2) por 2, el resultado (-4) se escribe debajo del siguiente coeficiente (-1), se suma al (-1) y el resultado se anota debajo el (-4).

PASO 4. Finalmente se multiplica la raíz r=-2 por (-5), el resultado 10 se escribe debajo del -5, se suma con (-5) y el resultado, 5 se anota debajo del 10.

PASO 5. Los primeros términos de la cuarta fila son los coeficientes del cociente en orden decreciente de las potencias y el último término es el resto. Por lo tanto, podemos escribir:

$$2x^4 + 3x^3 - x - 5 = (x + 2)(2x^3 - x^2 + 2x - 5) + 5$$

2.1. Actividades de aprendizaje

ÍTEM I. Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, use el algoritmo de Euclides para encontrar polinomios $s(x)$ y $r(x)$, de manera que $P(x) = Q(x)s(x) + r(x)$ donde $r(x) = 0$ o bien el grado de $r(x)$ sea menor que el grado de $Q(x)$:

a. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1,\ Q(x) = x^2 + 1$
b. $P(x) = x^5 + 1,\ Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1$
c. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4,\ Q(x) = x - 2$
d. $P(x) = x^4 + 2x + 1,\ Q(x) = x^3 - 1$

ÍTEM II. Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, use división sintética para encontrar $s(x)$ y $r(x)$, que verifícan $P(x) = Q(x)s(x) + r(x)$,

a. $P(x) = x^3 + 4x^2 + 7x - 2$; $Q(x) = x + 2$
b. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 11x - 7$; $Q(x) = x - 3$
c. $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 3x + 7;\ Q(x) = x + \frac{1}{2}$

3. Teorema del factor

El teorema del factor establece que c es raíz del polinomio $P(x)$ si y solo si $(x-c)$ es un factor de $P(x)$, es decir si podemos factorizar $P(x)$, en la forma $P(x)=(x-c)S(x)$. De esta manera, usaremos este teorema, a fin de factorizar polinomios, en el caso que se conozcan raíces de $P(x)$.

Ejemplo Ilustrativo 1.

Exprese el polinomio $P(x)=4x^3+4x^2-11x-6$ como un producto de dos factores y, en seguida, como producto de tres factores, sabiendo que -2 es una raíz.

Solución:

- Como -2 es una raíz de $P(x)$, es decir $P(-2)=0$, teorema del factor dice que $(x+2)$ divide a $P(x)$
- Por lo tanto, al dividir $P(x)$ por $(x+2)$, se obtiene que el cuociente es $s(x)=4x^2-4x-3$ y el resto $r(x)=0$.
- Por lo tanto podemos escribir $P(x)=(4x^2-4x-3)(x+2)$
- Luego factorizamos $4x^2-4x-3$, encontrando sus raíces, y obtenemos:

$$4x^2-4x-3=4(x-\frac{3}{2})(x+\frac{1}{2})$$

- Finalmente, el polinomio factorizado es:

$$P(x)=4(x-\tfrac{3}{2})(x+\tfrac{1}{2})(x+2)=(2x-3)(2x+1)(x+2)$$

3.1. Actividades de aprendizaje

ÍTEM I. Factorice los siguientes polinomios $P(x)$

a. $P(x)=x^3+8$, sabiendo que $x=-2$ es una raíz.

b. $P(x)=x^3+3x^2-4x-12$, sabiendo que $x=-3$ es una raíz

c. $P(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$, sabiendo que $x=-1$ es una raíz

ÍTEM II. Verifique que $x-1$ y $x+2$ son factores del polinomio $P(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$ y encuentre los factores restantes. Posteriormente, verifique que -1 y 1 son raíces del polinomio $P(x)=x^6+x^4-x^2-1$ y factorícelo.

4. Teorema de las raíces racionales

El teorema de la raíz racional afirma que si un polinomio $P(x)$ con coeficientes en los enteros, tiene una raíz racional $\frac{p}{q}$, entonces p debe ser un divisor del término "libre" del polinomio y q debe ser un divisor del coeficiente que multiplica a la mayor potencia de x. Cabe señalar que este teorema se utiliza para factorizar un polinomio en el caso que admita una raíz racional.

Ejemplo ilustrativo 1.

Encuentre las raíces racionales del polinomio $P(x)=x^4-6x^3+14x^2-14x+5$.

Solución:

a. Usamos que, si $r=\frac{p}{q}$ es raíz racional de $P(x)$, entonces p es divisor de 5 y q es divisor de 1.

Como los divisores de 5 son ±1, ±5 y los divisores de 1 son ±1 , las posibilidades para $\frac{p}{q}$ son $r=\pm1,\pm5$.

Esto significa que si existe una raíz racional, debe ser ± 1 o ± 5 . Solo probando podremos saber si existe alguna.

a. Por ejemplo, si escogemos $r = \frac{p}{q} = 1$, resulta $P(1) = 0$, por lo tanto la raíz es $r = 1$ y por el teorema del factor $(x-1)$ es uno de los factores de $P(x)$.

Dividiendo $P(x)$ por $(x-1)$, se obtiene $P(x) = (x^3 - 5x^2 + 9x - 5)(x-1)$

b. Para factorizar $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$, aplicamos la misma estrategia usada para factorizar $P(x)$, por lo tanto las posibles raíces de $Q(x)$ son $\pm 1, \pm 5$. Probando con $\frac{p}{q} = 1$, resulta $Q(1) = 0$. Por el teorema el factor $(x-1)$ es un factor de $Q(x)$ y dividiendo $Q(x)$ por $(x-1)$, se obtiene: $Q(x) = (x^2 - 4x + 5)(x-1)$

c. Reescribiendo la factorización para $P(x)$, podemos señalar que:

$$P(x) = (x^3 - 5x^2 + 9x - 5)(x-1) = (x^2 - 4x + 5)(x-1)(x-1) .$$

Hasta aquí las raíces racionales de $P(x)$ son $r = 1$, que se repite dos veces. En ese sentido: ¿Puedes explicar, si hay más raíces racionales ?

Orientación: Un raíz que se repite n veces se llama raíz de multiplicidad n. En el ejemplo, $r = 1$, es una raíz de multiplicidad 2.

4.1. Actividades de aprendizaje

Para los siguientes polinomios, encuentre todas las posibles raíces racionales, determine dichas raíces, si es que existen, y en ese caso utilícelas para factorizar los polinomios:

1. $P(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$
2. $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 35x + 12$
3. $P(x) = x^4 + 6x^3 - 6x - 1$
4. $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 12x - 4$
5. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 4$
6. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 5$
7. $P(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$
8. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$
9. $P(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 20x - 20$

Sección 6. Álgebra de Funciones

Las diferentes actividades de aprendizaje de esta sección han sido diseñadas para comprender algunas características importantes de todas aquellas funciones que hemos trabajo pero de un modo más algebraico, indicando con precisión qué condiciones se deben cumplir para que la suma, diferencia, producto y cuociente de las funciones estén bien definidas.

Luego, haremos lo mismo con la composición de funciones, investigando dónde es posible definir tal composición. Lo anterior implica una aplicación directa del concepto de dominio de una composición.

Finalmente, abordaremos la estrecha relación que existe entre funciones inversibles y la composición de funciones, con ejercicios que enfatizan la biyectividad de una tal función y la importancia de aquello para el logro de aprendizajes futuros.

1. Álgebra y composición de funciones

En esta sección construiremos nuevas funciones, sumando, restando, multiplicando y dividiendo las funciones elementales ya estudiadas. Además, estudiaremos la composición y desconpomposición de funciones. En todos los casos, no sólo encontraremos la fórmula que define la nueva función, sino determinaremos los dominios y cuando sea posible, su recorrido.

Ejemplo ilustrativo 1. Sean las funciones, representadas por $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{3-x}$

Requerido:

a. Determina el dominio de f y el dominio de g

b. Determina la función $f + g$ y su dominio dominio.

c. Determina la función fog y su dominio.

Solución:

a. Dominio de f y g

Dom$(f) = \{x \in R \ : \ x \neq 2\} = R - \{2\}$, porque la función no está definida en $x = 2$

Dom$(g) = \{x \in R \ : \ 3 - x \geq 0\} = (-\infty, 3]$, porque para que la función raíz esté definida, la cantidad subradical debe ser positiva o cero.

b. $Dom(f + g)$

Dom$(f + g)$ =Dom$(f) \cap$ Dom$(g) = R - \{2\} \cap (-\infty, 3] = (-\infty, 3] - \{2\}$

Por lo tanto: $(f + g): (-\infty, 3] - \{2\} \to R$; $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{2x+3}{x-2} + \sqrt{3-x}$

c. Dom(fog)

$$\begin{aligned}\text{Dom}(fog) &= \{x \in \ Dom(g) \ / \ g(x) \in \ Dom(f)\} = \{x \in (-\infty, 3] \ / \ \sqrt{3-x} \ \in R - \{2\}\} \\ &= \left\{x \in (-\infty, 3] \wedge \sqrt{3-x} \ \neq 2\right\} = \{x \in (-\infty, 3] \ \wedge \ 3 - x \ \neq 4\} \\ &= \{x \in (-\infty, 3] \ \ \wedge x \neq -1\}\end{aligned}$$

Por tanto, Dom$(fog) = (-\infty, 3] - \{-1\}$, y además

$fog: (-\infty, 3] - \{-1\} \to R$; $(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{3-x}) = \frac{2\sqrt{3-x}+3}{\sqrt{3-x}-2}$

1.1 Actividades de aprendizaje

ÍTEM I. Determina la suma, diferencia, producto y el cuociente de cada par de funciones dadas, determinado sus dominios.

a. $f(x) = x^2 - 3x$; $g(x) = \sqrt{x+2}$

b. $f(x) = \sqrt{3-x}$; $g(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

c. $f(x) = x^2$; $g(x) = \frac{1}{x^3}$

d. $f(x) = \sqrt{x-2}$; $g(x) = \sqrt{x+5}$

e. $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $g(x) = x - 1$

f. $f(x) = \frac{x}{x-2}$; $g(x) = \frac{3}{x}$

A partir de las funciones anteriores, determina el dominio de la función compuesta fog y luego encuentre la composición $(fog)(x)$.

ÍTEM II. Efectúa la descomposición de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}$

b. $f(x) = ((\frac{1}{x} + 2)^2 + 1)^3$

c. $f(x) = (4 + \sqrt{x^2 + 1})^{-3}$

d. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 3x)}$

e. $f(x) = (\frac{7}{11}\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1)^2$

f. $f(x) = \frac{1}{(x-3)^4+1}$

2. Biyectividad y funciones invertibles

En este sección mostraremos de manera teórica y gráfica la biyectividad de una función f para luego, buscar la inversa de una función biyectiva, f^{-1} .

Ejemplo ilustrativo 1. Considera la función $f: R - \{1\} \rightarrow R$; $f(x) = 3x + \frac{3x^2}{1-x}$ y estudia su biyectividad

Solución:

Notemos primero que $f(x) = 3x + \frac{3x^2}{1-x} = \frac{3x-3x^2+3x^2}{1-x} = \frac{3x}{1-x}$

Veamos que f es inyectiva en $R - \{1\}$. Para ello usaremos la definición alternativa de inyectividad. Supongamos que $a, b \in R - \{1\}$:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{3a}{1-a} = \frac{3b}{1-b} \Rightarrow 3a(1-b) = 3b(1-a) \Rightarrow a - ab = b - ab \Rightarrow a = b$$

De la implicación anterior se sigue que f es inyectiva en $R - \{1\}$. Ahora, calculamos el recorrido o conjunto imagen de f: Rec$(f) = \{y \in R : \exists x \in R - \{1\} \ / \ y = \frac{3x}{1-x}\}$.

Pues bien, sea $y \in \mathbb{R}$. Hay que encontrar $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ tal que $f(x) = y$, lo que equivale a hallar:
$x \in R - \{1\}$ tal que $\frac{3x}{1-x} = y \Leftrightarrow 3x = (1-x)y = y - xy$

$$\Leftrightarrow 3x + xy = y \quad \Leftrightarrow \quad x(3+y) = y$$

De donde, si $y \neq -3$ entonces hallamos $x \in R - \{1\}, tal\ que, \quad x = \frac{y}{3+y}$.

Notemos además que $x \neq 1$ porque si suponemos, por el contrario, que $x = 1 = \frac{y}{3+y}$, entonces:

$$1 \cdot (3+y) = y \quad \Leftrightarrow \quad 3 + y = y \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 0$$ ¡¡¡ CONTRADICCIÓN !!

De esta manera hemos llegado a lo que buscábamos:
$\forall y \in R - \{-3\}, \exists\, x = \frac{y}{3+y} \in R - \{1\}$ que cumple $f(x) = y$. De manera que: Im$(f) = R - \{-3\}$

Y como: Codom$(f) = R \neq R - \{-3\}$, entonces f NO es una función sobreyectiva.

Con lo que la pregunta inicial del problema, (si f es o no biyectiva), ha sido respondida negativamente.

Sin embargo, notemos que restringiendo el codominio de f a la imagen calculada anteriormente, tenemos una nueva función que también llamaremos f; y que ahora SÍ es biyectiva:

$$f: R - \{1\} \rightarrow R - \{-3\}, \qquad f(x) = \frac{3x}{1-x}$$

Y sabemos que por ser f biyectiva, entonces f admite función inversa f^{-1}.

