Álgebra Intermedia

Séptima edición

INCLUYE CD-ROM

PEARSON
Prentice Hall®

Allen R. Angel

¡Herramientas para su éxito!

MyMathLab

MyMathLab es una serie de cursos de textos específicos, muy fácil de personalizar, para libros de texto de Pearson Educación en matemáticas y estadística. Potenciado por *CourseCompass*™ (un entorno de enseñanza-aprendizaje en línea de Pearson Educación) y por MathXL® (nuestro sistema de tareas, tutorial y evaluación), *MyMathLab* le proporciona las herramientas que necesita para liberar todo o parte de su curso en línea, si sus estudiantes están en un laboratorio o trabajando desde su casa. *MyMathLab* proporciona un conjunto rico y flexible de materiales para el curso, ejercicios de respuesta abierta, generados de forma algorítmicamente para una práctica y dominio ilimitados. Los estudiantes también pueden utilizar herramientas en línea, tales como video clases, animaciones y un libro de texto en multimedia, para mejorar de manera independiente su comprensión y desempeño. Los profesores pueden utilizar las tareas de *MyMathLab* y los coordinadores de exámenes para seleccionar y asignar ejercicios en línea que estén correlacionados directamente con el libro de texto, y también pueden crear y asignar sus propios ejercicios en línea e importar exámenes de *TestGen* para hacerlos más flexibles. El registro de calificaciones en línea de *MyMathLab*, —diseñado específicamente para matemáticas y estadística— hace un seguimiento automático de las tareas y resultados de los exámenes de los estudiantes, incluso le da al instructor un control sobre cómo calcular las calificaciones finales. Los profesores también pueden agregar calificaciones de forma manual al registro de calificaciones. *MyMathLab* está disponible para quienes adopten el libro. Para más información, visite nuestro sitio web www.mymathlab.com o contacte a su representante de Pearson Educación. (*MyMathLab* debe ser configurado y asignado por su profesor).

MathXL®

MathXL® es un poderoso sistema de tareas, tutorial y evaluación que forma parte de los libros de texto de Prentice Hall en matemáticas y estadística. Con *MathXL*®, los profesores pueden crear, editar y asignar tareas y exámenes en línea, utilizando ejercicios generados de forma algorítmica en el nivel del objetivo para el libro de texto. También pueden crear y asignar sus propios ejercicios en línea e importar exámenes de *TestGen* para darles flexibilidad. Todos los trabajos y tareas del estudiante tienen un seguimiento en el registro de calificaciones en línea de *MathXL*®. Los estudiantes pueden resolver los exámenes de capítulo en *MathXL*® y recibir planes de estudio personalizados con base en los resultados. El plan de estudio diagnostica debilidades y enlaza a los alumnos directo con los ejercicios tutoriales para los objetivos que necesitan estudiar y resolver nuevamente. Los estudiantes también pueden tener acceso a animaciones y videoclips directamente de ejercicios seleccionados. *MathXL*® está disponible para quienes adopten la obra como libro de texto. Para más información, visite nuestro sitio Web en www.mathxl.com, o contacte a su representante de Pearson Educación. (*MathXL*® debe ser configurado y asignado por su profesor).

ÁLGEBRA INTERMEDIA

ÁLGEBRA INTERMEDIA

Séptima edición

Allen R. Angel
Monroe Community College

Con la asistencia de
Donna R. Petrie
Monroe Community College

TRADUCCIÓN
Víctor Hugo Ibarra Mercado
Escuela de Actuaría
Universidad Anáhuac, México

REVISIÓN TÉCNICA
Juan de Santiago Castillo
Director del Departamento de Ciencias y Matemáticas
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus San Luis Potosí

William Ricardo Chávez G.
Licenciado en Matemáticas e Ingeniero en Sistemas
Coordinador de Matemáticas
Clermont School
Bogotá, Colombia

PEARSON Educación®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

ANGEL, ALLEN R.

Álgebra intermedia.
Séptima edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2008

ISBN: 978-970-26-1223-0

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 816

ISBN 9780132383578

Edición en español
Editor: Enrique Quintanar Duarte
e-mail: enrique.quintanar@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de producción: Gustavo Rivas Romero

Edición en inglés
Executive Editor: *Paul Murphy*
Project Manager: *Dawn Nuttall*
Editor in Chief: *Christine Hoag*
Production Editor: *Lynn Savino Wendel*
Executive Managing Editor: *Kathleen Schiaparelli*
Senior Managing Editor: *Linda Mihatov Behrens*
Media Project Manager, Developmental Math: *Audra J. Walsh*
Media Production Editor: *Jessica Barna*
Assistant Managing Editor, Science and Math Supplements: *Karen Bosch*
Manufacturing Buyer: *Maura Zaldivar*
Manufacturing Manager: *Alexis Heydt-Long*
Director of Marketing: *Patrice Jones*
Senior Marketing Manager: *Kate Valentine*
Marketing Assistant: *Jennifer de Leeuwerk*
Editorial Assistant/Print Supplements Editor: *Abigail Rethore*
Editor in Chief, Development: *Carol Trueheart*
Art Director: *John Christiana*
Interior Designer: *Studio Indigo*
Cover Designer: *Michael J. Fruhbeis*
Art Editor: *Thomas Benfatti*
Creative Director: *Juan R. López*
Director of Creative Services: *Paul Belfanti*
Director, Image Resource Center: *Melinda Patelli*
Manager, Rights and Permissions: *Zina Arabia*
Manager, Visual Research: *Beth Brenzel*
Image Permission Coordinator: *Craig A. Jones*
Photo Researcher: *Teri Stratford*
Compositor: *Prepare, Inc.*
Art Studios: *Precision Graphics and Laserwords*

SÉPTIMA EDICIÓN, 2008

D.R. © 2008 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5º piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.

PEARSON Educación ®

ISBN: 978-970-26-1223-0

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 11 10 09 08

Para mi madre,
Sylvia Angel-Baumgarten

y a la memoria de mi padre,
Isaac Angel

Contenido

4 Sistemas de ecuaciones y desigualdades 232

5 Polinomios y funciones polinomiales 297

6 Expresiones racionales y ecuaciones 381

7 Raíces, radicales y números complejos 448

8 Funciones cuadráticas 517

9 Funciones exponenciales y logarítmicas 591

Prefacio

Este libro lo escribí pensando en estudiantes de bachillerato con conocimientos de un primer curso de álgebra elemental. Mi meta principal fue que se pudiera leer, entender y disfrutar; para ello utilicé oraciones cortas, explicaciones claras y muchos ejemplos resueltos a detalle. Traté de hacer que el libro fuera relevante para quienes cursan bachillerato, utilizando las aplicaciones prácticas del álgebra a lo largo de todo el libro.

Características del texto

Formato a dos colores Los colores se utilizan en forma pedagógica de la manera siguiente:

- Las definiciones y procedimientos más importantes se resaltan en recuadros de color.
- Con el color adicional se hace que otros conceptos importantes, además de las definiciones y procedimientos, destaquen de manera visual.
- El formato a dos colores que se ha utilizado permite que el alumno identifique con facilidad determinadas características.
- Con este formato, el texto se hace más atractivo y menos tedioso.

Legibilidad Una de las características más importantes del texto es su legibilidad. El libro es muy fácil de leer, incluso para personas que no son muy hábiles en la lectura, pues se utilizan oraciones breves y claras, así como un lenguaje fácil de entender.

Precisión La precisión en un texto de matemáticas es esencial; para garantizarla, matemáticos de todo el país (EUA) leyeron las páginas con sumo cuidado para detectar errores tipográficos y comprobaron todas las respuestas.

Conexiones Muchos de nuestros alumnos no dominan del todo los nuevos conceptos la primera vez que se les presentan. En este texto le pedimos que establezcan relaciones; esto es, presentamos un concepto, luego lo volvemos a presentar brevemente y trabajamos ejemplos a partir de dicho concepto. Los conceptos importantes suelen utilizarse en muchas secciones, de modo que se hace un recordatorio de dónde se usó, o bien indicamos en dónde se utilizará de nuevo. Esto también ayuda a destacar su importancia. Además, esos conceptos se refuerzan a lo largo del libro en los Ejercicios de repaso acumulativo y en los Exámenes de repaso acumulativo.

Aplicaciones de inicio de capítulo Cada capítulo inicia con una aplicación de la vida real relacionada con el material que se abordará en él. Para cuando los alumnos terminen el texto del capítulo, deben tener los elementos para resolver el problema.

Objetivos de este capítulo Esta característica proporciona a los alumnos un adelanto de lo que tratará el capítulo y también indica en qué otros capítulos se utilizará el material. Este material ayuda a ver las relaciones entre los diversos temas del libro y su conexión con situaciones de la vida real.

Uso de iconos Al inicio de cada conjunto de ejercicios se ilustran los iconos MathXL®, MathXL y de MyMathLab, MyMathLab. En breve se explicará a qué se refieren estos iconos.

Objetivos numerados de la sección Cada sección inicia con una lista de habilidades que el estudiante debe aprender en esa sección. Los objetivos están numerados y se repiten en la parte correspondiente de la sección con un número como éste **1**.

Resolución de problemas En la sección 2.2 se analiza el procedimiento de George Polya de cinco pasos para la resolución de problemas. A lo largo del libro se hace énfasis en la resolución de problemas y en el procedimiento de Polya.

Aplicaciones prácticas En todo el texto se pone especial atención en las aplicaciones prácticas del álgebra. Los estudiantes necesitan aprender a traducir problemas de aplicación a símbolos algebraicos. El método de resolución de problemas utilizado en este libro les da una gran práctica para plantear y resolver problemas de aplicación. Incluso, el uso de aplicaciones prácticas los motiva.

Ejemplos resueltos de manera detallada Se han resuelto muchos ejemplos paso a paso, en forma detallada. Los pasos importantes se resaltan en color y no se omite ninguno hasta que el alumno ha visto suficientes ejemplos similares.

Ahora resuelva el ejercicio En cada sección se pide a los alumnos que resuelvan un ejercicio y al mismo tiempo se les dan los ejemplos en el texto. Estas secciones de Ahora resuelva el ejercicio hacen que los alumnos sean sujetos *activos*, no pasivos, de modo que refuercen los conceptos. En estos ejercicios tienen la oportunidad de aplicar de forma inmediata lo que han aprendido. Después de cada ejemplo se da la indicación ▸ **Ahora resuelva el ejercicio 27,** y en los conjuntos de ejercicios se resaltan en rojo, como 27.

Práctica de habilidades Muchas personas que toman este curso tienen malos hábitos de estudio en matemáticas. La sección 1.1, la primera del texto, analiza los hábitos de estudio necesarios para tener un máximo aprovechamiento en matemáticas. Esta sección será de gran utilidad para sus alumnos, y podrá ayudarlos a lograr el éxito buscado.

Sugerencias útiles Los recuadros de Sugerencia útil ofrecen consejos para la resolución de problemas y otros temas diversos. Se colocan de una manera especial para asegurar que los estudiantes los lean.

Sugerencia útil-Consejo de estudio Los recuadros Sugerencia útil-Consejo de estudio ofrecen información valiosa sobre asuntos relacionados con el estudio y aprendizaje del material que se presenta.

Cómo evitar errores comunes Se ilustran los errores que suelen cometer los estudiantes. Se explican las razones por las cuales ciertos procedimientos son incorrectos y se ilustra la forma correcta de resolver el problema. Estos recuadros evitan que sus alumnos cometan aquellos errores que vemos con mucha frecuencia.

Cómo usar su calculadora Estos recuadros se encuentran en lugares estratégicos del texto, refuerzan los temas algebraicos que se presentan en la sección y proporcionan información pertinente sobre el uso de una calculadora científica para resolver problemas algebraicos.

Cómo usar su calculadora graficadora Estos recuadros se ubican en puntos específicos del texto para reforzar los temas algebraicos vistos y en ocasiones ofrecen métodos alternativos para resolver problemas. Este libro está diseñado para dar al profesor la opción de utilizar en sus cursos una calculadora graficadora. Algunos de estos recuadros contienen ejercicios para calculadoras graficadoras cuyas soluciones aparecen en la sección de respuestas del libro. Las ilustraciones que se muestran son de la calculadora Texas Instruments 84 Plus. Estos recuadros se escribieron suponiendo que el alumno no tiene experiencia en el uso de calculadoras graficadoras.

Conjuntos de ejercicios

Los conjuntos de ejercicios se dividen en tres categorías principales: Ejercicios de concepto/redacción, Práctica de habilidades y Resolución de problemas. Muchos conjuntos de ejercicios también presentan Retos y/o Actividades en grupo. La dificultad de cada conjunto de ejercicios está graduada: los primeros ayudan a desarrollar la confianza del estudiante para llevarlo poco a poco a problemas más difíciles. En cada sección aparece una cantidad suficiente y variada de ejemplos para que el alumno resuelva con éxito los más difíciles. El número de ejercicios de cada sección es más que amplio para las tareas y todavía quedan para la práctica.

Ejercicios de concepto/redacción La mayoría de los conjuntos de ejercicios incluyen un grupo para que el alumno escriba respuestas empleando palabras. Este tipo de ejercicios mejora la comprensión y entendimiento del material. Muchos de ellos implican la resolución de problemas y ayudan a desarrollar mejores habilidades de razonamiento y de pensamiento crítico. Los problemas en que se pide redactar una respuesta se indican mediante el símbolo .

Ejercicios de resolución de problemas Estos ejercicios ayudan al estudiante a capacitarse en la resolución y análisis de problemas. Gran parte de ellos implica aplicaciones del álgebra en la vida real. Es muy importante que los alumnos sean capaces de aplicar a situaciones de la vida real lo que aprendieron. Muchos de los problemas de estas secciones les ayudarán a lograr este objetivo.

Problemas de reto Esta sección, que forma parte de muchos conjuntos de ejercicios, proporciona una amplia variedad de problemas. Muchos de ellos se escribieron para estimular la reflexión de los alumnos. Otros más proporcionan aplicaciones adicionales de álgebra o presentan material de secciones que aún no se abordan, de modo que los estudiantes puedan investigar y aprender por su cuenta el material antes de abordarlo en clase. Otros representan un reto mayor que los del conjunto de ejercicios normales.

Ejercicios en CD Estos ejercicios, marcados con el icono de un CD, , están resueltos de forma detallada (en inglés) en el CD que acompaña al libro.

Ejercicios de repaso acumulativo Todos los conjuntos de ejercicios (excepto los dos primeros) contienen preguntas de secciones y capítulos anteriores. Estos ejercicios de repaso acumulativo refuerzan los temas estudiados y ayudan a retener el material visto mientras aprenden el nuevo. Un punto a destacar es que los ejercicios de repaso acumulativo indican, por medio de corchetes, como [3.4], la sección donde se cubrió el material.

Actividades en grupo Varios conjuntos de ejercicios tienen actividades en equipo que conducen a interesantes discusiones. Muchos estudiantes aprenden mejor en un ambiente cooperativo, y estos ejercicios los harán hablar de matemáticas con otros compañeros.

Examen de mitad de capítulo Hacia la mitad de cada capítulo se encuentra una nueva sección, titulada Examen de mitad de capítulo. Los alumnos deben resolver este examen para asegurarse que han entendido el material que se ha presentado hasta ese momento. En las respuestas para el estudiante se utilizan corchetes como éste [2.3], para indicar la sección en donde se presentó el material por primera vez.

Resumen del capítulo Al final de cada capítulo se muestra un resumen, en un nuevo y amplio formato, el cual incluye datos importantes y ejemplos que los ilustran.

Ejercicios de repaso del capítulo Para finalizar, hay ejercicios de repaso que incluyen todos los tipos de ejercicios que se presentaron en el capítulo. Dichos ejercicios están codificados mediante el uso de colores y corchetes, como [1.5], que remiten a las secciones en las cuales se hizo la primera presentación del material.

Examen de práctica del capítulo El examen final del capítulo permite a los alumnos ver qué tan bien están preparados para el examen real en clase. La sección en donde se aborda por primera vez el material se indica en corchetes en las respuestas para el estudiante.

Exámenes de repaso acumulativo Estos exámenes, que aparecen al final de cada capítulo, excepto del primero, prueban los conocimientos, desde el inicio del libro hasta ese punto. Pueden utilizar estos exámenes tanto para repasar como para preparar el examen final. Al igual que los Ejercicios de repaso acumulativo, sirven para reforzar los temas que ya se abordaron. La sección de respuestas muestra, entre corchetes, la sección en la que se estudió el material.

Respuestas Para los conjuntos de ejercicios se proporcionan *respuestas a problemas con número impar.* Para los ejercicios de las secciones Cómo utilizar su calculadora graficadora, Ejercicios de repaso acumulativo, Exámenes de mitad del capítulo, Ejercicios de repaso del capítulo, Exámenes de práctica del capítulo y Exámenes de repaso acumulativo, se proporcionan *todas las respuestas*. Para los ejercicios de Actividades en grupo no se dan respuestas, pues queremos que los estudiantes lleguen a un acuerdo entre sí respecto de las soluciones.

Estándares nacionales (de Estados Unidos)

En esta edición se incorporaron las recomendaciones del *Currículo y evaluaciones estándar para escuelas de matemáticas*, preparadas por la NCTM (Consejo nacional de maestros de matemáticas) y *Beyond Crossroads: Implementing Mathematicas Standards in the First Two Years of College*, hecho por la AMATYC (American Mathematical Association of Two Year Colleges).

Requisitos

El requisito para este curso es un conocimiento de álgebra elemental. Aunque algunos temas de álgebra elemental se revisan brevemente en el texto, los alumnos deben tener ya una comprensión de álgebra elemental antes de abordar este curso.

Modos de enseñanza

El formato y legibilidad de este libro se presta para muchos modos de enseñanza. El constante refuerzo de los conceptos tendrá como resultado una mayor comprensión y retención del material por parte de sus alumnos.

Las características del texto y la gran variedad de complementos disponibles hacen que este texto sea adecuado para varios tipos de enseñanza, entre ellos:

- clase
- aprendizaje a distancia
- autoaprendizaje
- clases especiales
- estudio cooperativo o en grupo
- laboratorio de aprendizaje

Cambios en la séptima edición

Cuando escribí la séptima edición, tomé en cuenta muchas cartas y revisiones que tuve de alumnos y maestros. Quiero agradecer a todas las personas que me hicieron sugerencias para mejorar esta edición. También agradezco a muchos profesores y estudiantes que escribieron para informarme de cómo disfrutaron, apreciaron y aprendieron del texto. Algunos de los cambios realizados en la séptima edición del libro incluyen:

- Un CD de videos con *Exámenes de preparación para cada capítulo*, que se incluye con el libro. Este CD (en inglés) muestra la solución completa para cada ejercicio en el Examen de práctica del capítulo para cada uno de los capítulos. Es un auxiliar más para mejorar el aprendizaje y comprensión de los estudiantes.

- *Una gran cantidad* de ejemplos en el libro, tienen ahora la indicación **Ahora resuelva el ejercicio...**. Se anima a los alumnos a resolver los ejercicios inmediatamente después de terminado de estudiar el ejemplo respectivo. Esto les da una oportunidad de reforzar los conceptos o temas que se cubren en el ejemplo.

- Se ha agregado una nueva sección denominada *Examen de mitad del capítulo* hacia la mitad de cada uno de ellos. Estos exámenes están diseñados para ver qué tan bien han cubierto los temas en la primera parte del texto. Si se equivoca al contestar una pregunta, debe revisar el material correspondiente. La sección en donde se presentó el material se indica entre corchetes después de la respuesta al final del libro.

- Se han agregado más recuadros *Sugerencias útiles* y *Cómo evitar errores comunes* en donde se consideró adecuado.

- Se rescribió cada *Resumen* de capítulo para incluir ejemplos de hechos concretos importantes estudiados en él. La columna de la izquierda muestra los hechos o conceptos y la columna a la derecha ofrece un ejemplo de ellos. Este nuevo resumen debe ser un auxiliar para los estudiantes al momento de revisar el capítulo y preparar un examen.

- A lo largo del libro se han agregado nuevos ejemplos y ejercicios.
    - Muchos conjuntos de ejercicios se fortalecieron para asegurar que todo ejemplo del libro tenga ahora ejercicios que correspondan a ese ejemplo dado.
    - En algunas secciones se agregaron problemas más difíciles (al final), o más sencillos (al inicio) del conjunto de ejercicios, de modo que haya un aumento continuo en el nivel de dificultad de éstos.
    - Se hizo el máximo esfuerzo para incluir aplicaciones que sean de interés para los estudiantes.
    - En los ejemplos y ejercicios se utilizaron con más frecuencia variables distintas de x y y.
- *Objetivos de este capítulo* reemplazó a la sección *Avance de la lección*. La información proporciona a los alumnos un panorama de lo que verán y lo que se espera aprendan.
- Los recuadros *Cómo utilizar su calculadora graficadora* muestran ahora la secuencia de teclas para la calculadora TI-84 Plus. Observe que esa secuencia de teclas aplica también para la calculadora TI-83 Plus.
- Para ahorrar espacio, se eliminó la sección *Matemáticas en acción*.
- Se agregaron más fotografías y dibujos para hacer más comprensible e interesante el material.
- Se utilizó un segundo color para hacer el texto más atractivo y fácil de leer.

Complementos de la séptima edición

PARA LOS PROFESORES

Complementos en línea

MyMathLab ¡NUEVO! Versión de MyMathLab para el profesor

MyMathLab es una serie de cursos de textos específicos, muy fácil de personalizar para libros de texto de matemáticas y estadística editados por Pearson Educación. Potenciado por CourseCompass™ (un ambiente de enseñanza-aprendizaje en línea de Pearson Educación) y por MathXL® (nuestro sistema de tareas, tutorial y de evaluación), MyMathLab le proporciona las herramientas necesarias para liberar todo o parte de su curso, en línea, si sus alumnos están en un laboratorio o trabajando desde su casa.

MathXL ¡NUEVO! Versión de MathXL, para el profesor

MathXL® es un poderoso sistema en línea de tareas, tutoriales y evaluación que acompaña a los libros de texto de matemáticas y estadística de Pearson Educación. Con MathXL, los profesores pueden crear, editar y asignar tareas en línea, al igual que exámenes, mediante ejercicios generados de manera algorítmica, correlacionados con el nivel del objetivo para el libro de texto.

PARA LOS ESTUDIANTES

Complementos en línea

¡NUEVO! Chapter Test Prep Video CD

Proporciona soluciones paso a paso para cada problema en cada uno de los *Exámenes de práctica del capítulo* del libro de texto. Se incluye con cada ejemplar nuevo del libro, búsquelo en las páginas finales del libro. Cabe señalar que todo el material se encuentra en idioma inglés.

Sitio web InterAct Math Tutorial: *www.interactmath.com*

¡Obtenga práctica y ayuda en línea! Este sitio Web tutorial interactivo proporciona ejercicios de práctica generados de forma algorítmica, los cuales están en relación directa con los ejercicios del libro de texto. Los estudiantes pueden reintentar un ejercicio tantas veces como lo deseen, con nuevos valores en cada ocasión, para que adquieran una práctica ilimitada y un gran dominio. Cada ejercicio viene con una guía interactiva que proporciona retroalimentación para respuestas incorrectas, e incluso pueden ver un problema de muestra totalmente resuelto que los lleva paso a paso por un ejercicio semejante al que están resolviendo.

Agradecimientos

Escribir un libro de texto es un proyecto grande que lleva tiempo. Muchas personas merecen que les dé las gracias por el aliento y ayuda que me proporcionaron para la realización de este proyecto. De manera muy importante, mi agradecimiento especial va dirigido a mi esposa Kathy y mis hijos, Robert y Steven. Sin su constante aliento y comprensión, este proyecto no hubiese podido ser una realidad. También quiero agradecer su apoyo a mi nuera, Kathy.

Agradezco a Donna Petrie del Monroe Community Collage por sus aportaciones y escrupulosa verificación del manuscrito.

Quiero dar las gracias a Rafiq Ladhani y a su equipo editorial por la precisión en la revisión de las páginas y la comprobación de todas las respuestas.

También agradezco al personal de Prentice Hall, incluyendo a Paul Murphy, Editor ejecutivo; Dawn Nuttall, Gerente de proyecto; Thomas Benfatti, Editor de arte; John Christiana, Director de arte, y a Lynn Savino Wendel, Editora de producción, por sus valiosas sugerencias y esmero en este proyecto.

Agradezco a todas las personas que trabajaron conmigo en la impresión de los complementos de este libro.

- Manuales de soluciones para el estudiante y para el profesor:
  Randy Gallather y Kevin Bodden, Lewis and Clark Community College, IL.
- Manual de recursos para el profesor:
  Randy Gallaher y Kevin Bodden, Lewis and Clark Community College, IL.

Me gustaría agradecer a los revisores siguientes de las dos ediciones anteriores por sus valiosos comentarios y sugerencias:

Laura Adkins, *Missouri Southern State College, MO*
Arthur Altshiller, *Los Angeles Valley College, CA*
Jacob Amidon, *Cayuga Community College, NY*
Sheila Anderson, *Housatonic Community College, CT*
Peter Arvanites, *State University of New York–Rockland Community College, NY*
Jannette Avery, *Monroe Community College, NY*
Mary Lou Baker, *Columbia State Community College, TN*
Jon Becker, *Indiana University, IN*
Paul Boisvert, *Oakton Community College, IL*
Beverly Broomell, *Suffolk County Community College, NY*
Lavon Burton, *Abilene Christian University, TX*
Marc Campbell, *Daytona Beach Community College, FL*
Mitzi Chaffer, *Central Michigan University, MI*
Terry Cheng, *Irvine Valley College, CA*
Ted Corley, *Arizona State University and Glendale Community College, AZ*
Charles Curtis, *Missouri Southern State College, MO*
Joseph de Guzman, *Riverside City College (Norco), CA*
Marla Dresch Butler, *Gavilan Community College, CA*
Gary Egan, *Monroe Community College, NY*
Mark W. Ernsthausen, *Monroe Community College, NY*
Elizabeth Farber, *Bucks County Community College, PA*
Warrene Ferry, *Jones County Junior College, MS*
Christine Fogal, *Monroe Community College, NY*
Gary Glaze, *Spokane Falls Community College, WA*
James Griffiths, *San Jacinto College, TX*
Kathy Gross, *Cayuga Community College, NY*
Abdollah Hajikandi, *State University of New York–Buffalo, NY*
Cynthia Harrison, *Baton Rouge Community College, LA*
Mary Beth Headlee, *Manatee Community College, FL*
Kelly Jahns, *Spokane Community College, WA*
Judy Kasabian, *El Camino College, CA*
Maryanne Kirkpatrick, *Laramie County Community College, WY*
Marcia Kleinz, *Atlantic Cape Community College, NJ*
Shannon Lavey, *Cayuga Community College, NY*
Kimberley A. Martello, *Monroe Community College, NY*
Shywanda Moore, *Meridian Community College, MS*
Catherine Moushon, *Elgin Community College, IL*
Kathy Nickell, *College of DuPage, IL*
Shelle Patterson, *Moberly Area Community College, MO*
Patricia Pifko, *Housatonic Community College, CT*
Dennis Reissig, *Suffolk County Community College, NY*
Linda Retterath, *Mission College, CA*
Dale Rohm, *University of Wisconsin–Stevens Point, WI*
Troy Rux, *Spokane Falls Community College, WA*
Hassan Saffari, *Prestonburg Community College, KY*
Rick Silvey, *St. Mary College, KS*
Julia Simms, *Southern Illinois University–Edwardsville, IL*
Linda Smoke, *Central Michigan University, MI*
Jed Soifer, *Atlantic Cape Community College, NJ*
Richard C. Stewart, *Monroe Community College, NY*
Elizabeth Suco, *Miami–Dade Community College, FL*
Harold Tanner, *Orangeburg–Calhoun Technological College, SC*
Dale Thielker, *Ranken Technological College, MO*
Ken Wagman, *Gavilan Community College, CA*
Patrick Ward, *Illinois Central College, IL*
Robert E. White, *Allan Hancock College, CA*
Cindy Wilson, *Henderson State University, AZ*

Al estudiante

Álgebra es un curso que no puede aprenderse por observación: debe ser un participante activo. Debe leer el texto, poner atención en clase y, de manera muy importante, trabajar con los ejercicios. Cuantos más ejercicios resuelva, mejor.