Finalmente tenemos: $f^{-1}: R-\{-3\} \rightarrow R-\{1\}$, $f^{-1}(y)=\frac{y}{3+y}$

Y cambiando el rol de x por y, se tiene: $f^{-1}: R-\{-3\} \rightarrow R-\{1\}$, $f^{-1}(x)=\frac{x}{3+x}$ que es la función inversa de la f inicialmente dada .

2.1. Actividades de aprendizaje

ÍTEM I. Usando el mismo argumento gráfico que en el ejemplo ilustrativo anterior, verifica si las siguientes funciones son biyectivas:

a. $f: R \rightarrow R$; $f(x)=mx+n$, m, n constantes, $m \neq 0$
b. $f: R-\{-4\} \rightarrow R-\{-1\}$; $f(x)=\frac{4-x}{x+4}$
c. $f: R \rightarrow R$; $f(x)=x^2$ si $x<0$, $f(x)=-x^2$ si $x \geq 0$
d. $f: R \rightarrow R$; $f(x)=3+2x^3$

ÍTEM II. Analiza si las funciones dadas poseen función inversa. En caso afirmativo, determine dicha función, su dominio e imagen, y esboce un gráfico de la inversa encontrada.

a. $f: R \rightarrow [0, \infty)$ / $f(x)=|x|$
b. $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ / $g(x)=|x|$
c. $f: R \rightarrow [0, \infty)$ / $f(x)=(x-1)^2$
d. $g: [-\infty, 1) \rightarrow [0, \infty)$ / $g(x)=(x-1)^2$
e. $f: [-\infty, -2) \cup [2, \infty) \rightarrow [0, \infty)$/ $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

Sección 7. Función exponencial y logarítmica

Esta sección, tiene como finalidad operar con funciones exponenciales y logarímicas. La función exponencial se basa en un modelo que comúnmente se utiliza para describir cualquier proceso que evolucione en el tiempo, de modo que el aumento (o disminución) en un pequeño intervalo de tiempo sea proporcional a lo que había al comienzo del mismo. Por otra parte, las funciones logaritmicas tienen aplicación en la medición del tiempo con la técnica del Carbono 14, intensidad de los terremotos, brillo de las estrellas, cálculo del PH, fórmulas del interés simple y compuesto, escalas logaritmicas y otras.

1. Propiedades de las potencias y logaritmos

A continuación, se presenta una tabla con los conocimientos mínimos (conocimientos previos) necesarios para abordar las los diferentes contenidos de este recurso.

Revisa en detalle más propiedades de los logarítmos, consultando los siguientes recursos virtuales:

2. Ilustración del modelo gráfico asociado a una función exponencial y logarítmica

Funciones Exponenciales y logaritmicas

Ejemplo Ilustrativo 1. Sea $y = Ne^{\lambda x+h} + k$, donde:

- N: Intercepto de la gráfica con el eje de las ordenadas (Y) Solo cuando $h = k = 0$
- h: traslación horizontal
- k: traslación vertical
- λ: factor de amplificación

A continuación se presentan las gráficas asociadas a la variación de los parámetros asociados a una función exponencial, en un mismo sistema de ejes coordenados. Para todos los casos, considere $y = f(x)$

Caso 1.

Se considera a $y = e^x$ la función original de base, con N=1, h=0, k=0. Se pide esbozar las gráficas de

$y = e^x, y = e^{2x}, y = e^{4x}$ es decir, λ= 1, 2, 4, es decir, λ>1

Sol: En el gráfico se muestran las 3 funciones.

Conclusión: Si λ>1 las gráficas

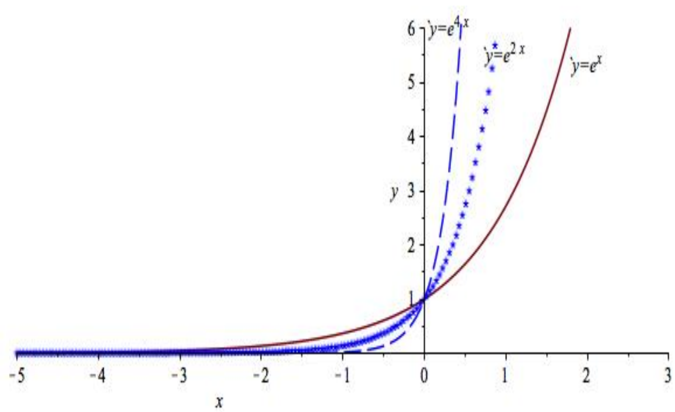
…………………………………………………….

…………………………………………………….

…………………………………………………….

…………………………………………………….

…………………………………………………….

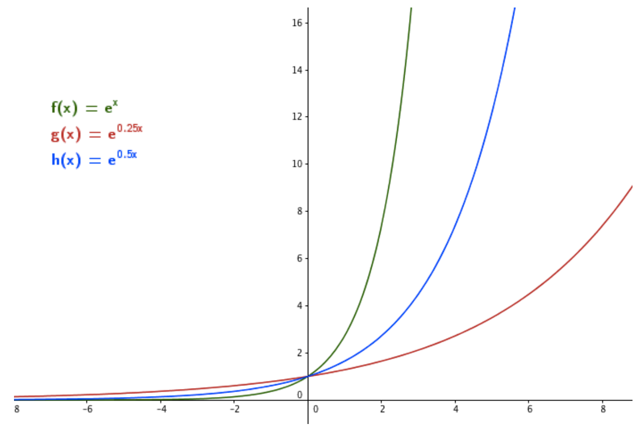


Caso 2.

Se considera a $y = e^x$ la función original, con N=1, h=0, k=0. Se pide esbozar las gráficas de

$y = e^{\frac{1}{4}x}$, $y = e^{\frac{1}{2}x}$, $y = e^x$

Sol: En el gráfico se muestran estas funciones



Conclusión: Si 0<λ<1 las gráficas ....

....

....

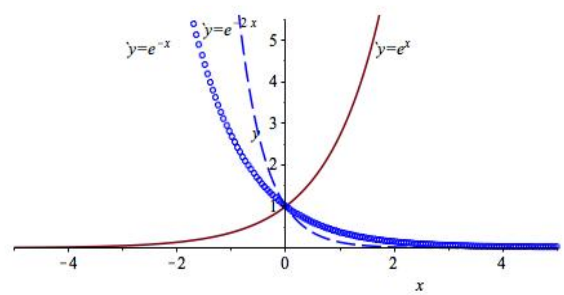
....

....

Caso 3.

Se considera a $y = e^x$ la función original de base, con N=1, h=0, k=0. Se pide esbozar las gráficas de

$y = e^{-x}$, $y = e^{-2x}$, es decir, $\lambda = -1 , -2$.



Conclusión: ....

....

....

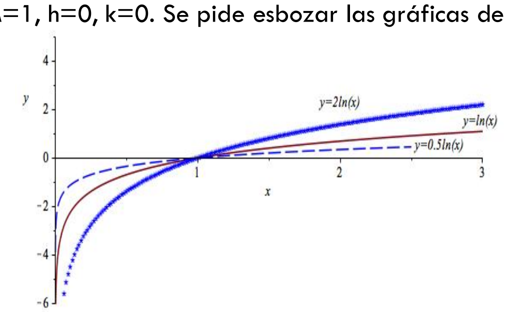
....

Análogamente, se pueden analizar las gráficas asociadas a una función logaritmica del tipo $y = M\ln(x - h) + k$

Caso 4.

Se considera a $\ln(x)$ la función original de base e, con M=1, h=0, k=0. Se pide esbozar las gráficas de

$y = 2\ln(x)$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)\ln(x)$, M=2 y M=1/2.



Conclusión: Si el factor M>1,............................

Y si M<1 ....

3. Actividades de aprendizaje

ÍTEM I. Usando como referencia la información anterior, grafica en un mismo plano, las siguientes funciones:

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x}$
2. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{kx}, k \neq 0, cte$
3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\left(\frac{1}{2}\right)x}$
4. $f: \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x - h), h \neq 0, cte$

ÍTEM II. Para las siguientes funciones, determinar el conjunto *D* de todos los números reales x para los cuales $f(x)$ representa un número real. Posteriormente, analiza el modelo y grafica las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{10}{1-20e^{-x}}$ (con Geogebra)

b) $f(x) = 5\ln(x+2) - 3$

ÍTEM III. Determine las restricciones en cada ecuación y luego resuélvala, usando las propiedades de potencias y logaritmos.

a. $ln(2x-1) = 2$

b. $e^{(3x-4)} = 2$

c. $log\ (x+1) = 4$

d. $ln\ (ln\ (x)\ ) = 1$

e. $e^{e^x}=10$

f. $ln(x+6) + ln(x-3) = ln(5) + ln(2)$

g. $e^{ax} = Ce^{bx}$, a≠b, C>0

h. $7e^x - e^{2x} = 12$

i. $2^x = \frac{5^{2x}.7^{(1-x)}}{6^{(x-2)}}$

j. $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$

k. $4^{\log_4(5)} + 3^{\log_3(6)} = 2^{\log_2(x)}$

l. $\frac{1}{5-\log(x)} = 1 - \frac{1}{1+\log(x)}$

m. $\sqrt[x]{5^3} + \sqrt[x]{5^6} = 30$

Sección 8. Aplicaciones de la función exponencial y logarítmica

La función exponencial se utiliza regularmente para describir cualquier proceso que evolucione de modo que el aumento (o disminución) en un pequeño intervalo de tiempo sea proporcional a lo que había al comienzo del mismo. Algunas de las principales aplicaciones de las funciones exponenciales dicen relación con las siguientes:

1. Desintegración radioactiva.

Explicación del modelo	Modelo	Descripción
Las sustancias radiactivas se desintegran con el paso del tiempo. La rapidez de desintegración de las sustancias radiactivas se mide por el "*periodo de desintegración*" que es el tiempo en que ésta tarda en reducirse a la mitad.	$M(t)=M_0\cdot a^t$	$M(t)$: masa final ; M_0: masa inicial ; a: constante de desintegración $(0<a<1)$ y t: tiempo en años.

2. Crecimiento de poblaciones.

Explicación del modelo	Modelo	Descripción
El crecimiento vegetativo de una población viene dado por la diferencia entre nacimientos y defunciones. Si inicialmente existe una población P_0, que tiene un índice de crecimiento i (considerado en tanto por 1), al cabo de t años ésta se habrá convertido en una población $P_{(t)}$	$P(t)=P_0\cdot(1+i)^t$	$P(t)$: población final ; P_0: población inicial ; i: índice de crecimiento y t: tiempo en años.
Uno de los patrones de crecimiento más simples observados en las poblaciones naturales se conoce como crecimiento logístico y se representa con una curva sigmoidea. Este modelo se asocia al crecimiento de poblaciones y a la propagación de enfermedades epidémicas.	$P(t)=\dfrac{K}{1+A\cdot e^{-\alpha t}}$	$P(t)$: población final P_0: población inicial K: carga poblacional α: aumento porcentual de la población. $A=\left(\dfrac{K-P_0}{P_0}\right)$ constante propia del modelo.

3. Interés del dinero acumulado.

Explicación del modelo	Modelo	Descripción
En el interés compuesto los intereses producidos por un capital, C_0 se van acumulando a éste, de tiempo en tiempo, para producir nuevos intereses. Los intervalos de tiempo, al cabo de los cuales los intereses se acumulan al capital, se llaman periodos de capitalización o de acumulación. Al cabo de t años y a una tasa de interés anual r (en %), el capital final obtenido viene dado por la expresión $C_f(t)$	$C_f(t)=C_0\cdot(1+r)^t$	**Período de capitalización anual** $C_f(t)$: capital final ; C_0: capital inicial ; r: tasa de interés **anual** (en %) y t: tiempo en años.
Si para el capital invertido se consideran n períodos de tiempos, el modelo matemático posee la siguiente forma:	$C_f(t)=C_0\cdot\left(1+\dfrac{r}{100\cdot n}\right)^{n\cdot t}$	**Períodos de capitalización mensual** $n=12$: mensual $n=4$: trimestral $n=2$: semestral $n=365$: diario

4. Problemas de contexto. Utilizando los recursos y herramientas provistas en clases, elabora y ejecuta un plan de acción que te permita resolver matemáticamente los siguientes problemas del ámbito profesional.

Ejemplo ilustrativo.

En el área de la microbiología un área de estudio dice relación con el comportamiento que poseen las poblaciones de microorganismos que afectan el normal desarrollo de los organismos vegetales y enfermedades en los seres humanos.
A partir de diferentes estudios, se conoce que la mayoría de las bacterias se reproducen por bipartición, entre ellas las amebas, es decir, a partir de una célula madre se obtienen dos células hijas. En ese contexto, una de las más importante es la "Entamoeba" que causa "amebiasis o disentería amebiana" y al menos 6 especies de amebas son parásitos del hombre.
Suponiendo que las condiciones de un cultivo son tales que, las amebas se duplican aproximadamente cada 30 minutos y que inicialmente hay 10 amebas.

Requerido

a. Completa la siguiente tabla que relaciona el número "$N(t)$" de amebas en un cierto instante "t" (horas) de tiempo.

t **(medias horas)**	0	1	2	3	4	5	...	t
$N(t)$ **(amebas)**								

b. De a) deduce y formaliza el modelo matemático que relaciona las variables involucradas y que permite determinar el número N(t) de bacterias en un instante t de tiempo.

c. Señala el tiempo que se requiere para que en el cultivo hayan 2560 amebas.

d. Esboza la curva representativa del modelo matemático que relaciona ambas variables, en el contexto dado.

e. Interpreta el gráfico tomando como base el comportamiento de la curva, en el contexto dado.

Solución:
Etapa 1 - Comprender el Problema Esto involucra definir variables, datos, incógnitas y gráfico (cuando es posible).

Variables:
$N(t)$: representa el número de amebas con respecto al tiempo. (variable dependiente)
t: tiempo medido cada 30 minutos. (variable independiente)

Datos:
* t_0 =0, tiempo inicial o tiempo 0
*P(0)= 10 amebas
* tiempo de duplicación : cada 30 minutos
P(1)= 2P(0), P(2)=2P(1)=$P(1) = 2P(0)$; $P(2) = 2 \cdot P(1) = 2 \cdot 2P(0) = 2^2P(0)$; ....

Incógnitas:

- N(t)=f(t)=¿?
- $t^* =¿?, tal\ que\ N(t^*) = 2560$
- Gráfico

Etapa 2: Modelo Matemático. Es la representación del problema o de las incógnitas en lenguaje matemático.

a. Completar la tabla del requerido. Al observar la tabla, deducimos que:
t (0)=0,
t=1, corresponde a 30 minutos transcurridos desde el tiempo 0.
t=2, corresponde a 60 minutos transcurridos desde el tiempo 0, etc

t (medias horas)	0	1	2	3	4	5	…	t
N(t) (amebas)	**10**	$2 \cdot 10$	$2(2 \cdot 10) = 2^2 \cdot 10$	$2^3 \cdot 10$	$2^4 \cdot 10$	$2^5 \cdot 10$		$2^t \cdot 10$

b. De la tabla se deduce el modelo matemático mediante una fórmula:

$$N(t) = 10 \cdot 2^t$$

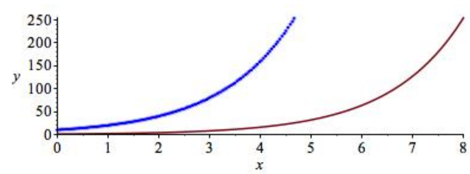
Etapa 3: Ejecutar el plan de acción. En esta etapa se usa el razonamiento deductivo. Esto permitirá realizar los cálculos para determinar c)

c. El tiempo t^* que debe transcurrir, para que:

$N(t^*) = 2560$	Lo requerido, evaluamos en la fórmula del modelo
$10 \cdot 2^{t^*} = 2560$	Multiplicamos por el inverso multiplicativo de 10
$2^{t^*} = 256$	Dos alternativas para despejar t^*: 1. aplicar la función inversa ln 2. Descomponer el número en potencias de base 2 y aplicar propiedad de las potencias.
$2^{t^*} = 2^8$	Dos potencias son iguales si sus bases y exponentes son iguales.
$t^* = 8$	Interpretando este resultado equivale a 4 horas.¿porqué?

d. Gráfico.

A partir de la fórmula y lo aprendido en el laboratorio, representamos las funciones $y = 2^x$, $y = 10 \cdot 2^x$



El objetivo es recordar, el significado del parámetro N=10.

e. Observamos que la curva es creciente convexa, la curva intercepta al eje de la variable dependiente en el número inicial N(0)=10

Etapa 4: (Mirar hacia atrás). Verbalizar y responder las preguntas del problema

a. La tabla completada es:

t (medias horas)	0	1	2	3	4	5	…	t
N(t) (amebas)	10	$2 \cdot 10$	$2(2 \cdot 10) = 2^2 \cdot 10$	$2^3 \cdot 10$	$2^4 \cdot 10$	$2^5 \cdot 10$		$2^t \cdot 10$

b. La fórmula de la función que representa al problema o modelo matemático es: $N(t) = 10 \cdot 2^t$

c. Para que el número de amebas sea 2560, deben transcurrir 4 horas.

d. Al observar la curva, podemos afirmar que la gráfica representa que las amebas se reproducen exponencialmente y su crecimiento es rápido, ya que la curva es convexa.

Otros ejemplos ilustrativos

4.1. Actividades de aprendizaje

Problema 1.

El área de la sanidad vegetal se preocupa, dentro de otras tareas, del estudio de las poblaciones de microorganismos que afectan el normal de desarrollo y crecimientos de los organismos vegetales, con el fin de establecer mecanismos que permitan controlar plagas, malezas y enfermedades.

A partir de diferentes estudios, se conoce que la mayoría de las bacterias se reproducen por bipartición, es decir, a partir de una célula madre se obtienen dos células hijas. En ese contexto, un tipo de bacterias necesita de una hora para reproducirse.

Considerando la información proporcionada anteriormente:

a. Completa la siguiente tabla que relaciona el número "f(t)" de bacterias en un cierto instante "t" (horas) de tiempo.

t (horas)	0	1	2	3	4	5	6	7
f(t) (bacterias)								

b. Determina el modelo matemático que relaciona las variables involucradas y que permite determina el número f(t) de bacterias en un instante t=n de tiempo.
c. Ilustra la curva representativa del modelo matemático que relaciona ambas variables, en el contexto dado.
d. Interpreta el gráfico tomando como base el comportamiento de la curva, en el contexto dado.

Problema 2.

Las sustancias radiactivas se desintegran emitiendo radiaciones y transformándose en otras sustancias, tal como muestra el siguiente esquema:

Sustancia radiactiva = Radiaciones + Otra sustancia

Este proceso se realiza con el paso del tiempo y a un ritmo que varía dependiendo de la naturaleza de la sustancia radiactiva.

La rapidez con que se desintegra una sustancia radiactiva se conoce como "período de desintegración" y corresponde al tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la masa inicial de dicha sustancia.

En ese contexto, si se tiene una masa inicial de un grado de una sustancia "x", responda a los siguientes requerimientos:

a. Completa la siguiente tabla con el fin de averiguar la cantidad de sustancia radiactiva existente en cada instante "t" de tiempo.

t **(horas)**	0	1	2	3	4	5
$f(t)$ **(gramos)**						

b. Determina el modelo matemático que representa la masa $f(t)$ de la sustancia radiactiva al cabo de t=n años.
c. Ilustra gráficamente la situación planteada.
d. Interpreta el gráfico tomando como base el comportamiento de la curva, en el contexto dado.

Problema 3.

Estudios sobre dinámica de poblaciones llevados a cabo en un sector de importancia agroalimentaria de la sexta región del país, determinaron que el crecimiento de una población de microorganismos que afecta gravemente el cultivo de maíz de la zona está determinado por el siguiente modelo matemático:

$$P(t) = P_0 \cdot (1+i)^t$$

De la población se sabe que está conformada actualmente por por 50 individuos. En base a lo anterior, responde:

a. Si la tasa de crecimiento anual de la población es del orden del 45%. ¿Cuál es (en términos porcentuales) el incremento de la población de microorganismo al cabo de tres años?

b. Si se sabe que la población **NO** genera daño biológico mientras ésta se mantenga bajo el umbral de 250 individuos y sabiendo que los productores de alimentos de la zona no poseen actualmente los recursos económicos necesarios que manejar agronómicamente a la población en cuestión. ¿Qué recomendaciones biológicas brindarías?

Problema 4.
Un empresario solicita de su asesoría pues está pensando invertir un capital de US$5.000 en una entidad bancaria que ofrece una tasa de interés anual del 6%. Para ello está evaluando diferentes escenarios.

Escenario 1: Acumulación anual de intereses.; Escenario 2: Acumulación mensual de intereses.; Escenario 3: Acumulación trimestral de intereses y Escenario 4: Acumulación semestral de intereses.

En base a lo anterior, ofrece al empresario el mejor escenario de inversión, de forma tal que pueda incrementar al máximo su capital inicial. Justifica matemáticamente tu respuesta.

Problema 5.
La desintegración de un isotopo radiactivo se modela a partir de la expresión:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Si se tiene 320 g. de una muestra del isótopo radiactivo ^{228}Th, cuya vida media es de 1,92 años.
En base a esto responde a los siguientes requerimientos:

a. ¿Cuál es su constante de desintegración?
b. ¿Cuál será la masa de ^{228}Th que seguirá activa, al cabo de dos años?
c. ¿En cuánto tiempo se desintegrará el 90% de la muestra del isotopo en cuestión?

Problema 6.
En la X Región de Los Lagos, un empresario invirtió tiempo atrás US$ 7.000 a una tasa de interés compuesto del 2% anual. Actualmente ha decidido hacer el retiro de sus fondos, los cuales al día de hoy se han incrementado en US$1201,61. En ese contexto, determina el tiempo que ha transcurrido desde que el empresario lechero invirtió su dinero en el banco.

Problema 7.
El tamaño de cierto cultivo de bacterias se multiplica por dos cada treinta minutos. Bajo el supuesto de que el cultivo inicialmente tiene cinco millones de bacterias. ¿Dentro de cuántas horas el cultivo tendrá trescientos veinte millones de bacterias?

Problema 8.
Una población de individuos es llevado a una isla cuya capacidad de carga es de 300 ejemplares. Inicialmente y dadas las características edafoclimáticas del territorio, el aumento porcentual de la población es de un 12%. Con dicha información determina el modelo logístico en su forma algebraica y gráfica.

Problema 9.
Un capital depositado a un interés compuesto del 4% anual, se ha convertido al cabo de tres años en US$9550,87. En base a esto, determina el capital inicial invertido.

Problema 10.

Un plantel lechero cuenta con 5000 bovinos, de los cuales uno está enfermo. Se sabe que la propagación del virus que afecta al individuo en cuestión, se modela a partir de la expresión:

$$I(t)=\frac{5000}{1+4{,}999\cdot e^{-0{,}8t}}$$

En ese contexto, la normativa de salubridad e higiene de la planta lechera señala que *"en caso de que la población de ganado infestada iguale o exceda el **40%**, se suspenderán las labores productivas"*.

Considerando los elementos planteados anteriormente:

a. Formaliza las variables involucradas.
b. Determina la población de animales infestados al cabo de 5 días.
c. En caso de que la enfermedad no pueda ser controlada por el grupo de especialistas a cargo. Determina cuántos días deben transcurrir para que la planta lechera interrumpa sus labores productivas.

Problema 11.

El costo de fabricación (en dólares) de un fertilizante químico está dado por el número "q" de unidades producidas mediante la función:

$$C(q)=(2q\cdot\ln q)+20$$

En este contexto, ¿Cuál será el costo para 5, 8 y 10 unidades de dicho insecticida?. Expresa el costo del requerimiento en dólares y pesos, para ello considera 1 USD = 620 CLP.

Problema 12.

Una vaca en período de lactancia ha manifestado un cuadro febril por lo que suministrar un medicamento para controlar a tiempo dicho cuadro, resulta clave. A raíz de lo anterior, la vaca **no podrá** amamantar a su ternero mientras que su torrente sanguíneo presente niveles mayores a 2 miligramos residuales de dicho medicamento.

El modelo matemático que permite determinar la cantidad residual de un medicamento en el torrente sanguíneo de un ejemplar bovino, "t" horas después de haber sido suministrado, está dada por la expresión:

$$A(t)=10\cdot 0{,}8^{t}$$

En ese contexto:

a. Determina el tiempo (horas y minutos) luego de suministrado el medicamento que deben transcurrir para que la vaca pueda volver a amamantar a su ternero.
b. Determina el instante "t" donde no existe residuo del medicamento en el torrente sanguíneo del bovino; obtenido el resultado, interprétalo, estableciendo posibles explicaciones para dicho valor.

Problema 13.

Una colonia de bacterias presentes en un suelo franco – arcilloso, crece de acuerdo con la ley de crecimiento desinhibido según el modelo:

$$N(t)=100e^{0.045t}$$; Donde: *N(t)* se mide en gramos y *t* en días.

En base a lo mencionado:

a. Determina la cantidad inicial de bacterias.
b. Señala la magnitud de la población de bacterias al cabo de 5 días.
c. Establece el período que tarda la población en cuestión, en alcanzar un crecimiento "x", tal que N(t)=140 gramos. Fundamenta algebraicamente su respuesta.
d. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la población estimada en "b", se duplique?. Fundamenta algebraicamente su respuesta.

Problema 14.
Una maquinaria industrial fue adquirida por un valor de US$30.000. Entendiendo que, todo bien activo se deprecia anualmente:

a. Modela la función que permite determinar el precio de la maquinaria, al cabo de t años.
b. Determina el valor de la maquinaria de uno y cinco años; si se sabe que dicho activo se deprecia a una tasa de un 20% anual.