El libro se escribió teniéndole a usted en mente. Se usaron oraciones breves y claras, y se dan muchos ejemplos para ilustrar puntos específicos. El texto destaca aplicaciones útiles del álgebra. Esperamos que conforme avance en el curso, se dé cuenta que el álgebra no es sólo otro curso de matemáticas que requiere tomar, sino un curso que le ofrece una riqueza de información y aplicaciones muy útiles.

Este libro utiliza un segundo color para resaltar información, procedimientos, definiciones y fórmulas, relevantes.

Los recuadros titulados **Sugerencia útil** deben estudiarse con mucho cuidado pues dan énfasis a la información importante. Los recuadros **Cómo evitar errores comunes** también deben estudiarse con mucha atención. En ellos se señalan errores que los alumnos suelen cometer, y proporcionan los procedimientos correctos para resolver estos problemas.

Después de cada ejemplo verá una referencia como ésta ▸ **Ahora resuelva el ejercicio 27**. El ejercicio que se indica es muy similar al ejemplo dado en el libro. Es conveniente que trate de resolverlo después que haya leído el ejemplo para asegurarse que en realidad lo entendió. En el conjunto de ejercicios, éstos aparecen referenciados en color rojo, como éste: 27.

En los conjuntos de ejercicios, los marcados con un icono de lápiz, indican ejercicios de redacción; —es decir, requieren una respuesta escrita. Los marcados con un CD, , están resueltos en el CD que acompaña al libro (recuerde que el material del CD se encuentra en inglés).

Pida a su profesor al inicio del curso que le explique los lineamientos sobre cuándo utilizar la calculadora. Ponga atención particular a los recuadros **Cómo utilizar su calculadora**. También debe leer los recuadros **Cómo utilizar su calculadora graficadora** incluso si no la utiliza en clase. Quizá descubra que la información presentada le ayuda a tener una mejor comprensión de los conceptos algebraicos.

Otras preguntas que debe hacer a su profesor al inicio del curso son: ¿Cuáles son los complementos disponibles? ¿Dónde puede obtener asesoría cuando el profesor no esté disponible? Los complementos que pueden estar disponibles incluyen: el Chapter Test Prep Video CD (incluido con el libro), MathXL® ; MyMathLab ; y el sitio Web InterAct Math Tutorial.

Quizá desee formar un grupo de estudio con otros alumnos de su clase. Muchos estudiantes descubren que el trabajo en equipo les proporciona una excelente forma de aprender. Al analizar y explicar los conceptos y ejercicios a otros, usted refuerza su comprensión. Una vez que en su grupo se determinen las pautas y procedimientos, asegúrese de cumplirlos.

Una de las primeras cosas que debe hacer es leer la sección 1.1, Habilidades de estudio para tener éxito en matemáticas. Lea esta sección pausada y cuidadosamente y ponga especial atención a los consejos e información que se da. De vez en cuando regrese a esta sección, que podría ser la más importante del libro. Lea con cuidado el material cuando haga su tarea y asista a clase.

Al final de todos los Conjuntos de ejercicios (excepto los dos primeros) aparece la sección **Ejercicios de repaso acumulativo**. Debe resolver estos problemas de forma regular, incluso si no se le asignan. Estos problemas son de secciones y capítulos previos del texto; le refrescarán la memoria y al mismo tiempo reforzarán esos temas. Si enfrenta algún problema al estar resolviéndolos, lea la sección correspondiente del texto o estudie sus notas referentes a esa materia. La sección del texto donde se presenta el ejercicio de repaso acumulativo se indica entre corchetes [ ], a la izquierda del ejercicio. Después de revisar el material, si aún tiene problemas, haga una cita con su profesor. Resolver los Ejercicios de repaso acumulativo a lo largo del semestre también le ayudará a prepararse para presentar su examen final.

Casi a medio capítulo se presenta un **Examen de mitad del capítulo**. Debe resolver cada uno de ellos para asegurarse que ha entendido el material hasta ese punto. La sección en donde se analizó por primera vez el material, aparece entre corchetes después de la respuesta, en la sección de respuestas del libro.

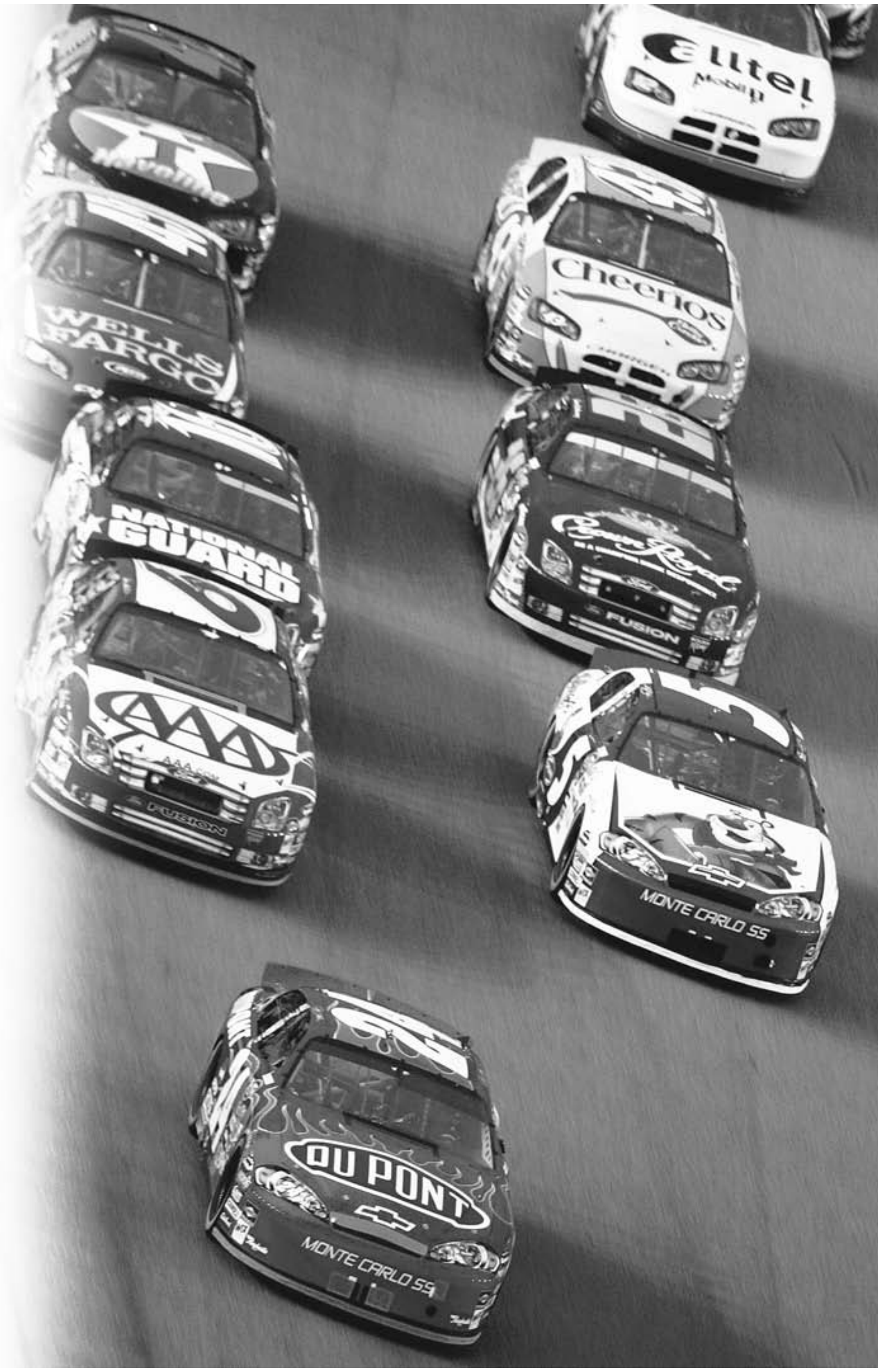
Al final de cada capítulo encontrará lo siguiente: un **Resumen del capítulo**, **Ejercicios de repaso del capítulo**, un **Examen de práctica del capítulo** y un **Examen de repaso acumulativo**. Antes de cada examen debe repasar con gran cuidado el material y resolver el Examen de práctica del capítulo (quizá quiera revisar el *Chapter Test Prep Video CD*). Si resuelve bien el examen del capítulo, no debe tener problemas con el examen de su clase. Las preguntas en los ejercicios de repaso están marcadas para indicar la sección en donde se estudió por primera vez el material. Si tiene problemas con una pregunta de los ejercicios de repaso, vuelva a leer la sección indicada. Sería bueno resolver el examen de repaso acumulativo que aparece al final de cada capítulo.

En la parte final del texto hay una **sección de respuestas** que tiene las soluciones a los ejercicios con *número impar*, incluyendo los problemas de Retos. También se proporcionan las respuestas a *todos* los ejercicios de Cómo utilizar su calculadora graficadora, Ejercicios de repaso acumulativo, Exámenes de mitad del capítulo, Ejercicios de repaso del capítulo, Exámenes de práctica del capítulo y Exámenes de repaso acumulativo. Las respuestas a los ejercicios de Actividades en grupo no se proporcionan, porque deseamos que los alumnos lleguen a un consenso. Las respuestas sólo se deben usar para comprobar su avance. Para los Exámenes de mitad del capítulo, Exámenes de práctica del capítulo y Exámenes de repaso acumulativo, después de cada respuesta se proporciona el número de la sección en donde se cubrió el tipo de ejercicio.

He tratado de hacer este texto lo más claro posible y sin errores. Sin embargo, ningún texto es perfecto. Si usted encuentra un error en el texto, o un ejemplo o sección que crea que se puede mejorar, le agradeceré mucho que me lo haga saber. Si le agradó el libro, también me gustaría saberlo. Puede enviar sus comentarios a *http://247.prenhall.com.*

Allen R. Angel

1 Conceptos básicos



OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En este capítulo repasamos los conceptos de álgebra que son centrales para su éxito en este curso. A lo largo de ese capítulo, y en todo el libro, utilizamos ejemplos de la vida real para mostrar cómo las matemáticas son relevantes en su vida diaria. En la sección 1.1 presentamos asesoría para ayudarle a que establezca habilidades y hábitos efectivos de estudio. Otros temas que se tratan en este capítulo son conjuntos, números reales y exponentes.

1.1 Habilidades de estudio para tener éxito en matemáticas, y uso de una calculadora

1.2 Conjuntos y otros conceptos básicos

1.3 Propiedades y operaciones con los números reales

1.4 Orden de las operaciones

Examen de mitad de capítulo: Secciones 1.1-1.4

1.5 Exponentes

1.6 Notación científica

Resumen del capítulo 1

Ejercicios de repaso del capítulo

Examen de práctica del capítulo

ALGUNA VEZ se ha preguntado, "¿Cuándo voy a usar el álgebra?". En este capítulo y en todo el libro, utilizamos el álgebra para estudiar aplicaciones de la vida real, las cuales van desde la serie NASCAR Nextel Cup en el ejercicio 101 hasta desastres naturales en el ejercicio 102, ambos en la página 14. Descubriremos que las matemáticas pueden usarse en prácticamente todas las áreas de nuestra vida.

1.1 Habilidades de estudio para tener éxito en matemáticas, y uso de una calculadora

1 Tener una actitud positiva
2 Prepararse y poner atención en clase
3 Prepararse y presentar exámenes
4 Buscar ayuda
5 Aprender a utilizar una calculadora

Usted necesita adquirir ciertas habilidades de estudio que le ayudarán a completar con éxito este curso. Estas habilidades de estudio también le ayudarán en todos los demás cursos de matemáticas que tome.

Es importante que tenga en cuenta que este curso es el fundamento para cursos más avanzados de matemáticas. Si tiene una perfecta comprensión del álgebra, se dará cuenta que es más sencillo tener éxito en cursos posteriores de matemáticas.

1 Tener una actitud positiva

Podría estar pensando, "Yo odio las matemáticas" o "Desearía no tener que tomar esta clase". Puede haber escuchado el término *ansiedad* o *fobia por las matemáticas* y sentir que usted cae en esta categoría. Lo primero que necesita hacer para tener éxito en este curso es cambiar su actitud a una más positiva. Debe estar dispuesto a darle una justa oportunidad a este curso y a usted.

Con base en experiencias pasadas en matemáticas, podría sentir que esto será difícil. Sin embargo, las matemáticas es algo que necesita en su trabajo. Muchos de los que toman este curso son más maduros ahora que cuando tomaron cursos anteriores de matemáticas. Su madurez y su deseo de aprender son extremadamente importantes y pueden hacer una gran diferencia en su habilidad para tener éxito en matemáticas. Yo creo que usted puede tener éxito en este curso, pero usted también necesita creerlo.

2 Prepararse y poner atención en clase

Revise el material antes de clase

Antes de clase debe destinar algunos minutos para revisar todo material nuevo en el libro de texto. No es necesario que entienda todo; se trata sólo de que obtenga una idea de las definiciones y conceptos que estudiará. Este repaso rápido le ayudará a comprender lo que su profesor estará explicando durante la clase. Después de la explicación del material en clase, lea lenta y cuidadosamente, palabra por palabra, las secciones correspondientes del texto.

Lea el libro de texto

Un libro de texto de matemáticas no es una novela. Los libros de texto de matemáticas se deben leer lenta y cuidadosamente. Si usted no entiende lo que está leyendo, vuelva a leer el material. Cuando pase por un nuevo concepto o definición, quizá quiera subrayarlo o resaltarlo, de modo que destaque. De esta forma, cuando lo vea posteriormente, le será fácil encontrarlo. Cuando vea un ejemplo desarrollado, lea y siga el ejemplo cuidadosamente. No sólo pase la vista por él. Trate de desarrollarlo por su cuenta en otra hoja. También, trabaje las secciones **Ahora resuelva los ejercicios** que aparecen en el texto luego de cada ejemplo. Las indicaciones Ahora resuelva los ejercicios están diseñadas para que usted tenga la oportunidad de aplicar de manera inmediata nuevas ideas. Haga notas de lo que no entienda, a fin de preguntarle al profesor.

Haga la tarea

Dos compromisos que debe hacer para tener éxito en este curso son asistir a clase y hacer la tarea con regularidad. Debe resolver sus tareas de manera concienzuda y por completo. Las matemáticas no pueden aprenderse por observación. Necesita practicar lo que ha escuchado en clase. Haciendo la tarea usted realmente aprenderá la materia.

No olvide comprobar las respuestas de sus tareas. Las respuestas a los ejercicios de número impar están al final de este libro. Además, se proporcionan las respuestas a todos los Ejercicios de Repaso Acumulativo, Exámenes de mitad de capítulo, Ejercicios de Repaso del Capítulo, Exámenes de Práctica del Capítulo y Exámenes de Repaso Acumulativo. En las secciones Exámenes de Mitad de Capítulo, Exámenes de Práctica del Capítulo y Exámenes de Repaso Acumulativo, después de cada respuesta se indica, entre corchetes, la sección donde se presentó por primera vez el material. Las respuestas a los Ejercicios de Actividades en Grupo no se proporcionan puesto que queremos que, como grupo, obtengan las respuestas.

Si tiene dificultades con algunos de los ejercicios, márquelos y no dude en preguntar acerca de ellos en la clase. No se conforme hasta que entienda todos los conceptos necesarios para resolver todos los problemas asignados.

Cuando haga su tarea, asegúrese de escribirla con claridad y cuidado. Ponga atención particular en copiar correctamente los signos y exponentes. Haga su tarea paso a paso. De esta forma puede volver a ella más adelante y entender aún lo que haya escrito.

Asista y participe en clase

Debe asistir a todas las clases. Por lo general, entre más inasistencias tenga, menor será su calificación. Cada vez que pierda una clase, pierde información importante. Si pierde una clase, contacte cuanto antes a su instructor y obtenga las asignaciones de lectura y de tarea.

Cuando esté en clase, ponga atención a lo que dice su profesor. Si no entiende algo, pídale que repita o explique de otra forma el material. Si no hace preguntas, su profesor no sabrá que tiene un problema de comprensión del material.

En clase, tome notas con cuidado. Escriba números y letras de forma clara para que pueda leerlas después. No es necesario escribir todas las palabras que diga el profesor. Copie los puntos principales y los ejemplos que no estén en el texto. No debe tomar notas de manera frenética de forma que pierda el hilo de lo que está diciendo su profesor.

Estudie

Estudie en la atmósfera adecuada. Estudie en un área donde no se le interrumpa constantemente para que preste toda la atención posible a lo que está leyendo. Esta área debe estar suficientemente ventilada e iluminada. Debe tener espacio suficiente en su escritorio para extender todo su material. Su silla debe ser cómoda. Debe tratar de minimizar las distracciones mientras estudia. No debe estudiar de manera incesante; una buena idea es tomar breves periodos de descanso.

Al estudiar, no sólo debe entender cómo trabajar un problema, sino también el porqué está siguiendo esos pasos específicos para resolverlo. Si no entiende por qué está siguiendo ese proceso específico, no podrá resolver problemas similares.

Administración del tiempo

Es recomendable que los estudiantes ocupen al menos 2 horas en estudiar y hacer la tarea por cada hora de clase. Algunos estudiantes requieren más tiempo que otros. No siempre es sencillo encontrar el tiempo necesario para estudiar. Las siguientes son algunas sugerencias que pueden serle de utilidad.

1. Planee con anticipación. Determine cuándo tendrá tiempo para estudiar y hacer su tarea. No programe otras actividades para estos periodos. Trate de espaciar equitativamente estos periodos durante la semana.

2. Organícese de modo que no pierda tiempo en buscar sus libros, pluma, calculadora o notas.

3. Utilice su calculadora para realizar cálculos tediosos.

4. Cuando deje de estudiar, marque con claridad el lugar donde se detuvo.

5. Procure no tomar responsabilidades de más. Debe establecer sus prioridades. Si su educación tiene una alta prioridad, como debiera ser, quizá tenga que reducir el tiempo para otras actividades.

6. Si el tiempo es un problema, no se agobie con demasiados cursos. Considere cursar menos créditos. Si no cuenta con suficiente tiempo para estudiar, verá dañadas su comprensión y su calificación en todos sus cursos.

3 Prepararse y presentar exámenes

Estudie para sus exámenes

Si estudia todos los días, no necesitará cargarse de información la noche anterior a su examen. Si espera hasta el último minuto, no tendrá tiempo para buscar ayuda si la necesita. A fin de repasar para un examen,

1. Lea sus notas de clase.
2. Repase sus tareas.
3. Estudie las fórmulas, definiciones y procedimientos que necesitará para el examen.
4. Lea con cuidado los recuadros Cómo evitar los errores comunes y Sugerencias útiles.
5. Lea el resumen del final de cada capítulo.
6. Resuelva los ejercicios de repaso del final de cada capítulo. Si tiene dificultades, vuelva a estudiar esas secciones. Si aún tiene problemas, busque ayuda.
7. Resuelva los Exámenes de mitad de capítulo y los Exámenes de práctica del capítulo.
8. Si el material que se trata en los cuestionarios previamente dados está incluido en el examen, vuelva a resolver los cuestionarios.
9. Si el material de capítulos anteriores está incluido en el examen, resuelva el Examen de repaso acumulativo.

Presente un examen

Asegúrese de haber dormido bien la víspera del examen. Si estudió adecuadamente no tiene por qué dormirse tarde la noche anterior para preparar su examen. Llegue temprano al lugar del examen para tener unos minutos de relajamiento antes de iniciarlo. Si necesita apresurarse para llegar al examen, se pondrá nervioso y ansioso. Después de recibir el examen, haga lo siguiente:

1. Escriba con cuidado cualquier fórmula o idea que necesite recordar.
2. Vea rápidamente todo el examen para tener una idea de lo largo que es y asegúrese de que no falte ninguna página. Necesita marcarse un paso para asegurarse de completar todo el examen. Prepárese para destinar más tiempo a los problemas que cuentan más puntos.
3. Lea con cuidado las instrucciones del examen.
4. Lea con cuidado cada problema. Responda completamente cada pregunta y asegúrese de haber respondido exactamente lo preguntado.
5. Inicie con la pregunta 1 y resuelva cada pregunta en orden. Si tiene dificultades con una pregunta, no le dedique demasiado tiempo. Continúe resolviendo las preguntas que entienda. Después regrese y responda aquellos problemas de los que no esté seguro. No pierda demasiado tiempo en un solo problema.
6. Procure resolver todos los problemas. Podría ganar al menos créditos parciales.
7. Trabaje con cuidado y escriba claramente a fin de que su profesor pueda leer sus respuestas. Además, es fácil cometer errores cuando su escritura no es clara.
8. Si tiene tiempo, verifique su trabajo y sus respuestas.
9. No se preocupe si otros terminan su examen antes que usted. No se apure si es el último en terminar. Ocupe todo el tiempo de que disponga para verificar sus respuestas.

4 Buscar ayuda

Utilice los suplementos

Este texto viene con varios suplementos. Al inicio del semestre averigüe con su profesor cuáles están disponibles y cuáles podrían serle útiles. La lectura de suplementos no reemplaza la del texto. Los suplementos sirven para ampliar y reforzar su comprensión del material. Si pierde una clase podría querer revisar una videocinta sobre el tema antes de asistir a la siguiente clase.

Los suplementos que podrían estar disponibles para usted son: el CD Lecture Series Videos que muestra alrededor de 20 minutos de clase por sección e incluye las soluciones completas a los ejercicios marcados con este icono ; el Chapter Test Prep Video CD, que resuelve cada problema de todos los exámenes de práctica del capítulo; MathXL®, un poderoso sistema tutorial y de tareas en línea; MyMathlab, el curso en línea que hospeda MathXL. Cabe aclarar que todos estos suplementos se encuentran en idioma inglés.

Busque ayuda

Una cosa que recalco mucho a mis estudiantes es *¡obtenga ayuda tan pronto como la necesite!* ¡No espere! En matemáticas, por lo general el material de un día es la base para el del día siguiente. Así que, si no entiende el material de hoy, no podrá entender el de mañana.

¿Dónde buscar ayuda? En su campus existen muchos lugares donde obtener ayuda. Procure tener un amigo en clase con quien pueda estudiar; incluso, a menudo podrán ayudarse mutuamente. Tal vez desee formar un grupo con otros estudiantes de su clase. Analizar conceptos y tareas junto con sus compañeros reforzará su propia comprensión del material.

No debe dudar en visitar a su profesor cuando tenga problemas con el material. Asegúrese de haber leído el material asignado e intente hacer la tarea antes de ir con su profesor. Llegue preparado con preguntas específicas.

Con frecuencia existen otras fuentes de ayuda disponibles. Varios colegios tienen un laboratorio o un centro de aprendizaje de matemáticas donde se dispone de tutores para ayudar a los estudiantes. Pregunte a su instructor al principio del semestre si hay tutores disponibles, y busque dónde se localizan. Visite a estos tutores cuando sea necesario.

5 Aprender a utilizar una calculadora

Varios profesores solicitan a sus estudiantes que compren y utilicen una calculadora para la clase; si su instructor la pidió, usted debe saber lo más pronto posible cuál es la calculadora que su profesor espera que utilice. Si planea llevar cursos adicionales de matemáticas, debe determinar cuál calculadora necesitará en esos cursos y pensar en adquirir dicha calculadora para usarla en este curso, si su instructor lo permite. Algunos más solicitan una calculadora científica y otros una calculadora graficadora.

En este libro proporcionamos información acerca de ambos tipos de calculadoras. Lea y guarde siempre el manual del usuario para cualquiera que sea la calculadora que compre.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.1

MathXL® MyMathLab

¿Conoce usted toda la información siguiente? Si no, pregunte a su profesor lo más pronto posible.

1. ¿Cuál es el nombre de su profesor?

2. ¿Cuáles son las horas de oficina de su profesor?

3. ¿Dónde se localiza la oficina de su profesor?

4. ¿Cómo puede encontrar más fácilmente a su profesor?

5. ¿Dónde puede obtener ayuda si su profesor no está disponible?

6. ¿Qué suplementos están disponibles y le pueden ayudar en su aprendizaje?

7. ¿Su profesor recomienda o requiere una calculadora específica? Si es así, ¿cuál?

8. ¿Cuándo puede utilizar su calculadora? ¿Puede usarla en clase, en las tareas, en exámenes?

9. ¿Cuál es la política de su profesor respecto de la asistencia a clases?

10. ¿Por qué es importante que asista a todas las clases posibles?

11. ¿Sabe el nombre y número telefónico de algún amigo de la clase?

12. Por cada hora de clase, ¿cuántas horas se recomiendan fuera de clase para tareas y estudio?

13. Liste lo que debe hacer para estar preparado adecuadamente para la clase.

14. Explique cómo debe leerse un texto de matemáticas.

15. Escriba un resumen de los pasos que debe seguir cuando tenga un examen.

indica un ejercicio que se resuelve completamente en el CD Lecture Series Videos.

indica un ejercicio de redacción. Esto es, un ejercicio que requiere escribir una respuesta.

16. Tener una actitud positiva es muy importante para el éxito de este curso. ¿Está comenzando este curso con una actitud positiva? ¡Es importante que lo haga!

17. Debe comprometerse en ocupar el tiempo necesario para aprender el material, para hacer la tarea y para asistir a la clase con regularidad. Explique por qué cree que este compromiso es necesario para tener éxito en este curso.

18. ¿Cuáles son sus razones para tomar este curso?

19. ¿Cuáles son sus metas para este curso?

20. ¿Ha pensado en estudiar con un amigo o un grupo de amigos? ¿Ve alguna ventaja en hacerlo así? ¿Le ve alguna desventaja?

1.2 Conjuntos y otros conceptos básicos

1 Identificar conjuntos
2 Identificar y utilizar desigualdades
3 Usar la notación constructiva de conjuntos
4 Determinar la unión e intersección de conjuntos
5 Identificar conjuntos importantes de números

Iniciamos con algunas definiciones importantes. Cuando se usa una letra para representar varios números se le llama **variable**. Por ejemplo, si $t =$ al tiempo, en horas, que un automóvil viaja, entonces t es una variable, ya que el tiempo cambia de manera constante conforme el automóvil viaja. Con frecuencia usamos las letras x, y, z y t para representar variables. Sin embargo, pueden emplearse otras letras. Cuando presentamos propiedades o reglas, a menudo las letras a, b y c se usan como variables.

Si una letra representa un valor particular se denomina **constante**. Por ejemplo, si $s =$ el número de segundos en un minuto, entonces s representa una constante ya que siempre hay 60 segundos en un minuto. El número de segundos en un minuto no varía. En este libro, las letras que representan variables y constantes aparecen en itálicas.

En el texto se usará con frecuencia el término **expresión algebraica**, o simplemente **expresión**. Una expresión es cualquier combinación de números, variables, exponentes, símbolos matemáticos (distintos al signo igual) y operaciones matemáticas.