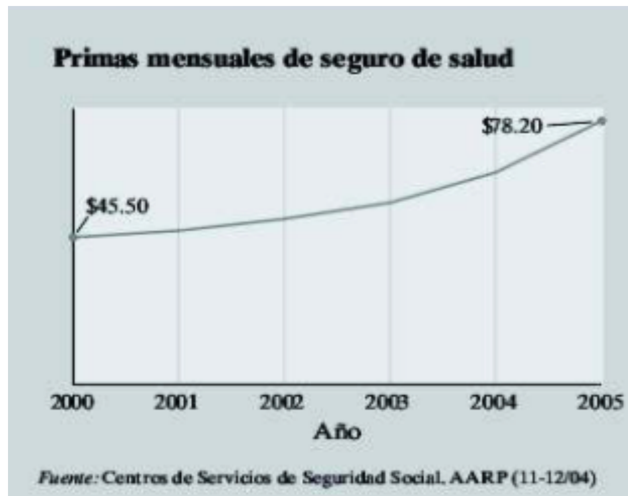
Problema 15.
Los Departamentos de Finanzas y de Recursos Humanos de una empresa farmacéutica deben proyectar el costo de los seguros de salud para sus trabajadores. En búsqueda de realizar una proyección más precisa y rigurosa, el encargado de presupuesto encontró la siguiente información:

En base a este información, y utilizando interpolación geométrica, el encargado determinó que el modelo matemático que permite predecir el costo mensual de las primas por concepto de salud, está dado por la siguiente función:

$$f(t) = 44{,}584 \cdot (1{,}11)^t$$; donde:

f(t) es la prima mensual (en dólares) y t es el número de años, a partir de 2000. En ese contexto:

a. Realiza una proyección de los costos por concepto de seguro se salud para el período 2016 – 2020.
b. Determina el incremento porcentual promedio del costo asociado al seguro, tomando como referencia el mismo período pero hace 10 años atrás.

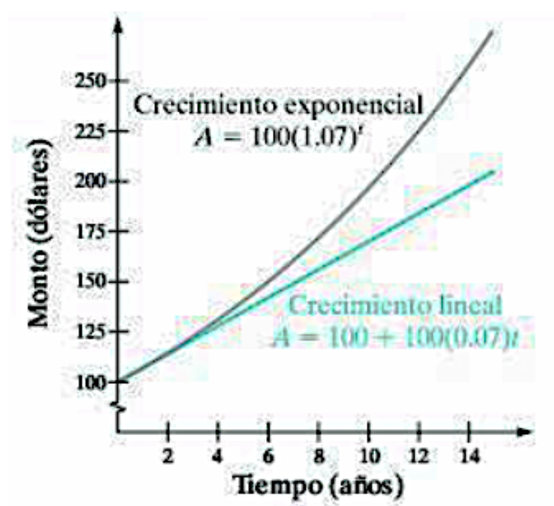


gura: Curva representativa del costo mensual por concepto de seguro de salud para trabajadores de una empresa farmacéutica en California, Estados Unidos (Centro de Estudios de Seguridad Social, 2004).

Problema 16.
La siguiente gráfica muestra el crecimiento lineal de cien dólares, invertidos a un interés simple del 7%. Asimismo, es posible observar el crecimiento exponencial de la misma cantidad, invertida a un 7% de interés compuesto (anualmente).

Con dicha información, responde a las siguientes interrogantes:

a. Utiliza la gráfica para determinar el tiempo que tarda el capital invertido a un interés simple, en duplicarse.
b. Calcula el tiempo de duplicación para cien dólares invertidos a un 7% de interés compuesto, capitalizable cada año.
c. Tomando como referencia ambos modelos de inversión. Determina la diferencia entre los montos resultantes después de 10 años, sobre una base de inversión de US$100.
d. En Estados Unidos, casi todos los bancos capitalizan el interés diariamente en lugar de hacerlo cada año. ¿Qué efecto tiene esto sobre monto total invertido?. Explica tu respuesta.



Problema 17.

La disponibilidad hídrica en algunas zonas del país resulta crítica para el cultivo de frutales y la mayoría de los cultivos hortícolas. Por lo mismo, y en el contexto del uso sustentable del recurso hídrico, el Ministerio del Medioambiente tiene como objetivo reducir, anualmente, el consumo anual de agua de las personas en un 5%. Si como antecedente se conoce que en el año 2005, el chileno promedio usó alrededor de 580.000 galones de agua (1 gal = 3,79 L) para consumo y otras actividades propias del diario vivir. Con dicha información:

a. Modela el consumo de agua de una persona en "t" años, a partir del año 2005.
b. Explica claramente la lógica que utilizaste para modelar la función solicitada en "a".
c. Estima el consumo de agua de una persona al año 2020.
d. Con el dato obtenido en el punto anterior, determina la reducción porcentual entre el año proyectado y el año base.

Problema 18.

Los ingenieros a cargo de una planta de reciclaje, señalaron que cada año se reciclan casi 2/3 de las latas de aluminio que llegan a dicha planta, mientras que 1/3 se envía a depósitos de basura. Lo anterior es relevante, ya que el aluminio reciclado es generalmente utilizado para la fabiración de nuevas latas, las cuales terminan son destinadas principalmente para la agroindustria.

En Estados Unidos para el año 2004, se reciclaron 190.000.000 de latas de aluminio. Con esta información:

a. Modela la función que permite estimar el número de latas fabricadas con aluminio reciclado, desde el año 2004 al año "n".
b. Explica, conceptualmente, por qué el modelo propuesto anteriormente permite estimar el número de latas fabricadas con aluminio reciclado, al cano de "n" años.
c. Estima el número de latas fabricadas con aluminio reciclado para el año 2030.

Problema 19.

A fin de diversificar y preservar la fauna presente en un ecosistema, se introdujo una nueva especie de peces en un lago. Ingenieros y Biólogos a cargo de la iniciativa advierten que dado el estado del ecosistema, éste se encontrará estará en equilibrio, siempre y cuando la población de peces no sobrepase los *8500 ejemplares*. Así también señalan que el modelo matemático que relaciona el número de peces que estará presente en dicho ecosistema, medido en miles, en función del tiempo (en años) desde que el lago fue poblado por dicha especie, se puede representar por el siguiente modelo de crecimiento poblacional:

$$P(t) = \frac{10}{1 + 4 \cdot e^{-0,8t}}$$

En función de lo anterior:

a. A partir del modelo planteado, infiere si existe algún límite para el crecimiento de la población de peces. Fundamente matemáticamente su respuesta.
b. Indica qué período de tiempo debe transcurrir para que la población de peces sea equivalente al 40% de los ejemplares que mantienen al ecosistema en equilibrio. Sea preciso(a) en su respuesta.
c. Indica cuánto tiempo debe transcurrir para que la población de peces no altere el equilibro del ecosistema. Sea lo más específico(a) posible en su respuesta.

Problema 20.
La maquinaria industrial en una empresa productora de lácteos es clave para el normal desarrollo de las labores productivas. Un operario efectúa labores en la industria mientras se registra una temperatura ambiental de 20°F. Durante el desarrollo de las labores productivas logra observar una alteración en el normal funcionamiento de la maquinaria, por lo que decide registrar la temperatura del motor, a fin de verificar que todo funcione correctamente.

En este contexto, el manual de la maquinaria señala que: *"la temperatura T del motor (°F), t minutos después de que la máquina se encuentra en reposo, está representada por medio de la siguiente expresión algebraica":*

$$\ln\left(\frac{T-20}{200}\right)=-0{,}11t$$

En función de los antecedentes proporcionados, responda las siguientes interrogantes:

a. Ejecuta un procedimiento matemático que le permita expresar la temperatura del motor de la maquinaria, en función de los minutos que han transcurrido desde que ésta se encuentra en reposo.
b. Ejecuta un plan de acción que le permita esbozar gráficamente el modelo algebraico obtenido en "b", si se sabe que el tractor estuvo detenido 4 horas. Refiérase **brevemente** al *comportamiento cualitativo* de la curva.
c. Con la información que cuenta, **discuta sintéticamente** respecto al resultado que se obtiene al resolver $T(t)=0$. Interprete dicho resultado y sitúe la discusión en base a argumentos matemáticos y brindados por el contexto.

Problema 21.
En la biósfera existen organismos capaces de llevar a cabo la fijación de Nitrógeno (N_2). Estos organismos reciben el nombre de procariotas y pueden realizar este proceso, ya que poseen un complejo enzimático nitrogenasa que se encuentra exclusivamente en ellos. Este complejo enzimático es muy sensible al oxígeno. Sin embargo muchos de estos organismos presentan adaptaciones que les permiten fijar N_2 en condiciones muy diversas, es por ello que existen organismos fijadores en vida libre y organismos fijadores en simbiosis (en asociación con otros organismos).
Rhizobium sp. es un tipo bacteria que favorece la fijación de Nitrógeno en suelos destinados a la producción de fabáceas (leguminosas). En este contexto y para conocer la dinámina de crecimiento de esta población, se realizaron diversos estudios orientados a modelar el crecimiento de *Rhizobium sp.*

Ingenieros Agrónomos vinculados al Área de Fitotecnia (producción de cultivos) y responsables de la iniciativa, advierten que los niveles de Nitrógeno en el suelo serán óptimos, siempre y cuando la población de bacterias no sobrepase el umbral de 1.500 organismos.

En este contexto, el modelo matemático que relaciona el número de individuos (*expresado en cientos*) en función del tiempo (en meses), durante un período de investigación de 24 meses, está dado por la expresión:

$$A(t)=\frac{20}{1+100\cdot e^{-\frac{t}{2}}}$$

En función de lo anterior:

a. Elabora el gráfico de $A(t)$ en su respectivo dominio, considerando todos sus elementos.

b. A partir del modelo algebraico o gráfico, infiere si existe algún límite para el crecimiento de la población de *Rhizobium sp.* Justifica tu respuesta.

c. Indique qué período de tiempo debe transcurrir para que la población de *Rhizobium sp.* sea equivalente al 80% de los organismos que mantienen al ecosistema en equilibrio. Sé preciso(a) en tu respuesta.

d. Indica e interpreta cuál era el tamaño de la población de bacterias, al inicio y término de las mediciones.

Problema 22.
Los químicos midieron la acidez de una solución en base a la concentración de iones hidrógeno hasta que Sorensen, en 1909, definió una medida más conveniente que está dada por la expresión:

$$\mathrm{pH} = -\log\left[H^{+}\right]$$
$$\therefore \mathrm{pH} = -\log\left(A \times 10^{n}\right)$$

Donde $[H^+]$ es la concentración de iones hidrógeno medida en moles por litro (M).

En este contexto, las soluciones se definen en función de su pH de la siguiente manera:

- pH = 7 o $[H^+] = (10^{-7}$ M) corresponden a soluciones neutras.
- pH <7 o $[H^+] = (10^{-7}$ M) corresponden a soluciones ácidas.
- pH> 7 o $[H^+] = (10^{-7}$ M) corresponden a soluciones básicas.

Dada la concentración de hidrógeno o el pH presente en una muestra de 100 g. de las siguientes sustancias, complete la tabla adjunta*:

Sustancia	**$[H^+]$**	**pH**	**Naturaleza de la solución (básica – neutra – ácida)**
Jugo de limón	$5{,}0 \times 10^{-3}$ M		
Jugo de tomate	$3{,}2 \times 10^{-4}$ M		

Sustancia	**$[H^+]$**	**pH**	**Naturaleza de la solución (básica – neutra – ácida)**
Vinagre		3	
Leche		6,5	

Sección 9. Linealización

En esta sección estudiaremos dos problemas relacionados con las funciones que hemos estudiado, y que se podrán usar como herramienta de laboratorio, cuando haya que modelar una tabla de observaciones mediante una función exponencial o potencial.

1. Modelo Potencial

A continuación, estudiaremos cómo inferir, a partir de una tabla de observaciones, si los datos corresponden al modelo potencial de la forma: $y(x) = C \cdot x^{\alpha}$. Para ello investigaremos, a qué modelo lineal es equivalente la función $y(x) = C \cdot x^{\alpha}$

Deducción del modelo lineal.

$y(x) = C \cdot x^{\alpha}$	Consideramos como inicio el modelo potencial
$\ln\,(y(x)) = \ln\,\underbrace{(C \cdot x^{\alpha})}$	Aplicamos (componemos) con la función logaritmo natural
$\ln\big(y(x)\big) = \ln(C) + \ln\,(x^{\alpha})$	Usamos la propiedad del logaritmo de un producto
$\ln\big(y(x)\big) = \alpha \cdot \ln(x) + \ln(C)$	Aplicamos la conmutatividad de los reales y la propiedad del logaritmo de una potencia
$\mathrm{v(x)} = \alpha \cdot \mathrm{u} + \mathrm{b}$	Efectuamos por simplicidad un cambio de variables
	Función afín con: $v = \ln\lvert y\rvert\,, u = \ln\lvert x\rvert\,, b = \ln\;\lvert c\rvert$

Procedimiento para linealizar:

PASO 1. Construir una nueva tabla, que considere el logaritmo natural de la variable independiente y de la variable dependiente.

PASO 2. La pendiente α del modelo lineal es el exponente de la potencia cuya base es la de la variable independiente y b el intercepto de la recta definido por:

$b = \ln\lvert c\rvert$, de donde: $C = e^{b}$

2. Modelo Exponencial

A continuación, estudiaremos cómo inferir, a partir de una tabla de observaciones, si los datos corresponden al modelo potencial de la forma: $y(x) = C \cdot e^{kt}$. Para ello investigaremos, a qué modelo lineal es equivalente la función. $y(x) = C \cdot e^{kt}$

Deducción del modelo lineal.

$y(x) = C \cdot e^{kt}$	Consideramos como inicio el modelo exponencial
$\ln\,(y(x)) = \ln\,(C \cdot e^{kt})$	Aplicamos (compone) con la función logaritmo natural
$\ln\big(y(x)\big) = \ln(C) + \mathrm{kt}$	Usamos la propiedad del logaritmo de un producto y la propiedad ln(e^{x})=x
	Efectuamos por simplicidad un cambio de variables
$\mathrm{v(x)} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{t} + \mathrm{b}$	**Función afín con:** $b = \ln\lvert C\rvert \Leftrightarrow C = e^{b}$

Procedimiento para linealizar:

PASO 1. Construir una nueva tabla, que considere el logaritmo natural solo a la variable dependiente.

PASO 2. Si el nuevo modelo es afín, la pendiente k es el exponente de e^{kt}, el intercepto b es la constante C.

Ejemplo Ilustrativo 1.

Contexto

Dada la tabla de observaciones:

t	0,25	0,35	0,50
$f(t)$	0,152	0,158	0,165

Requerido:
Verificar si corresponde a un modelo potencial o exponencial. Si es así determine las constantes $C\ y\ \alpha$.

Solución:

PASO 1. Variables y datos

t: tiempo variable independiente

$f(t)$: variable dependiente

Construimos una nueva tabla, agregando dos columnas con los logaritmos naturales de la variable independiente y dependiente.

$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{Ln(t)}$	$\boldsymbol{Ln(y)}$
0,25	0,152	-1,38629	-1,88387
0,35	0,158	-1,049822	-1,84516
0,50	0,165	-0,693147	-1,801809

PASO 2. Verificamos si los valores corresponden a una escala logarítmica o semilogarítmica. Para ello calculamos las variaciones medias, si corresponden a una recta.

Escala Logaritmica: $ln(y)$ versus $ln(x)$

$$\overline{V_{I1}f} = \frac{(-1{,}84516 + 1{,}88387)}{(-1{,}049822 + 1{,}338629)} = 0{,}115$$

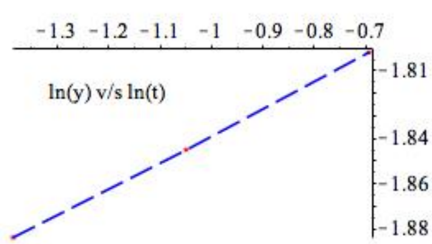
$$\overline{V_{I2}f} = \frac{(-1{,}801809 + 1{,}84516)}{(-0{,}693147 + 1{,}049822)} = 0{,}12$$

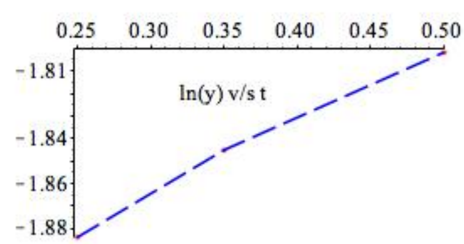
Escala semilogarítmica: $ln(y)$ versus x

$$\overline{V_{[t1,t2]}f} = \frac{(-1{,}84516 + 1{,}88387)}{(0{,}35 - 0{,}25)} = 0{,}387$$

$$\overline{V_{[t2,t3]}f} = \frac{(-1{,}801809 + 1{,}84516)}{(0{,}50 - 0{,}35)} = 0{,}289$$

Comprobación: Si al graficar los puntos de las nuevas tablas es posible pasar una línea recta.





PASO 3. Se observa que salvo los errores de redondeo los valores corresponden a una escala logarítmica. Por lo tanto, corresponde a un modelo potencial $y(t) = C \cdot t^{\alpha}$

PASO 4. Cálculo de $C \ y \ \alpha$

Del cálculo de las variaciones medias determinamos $\alpha = 0{,}12$ Como:

$$ln|y| = ln|C| + \alpha ln|t| \Longrightarrow v = \alpha \cdot u + b$$

Determinamos b, usando nuevamente variaciones medias y el punto $(0, b)$:

$$\frac{b - ln|0{,}152|}{0 - ln|0{,}25|} = \frac{b + 1{,}88387}{1{,}38629} = 0{,}12 \Longrightarrow b = 0{,}12 \cdot (1{,}38629) - 1{,}88387 = -1{,}7175$$

Como, $b = ln|C| \Longrightarrow C = e^{b} \Rightarrow C = e^{-1.7175} = 0{,}1795$

PASO 5.

Respuesta: El modelo potencial es : $y(t) = 0.1795t^{0.12}$

3. Actividades de aprendizaje.

A continuacion y utilizando los conocimientos revisados en clases y aquellos derivados de su propio proceso de aprendizaje, resuelva los siguientes problemas de linealización.

Problema 1.

Contexto

Se dispone de los siguientes datos que relacionan la variable x con la variable y

x	3,32	4,48	7,39	9,02
y	16,44	25,79	54,59	73,69

Requerido:
Determine cuál de los siguientes modelos $y = Me^{kx}$ o $y = Mx^{k}$, se ajusta a los datos proporcionados y, adicionalmente, determine las constantes $M \ y \ k$.

Problema 2.

Contexto

Los siguientes datos relacionan la variable x con la variable y

x	0,5	0,9	1,2	1,8
y	7,38	2,45	1,8	0,54

Requerido:
Determine cuál de los siguientes modelos $y = Me^{kx}$ o $y = Mx^{k}$, se ajusta a los datos proporcionados y, adicionalmente, determine las constantes $M \ y \ k$.

Problema 3.

Contexto
Dada la tabla que representa a la función:

t	0,15	0,25	0,35
$N(t)$	0,35929	0,37772	0,39708

Requerido:

a. Confeccione una tabla necesaria para determinar si la tabla corresponde a un modelo potencial o exponencial.
b. Grafique los puntos para comprobar los cálculos.
c. Determine la pendiente y el intercepto sobre el eje Y.
d. Escriba la fórmula del modelo potencial.

Problema 4.

Contexto
El número de bacterias en un plato de Petri en función del tiempo t, medido en horas, está dado por:

t	1	2	3	4	5	6
$N(t)$	11051	12214	13498	14918	16487	18221

Requerido:

a. Confeccione una tabla necesaria para determinar, si la tabla corresponde a un modelo potencial o exponencial.
b. Grafique los puntos para comprobar los cálculos.
c. Determine la pendiente y el intercepto sobre el eje Y
d. Escriba la fórmula del modelo potencial.

Capítulo 3. Límites y Continuidad de Funciones Reales

Este capítulo permitirá que cada estudiante evidencie los siguientes desempeños:

- Interpreta de forma gráfica el valor del límite de funciones racionales, logarítmicas y exponenciales, en situaciones donde: (i) la variable independiente crece o decrece indefinidamente y (ii) cuando la variable independiente se aproxima a un número real por valores mayores o menores que él.
- Aplica el álgebra de límites para determinar el límite de funciones polinómicas, radicales, exponenciales, logarítmicas, obtenidas a partir de sumas, productos, cuocientes y composición de funciones.
- Determina si una función representada mediante una fórmula, es continua en un punto, usando la definición de continuidad.
- Apliquen la definición de continuidad para: i) calcular límites y ii) determinar asíntotas verticales y horizontales.
- Aplica el Teorema de Bolzano para determinar los signos y la existencia de ceros de funciones racionales y potencias de exponente racional.

Propósito del recurso

El objetivo principal es que los estudiantes apliquen teoremas y propiedades de los límites en el cálculo de límites de funciones elementales. Además, usando los conocimientos adquiridos anteriormente como la factorización de polinomios, puedan determinar límites de funciones racionales.

Bibliografía

Barnett, R.; Ziegler, M. And Byleen K. Precálculo: funciones y gráficas. Editorial. McGraw-Hill. 2000. Edición: 4ª.

Haefner, J.W. Modeling Biological Systems: Principles and Applications, 2nd ed., New York: Springer Science+Business Media, 2005.

Joseph, E. Cálculo, *Editorial* : Pearson Educación, 2007. Edición: 9ª.

Neuhauser, C. Calculus for biology and medicine. 3rd Edition, Ed. Prentice Hall, 2010.

Sección 1. Concepto de límite

A continuación se presentan diferentes ejercicios ilustrativos, con el fin de mostrar algunas estrategias de solución para cada una de ellas. Adicionalmente, se propone para ejercitación de los estudiantes, distintos problemas rutinarios de cálculo de límites y problemas contextualizados con aplicaciones de límites de funciones reales.

1. Introducción al concepto de límite de una función

Supongamos que deseamos modelar y analizar la cantidad $Q(t)$ de cierto medicamento medido en mg, en el organismo con respecto al tiempo en hrs, considerando que inicialmente no hay medicamento y que comienza a aumentar por inyección intravenosa de manera continua. A medida que la cantidad aumenta en el organismo, también aumenta la razón a la que el organismo excreta el medicamento. Al final la cantidad de medicamento se nivela a un nivel de saturación S. Se sabe que, el modelo matemático de esta situación, se expresa como:" la diferencia entre el nivel de saturación S y la cantidad de medicamento en el cuerpo, es proporcional a la diferencia inicial por $(0{,}3)^t$.

Requeridos:

a. Escribe el modelo en lenguaje matemático.

b. Analiza que ocurre cuando transcurre el tiempo en forma indefinida, si el nivel de saturación es de 250 mgr. Realiza dicho analisis, utilizando el lenguaje matemático de límites.

c. Esboza e interpreta el gráfico de la situación modelada y observa si el gráfico es acorde con la conclusión del punto anterior.

Solución:

Usaremos la metodología basada en el método de Pólya, desarrollada en este curso, dividiendo el desarrollo del problema en etapas, que permitirán una comprensión y organización de la información en forma lógica, que permita resolver el problema de manera natural.

Etapa 1: Comprender el problema

Recordemos que para comprender un problema, se debe ser capaz de extraer información como: distinguir las variables dependiente e independiente, datos y el requerido.

Variables:

$Q(t)$: Cantidad de medicamento con respecto al tiempo, desde que se comienza a inyectar, medido en mg. (variable dependiente.

t: tiempo medido en horas (variable independiente).

Datos:

t_0: tiempo inicial

$Q(t_0)$: $Q(0)$: cantidad inicial de medicamento, $Q(0) = 0$

S: nivel de saturación del medicamento.

Requeridos:

a. Modelo matemàtico
b. $\lim_{t\to\infty} Q(t) =?$
c. Graficar la cantidad de medicamento acumulada en el organismo con respecto al tiempo.
d. Interpretar los resultados

Etapa 2: Modelo Matemático

Diferencia entre el nivel de saturación y cantidad de medicamento= Diferencia Inicial por $(0.3)^t$, equivale a

$$S - Q(t) = \big(S - Q(0)\big) \cdot (0{,}3)^t$$

Etapa 3: Ejecución.

a. El modelo puede expresarse:

$$S - Q(t) = \big(S - Q(0)\big) \cdot (0{,}3)^t \iff Q(t) = S(1 - (0{,}3)^t)$$

b. Para determinar la tendencia, a medida que transcurre el tiempo equivale a determinar:

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\longrightarrow\infty} 250 \cdot (1 - (0{,}3)^t) = \lim_{t\longrightarrow\infty} 250$$

$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\longrightarrow\infty} 250 \cdot (1 - (0{,}3)^t)$	Este límite puede determinarse usando propiedades de límites o usando tablas. La idea es que los estudiantes aprendan a determinar los límites usando propiedades y teoremas vistos en el aula. En aquellos casos especiales, en que es complejo usar propiedades, usaremos tablas como recurso.

$\lim_{t\to\infty} 250\cdot(1-(0{,}3)^t) = \lim_{t\to\infty} 250 - \lim_{t\to\infty} 250\cdot(0{,}3^t)$	Aplicando propiedades del álgebra de límites. (Límite de una diferencia de funciones
$\lim_{t\to\infty} 250\cdot(1-(0{,}3)^t) = 250 - 250 \lim_{t\to\infty}(0{,}3)^t$	Propiedades: Límite de una constante y Límite de una constante por una función.
$= 250 - 250 \lim_{t\to\infty}(0{,}3)^t$ $= 250 - 0$	Propiedad del límite de una exponencial con base (0,3)<1
Luego, $\lim_{t\to\infty} 250\cdot(1-(0{,}3)^t) = 250$	

Gráfico de $\boldsymbol{y(t)} = Q(t) = 250(1-(0{,}3)^t)$

Se usará la técnica enseñada en clases, trasladando la función original, en este caso es $f(t) = (0{,}3)^t$

Gráfico 1.

$f(t) = (0{,}3)^t$

$g(t) = -(0{,}3)^t$

Es decir: $g(t) = -f(t)$

Gráfico 2.

$g(t) = -(0{,}3)^t$

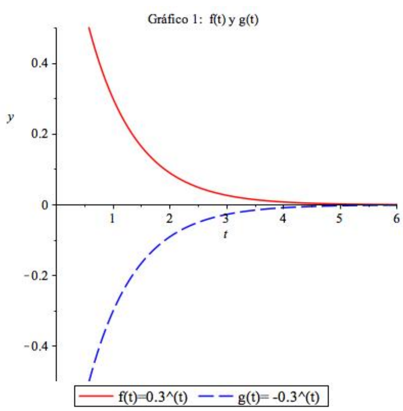
$h(t) = 1-(0{,}3)^t$

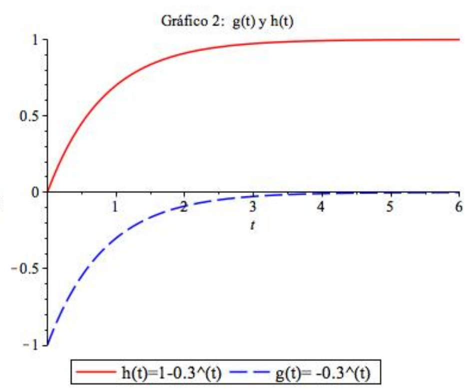
Es decir, $h(t)$ es la traslación de $g(t)$ verticalmente en una unidad positiva.