1 Identificar conjuntos

Los conjuntos se emplean en muchas áreas de las matemáticas, de modo que es importante una comprensión de los conjuntos y de su notación. Un **conjunto** es una colección de objetos. Los objetos en un conjunto se denominan **elementos** del conjunto. Los conjuntos se indican mediante llaves, { }, y con frecuencia sus nombres son letras mayúsculas. Cuando los elementos de un conjunto están listados dentro de las llaves, como se ilustra a continuación, se dice que el conjunto está en **forma de lista**.

$$A = \{a, b, c\}$$
$$B = \{\text{amarillo, verde, azul, rojo}\}$$
$$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

El conjunto A tiene tres elementos, el conjunto B tiene cuatro elementos y el conjunto C tiene cinco elementos. El símbolo $\in$ se usa para indicar que un objeto es un elemento de un conjunto. Como 2 es un elemento del conjunto C, podemos escribir $2 \in C$; esto se lee "2 es un elemento del conjunto C".

Un conjunto puede ser finito o infinito. Los conjuntos A, B y C tienen, cada uno, un número finito de elementos y, por tanto, son *conjuntos finitos*. En algunos conjuntos es imposible listar a todos los elementos. Éstos son *conjuntos infinitos*. El conjunto siguiente, llamado el conjunto de **números naturales** o **conjunto de números para contar**, es un ejemplo de un conjunto infinito.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Los tres puntos después de la última coma, llamados *puntos suspensivos,* indican que el conjunto continúa de la misma manera.

Otro importante conjunto infinito es el de enteros. El conjunto de **enteros** es

$$I = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Observe que el conjunto de enteros incluye tanto a los enteros positivos como a los negativos y al número cero, 0.

Si escribimos

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 163\}$$

queremos decir que el conjunto continúa de la misma manera hasta el número 163. El conjunto D es el conjunto de los primeros 163 números naturales, por tanto D es un conjunto finito.

Un conjunto especial que no tiene elementos se llama el **conjunto nulo** o **conjunto vacío**, se escribe { } o ∅. Por ejemplo, el conjunto de estudiantes en su clase que tienen más de 150 años es el conjunto vacío o nulo.

2 Identificar y utilizar desigualdades

Antes de introducir un segundo método para escribir un conjunto, denominado *notación constructiva de conjuntos*, introduciremos los símbolos de desigualdad.

Símbolos de desigualdad

$>$ se lee "es mayor que".
$\geq$ se lee "es mayor o igual a".
$<$ se lee "es menor que".
$\leq$ se lee "es menor o igual a".
$\neq$ se lee "no es igual a".

Las desigualdades pueden explicarse por medio de la recta de los números reales (figura 1.1).

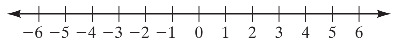


FIGURA 1.1

El número a es mayor que el número b, $a > b$, cuando a está a la derecha de b en la recta numérica **(figura 1.2)**. También podemos establecer que el número b es menor que a, $b < a$, cuando b está a la izquierda de a en la recta numérica. La desigualdad $a \neq b$ significa $a < b$ o $a > b$.

FIGURA 1.2

EJEMPLO 1 Inserte $>$ o $<$, en el área sombreada entre los números para hacer verdadera cada proposición.

a) 6 ▢ 2 **b)** −7 ▢ 1 **c)** −4 ▢ −5

Solución Dibuje una recta numérica para ilustrar la localización de los valores de las partes **a)**, **b)** y **c)**, como se ilustra en la **figura 1.3**.

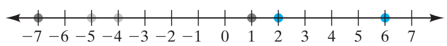


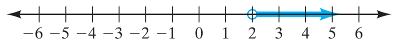
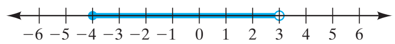
FIGURA 1.3

a) $6 > 2$ Observe que 6 está a la derecha del 2 en la recta numérica.
b) $-7 < 1$ Observe que −7 está a la izquierda del 1 en la recta numérica.
c) $-4 > -5$ Observe que −4 está a la derecha del −5 en la recta numérica.

Ahora resuelva el ejercicio 29

Recuerde que el símbolo usado en una desigualdad, si es verdadera, siempre señala o apunta al más pequeño de los dos números.

Utilizamos la notación $x > 2$, se lee "x es mayor que 2", para representar a *todos* los números reales mayores que 2. Utilizamos la notación $x \leq -3$, se lee "x es menor o igual a −3", para representar a todos los números reales que son menores o iguales a −3. La notación $-4 \leq x < 3$, significa todos los números que son mayores o iguales a −4 y también menores que 3. En las desigualdades $x > 2$ y $x \leq -3$, el 2 y el −3 se llaman **puntos extremos**. En la desigualdad $-4 \leq x < 3$, el −4 y el 3 son los puntos extremos. Las soluciones de las desigualdades que utilizan $<$ o $>$ no incluyen a los puntos extremos, pero las soluciones de las desigualdades que utilizan $\leq$ o $\geq$ incluyen a los puntos extremos. Cuando se ilustran las desigualdades en la recta numérica se emplea un círculo relleno para mostrar que el punto extremo está incluido en la respuesta, y se usa un círculo vacío para mostrar que no está incluido el punto extremo. A continuación están algunos ejemplos de cómo se indican algunas desigualdades en la recta numérica.

Desigualdad	Desigualdad indicada en la recta numérica
$x > 2$	
$x \leq -1$	
$-4 \leq x < 3$	

Algunos estudiantes comprenden de manera errónea la palabra *entre*. La palabra *entre* indica que los puntos extremos no están incluidos en la respuesta. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales entre 2 y 6 es $\{3, 4, 5\}$. Si deseamos incluir los extremos, podemos usar la palabra *inclusive*. Por ejemplo, el conjunto de números naturales entre 2 y 6 inclusive es $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

3 Usar la notación constructiva de conjuntos

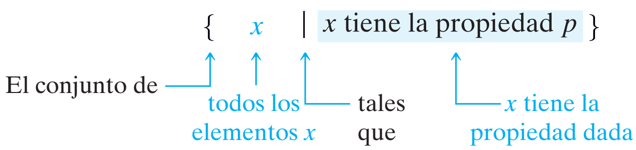
Ahora que hemos introducido los símbolos de desigualdad, analizaremos otro método para indicar un conjunto, denominado **notación constructiva de conjuntos**. Un ejemplo de esta notación es

$$E = \{x | x \text{ es un número natural mayor que } 7\}$$

Esto se lee "El conjunto E es el conjunto de todos los elementos x, tales que x es un número natural mayor que 7". En forma de lista, este conjunto se escribe

$$E = \{8, 9, 10, 11, 12, \ldots\}$$

La forma general de la notación constructiva de conjuntos es



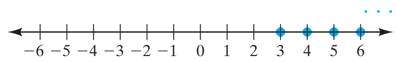
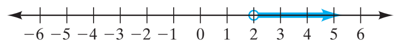
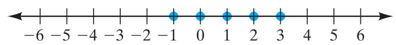
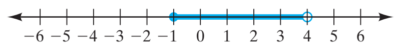
A menudo usaremos la variable x cuando utilicemos la notación constructiva de conjuntos, aunque puede emplearse cualquier variable.

Dos formas condensadas de escribir el conjunto $E = \{x | x \text{ es un número natural mayor que } 7\}$ en notación constructiva de conjuntos es:

$$E = \{x | x > 7 \text{ y } x \in N\} \quad \text{o} \quad E = \{x | x \geq 8 \text{ y } x \in N\}$$

El conjunto $A = \{x | -3 < x \leq 4 \text{ y } x \in I\}$ es el conjunto de enteros mayores que -3 y menores o iguales a 4. El conjunto escrito en forma de lista es $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Observe que el extremo -3 no está incluido en el conjunto pero el extremo 4 sí.

¿En qué difieren los conjuntos $B = \{x | x > 2 \text{ y } x \in N\}$ y $C = \{x | x > 2\}$? ¿Puede escribir cada conjunto en forma de lista? ¿Puede ilustrar ambos conjuntos en la recta numérica? El conjunto B sólo contiene a los números naturales mayores que 2, esto es, $\{3, 4, 5, 6, \ldots\}$. El conjunto C contiene no sólo a los números naturales mayores que 2, sino también fracciones y números decimales mayores que 2. Si tratara de escribir el conjunto C en forma de lista, ¿dónde empezaría? ¿Cuál es el número más pequeño que es mayor a 2? ¿Es 2.1 o 2.01 o 2.001? Como no hay número más pequeño que sea mayor que 2, este conjunto no puede escribirse en forma de lista. En la parte superior de la siguiente página ilustramos estos dos conjuntos en la recta numérica. También ilustramos otros dos conjuntos.

Conjunto	Conjunto indicado en la recta numérica
$\{x \mid x > 2 \text{ y } x \in N\}$	
$\{x \mid x > 2\}$	
$\{x \mid -1 \le x < 4 \text{ y } x \in I\}$	
$\{x \mid -1 \le x < 4\}$	

Otro método para indicar desigualdades, denominado *notación de intervalos*, se estudiará en la sección 2.5.

4 Determinar la unión e intersección de conjuntos

Al igual que *operaciones* tales como la suma y la multiplicación se realizan sobre los números, existen operaciones que pueden realizarse sobre conjuntos. Dos operaciones de conjuntos son la *unión* y la *intersección.*

Unión

La **unión** del conjunto A y el conjunto B, escrita $A \cup B$, es el conjunto de elementos que pertenecen al conjunto A *o* al conjunto B.

Ya que la palabra *o*, como se usa en este contexto, significa pertenencia al conjunto A, o al conjunto B o a ambos conjuntos, la unión está formada por la combinación o reunión de los elementos del conjunto A con los del conjunto B. Si un objeto es un elemento del conjunto A, o del conjunto B o está en ambos conjuntos, entonces es un elemento de la unión de los conjuntos. Si un elemento aparece en ambos conjuntos, lo listamos sólo una vez cuando escribimos la unión de dos conjuntos.

Ejemplos de unión de conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\quad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $\quad B = \{x, y, z\}$, $\quad A \cup B = \{a, b, c, d, e, x, y, z\}$

En la notación constructiva de conjuntos podemos expresar $A \cup B$ como

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Intersección

La **intersección** del conjunto A y el conjunto B, denotada $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que son comunes a ambos conjuntos A *y* B.

Ya que la palabra *y*, como se utiliza en este contexto, significa pertenencia a *ambos*, al conjunto A y al conjunto B, la intersección está formada con sólo aquellos elementos que están en ambos conjuntos. Si un objeto está en sólo uno de los dos conjuntos, entonces no es un elemento de la intersección de los conjuntos.

Ejemplos de intersección de conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\quad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\quad A \cap B = \{3, 4, 5\}$

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $\quad B = \{x, y, z\}$, $\quad A \cap B = \{\ \}$

Observe que en el último ejemplo, los conjuntos A y B no tienen elementos en común. Por lo tanto, su intersección es el conjunto vacío. En la notación constructiva de conjuntos podemos expresar $A \cap B$ como

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

5 Identificar conjuntos importantes de números

Al llegar hasta aquí tenemos toda la información necesaria para estudiar importantes conjuntos de números reales. En el recuadro siguiente describimos estos conjuntos proporcionando letras que se utilizan con frecuencia para representar a estos conjuntos de números.

Importantes conjuntos de números reales

Números reales	$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ es un punto de la recta numérica}\}$
Números naturales o para contar	$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
Enteros no negativos	$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
Números enteros	$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Números racionales	$Q = \left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p \text{ y } q \text{ son enteros, } q \neq 0\right\}$
Números irracionales	$I = \{x \mid x \text{ es un número real que no es racional}\}$

Echemos un vistazo rápido a los números racionales, irracionales y reales. Un **número racional** es cualquier número que puede representarse como un cociente de dos enteros, con el denominador distinto de cero.

Ejemplos de números racionales

$$\frac{3}{5}, \quad -\frac{2}{3}, \quad 0, \quad 1.63, \quad 7, \quad -17, \quad \sqrt{4}$$

Observe que 0, o cualquier otro entero, también es un número racional, ya que puede escribirse como una fracción con un denominador igual a 1.

Por ejemplo $0 = \frac{0}{1}$ y $7 = \frac{7}{1}$. El número 1.63 puede escribirse como $\frac{163}{100}$ y por tanto es un cociente de dos enteros. Como $\sqrt{4} = 2$ y 2 es un entero, $\sqrt{4}$ es un número racional. *Todo número racional cuando se escribe como un número decimal será un número con parte decimal que se repite o bien que termina*.

Ejemplos de decimales que se repiten

$$\frac{2}{3} = 0.6666\ldots$$

El 6 se repite.

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots$$

El bloque 142857 se repite.

Ejemplos de decimales que terminan

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{9}{4} = 2.25$$

Para mostrar que un dígito o un grupo de dígitos se repiten, podemos colocar una barra sobre el dígito o grupo de dígitos que se repiten. Por ejemplo, podemos escribir

$$\frac{2}{3} = 0.\overline{6} \quad \text{y} \quad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

Aunque $\sqrt{4}$ es un número racional, las raíces cuadradas de la mayoría de los enteros no lo son. La mayoría de las raíces cuadradas tendrán decimales que no terminan ni se repiten cuando se expresan como números decimales y son **números irracionales**. Algunos números irracionales son $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$. Otro número irracional es pi, π. Cuando damos un valor decimal para un número irracional, sólo estamos proporcionando una *aproximación* del valor del número irracional. El símbolo $\approx$ significa "es aproximadamente igual a".

$$\pi \approx 3.14 \qquad \sqrt{2} \approx 1.41 \qquad \sqrt{3} \approx 1.73 \qquad \sqrt{10} \approx 3.16$$

Los **números reales** están formados tomando la *unión* de los números racionales y los números irracionales. Por consiguiente, cualquier número real debe ser un número racional o un número irracional. Con frecuencia se utiliza el símbolo $\mathbb{R}$ para representar al conjunto de los números reales. La **figura 1.4** ilustra varios números reales en la recta numérica.

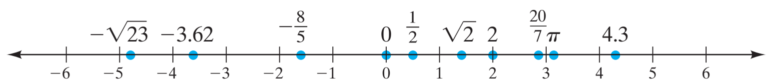


FIGURA 1.4

Un primer conjunto es un **subconjunto** de un segundo conjunto cuando todo elemento del primer conjunto también es un elemento del segundo conjunto. Por ejemplo, el conjunto de números naturales, $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, es un subconjunto de los enteros no negativos, $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, ya que todo elemento en el conjunto de los números naturales también es un elemento del conjunto de los enteros no negativos. La **figura 1.5** ilustra las relaciones entre los diferentes subconjuntos de los números reales. En la **figura 1.5a**, observe que el conjunto de los números naturales es un subconjunto del conjunto de enteros no negativos, del conjunto de enteros y del conjunto de los números racionales. Por tanto, todo número natural también debe ser un entero no negativo, un entero y un número racional. Por medio del mismo razonamiento, podemos ver que el conjunto de enteros no negativos es un subconjunto del conjunto de enteros, y del conjunto de números racionales y que el conjunto de los enteros es un subconjunto del conjunto de los números racionales.

Viendo la **figura 1.5b** vemos que los enteros positivos, el 0 y los enteros negativos forman los enteros, que los números enteros y los números racionales que no son enteros forman los números racionales, y así sucesivamente.

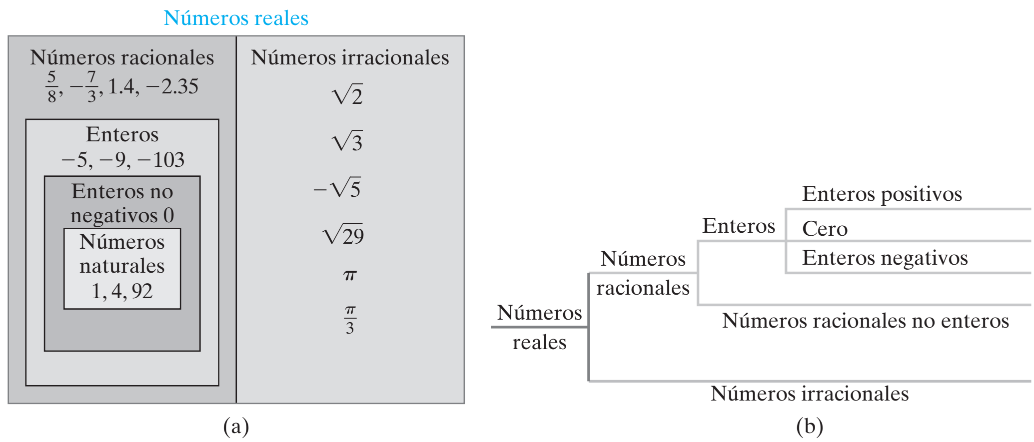


FIGURA 1.5

EJEMPLO 2 ▸ Considere el conjunto siguiente:

$$\left\{-3, 0, \frac{5}{7}, 12.25, \sqrt{7}, -\sqrt{11}, \frac{22}{7}, 5, 7.1, -54, \pi\right\}$$

Liste los elementos del conjunto que son

a) números naturales. **b)** enteros no negativos. **c)** enteros.
d) números racionales. **e)** números irracionales. **f)** números reales.

Solución

a) Números naturales: 5 **b)** Enteros no negativos: 0, 5 **c)** Enteros: $-3, 0, 5, -54$

d) Los números racionales pueden escribirse en la forma p/q, $q \neq 0$, con p y q enteros. Cada uno de los siguientes pueden escribirse en esta forma y es un número racional.

$$-3, 0, \frac{5}{7}, 12.25, \frac{22}{7}, 5, 7.1, -54$$

e) Números irracionales son números reales que no son racionales. Los números siguientes son irracionales

$$\sqrt{7}, -\sqrt{11}, \pi$$

f) Todos los números en el conjunto son números reales. La unión de los números racionales y los números irracionales forma los números reales.

$$-3, 0, \frac{5}{7}, 12.25, \sqrt{7}, -\sqrt{11}, \frac{22}{7}, 5, 7.1, -54, \pi$$

▶ **Ahora resuelva el ejercicio 49**

No todos los números son números reales. Algunos números que estudiamos más adelante en el texto que no son números reales son números complejos y números imaginarios.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una variable?
2. ¿Qué es una expresión algebraica?
3. ¿Qué es un conjunto?
4. ¿Cómo les llamamos a los objetos de un conjunto?
5. ¿Qué es el conjunto vacío o conjunto nulo?
6. El conjunto de los números naturales o para contar, ¿es un conjunto finito o infinito? Explique.
7. Liste los cinco símbolos de desigualdad y escriba cómo se lee cada uno de ellos.
8. Proporcione un ejemplo de un conjunto que sea vacío.
9. Liste el conjunto de enteros *entre* 3 y 7.
10. Liste el conjunto de enteros *entre* -1 y 3 *inclusive*.
11. Explique por qué todo entero también es un número racional.
12. Describa los números para contar, números enteros, números enteros no negativos, números racionales, números irracionales y números reales. Explique las relaciones entre los conjuntos de números.

En los ejercicios del 13 al 22, indique si cada proposición es verdadera o falsa.

13. Todo número natural es un entero no negativo.
14. Todo entero no negativo es un número natural.
15. Algunos números racionales son enteros.
16. Todo entero es un número racional.
17. Todo número racional es un entero.
18. La unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales forma el conjunto de los números reales.
19. La intersección del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales es el conjunto vacío.
20. El conjunto de los números naturales es un conjunto finito.
21. El conjunto de los enteros entre π y 4 es el conjunto vacío (nulo).
22. El conjunto de los números irracionales entre 3 y π es un conjunto infinito.

Práctica de habilidades

Inserte $<$ o $>$ en el área sombreada para hacer que la proposición sea verdadera.

23. $5 \;\square\; 3$
24. $-1 \;\square\; 8$
25. $0 \;\square\; -2$
26. $-3 \;\square\; 3$
27. $-1 \;\square\; -1.01$
28. $2 \;\square\; -3$
29. $-5 \;\square\; -3$
30. $-8 \;\square\; -1$
31. $-14.98 \;\square\; -14.99$
32. $-3.4 \;\square\; -3.2$
33. $1.7 \;\square\; 1.9$
34. $-1.1 \;\square\; -1.9$
35. $-\pi \;\square\; -4$
36. $-723 \;\square\; -655$
37. $-\frac{7}{8} \;\square\; -\frac{10}{11}$
38. $-\frac{4}{7} \;\square\; -\frac{5}{9}$

En los ejercicios del 39 al 48, escriba cada conjunto en forma de lista.

39. $A = \{x|-1 < x < 1 \text{ y } x \in Z\}$
40. $B = \{y|y$ es un número natural impar menor que $6\}$
41. $C = \{z|z$ es un entero par mayor que 16 y menor o igual a $20\}$
42. $D = \{x|x \geq -3 \text{ y } x \in I\}$
43. $E = \{x|x < 3 \text{ y } x \in W\}$
44. $F = \left\{x \,\middle|\, -\frac{6}{5} \leq x < \frac{15}{4} \text{ y } x \in N\right\}$
45. $H = \{x|x$ es un entero no negativo múltiplo de $7\}$
46. $L = \{x|x$ es un entero mayor que $-5\}$
47. $J = \{x|x > 0 \text{ y } x \in Z\}$
48. $K = \{x|x$ es un entero no negativo entre 9 y $10\}$

Un ejercicio con número en rojo, tal como el 29, indica uno marcado con Ahora resuelva el ejercicio.

49. Considere el conjunto $\left\{-2, 4, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{8}, -1.23, \frac{78}{79}\right\}$.

Liste los elementos que son:

a) números naturales.

b) enteros no negativos.

c) enteros.

d) números racionales.

e) números irracionales.

f) números reales.

50. Considere el conjunto $\left\{2, 4, -5.33, \frac{9}{2}, \sqrt{5}, \sqrt{2}, -100, -7, 4.7\right\}$.

Liste los elementos que son:

a) números enteros no negativos.

b) números naturales.

c) números racionales.

d) números enteros.

e) números irracionales.

f) números reales.

Determine $A \cup B$ y $A \cap B$, para cada conjunto A y B.

51. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}$

52. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 4, 6\}$

53. $A = \{-3, -1, 1, 3\}, B = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$

54. $A = \{-3, -2, -1, 0\}, B = \{-1, 0, 1, 2\}$

55. $A = \{\ \}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

56. $A = \{2, 4, 6\}, B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

57. $A = \{0, 10, 20, 30\}, B = \{5, 15, 25\}$

58. $A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

59. $A = \{-1, 0, 1, e, i, \pi\}, B = \{-1, 0, 1\}$

60. $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}, B = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}\right\}$

Describa cada conjunto.

61. $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

62. $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

63. $C = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$

64. $A = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$

65. $B = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$

66. $C = \{\text{Alabama, Alaska}, \ldots, \text{Wyoming}\}$

En los ejercicios 67 y 68, **a)** *escriba cómo leería cada conjunto;* **b)** *escriba el conjunto en forma de lista.*

67. $A = \{x | x < 7 \text{ y } x \in N\}$

68. $B = \{x | x$ es una de las últimas cinco letras mayúsculas del alfabeto inglés$\}$

Ilustre cada conjunto en una recta numérica.

69. $\{x | x \geq 0\}$

70. $\{w | w > -5\}$

71. $\{z | z \leq 2\}$

72. $\{y | y < 4\}$

73. $\{p | -6 \leq p < 3\}$

74. $\{x | -1.67 \leq x < 5.02\}$

75. $\{q | q > -3 \text{ y } q \in N\}$

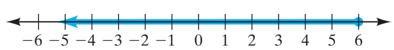
76. $\{x | -1.93 \leq x \leq 2 \text{ y } x \in I\}$

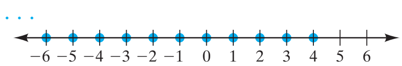
77. $\{r | r \leq \pi \text{ y } r \in W\}$

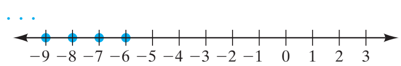
78. $\left\{x \,\middle|\, \frac{5}{12} < x \leq \frac{7}{12} \text{ y } x \in N\right\}$

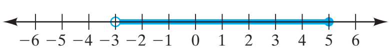
Exprese en la notación constructiva de conjuntos cada conjunto de números que esté indicado en la recta numérica.

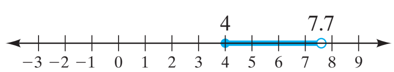
79. 

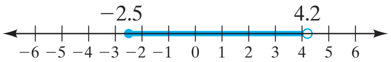
80. 

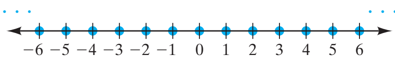
81. 

82. 

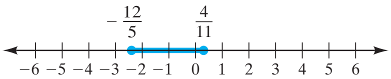
83. 

84. 

85. 

86. 

87. 

88. 

Consulte el recuadro de la página 10, para el significado de $\mathbb{R}$, *N, W, Z, Q e I. Luego determine si el primer conjunto es un subconjunto del segundo conjunto para cada pareja de conjuntos.*

89. N, W **90.** W, Q **91.** W, N **92.** I, Q

93. $Q, \mathbb{R}$ **94.** Q, H **95.** Q, I **96.** $H, \mathbb{R}$

Resolución de problemas

97. Construya un conjunto que contenga cinco números racionales entre 1 y 2.

98. Construya un conjunto que contenga cinco números racionales entre 0 y 1.

99. Determine dos conjuntos A y B tales que $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 9\}$ y $A \cap B = \{4, 5, 9\}$.

100. Determine dos conjuntos A y B tales que $A \cup B = \{3, 5, 7, 8, 9\}$ y $A \cap B = \{5, 7\}$.

101. Copa NASCAR Nextel La Copa de la serie NASCAR Nextel 2004 consistió en 36 carrera realizadas entre febrero y noviembre. Dos de esas carreras fueron la Pocono 500 el 14 de junio y la Ford 400 el 20 de noviembre. Las tablas siguientes muestran los seis que terminaron en los primeros lugares en ambas carreras.

Pocono 500

Posición	Piloto
1	Jimmie Johnson
2	Jerry Mayfield
3	Bobby Labonte
4	Jeff Gordon
5	Kurt Busch
6	Dale Earnhardt, Jr.

Ford 400

Posición	Piloto
1	Greg Biffle
2	Jimmie Johnson
3	Jeff Gordon
4	Tony Stewart
5	Kurt Busch
6	Brendan Gaughan

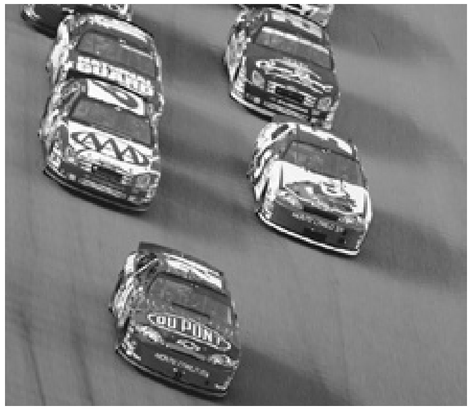
Fuente: www.NASCAR.com

a) Determine el conjunto de pilotos que estuvieron entre los primeros 6 en la Pocono 500 *o* en la Ford 400.

b) ¿La parte **a)** representa la unión o la intersección de los pilotos?

c) Determine el conjunto de pilotos que estuvieron en los primeros 6 finalistas en la Pocono 500 *y* en la Ford 400.

d) ¿La parte **c)** representa la unión o la intersección de los pilotos?