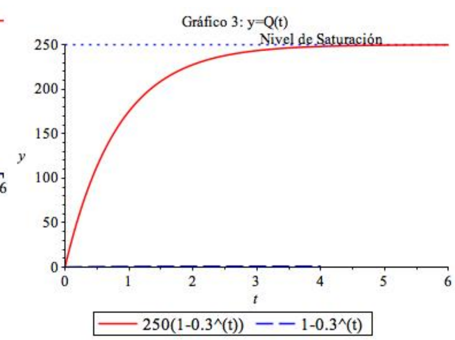
Gráfico 3.

$Q(t) = 250\cdot h(t)$

$Q(t) = 250(1-(0{,}3)^t)$







Etapa 4. Interpretación de los resultados y respuestas a los requeridos.

a. El modelo Matemático que representa al enunciado del problema. En general, para cualquier nivel de saturación es: $Q(t) = S(1-(0{,}3)^t)$

En el caso en que S=250 mg es:

$$Q(t) = 250(1-(0{,}3)^t)$$

b. Si el tiempo transcurre indefinidamente, la cantidad de medicamento tiende a 250 mg.

c. El gráfico de la cantidad de medicamento que se acumula en el organismo es el que muestra el gráfico 3.

Se observa del gráfico, que a medida que transcurre el tiempo y se inyecta el medicamento, éste aumenta lentamente (gráfica cóncava) tendiendo al nivel de saturación de 250 mg.

Ejemplo ilustrativo 2.

Calcule el siguiente límite, utilizando las propiedades de los polinomios y del álgebra de límites:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \left(\frac{2x^3 - 6x^2 - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}}{4x^2 - 10x + 4} \right)$$

Solución:

Desarrollaremos este límite, usando razonamiento deductivo y escribiendo las propiedades relevantes que vamos aplicando paso a paso.

PASO 1. Como el grado de la función polinómica del numerador es mayor que la del denominador, la fracción es impropia y es posible dividir ambos polinomios y simplificar la expresión.

PASO 2. Hay dos alternativas:

i) Aplicar el algoritmo de Euclides.
ii) Factorizar ambos polinomios, de modo de determinar un factor común y poder simplificar.

Observamos que esta reducción es simple, si se reemplaza en ambos polinomios el valor al que tiende la variable independiente.

Si evaluamos $P(x)$ en $x = \frac{1}{2}$, se obtiene:

$P(x) = 2x^3 - 6x^2 - \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \implies P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = 0$, esto significa que $x = \frac{1}{2}$ es un cero de $P(x)$

Si evaluamos $Q(x)$ en $x = \frac{1}{2}$, se obtiene:

$\boldsymbol{Q(x)} = 4x^2 - 10x + 4, \implies Q\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 10 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 0$, es decir, $x = \frac{1}{2}$ es un cero de $Q(x)$.

Por lo tanto, se deduce que $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ es un factor de $P(x)$ y $Q(x)$.

PASO 3. Para factorizar ambas funciones polinómicas, se usará división sintética de polinomios.

Factorizamos el polinomio $Q(x)$. Escribimos los coeficientes en orden descendente:

2	-6	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	
2	-5	-3	0	

Explicación:

Al efectuar este procedimiento, se comprueba que x=1/2 es un cero del polinomio, puesto que el resto es cero.

El otro factor de un grado menor que P(x) es: $C_1(x) = 2x^2 - 5x - 3$

Factorizamos el polinomio Polinomio $Q(x)$

4	-10	4	$\frac{1}{2}$
	2	-4	
4	-8	0	

Explicación:

Analogamente, se comprueba que $x = \frac{1}{2}$ es cero del polinomio

El otro factor, en este caso de grado menor que Q(x) es: $C_2(x) = 4x - 8$

PASO 4. Reescribimos el límite

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \left(\frac{2x^3 - 6x^2 - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}}{4x^2 - 10x + 4} \right) =$$

Se sustituye en el límite la factorización que se determinó, para cada polinomio.

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\cancel{\left(x - \frac{1}{2}\right)} (2x^2 - 5x - 3)}{\cancel{\left(x - \frac{1}{2}\right)} (4x - 8)} =$$

Se simplifican los factores que aparecen repetidos en el numerador y denominador.

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x - 3}{4x - 8} =$$

Se aplica propiedad del límite de un cuociente

$$= \frac{\lim_{x \to \frac{1}{2}} (2x^2 - 5x - 3)}{\lim_{x \to \frac{1}{2}} 4x - 8} = \frac{5}{6}$$

Se aplica propiedades del álgebra de límites. (suma, diferencia y límite de una constante por una función.

PASO 5. A parti del análisis efectuado, es posible establecer que el valor del límite es $\frac{5}{6}$

Ejemplo ilustrativo 3.

Analizar la existencia de: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{tan(x) - sen(x)}{x^3 \tan(x)} \right)$

Solución:

Puesto que los límites del numerador y del denominador son iguales a cero no podemos aplicar las propiedades de los límites.

$$f(x) = \frac{tan(x) - sen(x)}{x^3 \tan(x)}$$

Luego expresamos la función como un producto de funciones de modo que podamos aplicar las propiedades de los límites. Observamos que si factorizamos el numerador y el denominador por $tan(x)$

$$f(x) = \frac{1 - cos(x)}{x^3}$$

Observamos que los límites del numerador y del denominador son iguales a cero . Luego aun no podemos aplicar las propiedades. Amplificando por 1+cos(x) se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tan(x) - sen(x)}{x^3 \tan(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{tan(x)}{\tan(x)}\left(\frac{1-\cos(x)}{x^3}\right)\left(\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos^2(x)}{x^3(1+\cos(x))}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen^2(x)}{(1+\cos(x))}\right)\cdot\frac{1}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen^2(x)}{x^2}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{(1+\cos(x))}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

Analizamos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{tan(x)-sen(x)}{x^3\tan(x)}\right) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{tan(x)-sen(x)}{x^3\tan(x)}\right) = -\infty$$

Por lo tanto, es posible establecer que el límite no existe.

1.1. Actividades de aprendizaje

ÍTEMI. Explore la tendencia de los siguientes límites utilizando tablas de valores:

$a)$ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x-1}\right)$ b) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\right)$ c) $\lim_{x\to 2}\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)$ $d)$ $\lim_{z\to 0}\frac{|z|}{z}$

ÍTEM II. Verifique usando tablas los siguientes límites:

$a)$ $\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right) = 1$ $d)$ $\lim_{h\to 0}\left(\frac{2^h-1}{h}\right) = \ln(2)$

$b)$ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$ $e)$ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$c)$ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = 1$

ÍTEM III. Calcula, utilizando propiedades, los siguientes límites:

a. $\lim_{x\to -2} \dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$

b. $\lim_{x\to 3} \left[\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{12}{x^2-9}\right]$

c. $\lim_{x\to -3} \dfrac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$

d. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

e. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{2x}$

f. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

g. $\lim_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{1-x}$

h. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$

i. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1}$

i. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(3+x)^3-27}{x}$

k. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^4-1}$

l. $\lim_{x\to 16} \dfrac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$

m. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{3}\right)$

n. $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2+t}\right)$

o. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t}\right)$

p. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(4+x)^2-16}{x}$

q. $\lim_{t\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{t}-1}{\sqrt{t}-1}$

r. $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}, \quad a>b$

s. $\lim_{x\to 25} \dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{5}\right)}{x-25}$

t. $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)$

u. $\lim_{x\to \infty} (e^{-x})$

ÍTEM IV. Calcula $\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ para cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x)=x^2$

b. $f(x)=x^3,\ x\neq 1$

c. $f(x)=\frac{1}{x},\ x\neq 0$

d. $f(x)=e^x$

e. $f(x)=x^{-2},\ x\neq 0$

f. $f(x)=\sqrt{x^{-2}},\ x\neq 0$

g. $f(x)=x^{\left(\frac{1}{3}\right)},\ x\neq 0$

h. $f(x)=x$

ÍTEM V. Verifica los siguientes límite trigonométricos:

a. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{\cos(x)-1}\right)=-2$

b. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right)=0$

c. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\sec(x)}{x^2\sec(x)}\right)=-0{,}5$

d. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(5x)}{x}\right)=0$

e. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\operatorname{sen}(x)}{\frac{\pi}{2}-x}\right)=0$

f. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^3}\right)=0$

Ejemplo Ilustrativo 4.

Contexto
En una central térmica se han realizado estudios de costos para reducir la polución del material que vierte. Se ha estimado que el costo $C(p)$ en miles de dólares para reducir en un $p$por ciento la polución del vertido es: $C(p) = \frac{80000p}{100-p}$, $0 \leq p < 100$.
Requerido: a. ¿Hacia qué valor tiende el costo en dólares, cuando el porcentaje que se quiere reducir la polución tiende al 90%? b. ¿Hacia qué valor tiende el costo en dólares, cuando el porcentaje que se quiere reducir la polución tiende al 100%?

Solución:

Etapa 1. Comprender el Problema

Esto involucra, definir variables, datos, gráfico cuando es posible e incógnitas

Variables:

variable independiente: p : representa el porcentaje en que se reduce la polución vertido por la central térmica.

variable dependiente: $C(p)$: El costo de reducir en un p por ciento la polución en miles de dólares.

Datos:

* El dominio de la función $D_c = [0,100)$

* $C(p) = \frac{80000p}{100-p}$

Requerido (Incógnitas): i) $\lim_{p \to 90} \frac{80000p}{100-p} =?$ ii) $\lim_{p \to 100^-} \frac{80000p}{100-p} =?$

Etapa 2. Modelo Matemático

Es la representación del problema o de las incógnitas en lenguaje matemático. Calcular los límites $\lim_{p \to 90} (\frac{80000p}{100-p})$ y $\lim_{p \to 100^-} (\frac{80000p}{100-p})$

Etapa 3. Ejecutar el Plan de Acción

En esta etapa se usa el razonamiento deductivo, que los estudiantes vienen desarrollando desde la educación media.

i) El plan de acción es construir una tabla para estudiar y conjeturar el comportamiento de la función, cuando p tiende a 90 por la izquierda y por la derecha.

p%	89,9	89,99	89,999		90,001	90,01	90,1
$C(p)$							

ii) Nuevamente el plan de acción es construir una tabla para estudiar y conjeturar el comportamiento de la función, cuando p tiende a 100 por la izquierda.

p%	99,9	99,99	99,999		100,001	100,01	100,1
$C(p)$							

Etapa 4. Verbalizar y responder las preguntas del problema

i) El costo en miles de dólares tiende a …………………. cuando el porcentaje de reducción de la polución tiende al 90 %.

ii) Observamos que para llegar a remover el 100% de la polución el costo …………………

ÍTEM V. Resuelva los siguientes problemas, aplicando las propiedades y álgebra de límites:

Problema 1.

Contexto

La tasa de producción $p(x)$ de células sanguíneas en función de la cantidad x de células presentes se encuentra modelada por la función:

$$p(x) = \frac{2x}{1 + x\sqrt{x}} \qquad x \geq 0$$

Requerido

¿ Hacia qué valor tiende la tasa de producción, cuando el número de células crece indefinidamente?

Problema 2.

Contexto

La presión P de vapor de un líquido en $\left[\frac{lb}{pulg^2}\right]$, que representa una medida de su volatibilidad, se relaciona con su temperatura T en [°F], mediante la ecuación de Antoine:

$$\ln|P| = a + \frac{b}{c + T} \qquad a, b, c, \qquad ctes$$

Requerido

a. Exprese P en función de T.

b. ¿A cuánto tiende la presión si la temperatura aumenta indefinidamente?

Problema 3.

Contexto

La energía potencial V de dos moléculas de gas separadas por una distancia r está dada por:

$$V(r) = -V_0\left[2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}\right] \qquad r \geq 0$$

donde V_0 y r_0 son constantes positivas.

Requerido

Determine hacia qué valor tiende la energía potencial cuando la distancia entre las moléculas tiende a cero.

Problema 4.

Contexto
La variación de energía libre estándar ΔG^0 de un proceso se expresa en función de las variaciones estándar de la entalpía ΔH^o y de la entropía ΔS^0 mediante la ecuación $\Delta G^0 = \Delta H^0 - T\Delta S^0$ donde T es la temperatura Kelvin del proceso. A su vez ΔG^0 se expresa en función de la constante de equilibrio K, que depende de la temperatura T, mediante la ecuación $\Delta G^0 = -RTln(K)$ donde R es la constante de los gases. De lo anterior tenemos que $ln(K) = -\frac{\Delta H^0}{R}\frac{1}{T} + \frac{\Delta S^0}{R}$, de donde se obtiene que $K(T) = e^{\frac{\Delta S^0}{R}} e^{-\frac{\Delta H^O}{R}\frac{1}{T}}$.
Se requiere: a. Determinar hacia qué valor tiende la constante de equilibrio K, cuando la temperatura T tiende hacia cero por la derecha. b. Determinar hacia qué valor tiende la constante de equilibrio K, cuando la temperatura T crece indefinidamente.