102. Desastres Las tablas siguientes proporcionan estimaciones de los seis terremotos y los seis desastres naturales más mortíferos.

Los seis terremotos más mortíferos

Muertes	Magnitud	Ubicación	Año
255,000	7.8–8.2	Tangshan, China	1976
200,000	8.3	Xining, China	1927
200,000	8.6	Gansu, China	1920
175,000	9.0	Asia/África	2004
143,000	8.3	Kwanto, Japón	1923
110,000	7.3	Turkmenistán	1948

Los seis desastres naturales más mortíferos

Muertes	Suceso	Ubicación	Año
3.7 millones	Inundación	Río Huang He, China	1931
300,000	Ciclón	Bangladesh	1970
255,000	Terremoto	Tangshan, China	1976
200,000	Terremoto	Xining, China	1927
200,000	Terremoto	Gansu, Shina	1920
175,000	Terremoto/ Tsunami	Asia/África	2004

Fuente: www.msnbc.com/modules/tables/worstquakesofcentury, Associated Press, Reuters, U.S. Geological Survey, *The World Almanac*, *The Washington Post* (12/29/2004)

a) Determine el conjunto de localidades de los seis terremotos más mortíferos *o* las localidades de los seis desastres naturales más mortíferos.

b) ¿La parte **a)** representa la unión o la intersección de las categorías?

c) Determine el conjunto de localidades de los seis terremotos más mortíferos *y* de las localidades de los seis desastres naturales más mortíferos.

d) ¿La parte **c)** representa la unión o la intersección de las categorías?

103. Exámenes de álgebra La tabla siguiente muestra a los estudiantes que obtuvieron calificación de A en los primeros dos exámenes en una clase de álgebra intermedia. (Suponga que cada estudiante tiene nombre diferente).

Primer examen	Segundo examen
Albert	Linda
Carmen	Jason
Frank	David
Linda	Frank
Bárbara	Earl
	Kate
	Ingrid

a) Determine el conjunto de estudiantes que obtuvieron una calificación de A en el primero *o* en el segundo examen.

b) ¿La parte **a)** representa la unión o la intersección de los estudiantes?

c) Determine el conjunto de estudiantes que obtuvieron una calificación de A en el primero *y* en el segundo exámenes.

d) ¿La parte **c)** representa la unión o la intersección de los estudiantes?

104. Carreras La tabla siguiente muestra a los corredores que participaron en una carrera de 3 kilómetros (km) y en una carrera de 5 kilómetros. (Suponga que cada corredor tiene un nombre diferente.)

3 kilómetros	5 kilómetros
Adam	Luan
Kim	Betty
Luan	Darnell
Ngo	Ngo
Carmen	Frances
Earl	George
Martha	Adam

a) Determine el conjunto de corredores que participaron en una carrera de 3 km *o* en una carrera de 5 km.

b) ¿La parte **a)** representa la unión o la intersección de los corredores?

c) Determine el conjunto de corredores que participaron en una carrera de 3 km *y* en una de 5 km.

d) ¿La parte **c)** representa la unión o la intersección de los corredores?

105. Países populosos La tabla siguiente muestra los cinco países más populosos en 1950 y en 2005, y los cinco países que se espera sean los más populosos en 2050. Esta información se tomó del sitio web de la Oficina de Censos de Estados Unidos.

1950	2005	2050
China	China	India
India	India	China
Estados Unidos	Estados Unidos	Estados Unidos
Rusia	Indonesia	Indonesia
Japón	Brasil	Nigeria

a) Determine el conjunto de los cinco países más populosos en 2005 *o* en 2050.

b) Determine el conjunto de los cinco países más populosos en 1950 *o* en 2050.

c) Determine el conjunto de los cinco países más populosos en 1950 *y* en 2005.

d) Determine el conjunto de los cinco países más populosos en 2005 *y* en 2050.

e) Determine el conjunto de los cinco países más populosos en 1950 *y* en 2005 *y* en 2050.

106. Concurso de escritura La tabla siguiente muestra a los estudiantes de una clase de inglés que participaron en tres concursos de escritura en una escuela preparatoria local. (Suponga que cada estudiante tiene un nombre diferente).

Primer concurso	Segundo concurso	Tercer concurso
Jill	Tom	Pat
Sam	Shirley	Richard
Tom	Bob	Arnold
Pat	Donna	Donna
Shirley	Sam	Kate
Richard	Jill	
	Kate	

a) Determine el conjunto de estudiantes que participaron en el primer concurso *o* en el segundo concurso.

b) Determine el conjunto de estudiantes que participaron en el segundo concurso *o* en el tercer concurso.

c) Determine el conjunto de estudiantes que participaron en el primer concurso *y* en el segundo concurso.

d) Determine el conjunto de estudiantes que participaron en el primer concurso *y* en el tercer concurso.

e) Determine el conjunto de estudiantes que participaron en el primer concurso *y* en el segundo concurso *y* en el tercer concurso.

107. Lobatos Los Lobatos del grupo 108 deben completar cuatro actividades para merecer la Insignia de Lobo. Doug Wedding, su guía, tiene la tabla siguiente en su libro de registro. Un *Sí* indica que el lobato ha completado la actividad.

Sea A = el conjunto de scouts que han completado la actividad 1: *Prueba de habilidad.*

Sea B = el conjunto de scouts que han completado la actividad 2: *Su bandera.*

Sea C = el conjunto de scouts que ha completado la actividad 3: *Cocinar y comer*.

Sea D = el conjunto de scouts que ha completado la actividad 4: *Toma de decisiones*.

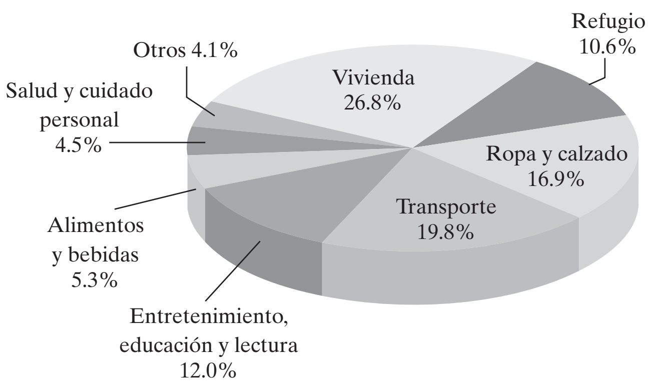
a) Escriba cada conjunto A, B, C y D usando el método de enumeración.

b) Determine el conjunto $A \cap B \cap C \cap D$, esto es, determine el conjunto de elementos que son comunes a los cuatro conjuntos.

c) ¿Cuáles scouts han cumplido con todos los requerimientos para recibir su Insignia de Lobo?

	Actividades			
Scout	**1**	**2**	**3**	**4**
Alex	Sí	Sí	Sí	Sí
James	Sí	Sí	No	No
George	No	Sí	No	Sí
Connor	No	Sí	No	Sí
Stephen	No	No	Sí	No

108. Bienes y servicios La gráfica siguiente muestra el peso porcentual dado a diferentes bienes y servicios en el índice de precios al consumidor para diciembre de 2005.



Fuente: Oficina de Estadísticas Laborales

a) Liste el conjunto de bienes y servicios que tienen un peso de 21% o mayor.

b) Liste el conjunto de bienes y servicios que tienen un peso menor que 6%.

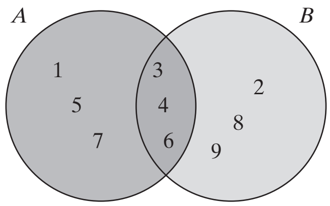
109. El diagrama siguiente se denomina *diagrama de Venn.* Con base en el diagrama, determine los conjuntos siguientes:

a) A

b) B

c) $A \cup B$

d) $A \cap B$



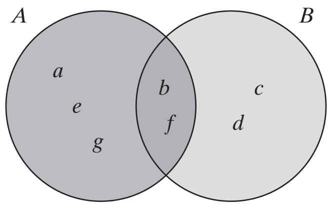
110. Utilice el diagrama de Ven siguiente para determinar los conjuntos siguientes:

a) A

b) B

c) $A \cup B$

d) $A \cap B$



111. a) Explique la diferencia entre los siguientes conjuntos de números: $\{x|x > 1 \text{ y } x \in N\}$ y $\{x|x > 1\}$.

b) Escriba en forma de lista el primer conjunto dado.

c) ¿Puede escribir el segundo conjunto en forma de lista? Explique su respuesta.

112. Repita el ejercicio 111 para los conjuntos $\{x|2 < x < 6 \text{ y } x \in N\}$ y $\{x|2 < x < 6\}$.

113. Copa NASCAR Nextel Dibuje un diagrama de Ven para los datos mostrados en el ejercicio 101.

Retos

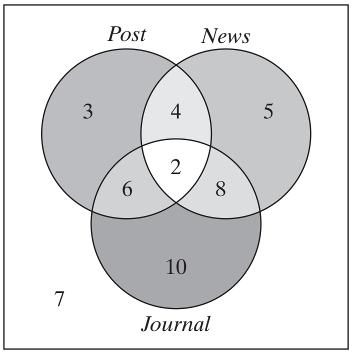
114. a) Escriba los números decimales equivalentes a $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}$ y $\frac{3}{9}$.

b) Escriba las fracciones equivalentes a $0.\overline{4}$, $0.\overline{5}$ y $0.\overline{6}$.

c) ¿A qué es igual $0.\overline{9}$? Explique cómo determinó su respuesta.

Actividad en grupo

115. Preferencias de diarios El diagrama de Ven siguiente muestra los resultados de una encuesta aplicada a 45 personas. El diagrama muestra el número de personas en la encuesta que leen el *New York Post*, el *New York Daily News* y *The Wall Street Journal*.



a) Miembro 1 del grupo: Determine el número de encuestados que leen *ambos* diarios, el *News* y el *Post*, esto es, *News* $\cap$ *Post*.

b) Miembro 2 del grupo: Determine el número de quienes leen ambos diarios, el *Post* y el *Journal*, esto es, *Post* $\cap$ *Journal*.

c) Miembro 3 del grupo: Determine el número de quienes leen ambos diarios, el *News* y el *Journal*, esto es, *News* $\cap$ *Journal*.

d) Comparta sus respuestas con los otros miembros del grupo y vea si el grupo coincide con su respuesta.

e) Como grupo, determinen el número de personas que leen los tres diarios.

f) Como grupo, determinen el número de personas que no leen alguno de los tres diarios.

1.3 Propiedades y operaciones con los números reales

1 Evaluar valores absolutos
2 Sumar números reales
3 Restar números reales
4 Multiplicar números reales
5 Dividir números reales
6 Usar las propiedades de los números reales

Para tener éxito en álgebra, debe entender cómo sumar, restar, multiplicar y dividir números reales. Antes de poder explicar la suma y resta de números reales necesitamos estudiar el valor absoluto.

Dos números, en la recta numérica, que están a la misma distancia del cero pero en direcciones opuestas se denominan **inversos aditivos**, **opuestos** o **simétricos** uno del otro. Por ejemplo, 3 es el inverso aditivo de -3, y -3 es el inverso aditivo de 3. El número 0 es su propio inverso aditivo. La suma de un número y su inverso aditivo es 0. ¿Cuáles son los inversos aditivos de -56.3 y $\frac{76}{5}$? Sus inversos aditivos son 56.3 y $-\frac{76}{5}$, respectivamente. Observe que el inverso aditivo de un número positivo es un número negativo y el inverso aditivo de un número negativo es un número positivo.

Inverso aditivo

Para cualquier número real a, su inverso aditivo es $-a$.

Considere el número -5. Su inverso aditivo es $-(-5)$. Como sabemos que este número debe ser positivo, esto implica que $-(-5) = 5$. Éste es un ejemplo de la propiedad del doble negativo.

Propiedad del doble negativo

Para cualquier número real a, $-(-a) = a$.

Por la propiedad del doble negativo, $-(-7.4) = 7.4$ y $-\left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{12}{5}$.

1 Evaluar valores absolutos

El **valor absoluto** de un número es su distancia, con respecto al 0, en una recta numérica. El símbolo | | se usa para denotar el valor absoluto.

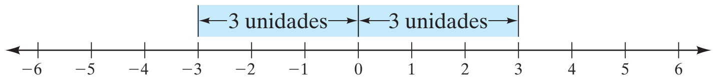


FIGURA 1.6

Considere los números 3 y −3 (**figura 1.6**). Ambos números están a 3 unidades del 0 en la recta numérica. Así,

$$|3| = 3 \quad \text{y} \quad |-3| = 3$$

EJEMPLO 1 ▸ Evalúe. **a)** $|7|$ **b)** $|-8.2|$ **c)** $|0|$

Solución

a) $|7| = 7$, ya que 7 está a 7 unidades del 0 en la recta numérica.

b) $|-8.2| = 8.2$, ya que −8.2 está a 8.2 unidades del cero en la recta numérica.

c) $|0| = 0$.

El valor absoluto de cualquier número distinto del cero siempre será un número positivo, y el valor absoluto del 0 es 0.

Para determinar el valor absoluto de un número real sin utilizar la recta numérica, use la definición siguiente.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 23**

Valor absoluto

Si a representa cualquier número real, entonces

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

La definición de valor absoluto indica que el valor absoluto de cualquier número no negativo, es él mismo, y el valor absoluto de cualquier número negativo es el inverso aditivo (opuesto) del número. El valor absoluto de un número puede determinarse por medio de la definición, como se ilustra a continuación.

$\lvert 6.3\rvert = 6.3$	Como 6.3 es mayor o igual a 0, su valor absoluto es 6.3.
$\lvert 0\rvert = 0$	Como 0 no es mayor o igual a 0, su valor absoluto es 0.
$\lvert -12\rvert = -(-12) = 12$	Como −12 es menor que 0, su valor absoluto es −(−12) o 12.

EJEMPLO 2 ▸ Evalúe por medio de la definición de valor absoluto.

a) $-|5|$ **b)** $-|-6.43|$

Solución

a) Tenemos que determinar el opuesto del valor absoluto de 5. Como el valor absoluto de 5 es positivo, su opuesto debe ser negativo.

$$-|5| = -(5) = -5$$

b) Debemos determinar el opuesto del valor absoluto de −6.43. Como el valor absoluto de −6.43 es positivo, su opuesto debe ser negativo.

$$-|-6.43| = -(6.43) = -6.43$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 31**

EJEMPLO 3 Inserte <, > o = en el área sombreada entre los dos valores para hacer que cada proposición sea verdadera.

a) $|8| \quad |-8|$ **b)** $|-1| \quad -|-3|$

Solución

a) Como $|8|$ y $|-8|$ son iguales a 8, tenemos $|8| = |-8|$.

b) Como $|-1| = 1$ y $-|-3| = -3$, tenemos $|-1| > -|-3|$.

Ahora resuelva el ejercicio 39

2 Sumar números reales

Primero estudiamos cómo sumar números con el mismo signo, ambos positivos o ambos negativos, y después estudiaremos cómo sumar dos números con signos diferentes, uno positivo y el otro negativo.

Para sumar dos números con el mismo signo (ambos positivos o ambos negativos)

Sume sus valores absolutos y coloque el signo común antes de la suma.

La suma de dos números positivos será un número positivo, y la suma de dos números negativos será un número negativo.

EJEMPLO 4 Evalúe $-4 + (-7)$.

Solución Como ambos números que se suman son negativos, la suma será negativa. Para determinar la suma, sume los valores absolutos de estos números y coloque un signo negativo antes del valor.

$$|-4| = 4 \qquad |-7| = 7$$

Ahora sume los valores absolutos.

$$|-4| + |-7| = 4 + 7 = 11$$

Como ambos números son negativos, la suma debe ser negativa. Así,

$$-4 + (-7) = -11$$

Ahora resuelva el ejercicio 55

Para sumar dos números con signos diferentes (uno positivo y el otro negativo)

Reste el valor absoluto menor del valor absoluto mayor. La respuesta tiene el signo del número con el valor absoluto más grande.

La suma de un número positivo y un número negativo puede ser positiva, negativa o cero. El signo de la respuesta será el mismo signo que el del número con mayor valor absoluto.

EJEMPLO 5 Evalúe $5 + (-9)$.

Solución Como los números que se suman son de signos opuestos, restamos el valor absoluto más pequeño del valor absoluto mayor. Primero tomamos cada valor absoluto.

$$|5| = 5 \qquad |-9| = 9$$

Ahora determinamos la diferencia, $9 - 5 = 4$. El número -9 tiene un valor absoluto mayor que el número 5, por lo que su suma es negativa.

$$5 + (-9) = -4$$

Ahora resuelva el ejercicio 53

EJEMPLO 6 ▸ Evalúe. **a)** $1.3 + (-2.7)$ **b)** $-\frac{7}{8} + \frac{5}{6}$

Solución

a) $1.3 + (-2.7) = -1.4$

b) Inicie escribiendo ambas fracciones con el menor denominador común, 24.

$$-\frac{7}{8} + \frac{5}{6} = -\frac{21}{24} + \frac{20}{24} = \frac{(-21) + 20}{24} = \frac{-1}{24} = -\frac{1}{24}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 59**

EJEMPLO 7 ▸ **Profundidad de depresiones oceánicas** La depresión Palau en el Océano Pacífico se encuentra a 26,424 pies bajo el nivel del mar. La depresión con mayor profundidad, la depresión Mariana, es 9416 pies más profunda que la depresión Palau (vea la **figura 1.7**). Determine la profundidad de la depresión Mariana.

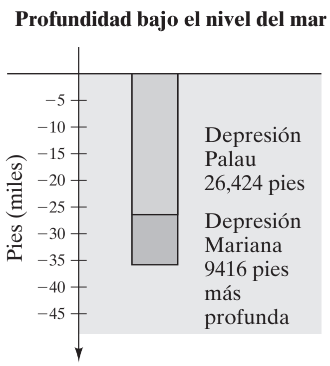


FIGURA 1.7

Solución Considere la distancia bajo el nivel del mar como negativa. Por lo tanto, la profundidad total es

$$-26{,}424 + (-9416) = -35{,}840 \text{ pies}$$

o 35,840 pies bajo el nivel del mar.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 137**

3 Restar números reales

Todo problema de sustracción puede expresarse como un problema de suma por medio de la regla siguiente.

Resta de números reales

$$a - b = a + (-b)$$

Para restar *b* de *a*, sume el opuesto (o inverso aditivo) de *b* a *a*.

Por ejemplo, $5 - 7$ significa $5 - (+7)$. Para restar $5 - 7$, sume el opuesto de $+7$, que es -7, a 5.

$$5 - 7 = 5 + (-7)$$

restar   positivo 7   sumar   negativo 7

Como $5 + (-7) = -2$, entonces $5 - 7 = -2$.

EJEMPLO 8 ▸ Evalúe. **a)** $3 - 8$ **b)** $-6 - 4$

Solución **a)** $3 - 8 = 3 + (-8) = -5$ **b)** $-6 - 4 = -6 + (-4) = -10$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 89**

EJEMPLO 9 ▸ Evalúe $8 - (-15)$.

Solución En este problema, restamos un número negativo. El procedimiento para restar permanece sin cambio.

$$8 - (-15) = 8 + 15 = 23$$

restar   negativo 15   sumar   positivo 15

Así, $8 - (-15) = 23$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 91**

Al estudiar el ejemplo 9 y problemas similares, podemos ver que para cualesquiera números reales a y b,

$$a - (-b) = a + b$$

Podemos utilizar este principio para evaluar problemas tales como $8 - (-15)$ y otros problemas en donde *restamos una cantidad negativa*.

Propiedad del doble negativo

$$-(-a) = a$$

EJEMPLO 10 Evalúe $-4 - (-11)$.

Solución $-4 - (-11) = -4 + 11 = 7$

Ahora resuelva el ejercicio 57

EJEMPLO 11 **a)** Reste 35 de -42 **b)** Reste $-\frac{3}{5}$ de $-\frac{5}{9}$.

Solución

a) $-42 - 35 = -77$

b) $-\frac{5}{9} - \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{5}{9} + \frac{3}{5} = -\frac{25}{45} + \frac{27}{45} = \frac{2}{45}$

Ahora resuelva el ejercicio 109

EJEMPLO 12 **Temperaturas extremas** La temperatura más alta registrada en Estados Unidos fue 134°F, que ocurrió en Greenland Ranch, California en el Valle de la Muerte el 10 de julio de 1913. La temperatura más baja registrada en Estados Unidos fue −79.8°F, que ocurrió en Prospect Creek Camp, Alaska, en las Montañas Endicott el 23 de enero de 1971 (vea la **figura 1.8**). Determine la diferencia entre estas dos temperaturas. *Fuente:* Sitio web Learning Network Internet.

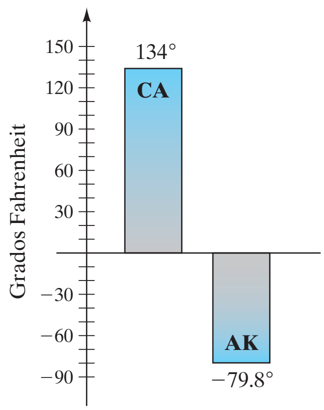


FIGURA 1.8

Solución Para determinar la diferencia, restamos.

$$134° - (-79.8°) = 134° + 79.8° = 213.8°$$

Ahora resuelva el ejercicio 135

Con frecuencia la suma y resta están combinadas en el mismo problema, como en los ejemplos siguientes. A menos que haya paréntesis, si la expresión sólo incluye sumas y restas, sumamos y restamos de izquierda a derecha. Cuando se utilizan paréntesis sumamos y restamos, primero dentro de los paréntesis. Después sumamos y restamos de izquierda a derecha.

EJEMPLO 13 Evalúe $-15 + (-37) - (5 - 9)$.

Solución

$$\begin{aligned} -15 + (-37) - (5 - 9) &= -15 + (-37) - (-4) \\ &= -15 - 37 + 4 \\ &= -52 + 4 = -48 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 95

EJEMPLO 14 Evalúe $2 - |-3| + 4 - (6 - |-7|)$.

Solución Inicie reemplazando los números entre signos de valor absoluto con sus equivalentes numéricos, luego evalúe.

$$\begin{aligned} 2 - |-3| + 4 - (6 - |-7|) &= 2 - 3 + 4 - (6 - 7) \\ &= 2 - 3 + 4 - (-1) \\ &= 2 - 3 + 4 + 1 \\ &= -1 + 4 + 1 \\ &= 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 69

4 Multiplicar números reales

Las reglas siguientes se emplean en la determinación del producto cuando se multiplican dos números.

Multiplicar dos números reales

1. Para multiplicar dos números con **signos iguales**, ambos positivos o ambos negativos, multiplique sus valores absolutos. La respuesta es **positiva**.
2. Para multiplicar dos números con **signos diferentes**, uno positivo y el otro negativo, multiplique sus valores absolutos. La respuesta es **negativa**.

EJEMPLO 15 Evalúe **a)** $(4.2)(-1.6)$ **b)** $(-18)\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Solución

a) $(4.2)(-1.6) = -6.72$ *Los números tienen signos diferentes.*

b) $(-18)\left(-\frac{1}{2}\right) = 9$ *Los números tienen signos iguales, ambos negativos.*

Ahora resuelva el ejercicio 75

EJEMPLO 16 Evalúe $4(-2)(-3)(1)$.

Solución $4(-2)(-3)(1) = (-8)(-3)(1) = 24(1) = 24$

Ahora resuelva el ejercicio 77

Cuando multiplicamos más de dos números, el producto será *negativo* cuando exista un número impar de números *negativos*. El producto será positivo cuando exista un número par de números negativos.

La propiedad del cero en la multiplicación indica que el producto de 0 y cualquier número es 0.

Propiedad del cero en la multiplicación

Para cualquier número a,

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Por la propiedad anterior, $5(0) = 0$ y $(-7.3)(0) = 0$.

EJEMPLO 17 Evalúe $9(5)(-2.63)(0)(4)$.

Solución Si uno o más factores es 0, el producto es 0. Así, $9(5)(-2.63)(0)(4) = 0$. ¿Puede explicar por qué el producto de cualquier número de factores será igual a 0 si cualquier factor es 0?

Ahora resuelva el ejercicio 111

5 Dividir números reales

Las reglas para la división de números reales son similares a las de la multiplicación de números reales.

Dividir dos números reales

1. Para dividir dos números con **signos iguales**, ambos positivos o ambos negativos, divida sus valores absolutos. La respuesta es **positiva**.
2. Para dividir dos números con **signos diferentes**, uno positivo y el otro negativo, divida sus valores absolutos. La respuesta es **negativa**.

EJEMPLO 18 Evalúe. **a)** $-24 \div 4$ **b)** $-6.45 \div (-0.4)$

Solución

a) $\dfrac{-24}{4} = -6$ *Los números tienen signos diferentes.*

b) $\dfrac{-6.45}{-0.4} = 16.125$ *Los números tienen signos iguales.*

Ahora resuelva el ejercicio 81

EJEMPLO 19 Evalúe $\dfrac{-3}{8} \div \left|\dfrac{-2}{5}\right|$.

Solución Como $\left|\dfrac{-2}{5}\right|$ es igual a $\dfrac{2}{5}$, escribimos

$$\frac{-3}{8} \div \left|\frac{-2}{5}\right| = \frac{-3}{8} \div \frac{2}{5}$$

Ahora invertimos el divisor y procedemos como en la multiplicación.

$$\frac{-3}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{-3}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{-3 \cdot 5}{8 \cdot 2} = \frac{-15}{16} \text{ o } -\frac{15}{16}$$

Ahora resuelva el ejercicio 85

Cuando el denominador de una fracción es un número negativo, por lo común reescribimos la fracción con un denominador positivo. Para hacerlo, usamos el hecho siguiente.

Signo de una fracción

Para cualquier número a y cualquier número b distinto de cero,

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

Así, cuando tenemos un cociente de $\dfrac{1}{-2}$, lo reescribimos como $\dfrac{-1}{2}$ o $-\dfrac{1}{2}$.

6 Usar las propiedades de los números reales

Ya hemos analizado la propiedad del doble negativo y la propiedad del cero en la multiplicación. La **tabla 1.1** lista otras propiedades básicas para las operaciones de suma y multiplicación de números reales.

TABLA 1.1

Para números reales *a*, *b* y *c*	**Suma**	**Multiplicación**
Propiedad conmutativa	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Propiedad asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
Propiedad de la identidad	$a + 0 = 0 + a = a$ (0 se elimina **elemento idéntico aditivo**)	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (1 se denomina **elemento idéntico multiplicativo**)
Propiedad del inverso	$a + (-a) = (-a) + a = 0$ ($-a$ se denomina **inverso aditivo** u **opuesto** de a)	$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ ($1/a$ se denomina **inverso multiplicativo** o **recíproco** de a, $a \neq 0$)
Propiedad distributiva (de la multiplicación sobre la suma)	$a(b + c) = ab + ac$	

Observe que la propiedad conmutativa implica un cambio en el *orden*, y la propiedad asociativa implica un cambio en la *agrupación*.

La propiedad distributiva se aplica cuando hay más de dos números dentro de los paréntesis.

$$a(b + c + d + \cdots + n) = ab + ac + ad + \cdots + an$$

Esta forma desarrollada de la propiedad distributiva con frecuencia se denomina *propiedad distributiva extendida*. Sin embargo, cuando usemos la propiedad distributiva extendida sólo nos referiremos a ella como la propiedad distributiva.

EJEMPLO 20 ▸ Diga el nombre de cada propiedad que se ilustra.

a) $7 \cdot m = m \cdot 7$ **b)** $(a + 8) + 2b = a + (8 + 2b)$

c) $4s + 5t = 5t + 4s$ **d)** $2v(w + 3) = 2v \cdot w + 2v \cdot 3$

Solución

a) Propiedad conmutativa de la multiplicación: cambio de orden, $7 \cdot m = m \cdot 7$

b) Propiedad asociativa de la suma: cambio en la agrupación, $(a + 4) + 2b = a + (4 + 2b)$.

c) Propiedad conmutativa de la suma: cambio de orden, $4s + 5t = 5t + 4s$.

d) Propiedad distributiva: $2v(w + 3) = 2v \cdot w + 2v \cdot 3$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 123**

En el ejemplo 20 **d)** la expresión $2v \cdot w + 2v \cdot 3$ puede simplificarse a $2vw + 6v$, por medio de las propiedades de los números reales. ¿Puede explicar por qué?

EJEMPLO 21 ▸ Diga el nombre de cada propiedad que se ilustra.

a) $9 \cdot 1 = 9$ **b)** $x + 0 = x$

c) $4 + (-4) = 0$ **d)** $1(x + y) = x + y$

Solución

a) Propiedad del idéntico multiplicativo.

b) Propiedad del idéntico aditivo.

c) Propiedad del inverso aditivo.

d) Propiedad del idéntico multiplicativo.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 125**

EJEMPLO 22 ▸ Escriba el inverso aditivo (u opuesto) y el inverso multiplicativo (o recíproco) de cada uno de los siguientes.

a) -3 **b)** $\frac{2}{3}$

Solución

a) El inverso aditivo es 3. El inverso multiplicativo es $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$.

b) El inverso aditivo es $-\frac{2}{3}$. El inverso multiplicativo es $\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 131**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué son los inversos aditivos u opuestos?
2. Proporcione un ejemplo de la propiedad del doble negativo.
3. ¿El valor absoluto de todo número real es un número positivo? Explique.
4. Dé la definición de valor absoluto.

En los ejercicios del 5 al 10, determine el o los números desconocidos. Explique cómo determinó su respuesta.

5. Todos los números a tales que $|a| = |-a|$.
6. Todos los números a tales que $|a| = a$.
7. Todos los números a tales que $|a| = 6$.
8. Todos los números a tales que $|a| = -a$.
9. Todos los números a tales que $|a| = -9$.
10. Todos los números x tales que $|x - 3| = |3 - x|$.
11. Explique cómo sumar dos números con signos iguales.
12. Explique cómo sumar dos números con signos diferentes.
13. Con sus palabras, explique cómo restar números reales.
14. Explique en qué se parecen las reglas para la multiplicación y la división de números reales.
15. Liste otras dos maneras en que puede escribirse la fracción $\frac{a}{-b}$.
16. **a)** Escriba la propiedad asociativa de la multiplicación.
    b) Explique la propiedad.
17. **a)** Escriba la propiedad conmutativa de la suma.
    b) Explique la propiedad.
18. **a)** Escriba la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma.
    b) Explique la propiedad.
19. Por medio de un ejemplo, explique por qué la suma no es distributiva sobre la multiplicación. Esto es, explique por qué $a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$.
20. Proporcione un ejemplo de la propiedad distributiva extendida.

Práctica de habilidades

Evalúe cada expresión con valor absoluto.

21. $|5|$
22. $|-8|$
23. $|-7|$
24. $|1.9|$
25. $\left|-\frac{7}{8}\right|$
26. $|-8.61|$
27. $|0|$
28. $-|1|$
29. $-|-7|$
30. $-|-\pi|$
31. $-\left|\frac{5}{9}\right|$
32. $-\left|-\frac{7}{15}\right|$

Inserte $<, >,$ o $=$ en el área sombreada para hacer verdadera cada proposición.

33. $|-9| \ \square \ |9|$
34. $|-4| \ \square \ |6|$
35. $|-8| \ \square \ -8$
36. $|-10| \ \square \ -5$
37. $|-\pi| \ \square \ -3$
38. $-|-1| \ \square \ -1$
39. $|-7| \ \square \ -|2|$
40. $-|9| \ \square \ -|13|$
41. $-(-3) \ \square \ -|-3|$
42. $|-(-4)| \ \square \ -4$
43. $|19| \ \square \ |-25|$
44. $-|-1| \ \square \ |-2|$

Liste los valores de menor a mayor.

45. $-1, -2, |-3|, 4, -|5|$
46. $-8, -12, -|9|, -|20|, -|-18|$
47. $-32, |-7|, 15, -|4|, 4$
48. $\pi, -\pi, |-3|, -|-3|, -2, |-2|$
49. $-6.1, |-6.3|, -|-6.5|, 6.8, |6.4|$
50. $-2.1, -2, -2.4, |-2.8|, -|2.9|$
51. $\frac{1}{3}, \left|-\frac{1}{2}\right|, -2, \left|\frac{3}{5}\right|, \left|-\frac{3}{4}\right|$
52. $\left|-\frac{5}{2}\right|, \frac{3}{5}, |-3|, \left|-\frac{5}{3}\right|, \left|-\frac{2}{3}\right|$

Evalúe cada problema de suma y resta.

53. $7 + (-4)$
54. $-2 + 5$
55. $-12 + (-10)$
56. $-2.18 - 3.14$
57. $-9 - (-5)$
58. $-12 - (-4)$
59. $\frac{4}{5} - \frac{6}{7}$
60. $-\frac{5}{12} - \left(-\frac{7}{8}\right)$
61. $-14.21 - (-13.22)$
62. $-1 - \frac{7}{16}$
63. $10 - (-2.31) + (-4.39)$
64. $-|7.31| - (-3.28) + 5.76$
65. $9.9 - |8.5| - |17.6|$
66. $|11 - 4| - 8$
67. $|17 - 12| - |3|$
68. $|12 - 5| - |5 - 12|$
69. $-|-3| - |7| + (6 + |-2|)$
70. $|-4| - |-4| - |-4 - 4|$
71. $\left(\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}$
72. $\frac{4}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$

Evalúe cada problema de multiplicación y división.

73. $-5 \cdot 8$ **74.** $(-9)(-3)$ **75.** $-4\left(-\frac{5}{16}\right)$ **76.** $-4\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$

77. $(-1)(-2)(-1)(2)(-3)$ **78.** $(-2.1)(-7.8)(-9.1)$ **79.** $(-1.1)(3.4)(8.3)(-7.6)$ **80.** $-16 \div 8$

81. $-55 \div (-5)$ **82.** $-4 \div \left(-\frac{1}{4}\right)$ **83.** $-\frac{5}{9} \div \frac{-5}{9}$ **84.** $\left|-\frac{1}{2}\right| \cdot \left|\frac{-3}{4}\right|$

85. $\left(-\frac{3}{4}\right) \div |-16|$ **86.** $\left|\frac{3}{8}\right| \div (-4)$ **87.** $\left|\frac{-7}{6}\right| \div \left|\frac{-1}{2}\right|$ **88.** $\frac{-5}{9} \div |-5|$

Evalúe.

89. $10 - 14$ **90.** $-12 - 15$ **91.** $7 - (-13)$

92. $-\frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{16}\right)$ **93.** $3\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)$ **94.** $(-3.2)(4.9)(-2.73)$

95. $-14.4 - (-9.6) - 15.8$ **96.** $(1.32 - 2.76) - (-3.85 + 4.28)$ **97.** $9 - (6 - 5) - (-2 - 1)$

98. $(4.2)(-1)(-9.6)(3.8)$ **99.** $-|12| \cdot \left|\frac{-1}{2}\right|$ **100.** $-\left|\frac{-24}{5}\right| \cdot \left|\frac{3}{8}\right|$

101. $\left|\frac{-9}{4}\right| \div \left|\frac{-4}{9}\right|$ **102.** $(-|3| + |5|) - (1 - |-9|)$ **103.** $5 - |-7| + 3 - |-2|$

104. $\left(\frac{3}{8} - \frac{4}{7}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$ **105.** $\left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{9}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)$ **106.** $(|-4| - 3) - (3 \cdot |-5|)$

107. $(25 - |32|)(-7 - 4)$ **108.** $\left[(-2)\left|-\frac{1}{2}\right|\right] \div \left|-\frac{1}{4}\right|$ **109.** Reste 29 de -10.

110. Reste $-\frac{1}{2}$ de $-\frac{2}{3}$. **111.** $7(3)(0)(-15.2)$ **112.** $16(-5)(-10)(0)$

Diga el nombre de cada propiedad ilustrada.

113. $r + s = s + r$ **114.** $5(v + w) = 5v + 5w$

115. $b \cdot 0 = 0$ **116.** $c \cdot d = d \cdot c$

117. $(x + 3) + 6 = x + (3 + 6)$ **118.** $x + 0 = x$

119. $x = 1 \cdot x$ **120.** $x(y + z) = xy + xz$

121. $2(xy) = (2x)y$ **122.** $(2x \cdot 3y) \cdot 4y = 2x \cdot (3y \cdot 4y)$

123. $4(x + y + 2) = 4x + 4y + 8$ **124.** $-(-1) = 1$

125. $5 + 0 = 5$ **126.** $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$

127. $3 + (-3) = 0$ **128.** $(x + y) = 1(x + y)$

129. $-(-x) = x$ **130.** $x + (-x) = 0$

Liste el inverso aditivo y el inverso multiplicativo para cada problema.

131. 6 **132.** -13 **133.** $-\frac{22}{7}$ **134.** $-\frac{3}{5}$

Resolución de problemas

135. Cambio de temperatura El cambio de temperatura más raro de acuerdo con el libro de récord mundiales *Guinness*, ocurrió de las 7:30 A.M. a las 7:32 A.M. el 22 de enero de 1943, en Spearfish, Dakota del Sur. Durante estos dos minutos la temperatura cambio de -4°F a 45°F. Determine el aumento en la temperatura en estos dos minutos.

136. Documental Gold Durante la producción del documental *Gold*, el equipo experimentó drásticos cambios en la temperatura. En una mina de oro en Sudáfrica, 3 millas bajo la superficie de la tierra, la temperatura fue de 140°F. En una montaña próxima a Cuzco, Perú, la temperatura fue de 40°F. Determine la diferencia en temperaturas entre estos dos escenarios de filmación. *Fuente:* sitio web del canal History.

137. Inmersión de un submarino Un submarino se sumerge 358.9 pies. Poco después el submarino sube 210.7 pies. Determine la profundidad final del submarino con respecto a su punto inicial. (Considere la distancia hacia abajo como negativa).

138. Cuenta de cheques Sharon Koch tenía un saldo de −$32.64 en su cuenta de cheques cuando depositó un cheque por $99.38. ¿Cuál es su nuevo saldo?

139. Temperaturas extremas La temperatura más baja registrada en Estados Unidos fue −79.8°F el 23 de enero de 1971, en Prospect Creek, Alaska. La temperatura más baja en estados colindantes (todos los estados excepto Alaska y Hawai) fue −69.7° F el 20 de enero de 1954, en Rogers Pass, Montana. Determine la diferencia entre estas temperaturas.

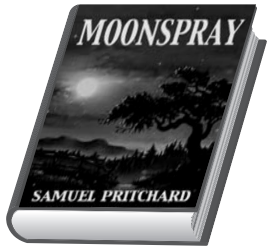
140. Impuestos estimados En 2006, Joanne Beebe realizó cuatro pagos trimestrales, de $3,000 cada uno, sobre los impuestos estimados. Cuando ella llenó los formatos de impuestos sobre los ingresos del año 2006, encontró que su impuesto total fue de $10,125.

a) ¿Joanne tendrá derecho a un reembolso o deberá más impuestos? Explique.

b) ¿Cuánto recibirá de reembolso o cuánto deberá de impuestos?

141. Precios de acciones Ron Blackwood compró 100 acciones de Home Depot en $30.30 por acción. Seis meses después, Ron vendió las 100 acciones a un precio de $42.37 por acción. ¿Cuál fue la ganancia o pérdida total de Ron en esta transacción?

142. Contrato editorial Samuel Pritchard firmó un contrato con una compañía editora que otorgó un pago por adelantado de $60,000 sobre la venta de su libro *Moon Spray*. Cuando el libro se publique y empiecen las ventas, los editores deducirán automáticamente este adelanto de las regalías del autor.



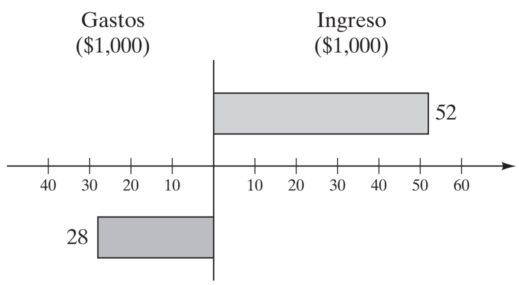
a) Seis meses después de la puesta en venta del libro, las regalías del autor totalizaron $47,600 antes de deducir el adelanto. Determine cuánto dinero el autor recibirá o deberá al editor.

b) Después de un año, las regalías son de $87,500. Determine cuánto dinero recibirá o deberá el autor a la editorial.

143. Redacte su propio problema realista que implique la resta de un número positivo de un número negativo. Indique la respuesta de su problema.

144. Redacte su propio problema realista que implique la resta de un número negativo de otro número negativo. Indique la respuesta de su problema.

145. Pequeñas empresas Los gastos promedio el primer año y los ingresos promedio el primer año, de pequeñas empresas que inician, se muestra en la siguiente gráfica de barras. Estime la utilidad promedio el primer año, restando los gastos promedio del primer año del ingreso promedio del primer año.



Retos

146. Evalúe $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 99 - 100$. (*Sugerencia:* Agrupe en parejas de dos números).

147. Evalúe $1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + 10 + 11 - 12 + \cdots + 22 + 23 - 24$. (*Sugerencia:* Examine en grupos de tres números).

148. Evalúe $\dfrac{(1)\cdot|-2|\cdot(-3)\cdot|4|\cdot(-5)}{|-1|\cdot(-2)\cdot|-3|\cdot(4)\cdot|-5|}$.

149. Evalúe $\dfrac{(1)(-2)(3)(-4)(5)\cdots(97)(-98)}{(-1)(2)(-3)(4)(-5)\cdots(-97)(98)}$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **150.** Responda verdadero o falso: Todo número racional es un número real.

151. Liste el conjunto de los números naturales.

152. Considere el conjunto $\left\{3, 4, -2, \frac{5}{6}, \sqrt{11}, 0\right\}$. Liste los elementos que son

a) números enteros,

b) números racionales,

c) números irracionales,

d) números reales.

153. $A = \{4, 7, 9, 12\}$; $B = \{1, 4, 7, 15\}$. Determine

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

154. Ilustre $\{x| -4 < x \leq 5\}$ en una recta numérica.

1.4 Orden de las operaciones

1 Evaluar expresiones exponenciales
2 Evaluar raíces cuadradas y raíces de orden superior
3 Evaluar expresiones por medio del orden de las operaciones
4 Evaluar expresiones que contengan variables
5 Evaluar expresiones en una calculadora graficadora

Antes de estudiar el orden de las operaciones, necesitamos hablar brevemente acerca de los exponentes y las raíces. Estudiaremos los exponentes con mayor profundidad en las secciones 1.5 y 7.2.

1 Evaluar expresiones exponenciales

En un problema de multiplicación, los números o expresiones que se multiplican se denominan **factores**. Si $a \cdot b = c$, entonces a y b son factores de c. Por ejemplo, como $2 \cdot 3 = 6$, entonces 2 y 3 son factores de 6. El número 1 es un factor de todo número y expresión. ¿Puede explicar por qué?

La cantidad 3^2 se denomina **expresión exponencial**. En la expresión, al 3 se le llama **base** y al 2 se le denomina **exponente**. La expresión 3^2 se lee "tres al cuadrado" o "tres a la segunda potencia". Observe que

$$3^2 = \underbrace{3 \cdot 3}_{\text{2 factores 3}}$$

La expresión 5^3 se lee "cinco al cubo" o "cinco a la tercera potencia". Observe que

$$5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{3 factores 5}}$$

En general, la base b a la n-ésima potencia se escribe b^n. Para cualquier número natural n

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores } b}$$

Observe que 0^0 está *indefinido*.

EJEMPLO 1 Evalúe. **a)** $(0.5)^3$ **b)** $(-3)^5$ **c)** 1^{27} **d)** $\left(-\frac{4}{7}\right)^3$

Solución

a) $(0.5)^3 = (0.5)(0.5)(0.5) = 0.125$

b) $(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = -243$

c) $1^{25} = 1$; 1 elevado a cualquier potencia será igual a 1. ¿Por qué?

d) $\left(-\frac{4}{7}\right)^3 = \left(-\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{64}{343}$

Ahora resuelva el ejercicio 19

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

Sea cuidadoso cuando escriba o copie exponentes. Como los exponentes son pequeños es muy fácil escribir o copiar un exponente y luego más tarde no reconocer lo que ha escrito. Algunos exponentes que se pueden confundir con facilidad, si no se escriben con claridad, son 1 y 7, 2 y 3, 3 y 5, 4 y 9, 5 y 6 y 5 y 8.

No es necesario escribir exponentes de 1. Siempre que encuentre un valor numérico o una variable sin un exponente, suponga que tiene un exponente de 1. Así, 3 significa 3^1, x significa x^1, x^3y significa x^3y^1 y $-xy$ significa $-x^1y^1$.

Con frecuencia los estudiantes evalúan de manera incorrecta expresiones que incluyen $-x^2$. La expresión $-x^2$ significa $-(x^2)$, no $(-x)^2$. Observe que -5^2 significa $-(5^2) = -(5 \cdot 5) = -25$, mientras que $(-5)^2$ significa $(-5)(-5) = 25$. *En general,* $-x^m$ significa $-(x^m)$, no $(-x)^m$. La expresión $-x^2$ se lee *negativo de x al cuadrado* o *el opuesto de* x^2. La expresión $(-x)^2$ se lee *el cuadrado del negativo de x*.

EJEMPLO 2 ▸ Evalúe $-x^2$ para cada valor de x. **a)** 6 **b)** -6.

Solución

a) $-x^2 = -(6)^2 = -36$

b) $-x^2 = -(-6)^2 = -(36) = -36$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 41**

EJEMPLO 3 ▸ Evalúe $-5^2 + (-5)^2 - 4^3 + (-4)^3$.

Solución Primero, evaluamos cada expresión exponencial. Luego sumamos o restamos, trabajando de izquierda a derecha.

$$\begin{aligned} -5^2 + (-5)^2 - 4^3 + (-4)^3 &= -(5^2) + (-5)^2 - (4^3) + (-4)^3 \\ &= -25 + 25 - 64 + (-64) \\ &= -25 + 25 - 64 - 64 \\ &= -128 \end{aligned}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 59**

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA Evaluación de expresiones exponenciales en una calculadora científica y en una calculadora graficadora

En las calculadoras científicas y en las graficadoras puede usarse la tecla $\boxed{x^2}$ para elevar un número al cuadrado. A continuación mostramos la secuencia de teclas a pulsar para evaluar 5^2.

Calculadora científica: $5\ \boxed{x^2}\ \underbrace{25}_{\text{respuesta que se muestra}}$

Calculadora graficadora: $5\ \boxed{x^2}\ \boxed{\text{ENTER}}\ \underbrace{25}_{\text{respuesta que se muestra}}$

Para evaluar expresiones exponenciales con otros exponentes, puede utilizar la tecla $\boxed{y^x}$ o $\boxed{\wedge}$ La mayoría de las calculadoras científicas tienen una tecla* $\boxed{y^x}$, mientras que las calculadoras graficadoras utilizan la tecla $\boxed{\wedge}$ Para evaluar expresiones exponenciales por medio de estas teclas, primero introduzca la base, luego presione la tecla $\boxed{y^x}$ o $\boxed{\wedge}$, y después introduzca el exponente. Por ejemplo, para evaluar 6^4 procedemos como sigue:

Calculadora científica $6\ \boxed{y^x}\ 4\ \boxed{=}\ \underbrace{1296}_{\text{respuesta que se muestra}}$

Calculadora graficadora: $6\ \boxed{\wedge}\ 4\ \boxed{\text{ENTER}}\ \underbrace{1296}_{\text{respuesta que se muestra}}$

* Algunas calculadoras tienen las teclas $\boxed{x^y}$ o $\boxed{a^b}$ en lugar de la tecla $\boxed{y^x}$.

2 Evaluar raíces cuadradas y raíces de orden superior

El símbolo que se usa para indicar una raíz, $\sqrt{}$, se denomina **signo radical**. El número o expresión dentro del signo radical se llama **radicando**. En $\sqrt{25}$, el radicando es 25. La **raíz cuadrada principal o positiva** de un número positivo a, escrita $\sqrt{a}$, es el número positivo que cuando se multiplica por él mismo da a. Por ejemplo, la raíz cuadrada principal de 4 es 2, se escribe $\sqrt{4} = 2$, ya que $2 \cdot 2 = 4$. En general, $\sqrt{a} = b$ si $b \cdot b = a$. Siempre que usemos las palabras *raíz cuadrada*, estaremos haciendo referencia a la "raíz cuadrada principal".

EJEMPLO 4 ▸ Evalúe. **a)** $\sqrt{25}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{81}{4}}$ **c)** $\sqrt{0.64}$ **d)** $-\sqrt{49}$

Solución

a) $\sqrt{25} = 5$, ya que $5 \cdot 5 = 25$.

b) $\sqrt{\dfrac{81}{4}} = \dfrac{9}{2}$, ya que $\dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{9}{2} = \dfrac{81}{4}$.

c) $\sqrt{0.64} = 0.8$, ya que $(0.8)(0.8) = 0.64$.

d) $-\sqrt{49}$ significa $-(\sqrt{49})$. Determinamos que $\sqrt{49} = 7$, ya que $7 \cdot 7 = 49$. Por lo tanto, $-\sqrt{49} = -7$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 21**

La raíz cuadrada de 4, $\sqrt{4}$, es un número racional ya que es igual a 2. Las raíces cuadradas de otros números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$, son números irracionales. Los valores decimales de tales números nunca pueden darse con exactitud, ya que los números irracionales son números decimales no periódicos. El valor aproximado de $\sqrt{2}$ y de otros números irracionales puede determinarse con una calculadora.

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562 \qquad \text{En una calculadora}$$

En esta sección introducimos las raíces cuadradas; las raíces cúbicas, simbolizadas por $\sqrt[3]{}$; y raíces de orden superior. El número utilizado para indicar la raíz se denomina **índice**.

índice ↘ signo radical ↙

$\sqrt[n]{a}$ ← radicando

El índice de una raíz cuadrada es 2. Sin embargo, por lo general no se escribe el índice. Por lo tanto, $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$.

El concepto usado para explicar raíces cuadradas puede ampliarse para explicar raíces cúbicas y raíces de orden superior. La raíz cúbica de un número a se escribe $\sqrt[3]{a}$.

$$\sqrt[3]{a} = b \quad \text{si} \quad \underbrace{b \cdot b \cdot b}_{\text{3 factores } b} = a$$

Por ejemplo, $\sqrt[3]{8} = 2$, ya que $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. La expresión $\sqrt[n]{a}$ se lee "raíz n-ésima de a".

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores } b} = a$$

EJEMPLO 5 ▸ Evalúe. **a)** $\sqrt[3]{125}$ **b)** $\sqrt[4]{81}$ **c)** $\sqrt[5]{32}$

Solución

a) $\sqrt[3]{125} = 5$, ya que $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

b) $\sqrt[4]{81} = 3$, ya que $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

c) $\sqrt[5]{32} = 2$, ya que $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 25**

EJEMPLO 6 ▸ Evalúe. **a)** $\sqrt[4]{256}$ **b)** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}$ **c)** $\sqrt[3]{-8}$ **d)** $-\sqrt[3]{8}$

Solución

a) $\sqrt[4]{256} = 4$, ya que $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$.

b) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \dfrac{1}{3}$, ya que $\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27}$.

c) $\sqrt[3]{-8} = -2$, ya que $(-2)(-2)(-2) = -8$.

d) $-\sqrt[3]{8}$ significa $-(\sqrt[3]{8})$. Determinamos que $\sqrt[3]{8} = 2$, ya que $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Por lo tanto, $-\sqrt[3]{8} = -2$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 27**

Observe que en el ejemplo 6 **c)** la raíz cúbica de un número negativo es negativa. ¿Por qué sucede esto? Analizaremos los radicales con mayor detalle en el capítulo 7.

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA **Evaluación de raíces en una calculadora científica**

Las raíces cuadradas de números pueden determinarse en una calculadora con la tecla de raíz cuadrada, $\boxed{\sqrt{x}}$. Para evaluar $\sqrt{25}$ en la mayoría de las calculadoras que tienen esta tecla, presione.

$$25 \ \boxed{\sqrt{x}} \ 5 \quad \leftarrow \text{respuesta mostrada}$$

Raíces de orden superior pueden determinarse en calculadoras que tienen la tecla $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ o la tecla* $\boxed{y^x}$. Para evaluar $\sqrt[4]{625}$ en una calculadora con la tecla $\boxed{\sqrt[x]{y}}$, haga lo siguiente:

$$625 \ \boxed{\sqrt[x]{y}} \ 4 \ \boxed{=} \ 5 \quad \leftarrow \text{respuesta mostrada}$$

Observe que el número dentro del signo radical (el radicando), 625, se introduce, luego se presiona la tecla $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ y después se introduce la raíz (o índice) 4. Cuando se presiona la tecla $\boxed{=}$, aparece la respuesta 5.

Para evaluar $\sqrt[4]{625}$ en una calculadora con la tecla $\boxed{y^x}$, utilice la tecla "inverso" como sigue:

$$625 \ \boxed{\text{INV}} \ \boxed{y^x} \ 4 \ \boxed{=} \ 5 \quad \leftarrow \text{respuesta mostrada}$$

* Las teclas de las calculadoras varían. Algunas tienen las teclas $\boxed{x^y}$ o $\boxed{a^b}$ en lugar de la tecla $\boxed{y^x}$ y algunas calculadoras tienen una tecla $\boxed{2^{\text{nd}}}$ o $\boxed{\text{shift}}$ en lugar de la tecla $\boxed{\text{INV}}$.

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA **Evaluación de raíces en una calculadora graficadora**

Para determinar la raíz cuadrada en una calculadora graficadora, use $\sqrt{\ }$. El símbolo $\sqrt{\ }$ aparece arriba de la tecla $\boxed{x^2}$, así que usted necesitará presionar la tecla $\boxed{2^{\text{nd}}}$ para evaluar las raíces cuadradas. Por ejemplo, para evaluar $\sqrt{25}$ presione

$$\boxed{2^{\text{nd}}} \ \boxed{x^2} \ 25 \ \boxed{\text{ENTER}} \ 5 \longleftarrow \text{respuesta mostrada}$$

Cuando presiona $\boxed{2^{\text{nd}}}\ \boxed{x^2}$, la Texas Instruments TI-84 Plus genera $\boxed{\text{ENTER}}$. (Luego inserte el radicando, después el paréntesis derecho y presione $\sqrt{\ }$.) Para aprender cómo encontrar raíces cúbicas y superiores, consulte el manual de su calculadora graficadora. Con la TI-84 Plus, puede usar la tecla $\boxed{\text{MATH}}$. Cuando presione esta tecla obtendrá varias opciones incluyendo la 4 y la 5, que se muestran a continuación.

$$4{:}\ \sqrt[3]{\ }(\qquad 5{:}\ \sqrt[x]{y}$$

La opción 4 puede usarse para determinar las raíces cúbicas y la opción 5 para determinar raíces superiores, como se muestra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO Evalúe $\sqrt[3]{120}$.