Problema 5.

Contexto

Según la teoría de Arrhenius, la fuerza de un ácido depende de la mayor o menor tendencia a ceder iones H^+ en disolución acuosa. Las disoluciones de ácidos son equilibrios químicos, para los cuales los valores de sus constantes de equilibrio Ka, representan una medida cuantitativa de su fuerza.

Valores de Ka	$K_a > 55$	$55 > K_a > 10^{-4}$	$10^{-4} \geq K_a > 10^{-14}$	$K_a < 10^{-14}$
Fuerza del Ácido	Fuerte	Intermedio	Débil	Muy débil

La disociación de un ácido débil monoprótico (HA), se representa mediante la ecuación química:
$HA \rightarrow H^+ + A^-$ (1).
La tabla muestra cómo se transforma una concentración inicial $[C_0]$ del compuesto HA cuando se llega al equilibrio.

	[HA]	$[H^+]$	$[A^-]$
Concentración inicial	$[C_0]$	0	0
Concentración en el equilibrio	$[C_0 - x]$	[x]	[x]

Donde:
$[C_0]$ = Concentración inicial de HA.
$[H^+]$ = Concentración de protones en el equilibrio.
$[A^-]$ = Concentración del anión correspondiente del ácido en el equilibrio.
[HA] = Concentración del ácido.
K_a = Constante de acidez.
$[H^+] = [A^-] = [x]$, donde [x] representa la concentración de los productos en el equilibrio.
x= Disociación iónica de la especie.
En química se dice "*en el equilibrio*", cuando se alcanza el estado de equilibrio.
La relación entre la constante de acidez y las concentraciones de los componentes de esta disociación en equilibrio, se expresa mediante la ecuación $K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]}$. (2)
Al reemplazar las concentraciones en el equilibrio, se obtiene para la constante de acidez la ecuación:
$K_a = \frac{[x]^2}{C_0 - x}$. De donde se obtiene que $[H^+] = [x] = \sqrt{K_a(C_0 - x)}$, donde $x < C_0$.
Se sabe que si K_a es muy pequeña en comparación con C_o entonces x es muy pequeño en comparación de C_0. Si $K_a = 10^{-4} y\ [C_0] = 0.1M$

Requerido:

a. Determine el valor numérico al cual tiende la concentración de protones en el equilibrio cuando la disociación iónica de la especie tiende a ser muy pequeña. Usted puede conjeturar el valor requerido completando la siguiente tabla.

x	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
$[H^+] = \sqrt{K_a(C_0 - x)}$					

Verifique aplicando las propiedades de los límites que su conjetura es correcta.

b. Escriba en términos de límites la expresión general que relaciona la concentración de protones $[H^+]$, para un ácido débil monoprótico cuando $K_a << C_o$

Sección 2. Continuidad de Funciones Reales

En esta sección se desarrollarán actividades que te permitirán, por ejemplo, determinar si una función es continua en un punto aplicando la definición, es decir, para esto se analizará la existencia de límites y se comparará este resultado con el valor de la función. Además se determinará la existencia de asíntotas verticales y horizontales mediante límites hacia el infinito. Finalmente se aplicará el teorema de Bolzano para verificar la existencia de ceros de una función.

1. Definición de continuidad.

Diremos que $f : D \to IR$ es continua en $a \in D$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Es decir se deben verificar dos condiciones:

i) El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a debe existir.

ii) El valor del límite debe ser igual a $f(a)$.

Si no se cumple i) o ii) entonces f no es continua en a.

Ejercicio ilustrativo 1.

Sea $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{1-x} - \dfrac{12}{1-x^2}, & x > 1 \\ -3, & x = 1 \\ -\dfrac{x^4 - 1}{x - 1} + 1, & x < 1 \end{cases}$$

¿Es $h(x)$ continua en $x = 1$?

Para analizar la continuidad en $x = 1$ se debe:

1. Analizar la existencia del $\lim_{x \to 1} h(x)$

2. Verificar si se cumple que $\lim_{x \to 1} h(x) = h(1)$

En efecto:

Como la función dada es por tramos y esta cambia para valores de la variable independiente menores que , igual a 1 y mayores que 1, para calcular $\lim_{x\to 1} h(x)$, debemos analizar límites laterales cuando x tiende a 1, por la derecha y por la izquierda.

En efecto:

i) Si $x>1$ entonces $h(x)=\dfrac{6}{1-x}-\dfrac{12}{1-x^2}$. Usando álgebra de límites en el desarrollo:

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{6}{1-x}-\frac{12}{1-x^2}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{6(1+x)-12}{1-x^2}\right) = 6\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1+x-2}{1-x^2}\right) = 6\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{1-x^2}\right)$$
$$= 6\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{-(1-x)}{(1-x)(1+x)}\right) = -3$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 1^+} h(x) = -3$.

ii) Si $x<1$ entonces $h(x)=-\dfrac{x^4-1}{x-1}+1$, usando nuevamente álgebra de límites:

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^4-1}{x-1}+1\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-x^4+1+x-1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x(x^3-1)}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\right)$$
$$= \lim_{x\to 1^-}(-x(x^2+x+1) = -3$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 1^-} h(x) = -3$.

iii) Como los límites laterales son iguales, concluimos que el límite existe y es: $\lim_{x\to 1} h(x) = -3$.

Como $h(1)=-3$, como $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1) = -3$, concluimos que la función es continua en $x=1$.

1.1. Actividad de aprendizaje. Para los siguientes ejercicios, determine los valores de las constantes involucradas, de manera que la función respectiva resulte continua en IR.

a. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-x-2}, & x\neq 2\\ a, & x=2\end{cases}$$

b. $$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3} & x>1\\ B & x=1\\ \dfrac{x^4-1}{x-1}-1 & x<1\end{cases}$$

c. $$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-a^3}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} & x\neq a\\ \sqrt{cx-a} & x=a\end{cases}$$

d. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+6x^2+9x}{x+3} & x<-3\\ A & x=-3\\ \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+3}} & x>-3\end{cases}$$

e. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}, & si\ x\leq 3\\ \dfrac{12-ax}{3}, & si\ x>3\end{cases}$$

f. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{1}{1-x}, & x\neq 1\\ a, & x=1\end{cases}$$

g. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+64}{x+4}; & x<-4\\ ax^2+10 & x\geq -4\end{cases}$$

h. $$f(x)=\begin{cases}cx+1, & si\quad x\leq 3\\ cx^2-1, & si\quad x>3\end{cases}$$

i. $$f(x)=\begin{cases}1-3x, & si\quad x<4\\ cx^2+2x-3, & si\quad x\geq 4\end{cases}$$

2. Asíntotas verticales y horizontales de una función

2.1. Asíntota horizontal.

Sea $f\colon A\to\mathbb{R}$ una función continua y $a\in IR$, diremos que:

i) $y=a$ es una asíntota horizontal a la derecha (por valores positivos) de f si, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$

ii) $y=a$ es una asíntota horizontal a la izquierda) (por valores negativos) de f si, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$

2.2. Asíntota vertical.

Sea $f\colon A\to\mathbb{R}$ una función continua y $a\in IR$, diremos que:

$x=a$ es una asíntota vertical de f si, $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$, o $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$

Nota: Tener presente que para determinar asíntotas se debe tener claro el dominio para el cual está definida la función antes de proceder.

2.3. Actividad de aprendizaje. Determine, si existen asíntotas verticales y horizontales para las siguientes funciones:

a. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

b. $f(x)=\dfrac{2-x}{(x-1)^2}$

c. $g(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

d. $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

e. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

f. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

g. $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

h. $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2-1}$

i. $g(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}}$

j. $f(x)=x^3-12x^2+36x.$

k. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2}$

l. $f(x)=\dfrac{x+2}{x+3}$

m. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

n. $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

ñ. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-x}$

o. $h(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

p. $g(x)=\dfrac{x^3+64}{x+4}$

q. $h(x)=\sqrt{x^2+x+1}+x$

3. Teorema de Bolzano

Definición: Teorema de Bolzano.

Sea $f:[a,b]\longrightarrow B\subseteq IR$, una función continua.

Si $f(a)\cdot f(b)<0$ entonces existe un $c\in\,]a,b[$ tal que $f(c)=0.$

Ejemplo ilustrativo 1.

Pruebe que las gráficas de las funciones $f(x)=x^3+x^2-3x+1$ y $g(x)=x$, se cortan en algún punto e indique de que manera se puede localizar dicho punto.

Solución:

Para que las gráficas de dos funciones se intercepten en (x_0,y_0) se debe cumplir que: $f(x_0)=g(x_0)\Leftrightarrow f(x_0)-g(x_0)=0,$ por lo tanto debemos ser capaces de garantizar la existencia de x_0 perteneciente a algún intervalo.

De acuerdo a la diferencia obtenida llamaremos $h(x)$ a una función en IR definida por:

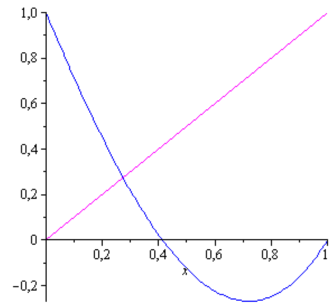
$h(x)=f(x)-g(x)=x^3+x^2-3x+1-x=x^3+x^2-4x+1,$ la cual es continua en todos los reales por ser una función polinomial, en particular será continua en un intervalo de la forma $[a,b]$.

Ahora debemos encontrar un intervalo específico para utilizar el teorema de Bolzano.

En efecto, observar que: $h(0)=1>0$, y $h(1)=-1<0$, luego, $h(0)\cdot h(1)<0.$

Considerando entonces $[a,b]=[0,1]$, por teorema de Bolzano, existe un $x_0\in]0,1[$ tal que $h\left(x_0\right)=0.$

Es decir, $h(x_0) = x_0^3 + x_0^2 - 4x_0 + 1 = 0$, volviendo a la definición de h dada por la diferencia $x_0^3 + x_0^2 - 3x_0 + 1 = x_0$, por lo tanto existe $x_0 \in$ $]0,1[$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$, de tal manera que las gráficas se cortan en algún valor de este intervalo]0,1[.



3.1. Actividades de aprendizaje

ÍTEM I. En base a lo expuesto anteriormente y utilizando sus apuntes, responda a las siguientes situaciones:

a. Aplique el teorema de Bolzano o valor medio. La función $y = x^{-1}$ toma valores distintos signo en los extremos del intervalo $[-1,+1]$ y sin embargo no se anula en él, ¿contradice esto el teorema de Bolzano?.

b. Usando teoremas de continuidad determine el signo de las funciones dadas, en un número adecuado de intervalos del dominio, de modo que se pueda aplicar el teorema de Bolzano con el objetivo de determinar en qué intervalos, tienen ceros las siguientes funciones.

- $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$
- $g(x) = x^2 - 4x + 2$
- $h(x) = -x^2 + 8x + 3$

ÍTEM II. Resuelva los siguientes problemas, utilizando los conceptos teóricos revisados en la sesión de práctica y durante el seminario:

Problema 1.

Contexto	**Requerido**
La población (en miles) de una colonia de bacterias, t minutos después de la introducción de una toxina, está modelada por: $f(t) = \begin{cases} t^2 + 7 & ;0 \le t < 5 \\ -9t + 72 & ;t \ge 5 \end{cases}$	a. A qué valor tiende la población de bacterias, si el tiempo tiende a 5 minutos. b. Explique si la población puede ser de 10.000 bacterias en algún momento entre t = 1 y t = 7. (Utiliza el teorema de valor intermedio)

Problema 2.

Contexto	**Requerido**
Un meteorólogo encuentra que la temperatura T (en °F) durante un frío día de invierno estuvo dada por: $T(t) = 0{,}05t(t-12)(t-24)$; donde t es el tiempo (en horas) y $t = 0$ corresponde a las 6 AM.	a. Determine cuando la temperatura estuvo bajo 0° y cuando estuvo sobre 0°. b. Demuestre que la temperatura fue de 32°F en algún momento entre las 12 A.M. y la 1 P.M.

Problema 3.

Contexto	**Requerido**
La temperatura T (en °C) a la que el agua hierve está dada aproximadamente por la fórmula: $T(h) = 100.862 - 0.0415\sqrt{h + 431.03}$;donde h es la altura sobre el nivel del mar (en metros).	Demuestre que entre los 4000 y los 4500 metros sobre el nivel del mar hay una altura a la cual el agua hierve a 98°C.

Capítulo 4. Trigonometría

Este capítulo permitirá que cada estudiante evidencie los siguientes desempeños:

- Identifica situaciones específicas del ámbito de las ciencias que pueden ser resueltas utilizando como recurso determinadas razones trigonométricas y los Teoremas del seno y/o del coseno, según corresponda.
- Utiliza identidades trigonométricas para la resolución de problemas contextualizados en el ámbito científico.
- Aplica, de forma clara y ordenada, una estrategia para la resolución de problemas del ámbito de las ciencias.
- Comunica de forma escrita resultados relevantes de problemas afines a las ciencias químicas.
- Interpreta el modelo algebraico de una función sinusoidal (seno y coseno), a fin de representarlo gráficamente en dominio específico.
- Ejecuta, de forma clara y ordenada, un plan de acción que permita formalizar (matemáticamente) la(s) coordenada(s) de intersección(es) entre dos curvas sinusoidales.
- Interpreta las soluciones asociadas a una ecuación trigonométrica, a fin de relacionarlas con la representación gráfica del contexto dado.
- Formaliza matemáticamente elementos básicos de una curva sinusoide (dominio, recorrido, máximo(s) y/o mínimo(s), intersecciones con los ejes coordenadas (si las hubiere).