Solución

$$\boxed{\text{MATH}} \ \underset{\text{seleccionar opción 4}}{4} \ \underbrace{120}_{\text{ingresar el radicando}} \ \boxed{)} \ \boxed{\text{ENTER}} \ 4.932424149 \quad \leftarrow \text{respuesta mostrada}$$

(*continúa en la página siguiente*)

Para encontrar la raíz con un índice mayor que 3, primero introduzca el índice, luego presione la tecla $\boxed{\text{MATH}}$ y después presione la opción 5.

EJEMPLO Evalúe $\sqrt[4]{625}$.

Solución

$$\underset{\text{índice}}{4}\ \boxed{\text{MATH}}\ \underset{\substack{\text{seleccionar}\\ \text{opción}}}{5}\ \underbrace{625}_{\substack{\text{ingresar}\\ \text{radicando}}}\ \boxed{)}\ \boxed{\text{ENTER}}\ \overset{\text{respuesta mostrada}}{5}$$

En la sección 7.2 mostraremos otra forma de determinar raíces en una calculadora graficadora, cuando estudiemos exponentes racionales.

3 Evaluar expresiones por medio del orden de las operaciones

Con frecuencia tendremos que evaluar expresiones que tienen varias operaciones. Para hacerlo, siga el **orden (o jerarquía) de las operaciones** indicado a continuación.

Orden de las operaciones

Para evaluar expresiones matemáticas, observe el orden siguiente:

1. Primero, evalúe las expresiones dentro de símbolos de agrupación, como son paréntesis ( ), corchetes [ ], llaves { } y valor absoluto | |. Si la expresión contiene símbolos de agrupación anidados (una pareja de símbolos de agrupación dentro de otro par), primero evalúe las expresiones dentro de los símbolos de agrupación más internos.
2. Después, evalúe todos los términos que tengan exponentes y raíces.
3. A continuación, evalúe todas las multiplicaciones y divisiones, en el orden en que aparezcan, trabajando de izquierda a derecha.
4. Por último, evalúe todas las sumas y restas en el orden en que aparezcan, trabajando de izquierda a derecha.

Debe notarse que una barra de fracción actúa como un símbolo de agrupación. Así, al evaluar expresiones que tienen una barra de fracción, trabajamos de forma separada arriba y abajo de la barra de fracción.

Con frecuencia, los corchetes se usan en lugar de paréntesis para evitar alguna confusión. Por ejemplo, la expresión $7((5 \cdot 3) + 6)$ es más fácil de seguir cuando se escribe $7[(5 \cdot 3) + 6]$. Recuerde evaluar primero el grupo más interno.

EJEMPLO 7 ▸ Evalúe $6 + 3 \cdot 5^2 - 10$.

Solución Usaremos el sombreado para indicar el orden en que se evalúan las operaciones. Como no hay paréntesis, primero evaluamos 5^2.

$$6 + 3 \cdot 5^2 - 10 = 6 + 3 \cdot 25 - 10$$

Después, realizamos las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.

$$= 6 + 75 - 10$$

Por último, realizamos las sumas y restas de izquierda a derecha.

$$= 81 - 10$$
$$= 71$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 67**

EJEMPLO 8 Evalúe $10 + \{6 - [4(5 - 2)]\}^2$.

Solución Primero, evalúe la expresión dentro de los paréntesis más internos. Luego continúe de acuerdo con el orden de las operaciones.

$$\begin{aligned} 10 + \{6 - [4(5 - 2)]\}^2 &= 10 + \{6 - [4(3)]\}^2 \\ &= 10 + [6 - (12)]^2 \\ &= 10 + (-6)^2 \\ &= 10 + 36 \\ &= 46 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 77

EJEMPLO 9 Evalúe $\dfrac{6 \div \frac{1}{2} + 5|7 - 3|}{1 + (3 - 5) \div 2}$.

Solución Recuerde que la barra de fracción actúa como un símbolo de agrupación. Trabaje de manera separada arriba y abajo de la barra de fracción.

$$\begin{aligned} \frac{6 \div \frac{1}{2} + 5|7 - 3|}{1 + (3 - 5) \div 2} &= \frac{6 \div \frac{1}{2} + 5|4|}{1 + (-2) \div 2} \\ &= \frac{12 + 20}{1 + (-1)} \\ &= \frac{32}{0} \end{aligned}$$

Como la división entre cero no es posible, la expresión original **no está definida**.

Ahora resuelva el ejercicio 83

4 Evaluar expresiones que contengan variables

Para evaluar expresiones matemáticas, usamos el orden de las operaciones que se acaban de dar. El ejemplo 10 es un problema de aplicación en el que usamos el orden de las operaciones.

EJEMPLO 10 **Remedios alternos** La frustración con la medicina tradicional ha llevado a los estadounidenses a intentar remedios alternos, tales como vitaminas, hierbas y otros suplementos disponibles sin una prescripción médica. Las ventas aproximadas de tales suplementos entre 1997 y 2004, en miles de millones de dólares, puede estimarse por medio de la ecuación

$$\text{ventas} = -0.063x^2 + 1.62x + 9.5$$

donde x representa años desde 1997. En la expresión del lado derecho del signo de igualdad, sustituya 1 por x para estimar las ventas de suplementos en 1998, 2 por x para estimar las ventas de suplementos en 1999, y así sucesivamente.

Estime las ventas de suplementos durante **a)** 1998 y **b)** 2002.

Solución

a) Sustituiremos 1 por x para estimar las ventas de suplementos en 1998.

$$\begin{aligned} \text{ventas} &= -0.063x^2 + 1.62x + 9.5 \\ &= -0.063(1)^2 + 1.62(1) + 9.5 \\ &= -0.063 + 1.62 + 9.5 \\ &= 11.057 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en 1998 las ventas de suplementos en Estados Unidos fueron de alrededor de \$11.057 miles de millones.

b) El año 2002 corresponde al número 5. Podemos obtener el 5 restando 1997 de 2002. Por lo tanto, para estimar las ventas de suplementos en 2002, sustituimos 5 por x en la ecuación.

$$\begin{aligned} \text{ventas} &= -0.063x^2 + 1.62x + 9.5 \\ &= -0.063(5)^2 + 1.62(5) + 9.5 \\ &= -0.063(25) + 8.1 + 9.5 \\ &= 16.025 \end{aligned}$$

La respuesta es razonable: Con base en la información dada esperábamos ver un aumento. En 2002, las ventas de suplementos en Estados Unidos fueron de alrededor de $16.025 miles de millones.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 121**

EJEMPLO 11 ▸ Evalúe $-x^3 - xy - y^2$ cuando $x = -2$ y $y = 5$.

Solución Sustituya -2 por cada x y 5 por cada y en la expresión. Después evalúe.

$$\begin{aligned} -x^3 - xy - y^2 &= -(-2)^3 - (-2)(5) - (5)^2 \\ &= -(-8) - (-10) - 25 \\ &= 8 + 10 - 25 \\ &= -7 \end{aligned}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 101**

5 Evaluar expresiones en una calculadora graficadora

A lo largo de este libro, el material presentado en **calculadoras graficadoras** (o graficadoras) con frecuencia reforzará los conceptos presentados. Por tanto, incluso si no tiene o no utiliza una calculadora graficadora, debe leer el material relativo a las calculadoras graficadoras siempre que aparezca. Puede darse cuenta que realmente le ayudan a comprender los conceptos. Alguna parte de la información de las calculadoras graficadoras se dará como texto común, y otra se proveerá en los recuadros Cómo usar su calculadora graficadora, tal como el de la página 31.

La información presentada en este libro no significa reemplazar el manual que viene con su calculadora graficadora. Por las limitaciones de espacio en este libro, el manual de su calculadora graficadora puede proporcionarle información más detallada de algunas tareas analizadas. Su manual también ilustrará muchos otros usos para su calculadora graficadora más allá de lo que estudiamos en este curso. La secuencia de teclas para usarlas varía de una calculadora a otra. Cuando ilustremos secuencias de teclas y pantallas, serán para las calculadoras Texas Instruments TI-83 Plus y TI-84 Plus. Aunque las pantallas y secuencias de teclas son las mismas para las Texas Instruments TI-83 Plus y TI-84 Plus, durante los análisis nos referiremos a la TI-84 Plus. *Le sugerimos que lea cuidadosamente el manual que viene con su calculadora* graficadora *para determinar la secuencia de teclas a usar para realizar tareas específicas.*

Muchas calculadoras graficadoras pueden almacenar una expresión (o ecuación) y luego evaluar la expresión para diferentes valores de la variable o variables sin tener que reintroducir la expresión cada vez. Esto es muy valioso en cursos de matemáticas y de ciencias. Por ejemplo, cuando grafiquemos en el capítulo 3, necesitaremos evaluar una expresión para varios valores de la variable.

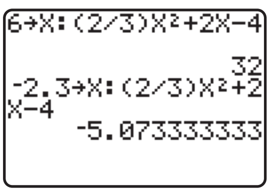


FIGURA 1.9

La **figura 1.9** muestra la pantalla de una calculadora graficadora TI-84 Plus que muestra la expresión $\frac{2}{3}x^2 + 2x - 4$ al ser evaluada para $x = 6$ y $x = -2.3$.

En la pantalla de esta calculadora, $6 \rightarrow X$ muestra que asignamos el valor 6 a X. La expresión a ser evaluada, $(2/3)X^2 + 2X - 4$, se muestra después de los dos puntos. El 32 que se muestra a la derecha de la pantalla (o ventana) es el valor de la expresión cuando $X = 6$. En la siguiente línea, en el lado izquierdo de la pantalla, vemos $-2.3 \rightarrow X$, que muestra que un valor de -2.3 se ha asignado a X. Vemos que el valor de la expresión es -5.073333333 cuando $X = -2.3$. Después que ha introducido la expresión a evaluar no es necesario volver a hacerlo para evaluarla para un valor diferente de la variable. Lea el manual de su calculadora graficadora para aprender cómo evaluar una expresión para diferentes valores de la variable sin tener que reintroducir la expresión cada vez. En la TI-84 Plus, después de evaluar una expresión para un valor de la variable, puede presionar $\boxed{2^{\text{nd}}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ para desplegar el valor asignado previamente y la expresión que se evalúa. Entonces puede reemplazar el valor que fue asignado a X con el nuevo valor que se asignará a X. Después de hacer esto y presionar $\boxed{\text{ENTER}}$ se mostrará la respuesta nueva.

La pantalla de la calculadora mostrada en la **figura 1.9** ilustra dos puntos importantes con respecto a calculadoras graficadoras.

1. Observe los paréntesis alrededor del 2/3. Algunas calculadoras graficadoras interpretan $2/3x^2$ como $2/(3x^2)$. Para evaluar $\frac{2}{3}x^2$ en tales calculadoras, debe usar paréntesis alrededor del 2/3. Debe aprender cómo evalúa su calculadora expresiones tales como $2/3x^2$. *Siempre que tenga duda, utilice paréntesis para prevenir posibles errores.*
2. En la pantalla, observará que el signo negativo que precede al 2.3 es ligeramente menor y está más arriba que el signo de resta precediendo al 4 en la expresión. Por lo regular, la calculadora graficadora tiene una tecla de signo negativo, $\boxed{(-)}$ y una tecla del signo de sustracción, $\boxed{-}$. Debe estar seguro de utilizar la tecla correcta u obtendrá un error. La tecla del signo negativo se usa para introducir un número negativo. La tecla de sustracción se emplea para restar una cantidad de otra. Para introducir la expresión $-x - 4$ en una calculadora graficadora, podría presionar

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{signo negativo}}}{\boxed{(-)}}\ \boxed{\text{X, T, }\Theta\text{, n}}\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sustracción}}}{\boxed{-}}\ \boxed{4}$$

Recuerde que $-x - 4$ significa $-1x - 4$. Al iniciar con $\boxed{(-)}$ introduce el coeficiente -1. Diferentes calculadoras usan diferentes teclas para introducir la variable x. La tecla que se muestra después del signo negativo es la tecla empleada en la calculadora TI-84 Plus.

EJEMPLO 12 ▸ **Precio promedio de venta de casas** Tasas bajas de interés, fácil crédito y fuerte demanda de la clase media han controlado el precio promedio de venta de casas en Estados Unidos de 1992 a 2006. El precio promedio de una casa, en miles de dólares, durante este periodo puede estimarse por

$$\text{precio promedio de venta} = 0.71x^2 + 2.16x + 145.39$$

donde x representa años desde 1992. En la expresión del lado derecho del signo de igualdad, sustituya 1 por x para estimar el precio promedio de venta de una casa en 1993, 2 por x para estimar el precio promedio de venta en 1994, y así sucesivamente. Utilice una calculadora graficadora, si tiene disponible, para estimar el precio promedio de venta de una casa en **a)** 1995 y **b)** 2006.

Fuente: National Association of Realtors

Solución

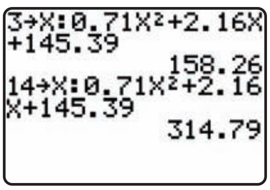


FIGURA 1.10

a) El año 1995 corresponde a $x = 3$, de modo que primero asignamos a x un valor de 3, luego introduzca la expresión, y presione $\boxed{\text{ENTER}}$. La **figura 1.10** muestra la pantalla para una calculadora TI-84 Plus con la expresión evaluada para $x = 3$. De la pantalla vemos que el precio promedio de venta de una casa en 1995 fue aproximadamente 158.26 miles de dólares o $158,260.

b) Como $2006 - 1992 = 14$, el año 2006 corresponde a $x = 14$. Primero asignamos a x un valor de 14, después reintroducimos la expresión, y presionamos $\boxed{\text{ENTER}}$. De la **figura 1.10** vemos que el precio promedio de venta de una casa en 2006 fue de aproximadamente $314.79 miles de dólares o $314,790.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 122**

Sugerencia útil

Siempre revise la pantalla de su calculadora para asegurarse que ninguna tecla se presionó de manera incorrecta y no se omitió tecla alguna. Observe que no es necesario introducir el 0 antes del punto decimal en términos como $-0.71x^2$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Considere la expresión a^n.
   a) ¿Cómo se denomina a a?
   b) ¿Cómo se denomina a n?
2. ¿Cuál es el significado de a^n?
3. Considere la expresión radical $\sqrt[n]{a}$.
   a) ¿Cómo se denomina a n?
   b) ¿Cómo se denomina a a?
4. Si $\sqrt[n]{a} = b$?, ¿qué significa?
5. ¿Cuál es la raíz cuadrada principal de un número positivo?
6. Explique por qué $\sqrt{-4}$ no puede ser un número.
7. Explique por qué una raíz impar de un número negativo será negativa.
8. Explique por qué una raíz impar de un número positivo será positiva.
9. Explique el orden de las operaciones a seguir, cuando se evalúa una expresión matemática. Vea la página 32.
10. a) Explique paso a paso cómo evaluaría
$$\frac{5 - 18 \div 3^2}{4 - 3 \cdot 2}$$
    b) Evalúe la expresión.
11. a) Explique paso a paso cómo evaluaría $16 \div 2^2 + 6 \cdot 4 - 24 \div 6$.
    b) Evalúe la expresión.
12. a) Explique paso a paso cómo evaluaría $\{5 - [4 - (3 - 8)]\}^2$.
    b) Evalúe la expresión.

Práctica de habilidades

Evalúe cada expresión sin utilizar una calculadora.

13. 3^2
14. $(-4)^3$
15. -3^2
16. -4^3
17. $(-3)^2$
18. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$
19. $-\left(\frac{3}{5}\right)^4$
20. $(0.3)^2$
21. $\sqrt{49}$
22. $\sqrt{144}$
23. $-\sqrt{36}$
24. $-\sqrt{0.64}$
25. $\sqrt[3]{-27}$
26. $\sqrt[3]{\frac{-216}{343}}$
27. $\sqrt[3]{0.001}$
28. $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

Utilice una calculadora para evaluar cada expresión. Redondee las respuestas al milésimo más cercano.

29. $(0.35)^4$
30. $-(1.7)^{3.9}$
31. $\left(-\frac{13}{12}\right)^8$
32. $\left(\frac{5}{7}\right)^7$
33. $(6.721)^{5.9}$
34. $\sqrt{78}$
35. $\sqrt[3]{26}$
36. $-\sqrt[4]{72.8}$
37. $\sqrt[5]{362.65}$
38. $-\sqrt{\frac{8}{9}}$
39. $-\sqrt[3]{\frac{20}{53}}$
40. $\sqrt[3]{-\frac{15}{19}}$

Evalúe **a)** x^2 *y* **b)** $-x^2$ *para cada valor dado de* x.

41. 3
42. 4
43. 10
44. -2
45. -1
46. -6
47. $\frac{1}{3}$
48. $-\frac{4}{5}$

Evalúe **a)** x^3 *y* **b)** $-x^3$ *para cada valor dado de* x.

49. 3
50. -3
51. -5
52. -1
53. -2
54. 4
55. $\frac{2}{5}$
56. $-\frac{3}{4}$

Evalúe cada expresión.

57. $4^2 + 2^3 - 2^2 - 3^3$
58. $(-1)^2 + (-1)^3 - 1^4 + 1^5$
59. $-2^2 - 2^3 + 1^{10} + (-2)^3$
60. $(-3)^3 - 2^2 - (-2)^2 + (6 - 6)^2$
61. $(1.5)^2 - (3.9)^2 + (-2.1)^3$
62. $(3.7)^2 - (0.8)^2 + (2.4)^3$
63. $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3$
64. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3$

Evalúe cada expresión.

65. $3 + 5 \cdot 8$
66. $(2 - 7) \div 5 + 3$
67. $18 - 6 \div 6 + 8$

68. $4 \cdot 3 \div 6 - 2^2$

69. $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} - 2 + 5 \div 10$

70. $3 \cdot 6 \div 18 + \frac{4}{5}$

71. $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} - \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$

72. $3[4 + (-2)(8)] + 3^3$

73. $10 \div [(3 + 2^2) - (2^4 - 8)]$

74. $[3 - (4 - 2^3)^2]^2$

75. $5\left(\sqrt[3]{27} + \sqrt[5]{32}\right) \div \frac{\sqrt{100}}{2}$

76. $\{5 + [4^2 - 3(2 - 7)] - 5\}^2$

77. $\{[(12 - 15) - 3] - 2\}^2$

78. $3\{6 - [(25 \div 5) - 2]\}^3$

79. $4[5(16 - 6) \div (25 \div 5)^2]^2$

80. $\dfrac{15 \div 3 + 7 \cdot 2}{\sqrt{25} \div 5 + 8 \div 2}$

81. $\dfrac{4 - (2 + 3)^2 - 6}{4(3 - 2) - 3^2}$

82. $-2\left|-3 - \frac{2}{3}\right| + 5$

83. $\dfrac{8 + 4 \div 2 \cdot 3 + 4}{5^2 - 3^2 \cdot 2 - 7}$

84. $\dfrac{5(-3) + 4 \cdot 7 - 3^2}{-6 + \sqrt{4}(2^2 - 1)}$

85. $\dfrac{8 - [4 - (3 - 1)^2]}{5 - (-3)^2 + 4 \div 2}$

86. $12 - 15 \div |5| - (|4| - 2)^2$

87. $-2|-3| - \sqrt{36} \div |2| + 3^2$

88. $\dfrac{4 - |-12| \div |3|}{2(4 - |5|) + 9}$

89. $\dfrac{6 - |-4| - 4|8 - 5|}{5 - 6 \cdot 2 \div |-6|}$

90. $-\frac{1}{4}[8 - |-6| \div 3 - 4]^2$

91. $\frac{2}{5}\left[\sqrt[3]{27} - |-9| + 4 - 3^2\right]^2$

92. $\dfrac{3(12 - 9)^2}{-3^2} - \dfrac{2(3^2 - 4^2)}{4 - (-2)}$

93. $\dfrac{24 - 5 - 4^2}{|-8| + 4 - 2(3)} + \dfrac{4 - (-3)^2 + |4|}{3^2 - 4 \cdot 3 + |-7|}$

94. $\dfrac{-2 - 8 \div 4^2 \cdot |8|}{|8| - \sqrt{64}} + \dfrac{[(8 - 3)^2 - 7]^2}{2^2 + 16}$

Evalúe cada expresión para el valor o valores dados.

95. $5x^2 + 4x$ cuando $x = 2$

96. $5x^2 - 2x + 7$ cuando $x = 3$

97. $-9x^2 + 3x - 29$ cuando $x = -1$

98. $3(x - 2)^2$ cuando $x = \frac{1}{4}$

99. $16(x + 5)^3 - 25(x + 5)$ cuando $x = -4$

100. $-6x + 3y^2$ cuando $x = 2, y = 4$

101. $6x^2 + 3y^3 - 15$ cuando $x = 1, y = -3$

102. $4x^2 - 3y - 10$ cuando $x = 4, y = -2$

103. $3(a + b)^2 + 4(a + b) - 6$ cuando $a = 4, b = -1$

104. $-9 - \{2x - [5x - (2x + 1)]\}$ cuando $x = 3$

105. $-8 - \{x - [2x - (x - 3)]\}$ cuando $x = 4$

106. $\dfrac{(x - 3)^2}{9} + \dfrac{(y + 5)^2}{16}$ cuando $x = 4, y = 3$

107. $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 6, b = -11, c = 3$

108. $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 2, b = 1, c = -10$

Resolución de problemas

En los ejercicios del 109 al 114 escriba una expresión algebraica para cada problema. Luego evalúe la expresión para el valor dado de la variable o variables.

109. Multiplique la variable y por 7. De este producto reste 14. Ahora divida esta diferencia por 2. Determine el valor de esta expresión cuando $y = 6$.

110. Reste 4 de z. Multiplique esta diferencia por 5. Ahora eleve al cuadrado este producto. Determine el valor de esta expresión cuando $z = 10$.

111. Se suma seis al producto de 3 y x. Se multiplica esta expresión por 6. Luego, se resta nueve de este producto. Determine el valor de la expresión cuando $x = 3$.

112. La suma de x y y se multiplica por 2. Entonces se resta 5 de este producto. Luego, esta expresión se eleva al cuadrado. Determine el valor de la expresión cuando $x = 2$ y $y = -3$.

113. Se suma tres a x. Esta suma se divide entre el doble de y. Luego este cociente se eleva al cuadrado. Por último, se resta 3 de esta expresión. Determine el valor de la expresión cuando $x = 5$ y $y = 2$.

114. Se resta cuatro de x. Esta suma se divide entre $10y$. Luego el cociente se eleva al cubo. Por último, se suma 19 a esta expresión. Determine el valor de la expresión cuando $x = 64$ y $y = 3$.

Utilice una calculadora para responder los ejercicios del 115 al 128.

115. Paseo en bicicleta Frank Kelso puede viajar en bicicleta a una rapidez de 8.2 millas por hora en el *C&O Tow Path* en Maryland. La distancia, en millas, recorrida después de pasear en la bicicleta x horas, se determina mediante

$$\text{distancia} = 8.2x$$

¿Cuánto recorrió Frank en
a) 3 horas?
b) 7 horas?

116. Salario El 2 de enero de 2006, Mary Ferguson comenzó un nuevo trabajo con un salario anual de $32,550. Su jefe accedió en concederle un aumento de $1,200 por año durante los siguientes 20 años. Su salario, en dólares, se determina mediante

$$\text{salario} = 32{,}550 + 1{,}200x$$

donde x es el número de años desde 2006. Sustituya 1 por x, para determinar su salario en 2007, 2 por x para determinar su salario en 2008, y así sucesivamente. Determine el salario de Mary en
a) 2010.
b) 2020.

117. Lanzamiento de una pelota Cuong Chapman lanzó una pelota de béisbol hacia arriba desde una ventana de su dormitorio. La altura de la pelota, por encima del suelo, en pies, se determina mediante

$$\text{altura} = -16x^2 + 72x + 22$$

donde x es el número de segundos después que la pelota de béisbol se lanza desde la ventana. Determine la altura de la pelota
a) a los 2 segundos
b) a los 4 segundos
de haber sido lanzada desde la ventana.

118. Velocidad Vea el ejercicio 117. Después de que la pelota se lanza desde la ventana, su velocidad (rapidez), en pies por segundo, se determina mediante

$$\text{velocidad} = -32x + 72$$

Determine la velocidad de la pelota
a) a los 2 segundos
b) a los 4 segundos,
después de que se lanza por la ventana.

119. Gasto de dinero El monto que los consumidores gastan en regalos durante la temporada de fiestas, en años recientes, se ha elevado. El monto, en dólares, gastado en regalos por un individuo puede estimarse mediante

$$\text{gasto} = 26.865x + 488.725$$

donde x es el número de años desde 2002. Sustituya 1 por x para determinar el monto que se gastó en 2003, 2 por x para determinar el monto que se gastó en 2004, y así sucesivamente. Suponiendo que esta tendencia continúa, determine la cantidad que cada consumidor gastará en regalos en
a) 2007.
b) 2015.

Fuente: investigación BIG para la Federación Nacional de Ventas, *USA Today* (22 de diciembre de 2004).

120. Centenarios A las personas que viven 100 años o más se les conoce como centenarias. De acuerdo con la Oficina de Censos de Estados Unidos, los centenarios son el grupo de edad que crece más rápido en el mundo. El número aproximado de centenarios que vivirán en Estados Unidos entre los años 1995 y 2050, en miles, puede estimarse por

$$\text{número de centenarios} = 0.30x^2 - 3.69x + 92.04$$

donde x representa años desde 1995. Sustituya 1 por x para determinar el número de centenarios en 1996, 2 por x para encontrar el número de centenarios en 1997, y así sucesivamente.

a) Estime el número de centenarios que vivían en Estados Unidos en 2005.

b) Estime el número de centenarios que vivirán en Estados Unidos en 2050.

Fuente: Oficina de Censo de Estados Unidos.

121. Transporte público El aumento en el precio de la gasolina y el crecimiento de los congestionamientos en las principales ciudades de Estados Unidos han provocado una explosión en el uso del transporte público. Entre 1992 y 2004, el número aproximado de viajes en transporte público por año en Estados Unidos, en miles de millones, puede estimarse usando

$$\text{número de viajes} = 0.065x^2 - 0.39x + 8.47$$

donde x representa años desde 1992. Sustituya 1 por x para estimar el número de viajes realizados en 1993, 2 por x para estimar el número de viajes hechos en 1994, y así sucesivamente.

a) Estime el número de viajes realizados por medio del transporte público en 2000.

b) Suponga que la tendencia continúa. Estime el número de viajes que se realizarán en 2010.

Fuente: Asociación Americana del Transporte Público.

El tranvía es uno de los transportes públicos en San Francisco.

122. Inflación La inflación estuvo en descenso durante los años 2002 a 2004. En 2005 se elevó. La tasa de inflación, en porcentaje, durante los años 2002 a 2005, puede estimarse por

$$\text{inflación} = 0.35x^2 - 1.37x + 2.93$$

donde x es el número de años desde 2002. Sustituya 1 por x para determinar la tasa de inflación en 2003, 2 por x para determinar la tasa de inflación en 2004, y así sucesivamente. Suponiendo que esta tendencia continúa, determine la tasa de inflación en

a) 2005.
b) 2007.

Fuente: Departamento del Tesoro, Departamento de Comercio. *The Wall Street Journal* (18 de enero de 2005).

123. Subastas En años recientes, las ventas en subastas se han incrementado, en miles de millones de dólares, pueden estimarse mediante

$$\text{ventas} = 13.5x + 189.83$$

donde x es el número de años desde 2002. Sustituya 1 para determinar las ventas en subastas en 2003, 2 por x para determinar las ventas en subastas en 2004, y así sucesivamente. Suponiendo que esta tendencia continúe, determine las ventas en subastas en

a) 2010.
b) 2018.

Fuente: Asociación Nacional de Subastadores. *USA Today* (23 de febrero de 2005).

124. Dióxido de carbono Desde 1905 la cantidad de dióxido de carbono (CO_2) ha estado en aumento. La producción total de CO_2 de todos los países, excepto Estados Unidos, Canadá y Europa Occidental (medida en millones de toneladas métricas) puede aproximarse por medio de

$$CO_2 = 0.073x^2 - 0.39x + 0.55$$

donde x representa cada periodo de 10 años desde 1905. Sustituya 1 por x para calcular la producción de CO_2 en 1915, 2 por x para calcular la producción de CO_2 en 1925, 3 por x en 1935, etcétera.

a) Determine la cantidad aproximada de CO_2 producida por todos los países excepto Estados Unidos, Canadá y Europa Occidental, en 1945.

b) Suponga que esta tendencia continúa, determine la cantidad aproximada de CO_2 producida por todos los países, excepto Estados Unidos, Canadá y Europa Occidental en 2005.

125. Niños con padres que trabajan El número de *niños con padres que trabajan*, niños que se cuidan solos mientras sus padres trabajan, aumenta con la edad. El porcentaje de niños de edades diferentes, de 5 a 14 años, quienes se cuidan solos puede aproximarse por medio de

$$\text{porcentaje de niños} = 0.23x^2 - 1.98x + 4.42.$$

El valor de x representa la edad de los niños. Por ejemplo, sustituya 5 por x para obtener el porcentaje de todos los niños de 5 años de padres que trabajan; sustituya 6 por x para obtener el porcentaje de todos los niños de 6 años de padres que trabajan, etcétera.

a) Determine el porcentaje de todos los niños de 10 años de padres que trabajan.

b) Determine el porcentaje de todos los niños de 14 años de padres que trabajan.

126. Lectores de periódicos El número de estadounidenses que leen un diario va constantemente a la baja. El porcentaje de lectores de periódicos puede aproximarse por medio de

$$\text{porcentaje} = -6.2x + 82.2$$

donde x representa cada periodo de 10 años desde 1960. Sustituya 1 por x para obtener el porcentaje para 1970, para 1980 sustituya 2 por x, 3 por x para obtener el porcentaje para 1990 y así sucesivamente.

a) Determine el porcentaje de adultos en Estados Unidos que en 1970 leían un periódico.
b) Suponiendo que esta tendencia continúe, determine el porcentaje de adultos en Estados Unidos que en 2010 leerán un periódico.

127. Alimentos cultivados de manera orgánica El aumento en el temor de pesticidas y cosechas alteradas de manera genética ha llevado a la gente a comprar alimentos cultivados de manera orgánica. Desde 1990 a 2007, las ventas en miles de millones de dólares de alimentos cultivados de manera orgánica puede estimarse por medio de

$$\text{ventas} = 0.062x^2 + 0.020x + 1.18$$

donde x representa años desde 1990. Sustituya 1 por x para estimar las ventas de alimentos cultivados de manera orgánica en 1991, 2 por x para estimar las ventas en 1992, y así sucesivamente.

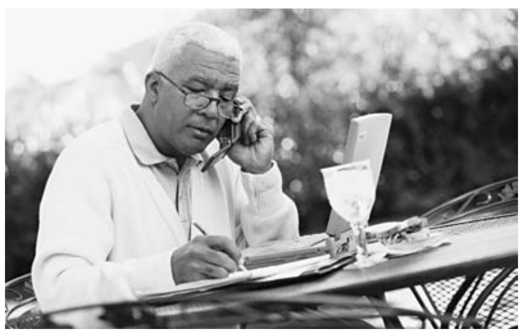
a) Estime las ventas de este tipo de alimentos en 1991.
b) Estime las ventas de este tipo de alimentos en 2007.

128. Teléfonos celulares El uso de teléfonos celulares en la actualidad está elevándose. El número de suscriptores de celulares, en millones, puede aproximarse por

$$\text{número de suscriptores} = 0.42x^2 - 3.44x + 5.80$$

donde x representa años desde 1982. Sustituya 1 por x para obtener el número de suscriptores en 1983, 2 por x para obtener el número de suscriptores en 1984, y así sucesivamente.

a) Determine el número de personas que usaron teléfonos celulares en 1989.
b) Si esta tendencia continúa, determine el número de personas que usaron teléfonos celulares en 2009.



Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **129.** $A = \{a, b, c, d, f\}$, $B = \{b, c, f, g, h\}$. Determine

a) $A \cap B$,

b) $A \cup B$.

[1.3] *En los ejercicios del 130 al 132, la letra a representa un número real. ¿Para qué valores de a cada proposición será verdadera?*

130. $|a| = |-a|$

131. $|a| = a$

132. $|a| = 6$

133. Liste de menor a mayor: $-|6|, -4, |-5|, -|-2|, 0$.

134. Diga el nombre de la propiedad siguiente:
$(7 + 3) + 9 = 7 + (3 + 9)$.

Examen de mitad de capítulo: 1.1-1.4

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección donde se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

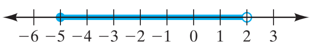
1. ¿Dónde está la oficina de su instructor? ¿Cuáles son las horas de oficina de su instructor?

2. Dados $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{-1, 1, 3, 5\}$, determine $A \cup B$ y $A \cap B$.

3. Describa el conjunto $D = \{0, 5, 10, 15, \ldots\}$.

4. Ilustre el conjunto $\{x | x \geq 3\}$ en una recta numérica.

5. Inserte $<$ o $>$ en el área sombreada $\frac{3}{5} \; \square \; \frac{4}{9}$ para que la proposición sea verdadera.

6. Exprese 

en la notación constructiva de conjuntos.

7. ¿W es un subconjunto de N? Explique.

8. Liste los valores de menor a mayor: $-15, |-17|, |-6|, 7$.

Evalúe cada expresión.

9. $7 - 2.3 - (-4.5)$

10. $\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}$

11. $(5)(-2)(3.2)(-8)$

12. $\left|-\frac{8}{13}\right| \div (-2)$

13. Evalúe $(7 - |-2|) - (-8 + |16|)$.

14. Diga el nombre de la propiedad que se ilustra mediante $5(x + y) = 5x + 5y$.

15. Simplifique $\sqrt{0.81}$.

16. Evalúe

a) x^2 y

b) $-x^2$ para $x = -6$.

17. **a)** Liste el orden de las operaciones.

b) Evalúe $4 - 2 \cdot 3^2$ y explique cómo determinó su respuesta.

Evalúe cada expresión.

18. $5 \cdot 4 \div 10 + 2^5 - 8$.

19. $\frac{1}{4}\{[(12 \div 4)^2 - 7]^3 \div 2\}^2$

20. $\dfrac{\sqrt{16} + \left(\sqrt{49} - 6\right)^4}{\sqrt[3]{-27} - (4 - 3^2)}$

1.5 Exponentes

1 Usar la regla del producto para exponentes
2 Usar la regla del cociente para exponentes
3 Usar la regla del exponente negativo
4 Usar la regla del exponente cero.
5 Usar la regla para elevar una potencia a una potencia
6 Usar la regla para elevar un producto a una potencia
7 Usar la regla para elevar un cociente a una potencia

En la sección anterior introdujimos los exponentes. En esta sección estudiamos la regla de los exponentes. Iniciamos con la regla del producto para exponentes.

1 Usar la regla del producto para exponentes

Considere la multiplicación $x^3 \cdot x^5$. Podemos simplificar esta expresión como sigue:

$$x^3 \cdot x^5 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^8$$

Este problema también podría simplificarse por medio de la **regla del producto para exponentes.***

Regla del producto para exponentes

Si m y n son números naturales y a es cualquier número real, entonces

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

* Las reglas que se dan en esta sección también se aplican a exponentes racionales o fraccionarios. En la sección 7.2 se estudiarán los exponentes racionales. En este momento, repasaremos estas reglas.

Para multiplicar expresiones exponenciales, mantenga la base común y sume los exponentes.

$$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

EJEMPLO 1 Simplifique. **a)** $2^3 \cdot 2^4$ **b)** $d^2 \cdot d^5$ **c)** $h \cdot h^9$

Solución

a) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$ **b)** $d^2 \cdot d^5 = d^{2+5} = d^7$

c) $h \cdot h^9 = h^1 \cdot h^9 = h^{1+9} = h^{10}$

Ahora resuelva el ejercicio 13

2 Usar la regla del cociente para exponentes

Considere la división $x^7 \div x^4$. Podemos simplificar esta expresión como sigue:

$$\frac{x^7}{x^4} = \frac{\overset{1}{\cancel{x}} \cdot \overset{1}{\cancel{x}} \cdot \overset{1}{\cancel{x}} \cdot \overset{1}{\cancel{x}} \cdot x \cdot x \cdot x}{\underset{1}{\cancel{x}} \cdot \underset{1}{\cancel{x}} \cdot \underset{1}{\cancel{x}} \cdot \underset{1}{\cancel{x}}} = x \cdot x \cdot x = x^3$$

Este problema también podría simplificarse por medio de la **regla del cociente para exponentes**.

Regla del cociente para exponentes

Si a es cualquier número real diferente de cero y m y n son enteros diferentes de cero, entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Para dividir expresiones en forma exponencial, mantenga la base común y reste los exponentes.

$$\frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$$

EJEMPLO 2 Simplifique. **a)** $\frac{6^4}{6^2}$ **b)** $\frac{x^7}{x^3}$ **c)** $\frac{y^2}{y^5}$

Solución **a)** $\frac{6^4}{6^2} = 6^{4-2} = 6^2 = 36$ **b)** $\frac{x^7}{x^3} = x^{7-3} = x^4$ **c)** $\frac{y^2}{y^5} = y^{2-5} = y^{-3}$

Ahora resuelva el ejercicio 15

3 Usar la regla del exponente negativo

Observe en el ejemplo 2 **c)** que la respuesta contiene un exponente negativo. Realice la parte **c)** nuevamente cancelando factores comunes.

$$\frac{y^2}{y^5} = \frac{\overset{1}{\cancel{y}} \cdot \overset{1}{\cancel{y}}}{\underset{1}{\cancel{y}} \cdot \underset{1}{\cancel{y}} \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{1}{y^3}$$

Al reducir factores comunes y usar el resultado del ejemplo 2 **c)**, podemos razonar que $y^{-3} = \frac{1}{y^3}$. Éste es un ejemplo de la regla del exponente negativo.

Regla del exponente negativo

Para cualquier número real diferente de cero, a, y cualquier número entero no negativo, m,

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Una expresión elevada a un exponente negativo es igual a 1 dividida entre la expresión con el signo del exponente cambiado.

EJEMPLO 3 Escriba cada expresión sin exponentes negativos.

a) 7^{-2} **b)** $8a^{-4}$ **c)** $\dfrac{1}{c^{-5}}$

Solución

a) $7^{-2} = \dfrac{1}{7^2} = \dfrac{1}{49}$ **b)** $8a^{-4} = 8 \cdot \dfrac{1}{a^4} = \dfrac{8}{a^4}$

c) $\dfrac{1}{c^{-5}} = 1 \div c^{-5} = 1 \div \dfrac{1}{c^5} = \dfrac{1}{1} \cdot \dfrac{c^5}{1} = c^5$

Ahora resuelva el ejercicio 37

Sugerencia útil

En el ejemplo 3 **c)** mostramos que $\dfrac{1}{c^{-5}} = c^5$. En general, para cualquier número real diferente de cero a y cualquier entero no negativo m, $\dfrac{1}{a^{-m}} = a^m$. Cuando un factor del numerador o del denominador está elevado a cualquier potencia, el factor puede moverse al otro lado de la fracción siempre y cuando el signo del exponente esté cambiado. Así, por ejemplo

$$\frac{2a^{-3}}{b^2} = \frac{2}{a^3b^2} \qquad \frac{a^{-2}b^4}{c^{-3}} = \frac{b^4c^3}{a^2}$$

NOTA: Al usar este procedimiento, el signo de la base no cambia, sólo cambia el signo del exponente. Por ejemplo,

$$-c^{-3} = \frac{1}{-c^3} = -\frac{1}{c^3}$$

Por lo general, no dejamos expresiones exponenciales con exponentes negativos. *Cuando indicamos que una expresión exponencial se simplificará, queremos decir que la respuesta debe escribirse sin exponentes negativos o cero.*

EJEMPLO 4 Simplifique. **a)** $\dfrac{5xz^2}{y^{-4}}$ **b)** $4^{-2}x^{-1}y^2$ **c)** $-3^3x^2y^{-6}$

Solución

a) $\dfrac{5xz^2}{y^{-4}} = 5xy^4z^2$

b) $4^{-2}x^{-1}y^2 = \dfrac{1}{4^2} \cdot \dfrac{1}{x^1} \cdot y^2 = \dfrac{y^2}{16x}$

c) $-3^3x^2y^{-6} = -(3^3)x^2 \cdot \dfrac{1}{y^6} = -\dfrac{27x^2}{y^6}$

Ahora resuelva el ejercicio 41

Observe que las expresiones en el ejemplo 4 no incluyen sumas o restas. La presencia de un signo más o menos lo convierte en un problema muy diferente, como veremos en nuestro ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Simplifique. **a)** $4^{-1} + 6^{-1}$ **b)** $2 \cdot 3^{-2} + 7 \cdot 6^{-2}$

Solución

a) $4^{-1} + 6^{-1} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6}$ *Regla del exponente negativo*

$= \dfrac{3}{12} + \dfrac{2}{12}$ *Reescriba con el mínimo común denominador, 12.*

$= \dfrac{3+2}{12} = \dfrac{5}{12}$

b) $2 \cdot 3^{-2} + 7 \cdot 6^{-2} = 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 7 \cdot \frac{1}{6^2}$ — *Regla del exponente negativo.*

$$= \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{9} + \frac{7}{1} \cdot \frac{1}{36}$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{7}{36}$$

$$= \frac{8}{36} + \frac{7}{36}$$ *Reescriba con el mínimo común denominador, 36.*

$$= \frac{8+7}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 75**

4 Usar la regla del exponente cero

La regla siguiente que estudiaremos es la **regla del exponente cero**. Cualquier número distinto de cero dividido entre sí mismo es 1. Por lo tanto,

$$\frac{x^5}{x^5} = 1.$$

Por medio de la regla del cociente para los exponentes,

$$\frac{x^5}{x^5} = x^{5-5} = x^0.$$

Como $x^0 = \frac{x^5}{x^5}$ y $\frac{x^5}{x^5} = 1$, entonces

$$x^0 = 1.$$

Regla del exponente cero

Si a es cualquier número real distinto de cero, entonces

$$a^0 = 1$$

La regla del exponente cero ilustra que *cualquier número real distinto de cero con un exponente 0 es igual a 1*. Debemos especificar que $a \neq 0$, ya que 0^0 no es un número real.

EJEMPLO 6 ▸ Simplifique (suponga que la base no es 0).

a) 162^0 **b)** $7p^0$ **c)** $-y^0$ **d)** $-(8x + 9y)^0$

Solución

a) $162^0 = 1$

b) $7p^0 = 7 \cdot p^0 = 7 \cdot 1 = 7$

c) $-y^0 = -1 \cdot y^0 = -1 \cdot 1 = -1$

d) $-(8x + 9y)^0 = -1 \cdot (8x + 9y)^0 = -1 \cdot 1 = -1$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 33**

5 Usar la regla para elevar una potencia a una potencia

Considere la expresión $(x^3)^2$. Podemos simplificar esa expresión como sigue:

$$(x^3)^2 = x^3 \cdot x^3 = x^{3+3} = x^6$$

Este problema también podría simplificarse por medio de la regla para **elevar una potencia a una potencia** (también llamada **regla de la potencia**).

Elevar una potencia a una potencia (regla de la potencia)

Si a es un número real y m y n son enteros, entonces

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Para elevar una expresión exponencial a una potencia, mantenga la base y multiplique los exponentes.

$$(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$$

EJEMPLO 7 Simplifique (suponga que la base no es 0).

a) $(2^2)^4$ **b)** $(z^{-5})^4$ **c)** $(2^{-3})^2$

Solución

a) $(2^2)^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8 = 256$

b) $(z^{-5})^4 = z^{-5 \cdot 4} = z^{-20} = \dfrac{1}{z^{20}}$

c) $(2^{-3})^2 = 2^{-3 \cdot 2} = 2^{-6} = \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{1}{64}$

Ahora resuelva el ejercicio 81

Sugerencia útil

Con frecuencia los estudiantes confunden la *regla del producto*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

con la *regla de la potencia*

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Por ejemplo $(x^3)^2 = x^6$, no x^5.

6 Usar la regla para elevar un producto a una potencia

Considere la expresión $(xy)^2$. Podemos simplificar esta expresión como sigue:

$$(xy)^2 = (xy)(xy) = x \cdot x \cdot y \cdot y = x^2y^2$$

Esta expresión también podría simplificarse usando la regla para **elevar un producto a una potencia**.

Elevar un producto a una potencia

Si a y b son números reales y m es un entero, entonces

$$(ab)^m = a^mb^m$$

Para elevar un producto a una potencia, eleve todos los factores dentro del paréntesis a la potencia fuera de los paréntesis.

EJEMPLO 8 Simplifique. **a)** $(-9x^3)^2$ **b)** $(3x^{-5}y^4)^{-3}$

Solución

a) $(-9x^3)^2 = (-9)^2(x^3)^2 = 81x^6$

b) $(3x^{-5}y^{4})^{-3} = 3^{-3}(x^{-5})^{-3}(y^{4})^{-3}$ *Eleve un producto a una potencia.*

$= \frac{1}{3^3} \cdot x^{15} \cdot y^{-12}$ *Regla del exponente negativo, regla de la potencia.*

$= \frac{1}{27} \cdot x^{15} \cdot \frac{1}{y^{12}}$ *Regla del exponente negativo.*

$= \frac{x^{15}}{27y^{12}}$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 93**

7 Usar la regla para elevar un cociente a una potencia

Considere la expresión $\left(\frac{x}{y}\right)^2$. Podemos simplificar esta expresión como sigue:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x \cdot x}{y \cdot y} = \frac{x^2}{y^2}$$

Esta expresión también podría simplificarse por medio de la regla para **elevar un cociente a una potencia**.

Elevar un cociente a una potencia

Si a y b son números reales y m es un entero, entonces

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \qquad b \neq 0$$

Para elevar un cociente a una potencia, eleve todos los factores en el paréntesis al exponente fuera de los paréntesis.

EJEMPLO 9 ▸ Simplifique **a)** $\left(\frac{5}{x^2}\right)^3$ **b)** $\left(\frac{2x^{-2}}{y^3}\right)^{-4}$

Solución

a) $\left(\frac{5}{x^2}\right)^3 = \frac{5^3}{(x^2)^3} = \frac{125}{x^6}$

b) $\left(\frac{2x^{-2}}{y^3}\right)^{-4} = \frac{2^{-4}(x^{-2})^{-4}}{(y^3)^{-4}}$ *Eleve un cociente a una potencia.*

$= \frac{2^{-4}x^8}{y^{-12}}$ *Regla de la potencia.*

$= \frac{x^8y^{12}}{2^4}$ *Regla del exponente negativo.*

$= \frac{x^8y^{12}}{16}$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 99**

Considere $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$. Por medio de la regla para elevar un cociente a una potencia, obtenemos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Usando este resultado, vemos que cuando tenemos un número racional elevado a un exponente negativo, podemos tomar el recíproco de la base y cambiar el signo del exponente como sigue.

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \qquad \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-4} = \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^4$$

Ahora trabajaremos algunos ejemplos que combinan varias propiedades. Siempre que la misma variable aparezca arriba y abajo de la barra de fracción, por lo general movemos la variable con el *exponente menor.* Esto tendrá como resultado que el exponente de la variable sea positivo cuando se aplique la regla del producto. Los ejemplos 10 y 11 ilustran este procedimiento.

EJEMPLO 10 Simplifique. **a)** $\left(\dfrac{15x^2y^4}{5x^2y}\right)^2$ **b)** $\left(\dfrac{5x^4y^{-2}}{10xy^3z^{-1}}\right)^{-3}$

Solución Con frecuencia, las expresiones exponenciales pueden simplificarse en más de una manera. En general, será más fácil simplificar primero la expresión dentro de los paréntesis.

a) $\left(\dfrac{15x^2y^4}{5x^2y}\right)^2 = (3y^3)^2 = 9y^6$

b) $\left(\dfrac{5x^4y^{-2}}{10xy^3z^{-1}}\right)^{-3} = \left(\dfrac{x^4 \cdot x^{-1}z}{2y^3 \cdot y^2}\right)^{-3}$ *Mueva x, y^{-2} y z^{-1} al otro lado de la barra de fracción y cambie los signos de sus exponentes.*

$= \left(\dfrac{x^3z}{2y^5}\right)^{-3}$ *Regla del producto.*

$= \left(\dfrac{2y^5}{x^3z}\right)^{3}$ *Tome el recíproco de la expresión dentro de los paréntesis y cambie el signo del exponente.*

$= \dfrac{2^3y^{5\cdot 3}}{x^{3\cdot 3}z^3}$ *Eleve un cociente a una potencia.*

$= \dfrac{8y^{15}}{x^9z^3}$

Ahora resuelva el ejercicio 109

EJEMPLO 11 Simplifique $\dfrac{(2p^{-3}q^5)^{-2}}{(p^{-5}q^4)^{-3}}$.

Solución Primero, utilice la regla de la potencia. Luego simplifique.

$\dfrac{(2p^{-3}q^5)^{-2}}{(p^{-5}q^4)^{-3}} = \dfrac{2^{-2}p^6q^{-10}}{p^{15}q^{-12}}$ *Regla de la potencia.*

$= \dfrac{q^{-10} \cdot q^{12}}{2^2p^{15} \cdot p^{-6}}$ *Mueva 2^{-2}, p^6 y q^{-12} al otro lado de la barra de fracción y cambie los signos de sus exponentes.*

$= \dfrac{q^{-10+12}}{4p^{15-6}}$ *Regla del producto.*

$= \dfrac{q^2}{4p^9}$

Ahora resuelva el ejercicio 115

Resumen de reglas de los exponentes

Para todos los números reales a y b y todos los enteros m y n:

Regla del producto	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	
Regla del cociente	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,	$a \neq 0$
Regla del exponente negativo	$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$,	$a \neq 0$
Regla del exponente cero	$a^0 = 1$,	$a \neq 0$
Elevar una potencia a una potencia	$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$	
Elevar un producto a una potencia	$(ab)^m = a^mb^m$	
Elevar un cociente a una potencia	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$,	$b \neq 0$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.5

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) Proporcione la regla del producto para exponentes.
   b) Explique la regla del producto.
2. a) Dé la regla del cociente para exponentes.
   b) Explique la regla del cociente.
3. a) Proporcione la regla del exponente cero.
   b) Explique la regla del exponente cero.
4. a) Proporcione la regla del exponente negativo.
   b) Explique la regla del exponente negativo.
5. a) Proporcione la regla para elevar un producto a una potencia.
   b) Explique la regla para elevar un producto a una potencia.
6. a) Proporcione la regla para elevar una potencia a una potencia.
   b) Explique la regla para elevar una potencia a una potencia.
7. a) Proporcione la regla para elevar un cociente a una potencia.
   b) Explique la regla para elevar un cociente a una potencia.
8. Si no aparece exponente en una variable o coeficiente, ¿cuál es su exponente?
9. Si $x^{-1} = 5$, ¿cuál es el valor de x? Explique.
10. Si $x^{-1} = y^2$, ¿a qué es igual x? Explique.
11. a) Explique la diferencia entre el opuesto de x y el recíproco de x.

   Para las partes **b)** y **c)** considere

   $$x^{-1}, \quad -x, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^{-1}},$$

   b) ¿Cuál representa (o es igual a) el *recíproco* de x?
   c) ¿Cuál representa el *opuesto* (o *inverso aditivo*) de x?
12. Explique por qué $-2^{-2} \neq \frac{1}{(-2)^2}$.

Práctica de habilidades

Evalúe cada expresión.

13. $2^3 \cdot 2^2$
14. $3^2 \cdot 3^3$
15. $\frac{3^7}{3^5}$
16. $\frac{8^4}{8^3}$
17. 9^{-2}
18. 5^{-2}
19. $\frac{1}{5^{-3}}$
20. $\frac{1}{3^{-2}}$
21. 15^0
22. 19^0
23. $(2^3)^2$
24. $(3^2)^2$
25. $(2 \cdot 4)^2$
26. $(6 \cdot 5)^2$
27. $\left(\frac{4}{7}\right)^2$
28. $\left(\frac{2}{5}\right)^4$

Evalúe cada expresión.

29. a) 3^{-2} b) $(-3)^{-2}$ c) -3^{-2} d) $-(-3)^{-2}$
30. a) 4^{-3} b) $(-4)^{-3}$ c) -4^{-3} d) $-(-4)^{-3}$
31. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$ c) $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ d) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$
32. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$ c) $-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ d) $-\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$

Simplifique cada expresión y escriba la respuesta sin exponentes negativos. Suponga que todas las bases representadas por medio de variables son diferentes de cero.

33. a) $5x^0$ b) $-5x^0$ c) $(-5x)^0$ d) $-(-5x)^0$
34. a) $4y^0$ b) $(4y)^0$ c) $-4y^0$ d) $(-4y)^0$
35. a) $3xyz^0$ b) $(3xyz)^0$ c) $3x(yz)^0$ d) $3(xyz)^0$
36. a) $x^0 + y^0$ b) $(x + y)^0$ c) $x + y^0$ d) $x^0 + y$

Simplifique cada expresión y escriba la respuesta sin exponentes negativos.

37. $7y^{-3}$
38. $\frac{1}{x^{-1}}$
39. $\frac{9}{x^{-4}}$
40. $\frac{8}{5y^{-2}}$
41. $\frac{2a}{b^{-3}}$
42. $\frac{10x^4}{y^{-1}}$
43. $\frac{13m^{-2}n^{-3}}{2}$
44. $\frac{10x^{-3}}{z^4}$
45. $\frac{5x^{-2}y^{-3}}{z^{-4}}$
46. $\frac{15ab^5}{3c^{-3}}$
47. $\frac{9^{-1}x^{-1}}{y}$
48. $\frac{8^{-1}z}{x^{-1}y^{-1}}$

Simplifique cada expresión y escriba la respuesta sin exponentes negativos.

49. $2^5 \cdot 2^{-7}$ **50.** $a^3 \cdot a^5$ **51.** $x^6 \cdot x^{-4}$ **52.** $x^{-4} \cdot x^3$

53. $\dfrac{8^5}{8^3}$ **54.** $\dfrac{4^2}{4^{-2}}$ **55.** $\dfrac{7^{-5}}{7^{-3}}$ **56.** $\dfrac{x^{-9}}{x^2}$

57. $\dfrac{m^{-6}}{m^5}$ **58.** $\dfrac{p^0}{p^{-8}}$ **59.** $\dfrac{5w^{-2}}{w^{-7}}$ **60.** $\dfrac{x^{-4}}{x^{-6}}$

61. $3a^{-2} \cdot 4a^{-6}$ **62.** $(-7v^4)(-3v^{-5})$ **63.** $(-3p^{-2})(-p^3)$ **64.** $(2x^{-3}y^{-4})(6x^{-4}y^7)$

65. $(5r^2s^{-2})(-2r^5s^2)$ **66.** $(-6p^{-4}q^6)(2p^3q)$ **67.** $(2x^4y^7)(4x^3y^{-5})$ **68.** $\dfrac{24x^3y^2}{8xy}$

69. $\dfrac{33x^5y^{-4}}{11x^3y^2}$ **70.** $\dfrac{6x^{-2}y^3z^{-2}}{-2x^4y}$ **71.** $\dfrac{9xy^{-4}z^3}{-3x^{-2}yz}$ **72.** $\dfrac{(x^{-2})(4x^2)}{x^3}$

Evalúe cada expresión.