Propósito del recurso

Esta sección constituye una aproximación base para que puedas abordar los diferentes contenidos de trigonometría contemplados en éste y otros cursos de tu formación profesional. Las diferentes actividades de aprendizaje que te propone este recurso te permitirán aplicar aquellos contenidos teóricos revisados en la sesión teórica para así abordar de forma efectiva diferentes situaciones que se te presentarán en contenidos asociados a geometría analítica, en el estudio de funciones sinusoidales y problemas contextualizados en el ámbito científico, a partir de la aplicación del Teorema del seno y del coseno.

Bibliografía

Barnett, R.; Ziegler, M. And Byleen K. Precálculo: funciones y gráficas. Editorial. McGraw-Hill. 2000. Edición: 4ª.

Haefner, J.W. Modeling Biological Systems: Principles and Applications, 2nd ed., New York: Springer Science+Business Media, 2005.

Joseph, E. Cálculo, *Editorial* : Pearson Educación, 2007. Edición: 9ª.

Neuhauser, C. Calculus for biology and medicine. 3rd Edition, Ed. Prentice Hall, 2010.

Thomas, Jr., George B. Cálculo. Una variable. Undécima edición, Editorial Pearson educación, México, 2006.

Ritchey, N., Lial, M. Calculus with Applications for the Life Sciences. 1st Edition, Ed. Pearson, 2003.

Adicionalmente, te sugerimos visitar el siguiente enlace Web: https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_en.html

Sección 1. Trigonometría básica

ÍTEM I. Ángulos orientados y sistema de medición de ángulos. En un sistema de ejes coordenados dibuja en posición estándar un ángulo cuya medida sea:

a. 50° b.. 310° c. – 90° d. – 285° e. 400° f. – 525°

ÍTEM II. Determina la medida, en grados, de cada uno de los siguientes ángulos, considerando que una rotación completa corresponde a 360°.

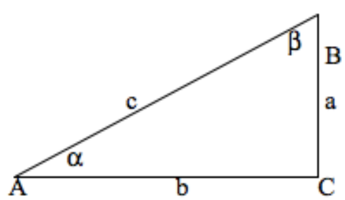
a. $\frac{1}{9}$ rotación b. $\frac{1}{5}$ rotación c. $\frac{3}{8}$ rotación d. $\frac{3}{4}$ rotación e. $\frac{7}{6}$ rotación f. $\frac{1}{2}$ rotación

ÍTEM III. Expresa en grados, minutos y segundos, o en notación decimal, los siguientes ángulos (según corresponda):

a. 100,01° b. -85,4° c. 30°15'4" d. -175,12'

ÍTEM IV. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Sea el triángulo ABC, rectángulo en C. A partir de ello, determina:

a. En función de α



b. En función de β

ÍTEM V. Determina las razones trigonométricas del **ángulo señalado** en cada una de las figuras que a continuación se presentan. Posteriormente responde el set de preguntas asociadas a esta actividad.

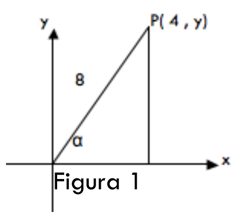


Figura 1

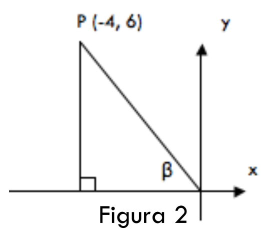


Figura 2

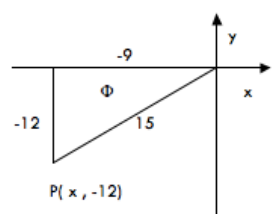


Figura 3

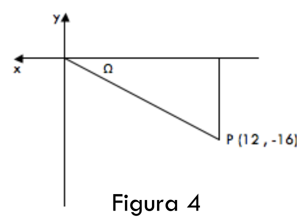
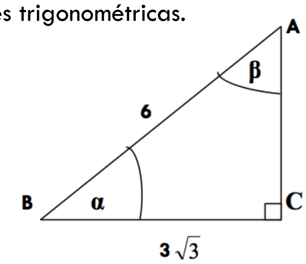


Figura 4

Preguntas asociadas a la actividad:

a. ¿A qué cuadrantes pertenecen los ángulos que acabas de trabajar?
b. ¿Cómo varía el signo de cada razón trigonométrica en la medida que el ángulo modifica su posición (cambia de cuadrante)?

ÍTEM VI. Considera el triángulo rectángulo ABC de la siguiente figura y calcula todas sus razones trigonométricas. Posteriormente, determina el valor de:



a. $\cos(\alpha)+\sec(\beta)-tg(\beta)$ b. $sen^2(\alpha)+\cos^2(\beta)$

c. $(1+tg(\alpha))(1-ctg(\alpha))$ d. $sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)$

Sección 2. Identidades trigonométricas

Identidades elementales de las razones trigonométricas

1) $\csc\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

2) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

3) $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

4) $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

5) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

Identidades trigonométricas

1) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

3) $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$

4) $\csc^2\alpha = \cot^2\alpha + 1$

5) $\sec^2\alpha = \tan^2\alpha + 1$

Identidades de adición y sustracción de ángulos

1) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

2) $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

3) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

4) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

5) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

6) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

Identidades para ángulos dobles

1) $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

2) $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

3) $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

Identidades para ángulos medios

1. $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

2. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

3. $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

4. $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$

5. $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

Registra las identidades trigonométricas que no conocías:

A continuación, y utilizando como apoyo los contenidos vistos en clases más la bibliografía recomendada en el programa del curso, demuestre las siguientes identidades trigonométricas.

1. $\sin(\alpha)\cdot\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot\dfrac{1}{\cos(\alpha)}+1=\sec^2(\alpha)$

2. $\dfrac{1+\cot(\alpha)}{1+\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}=\cot(\alpha)$

3. $\tan(\beta)-\cot(\beta)=\dfrac{1-2\cos^2(\beta)}{\sin(\beta)\cos(\beta)}$

4. $\dfrac{\sin(\delta)+\cos(\delta)}{\sin(\delta)}=1+\dfrac{1}{\tan(\delta)}$

5. $\tan^2(\theta)+\cot(\theta)=\cot(\theta)\sec^2(\theta)$

6. $\dfrac{2\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-\tan(\alpha)\sin(\alpha)}=\tan(2\alpha)$

7. $\dfrac{\sec(\gamma)}{\tan(\gamma)+\cot(\gamma)}=\sin(\gamma)$

8. $\dfrac{\tan(\delta)+\cot(\delta)}{\tan(\delta)-\cot(\delta)}=\dfrac{\sec^2(\delta)}{\tan^2(\delta)-1}$

9. $\dfrac{\sin(\alpha)}{\csc(\alpha)}+\dfrac{\cos(\alpha)}{\sec(\alpha)}=1$

10. $\dfrac{\csc(\beta)}{\tan(\beta)+\cot(\beta)}=\cos(\beta)$

11. $\dfrac{2\sin(3\theta)\cos(2\theta)+\sin(3\theta)}{2\cos(3\theta)\cos(2\theta)+\cos(3\theta)}=\tan(3\theta)$

12. $\dfrac{\cot(\phi)-\tan(\phi)}{\cot(\phi)+\tan(\phi)}=1-2\sin^2(\phi)$

13. $\dfrac{1+\cos(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}-\dfrac{\sec(\alpha)-1}{1+\sec(\alpha)}-4\cot^2(\alpha)=\dfrac{4}{1+\sec(\alpha)}$

14. $\cos(2\sigma) = \cos^2(\sigma) - \sin^2(\sigma)$

15. $\cos(3\varepsilon) = 4\cos^2(\varepsilon) - 3\cos(\varepsilon)$

16. $\sin(3\rho) = 3\sin(\rho) - 4\sin^2(\rho)$

17. $\cos(2\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

18. $\sec(2\alpha) = \dfrac{1}{2\cos^2(\alpha) - 1}$

19. $\cos(4\beta) = 1 - 8\sin^2(\beta)\cos^2(\beta)$

20. $[\sin(\theta) + \cos(\theta)]^2 = 1 + \sin(2\theta)$

21. $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} = \tan(\alpha) + \tan(\beta)$

22. $\dfrac{\sin(5x) - \sin(3x)}{\cos(5x) + \cos(3x)} = \tan(x)$

Registra las identidades trigonométricas que no conocías:

Sección 3. Funciones sinusoidales y ecuaciones trigonométricas

ÍTEM I. Para cada una de las siguientes funciones:

- Determina **formalmente** el dominio y recorrido.
- Ilustra la gráfica, utilizando los conocimientos teóricos adquiridos y las estrategias y metodologías trabajadas en clases.
- Cada función se grafica de manera individual, exceptuando los casos donde se explicita que las gráficas se deben ilustrar de manera conjunta.
- Interpreta la(s) gráfica(s), de manera que la información extraída permita comprender cabalmente el modelo que representa la curva. En los casos donde el gráfico esté representado por dos funciones, interpreta las curvas de manera integrada.
- Demuestra matemáticamente si la función ilustrada es par o impar. En los casos donde el gráfico esté representado por dos funciones, no se requiere análisis de paridad.

Gráficos individuales	$f(x)=-\cos(x)$	$f(x)=1-\cos(x)$	$f(x)=-3\cos(2x)$
	$f(x)=5\cdot sen(x)+2$	$f(x)=-sen(2x)$	$f(x)=2\cdot\cos(x)+3$
	$f(x)=sen\left(\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{1}{2}$	$f(x)=\left\lvert sen\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert$	$f(x)=2-sen\left(\dfrac{x}{2}\right)$
	$f(x)=-\cos(2x)+2$	$f(x)=3-sen(2x)+2$	$f(x)=\cos(2x)$
	$f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$	$f(x)=-\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$	$f(x)=-4sen\left(\dfrac{x}{2}\right)$
	$f(x)=-\cos(2x)$	$f(x)=-3\cos(2x)$	$f(x)=\cos(2x)+4$
Gráficos superpuestos	$f(x)=sen(2x)$ $g(x)=sen(x/2)$	$f(x)=-\cos(2x)$ $g(x)=\cos(x)$	$f(x)=sen(2x)$ $g(x)=\cos(x)$

ÍTEM II. Para cada una de las siguientes funciones:

$f(x)=-\cos(3x)$	$f(x)=\cos(5x)$	$f(x)=3\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$
$f(x)=5\cdot sen(4x)$	$f(x)=-sen(3x)$	$f(x)=2\cdot sen\left(\dfrac{x}{4}\right)+1$

- Determina **formalmente** el dominio y recorrido e ilustra la gráfica, $\forall x\in[-2\pi,2\pi]$; utilizando los conocimientos teóricos adquiridos y las estrategias y metodologías trabajadas en clases.
- Cada función se grafica de manera individual, exceptuando los casos donde se explicita que las gráficas se deben ilustrar de manera conjunta.
- Expresa la(s) coordenada(s) del/los máximo(s) y/o mínimo(s), según corresponda.
- Demuestra matemáticamente si la función ilustrada es **par o impar**. En los casos donde el gráfico esté representado por dos funciones, no se requiere análisis de paridad.
- Para cada función determine algebraicamente su periodo (T).

ÍTEM IV. Ejecuta un plan de acción que te permita resolver las siguientes ecuaciones:

a. $sen(x) = \cos(x)$

b. $-\cos(2x) = -\cos(x) - 1$

c. $sen\left(\frac{x}{2}\right) = \cos(x)$

d. $-sen(x) = -\cos(x)$

e. $sen\left(\frac{x}{2}\right) = \cos(x)$

ÍTEM V. Determina el valor de x , $\forall x \in [0,360]$, que satisface las siguientes igualdades:

a. $2sen(x) = \sqrt{3}$

b. $2sen(x) - 1 = 0$

c. $\frac{sen^2(x)}{3} = cos^2(x)$

d. $tg(x) + cotg(x) = 2\sec(x)$

e. $(tg(x) - 1)(2sen(x) + 1) = 0$

f. $3tg(x) = 4sen(x)$

g. $\sqrt{2}tg(x) - 2sen(x) = 0$

h. $sen(x) + \sqrt{2} = -sen(x)$

i. $3tg^2(x) - 1 = 0$

j. $cotg(x) \cdot cos^2(x) = 2cotg(x)$

k. $2sen^2(x) = sen(x) + 1$

l. $2\cos(3x) - 1 = 0$

m. $3tg\left(\frac{x}{2}\right) + 3 = 0$

ÍTEM VI. Determina las soluciones asociadas a las siguientes ecuaciones e interprétalas gráficamente en su respectivo dominio:

a. $sen(2x) = -\cos(x)\,;\ \forall x \in \left]-\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right]$

b. $2sen(2x) + 1 = -\cos(2x)\,;\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$

c. $1 + \frac{sen(2x)}{2} = 1 + cos(x)\,;\ \forall x \in \left[-2\pi, \frac{7\pi}{4}\right]$