73. **a)** $4(a+b)^0$ **b)** $4a^0 + 4b^0$ **c)** $(4a+4b)^0$ **d)** $-4a^0 + 4b^0$

74. **a)** $-2^0 + (-2)^0$ **b)** $-2^0 - (-2)^0$ **c)** $-2^0 + 2^0$ **d)** $-2^0 - 2^0$

75. **a)** $4^{-1} - 3^{-1}$ **b)** $4^{-1} + 3^{-1}$ **c)** $2 \cdot 4^{-1} + 3 \cdot 5^{-1}$ **d)** $(2 \cdot 4)^{-1} + (3 \cdot 5)^{-1}$

76. **a)** $5^{-2} + 4^{-1}$ **b)** $5^{-2} - 4^{-1}$ **c)** $3 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 4^{-1}$ **d)** $(3 \cdot 5)^{-2} - (2 \cdot 4)^{-1}$

Simplifique cada expresión y escriba la respuesta sin exponentes negativos.

77. $(3^2)^2$ **78.** $(5^2)^{-1}$ **79.** $(3^2)^{-2}$ **80.** $(x^2)^{-3}$

81. $(b^{-3})^{-2}$ **82.** $(-c)^4$ **83.** $(-c)^3$ **84.** $(-x)^{-2}$

85. $(-4x^{-3})^2$ **86.** $-10(x^{-3})^2$ **87.** $5^{-1} + 2^{-1}$ **88.** $4^{-2} + 8^{-1}$

89. $3 \cdot 4^{-2} + 9 \cdot 8^{-1}$ **90.** $5 \cdot 2^{-3} + 7 \cdot 4^{-2}$ **91.** $\left(\dfrac{4b}{3}\right)^{-2}$ **92.** $(-10m^3n^2)^3$

93. $(4x^2y^{-2})^2$ **94.** $(4x^2y^3)^{-3}$ **95.** $(5p^2q^{-4})^{-3}$ **96.** $(8s^{-3}t^{-4})^2$

97. $(-3g^{-4}h^3)^{-3}$ **98.** $9(x^2y^{-1})^{-4}$ **99.** $\left(\dfrac{3j}{4k^2}\right)^2$ **100.** $\left(\dfrac{3x^2y^4}{z}\right)^3$

101. $\left(\dfrac{2r^4s^5}{r^2}\right)^3$ **102.** $\left(\dfrac{5m^5n^6}{10m^4n^7}\right)^3$ **103.** $\left(\dfrac{4xy}{y^3}\right)^{-3}$ **104.** $\left(\dfrac{7x^{-2}}{xy}\right)^{-2}$

105. $\left(\dfrac{5x^{-2}y}{x^{-5}}\right)^3$ **106.** $\left(\dfrac{4x^2y}{x^{-5}}\right)^{-3}$ **107.** $\left(\dfrac{10x^2y}{5xz}\right)^{-3}$ **108.** $\left(\dfrac{4xy}{z^{-2}}\right)^3$

109. $\left(\dfrac{x^8y^{-2}}{x^{-2}y^3}\right)^2$ **110.** $\left(\dfrac{x^2y^{-3}z^5}{x^{-1}y^2z^3}\right)^{-1}$ **111.** $\left(\dfrac{4x^{-1}y^{-2}z^3}{2xy^2z^{-3}}\right)^{-2}$ **112.** $\left(\dfrac{6x^4y^{-6}z^4}{2xy^{-6}z^{-2}}\right)^{-2}$

113. $\left(\dfrac{-a^3b^{-1}c^{-3}}{4ab^3c^{-4}}\right)^{-3}$ **114.** $\dfrac{(2x^{-1}y^{-2})^{-3}}{(5x^{-1}y^3)^2}$ **115.** $\dfrac{(3x^{-4}y^2)^3}{(2x^3y^5)^3}$ **116.** $\dfrac{(2xy^2z^{-3})^2}{(9x^{-1}yz^2)^{-1}}$

Resolución de problemas

Simplifique cada expresión. Suponga que todas las variables representan enteros distintos de cero.

117. $x^{2a} \cdot x^{5a+3}$ **118.** $y^{2m+3} \cdot y^{5m-7}$ **119.** $w^{2a-5} \cdot w^{3a-2}$ **120.** $d^{-4x+7} \cdot d^{5x-6}$

121. $\dfrac{x^{2w+3}}{x^{w-4}}$ **122.** $\dfrac{y^{5m-1}}{y^{7m-1}}$ **123.** $(x^{3p+5})(x^{2p-3})$ **124.** $(s^{2t-3})(s^{-t+5})$

125. $x^{-m}(x^{3m+2})$ **126.** $y^{3b+2} \cdot y^{2b+4}$ **127.** $\dfrac{30m^{a+b}n^{b-a}}{6m^{a-b}n^{a+b}}$ **128.** $\dfrac{24x^{c+3}y^{d+4}}{8x^{c-4}y^{d+6}}$

129. a) ¿Para qué valores de x es $x^4 > x^3$?
b) ¿Para qué valores de x es $x^4 < x^3$?
c) ¿Para qué valores de x es $x^4 = x^3$?
d) ¿Por qué no puede decir que $x^4 > x^3$?

130. ¿3^{-8} es mayor o menor que 2^{-8}? Explique.

131. a) Explique por qué $(-1)^n = 1$ para cualquier número par n.
b) Explique por qué $(-1)^n = -1$ para cualquier número impar n.

132. a) Explique por qué $(-12)^{-8}$ es positivo.
b) Explique por qué $(-12)^{-7}$ es negativo.

133. a) ¿$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ es igual a $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$?
b) ¿$(x)^{-2}$ será igual a $(-x)^{-2}$ para todos los números reales, excepto 0? Explique su respuesta.

134. a) ¿$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ es igual a $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$?
b) ¿$(x)^{-3}$ será igual a $(-x)^{-3}$ para cualquier número real distinto de cero? Explique.
c) ¿Cuál es la relación entre $(-x)^{-3}$ y $(x)^{-3}$ para cualquier número real distinto de cero x?

Determine cuáles exponentes deben ser colocados en el área sombreada para hacer verdadera cada proposición. Cada área sombreada puede representar un exponente diferente. Explique cómo determinó su respuesta.

135. $\left(\dfrac{x^2y^{-2}}{x^{-3}y^{\square}}\right)^2 = x^{10}y^2$

136. $\left(\dfrac{x^{-2}y^3z}{x^4y^{\square}z^{-3}}\right)^3 = \dfrac{z^{12}}{x^{18}y^6}$

137. $\left(\dfrac{x^{\square}y^5z^{-2}}{x^4y^{\square}z}\right)^{-1} = \dfrac{x^5z^3}{y^2}$

Retos

En la sección 7.2 aprenderemos que las reglas de los exponentes dadas en esta sección también se aplican cuando los exponentes son números racionales. Usando esta información y las reglas de los exponentes, evalúe cada expresión.

138. $\left(\dfrac{x^{1/2}}{x^{-1}}\right)^{3/2}$

139. $\left(\dfrac{x^{5/8}}{x^{1/4}}\right)^3$

140. $\left(\dfrac{x^4}{x^{-1/2}}\right)^{-1}$

141. $\dfrac{x^{1/2}y^{-3/2}}{x^5y^{5/3}}$

142. $\left(\dfrac{x^{1/2}y^4}{x^{-3}y^{5/2}}\right)^2$

Actividad en grupo

Analice y responda en grupo el ejercicio 143.

143. Duplicación de un centavo El día 1 se le da un centavo. En cada día siguiente se le da el doble de la cantidad que se le dio el día anterior.

a) Escriba las cantidades que se le darían en cada uno de los primeros 6 días.
b) Exprese cada uno de estos números como una expresión exponencial con una base de 2.
c) Buscando un patrón, determine una expresión exponencial para el número de centavos que recibirá el día 10.
d) Escriba una expresión exponencial general para el número de centavos que recibirá el día n.
e) Escriba una expresión exponencial para el número de centavos que recibirá el día 30.
f) Calcule el valor de la expresión en la parte **e)**. Utilice una calculadora si tiene alguna disponible.
g) Determine la cantidad, en dólares, que encontró en la parte **f)**.
h) Escriba una expresión exponencial general para el número de dólares que recibirá en el día n.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **144.** Si $A = \{3, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 5, 9\}$, determine
a) $A \cup B$ y
b) $A \cap B$.

145. Ilustre el conjunto siguiente en la recta numérica: $\{x | -3 \le x < 2\}$.

[1.4] **146.** Evalúe $8 + |12| \div |-3| - 4 \cdot 2^2$.

147. Evalúe $\sqrt[3]{-125}$.

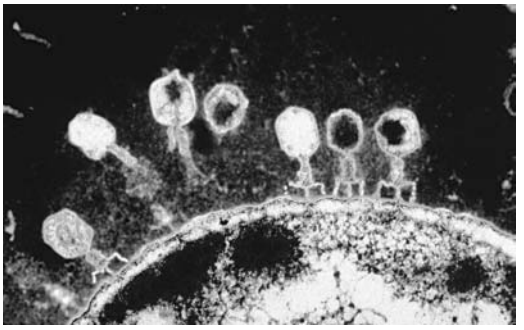
1.6 Notación científica

1. Escribir números en notación científica
2. Cambiar números en notación científica a forma decimal
3. Usar notación científica en la resolución de problemas

1 Escribir números en notación científica

Con frecuencia, científicos e ingenieros tratan con números muy grandes y muy pequeños. Por ejemplo, la frecuencia de la señal de una radio FM puede ser de 14,200,000,000 hertz (o ciclos por segundo) y el diámetro de un átomo de hidrógeno es de alrededor de 0.0000000001 metros. Ya que es difícil trabajar con muchos ceros, los científicos suelen expresar tales números con exponentes. Por ejemplo, el número 14,200,000,000 podría escribirse como 1.42×10^{10} y 0.0000000001 como 1×10^{-10}. Los números como 1.42×10^{10} y 1×10^{-10} están en la forma llamada **notación científica**. En notación científica, los números se expresan como $a \times 10^n$, donde $1 \leq a < 10$ y n es un entero. Cuando una potencia de 10 no tiene coeficiente numérico, como en 10^5, suponemos que el coeficiente numérico es 1. Así, 10^5 significa 1×10^5 y 10^{-4} significa 1×10^{-4}.

El diámetro de esta galaxia es de alrededor de 1×10^{21} metros.



El diámetro de estos virus (las figuras semejantes a hongos que se desprenden de la superficie) es de casi 1×10^{-7} metros.

Ejemplos de números en notación científica

3.2×10^6 $\quad$ 4.176×10^3 $\quad$ 2.64×10^{-2}

Lo siguiente muestra el número 32,400 cambiado a notación científica.

$$\begin{aligned} 32.400 &= 3.24 \times 10{,}000 \\ &= 3.24 \times 10^4 \qquad (10{,}000 = 10^4) \end{aligned}$$

Hay cuatro ceros en 10,000, el mismo número que el exponente en 10^4. El procedimiento para escribir un número en notación científica es el siguiente.

Para escribir un número en notación científica

1. Mueva el punto decimal en el número a la derecha del primer dígito distinto de cero. Esto da un número mayor o igual a 1 y menor que 10.
2. Cuente el número de lugares que movió el punto decimal en el paso 1. Si el número original es 10 o mayor, la cuenta se considera positiva. Si el número original es menor que 1, la cuenta se considera negativa.
3. Multiplique el número obtenido en el paso 1 por 10 elevado a la cuenta (potencia) que encontró en el paso 2.

EJEMPLO 1 ▶ Escriba los números siguientes en notación científica.

a) 68,900 **b)** 0.000572 **c)** 0.0074

Solución

a) El punto decimal en 68,900 está a la derecha del último cero.

$$68{,}900. = 6.89 \times 10^4$$

El punto decimal se mueve cuatro lugares. Como el número original es mayor que 10, el exponente es positivo.

b) $0.000572 = 5.72 \times 10^{-4}$

El punto decimal se mueve cuatro lugares. Como el número original es menor que 1, el exponente es negativo.

c) $0.0074 = 7.4 \times 10^{-3}$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 11**

2 Cambiar números en notación científica a forma decimal

En ocasiones, puede necesitar convertir un número escrito en notación científica a su forma decimal. El procedimiento a realizar es como sigue.

Para convertir un número en notación científica a forma decimal

1. Observe el exponente en la base 10.
2. **a)** Si el exponente es positivo, el punto decimal en el número, muévalo hacia la derecha el mismo número de lugares que el exponente. Puede ser necesario agregar ceros al número. Esto tendrá como resultado un número mayor o igual a 10.

   b) Si el exponente es cero, el punto decimal en el número no se mueve de su posición actual. Quite el factor 10^0. Esto resultará en un número mayor o igual a 1 pero menor que 10.

   c) Si el exponente es negativo, el punto decimal en el número, muévalo hacia la izquierda el mismo número de lugares que el exponente. Puede necesitar agregar ceros. Esto resultará en un número menor que 1.

EJEMPLO 2 ▸ Escriba los números siguientes sin exponentes.

a) 2.1×10^4 **b)** 8.73×10^{-3} **c)** 1.45×10^8

Solución

a) Mueva el punto decimal cuatro lugares hacia la derecha.

$$2.1 \times \boxed{10^4} = 2.1 \times \boxed{10{,}000} = 21{,}000$$

b) Mueva el punto decimal tres lugares hacia la izquierda.

$$8.73 \times 10^{-3} = 0.00873$$

c) Mueva el punto decimal ocho lugares hacia la derecha.

$$1.45 \times 10^8 = 145{,}000{,}000$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 25**

3 Usar notación científica en la resolución de problemas

Podemos utilizar las reglas de los exponentes cuando trabajamos con números escritos en notación científica, como se ilustra en las aplicaciones siguientes.

EJEMPLO 3 ▸ **Deuda pública por persona** La deuda pública es el monto total que el gobierno federal de Estados Unidos adeuda a prestadores en la forma de bonos del gobierno. El 1 de julio de 2005, la deuda pública de Estados Unidos era aproximadamente $7,858,000,000,000 (7 billones, 858 mil millones de dólares). La población de Estados Unidos en esa fecha era de alrededor de 296,000,000.

a) Determine la deuda promedio por persona de Estados Unidos (deuda per cápita).

b) El 1 de julio de 1982, la deuda de Estados Unidos fue de alrededor de $1,142,000,000,000. ¿Cuánto mayor fue la deuda en 2005 que en 1982?

c) ¿Cuántas veces fue mayor la deuda en 2005 que en 1982?

Solución

a) Para determinar la deuda per cápita, dividimos la deuda pública entre la población.

$$\frac{7{,}858{,}000{,}000{,}000}{296{,}000{,}000} = \frac{7.858 \times 10^{12}}{2.96 \times 10^{8}} \approx 2.65 \times 10^{12-8} \approx 2.65 \times 10^{4} \approx 26{,}500$$

Así, la deuda per cápita fue de casi \$26,500. Esto significa que si los ciudadanos de Estados Unidos deseasen "compartir los gastos" y saldar la deuda federal, le tocaría alrededor de \$26,500 a cada hombre, mujer y niño de Estados Unidos.

b) Necesitamos encontrar la diferencia en la deuda entre 2005 y 1982.

$$\begin{aligned} 7{,}858{,}000{,}000{,}000 - 1{,}142{,}000{,}000{,}000 &= 7.858 \times 10^{12} - 1.142 \times 10^{12} \\ &(7.858 - 1.142) \times 10^{12} \\ &6.716 \times 10^{12} \\ &6{,}716{,}000{,}000{,}000 \end{aligned}$$

La deuda pública de Estados Unidos fue \$6,716,000,000,000 mayor en 2005 que en 1982.

c) Para determinar cuántas veces fue mayor la deuda pública de 2005, dividimos la deuda de 2005 entre la deuda de 1982 como sigue:

$$\frac{7{,}858{,}000{,}000{,}000}{1{,}142{,}000{,}000{,}000} = \frac{7.858 \times 10^{12}}{1.142 \times 10^{12}} \approx 6.88$$

Así, la deuda pública de 2005 fue casi 6.88 veces mayor que en 1982.

Ahora resuelva el ejercicio 87

EJEMPLO 4 **Recaudación de impuestos** Los datos para las gráficas en la **figura 1.11** se tomaron del sitio web de la Oficina de Censos de Estados Unidos. Las gráficas muestran la recaudación estatal acumulada de impuestos en 2004. Hemos dado los montos recolectados en notación científica.

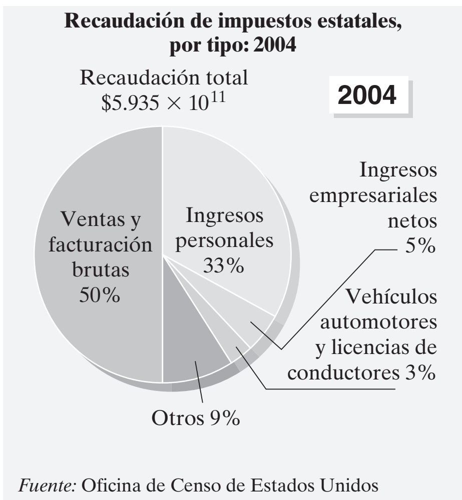


FIGURA 1.11

a) Determine, usando notación científica, cuánto dinero se recolectó en impuestos sobre percepciones personales en 2004.

b) Determine, usando notación científica, cuánto dinero más se recaudó en impuestos a ventas y facturación brutas que en impuestos por ingresos empresariales netos.

Solución

a) En 2004, 33% de los $\$5{,}935 \times 10^{11}$ se recaudaron de impuestos en percepciones personales. En forma decimal, 33% es 0.33 y en notación científica 33% es 3.3×10^{-1}. Para determinar 33% de $\$5{,}935 \times 10^{11}$, multiplicamos usando la notación científica como sigue.

$$\begin{aligned}\text{recaudación de impuestos en percepciones personales} &= (3.3 \times 10^{-1})(5.935 \times 10^{11}) \\ &= (3.3 \times 5.935)(10^{-1} \times 10^{11}) \\ &= 19.5855 \times 10^{-1+11} \\ &= 19.5855 \times 10^{10} \\ &= 1.95855 \times 10^{11}\end{aligned}$$

Así, en 2004 se recaudaron alrededor de $\$1.95855 \times 10^{11}$ o \$195,855,000,000 por percepciones personales.

b) En 2004, se recolectó 50% de ventas y facturación brutas y se recolectó 5% de impuestos a ingresos netos empresariales. Para determinar cuánto dinero más se recaudó de ventas y facturación brutas que de impuestos a ingresos netos empresariales, primero determinamos la diferencia entre los dos porcentajes.

$$\text{diferencia} = 50\% - 5\% = 45\%$$

Para determinar 45% de $\$5.935 \times 10^{11}$, cambiamos 45% a notación científica y luego multiplicamos.

$$45\% = 0.45 = 4.5 \times 10^{-1}$$

$$\begin{aligned}\text{diferencia en recaudación de impuestos} &= (4.5 \times 10^{-1})(5.935 \times 10^{11}) \\ &= (4.5 \times 5.935)(10^{-1} \times 10^{11}) \\ &= 26.7075 \times 10^{10} \\ &= 2.67075 \times 10^{11}\end{aligned}$$

Por tanto, se recaudó alrededor de $\$2.67075 \times 10^{11}$ o \$267,075,000,000 más de dinero en impuesto a ventas y facturación brutas que de impuestos a ingresos empresariales netos.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 95

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA

En una calculadora científica o graficadora el producto (8,000,000)(400,000) podría mostrarse como 3.2^{12} o 3.2E12. Ambos representan 3.2×10^{12}, o sea 3,200,000,000,000.

Para introducir números en notación científica en una calculadora científica o en una calculadora graficadora, por lo común utiliza las teclas $\boxed{\text{EE}}$ o $\boxed{\text{EXP}}$ Para introducir 4.6×10^8, debe presionar 4.6 $\boxed{\text{EE}}$ 8 o bien 4.6 $\boxed{\text{EXP}}$ 8. La pantalla de su calculadora podría mostrar 4.6^{08} o bien 4.6E8.8.

En la TI-84 Plus aparece EE abajo de la tecla $\boxed{,}$. Así, para introducir (8,000,000)(400,000) en notación científica debería presionar

$$8 \underbrace{\boxed{2^{\text{nd}}}\ \boxed{,}}_{\text{para obtener EE}} 6 \boxed{\times} 4 \underbrace{\boxed{2^{\text{nd}}}\ \boxed{,}}_{\text{para obtener EE}} 5 \boxed{\text{ENTER}} \overset{\text{respuesta que se muestra}}{3.2\text{E}12}$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.6

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cuál es la forma de un número en notación científica?
2. ¿Puede 1×10^n ser un número negativo para algún entero positivo n? Explique.
3. ¿Cuál es mayor, 1×10^{-2} o 1×10^{-3}? Explique.
4. ¿Puede 1×10^{-n} ser un número negativo para algún entero positivo n? Explique.

Práctica de habilidades

Exprese cada número en notación científica.

5. 3700
6. 860
7. 0.041
8. 0.000000718
9. 760,000
10. 9,260,000,000
11. 0.00000186
12. 0.00000914
13. 5,780,000
14. 0.0000723
15. 0.000106
16. 452,000,000

Exprese cada número sin exponentes.

17. 3.1×10^4
18. 5×10^8
19. 2.13×10^{-5}
20. 5.78×10^{-5}
21. 9.17×10^{-1}
22. 5.4×10^1
23. 8×10^6
24. 7.6×10^4
25. 2.03×10^5
26. 9.25×10^{-6}
27. 1×10^6
28. 1×10^{-8}

Exprese cada valor sin exponentes.

29. $(4 \times 10^5)(6 \times 10^2)$
30. $(7.6 \times 10^{-3})(1.2 \times 10^{-1})$
31. $\dfrac{8.4 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-4}}$
32. $\dfrac{8.5 \times 10^3}{1.7 \times 10^{-2}}$
33. $\dfrac{9.45 \times 10^{-3}}{3.5 \times 10^2}$
34. $(5.2 \times 10^{-3})(4.1 \times 10^5)$
35. $(8.2 \times 10^5)(1.4 \times 10^{-2})$
36. $(6.3 \times 10^4)(3.7 \times 10^{-8})$
37. $\dfrac{1.68 \times 10^4}{5.6 \times 10^7}$
38. $\dfrac{7.2 \times 10^{-2}}{3.6 \times 10^{-6}}$
39. $(9.1 \times 10^{-4})(7.4 \times 10^{-4})$
40. $\dfrac{8.6 \times 10^{-8}}{4.3 \times 10^{-6}}$

Exprese cada valor en notación científica.

41. $(0.03)(0.0005)$
42. $(2500)(7000)$
43. $\dfrac{35{,}000{,}000}{7000}$
44. $\dfrac{560{,}000}{0.0008}$
45. $\dfrac{0.00069}{23{,}000}$
46. $\dfrac{0.000012}{0.000006}$
47. $(47{,}000)(35{,}000{,}000)$
48. $\dfrac{0.0000286}{0.00143}$
49. $\dfrac{1008}{0.0021}$
50. $\dfrac{0.018}{160}$
51. $\dfrac{0.00153}{0.00051}$
52. $(0.0015)(0.00038)$

Exprese cada valor en notación científica. Redondee los números decimales al milésimo más cercano.

53. $(4.78 \times 10^9)(1.96 \times 10^5)$
54. $\dfrac{4.44 \times 10^3}{1.11 \times 10^1}$
55. $(7.23 \times 10^{-3})(1.46 \times 10^5)$
56. $(5.71 \times 10^5)(4.7 \times 10^{-3})$
57. $\dfrac{4.36 \times 10^{-4}}{8.17 \times 10^{-7}}$
58. $\dfrac{6.45 \times 10^{25}}{3.225 \times 10^{15}}$
59. $(4.89 \times 10^{15})(6.37 \times 10^{-41})$
60. $(4.36 \times 10^{-6})(1.07 \times 10^{-6})$
61. $(8.32 \times 10^3)(9.14 \times 10^{-31})$
62. $\dfrac{3.71 \times 10^{11}}{4.72 \times 10^{-9}}$
63. $\dfrac{1.5 \times 10^{35}}{4.5 \times 10^{-26}}$
64. $(4.9 \times 10^5)(1.347 \times 10^{31})$

Notación científica *En los ejercicios del 65 al 78, escriba en notación científica cada número que aparece en itálicas.*

65. A la NASA le cuesta más de $*850 millones* enviar las naves *Spirit* y *Opportunity* a *Marte*.

66. La distancia entre el Sol y la Tierra es alrededor de *93 millones* de millas.
67. El costo promedio para un anuncio de 30 segundos en el Súper Bowl XXIX fue de $*2.4 millones*.
68. De acuerdo con la Oficina de Censos de Estados Unidos, la población mundial en 2050 será de alrededor de *9.2 mil millones* de personas.
69. De acuerdo con el 2005 *World Almanac and Fact Book*, el hombre más rico del mundo es Bill Gates de la compañía Microsoft, que tiene una fortuna de casi $*52.8 mil millones*.
70. El presupuesto federal de Estados Unidos en 2006 fue de alrededor de $*2.56 billones*.
71. En 2006, la deuda de Estados Unidos era de alrededor de $*9.1 billones*.

72. La velocidad de la luz es alrededor de *186,000* millas por segundo.
73. Un centímetro = *0.00001* hectómetro.
74. Un mililitro = *0.000001* kilolitro
75. Una pulgada ≈ *0.0000158* milla.
76. Una onza ≈ *0.00003125* ton.
77. Un miligramo = *0.000000001* tonelada métrica.
78. Cierta computadora puede realizar un cálculo en *0.0000001* segundo.

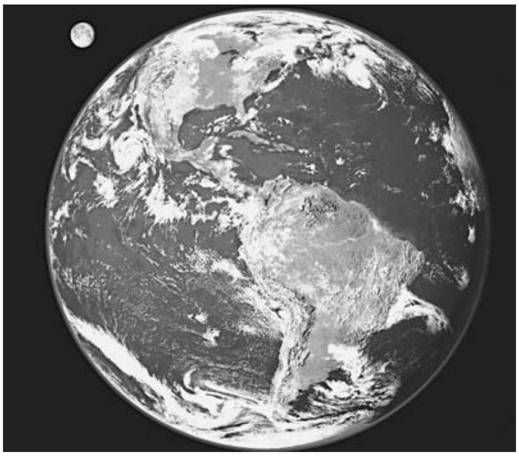
Resolución de problemas

79. Explique cómo puede dividir con rapidez un número dado en notación científica entre
a) 10,
b) 100,
c) 1 millón.
d) Divida 6.58×10^{-4} entre un millón. Deje su respuesta en notación científica.

80. Explique cómo puede multiplicar rápidamente un número dado en notación científica por
a) 10,
b) 100,
c) 1 millón.
d) Multiplique 7.59×10^{7} por un millón. Deje su respuesta en notación científica.

81. Experimento científico Durante un experimento científico encontró que la respuesta correcta es 5.25×10^{4}.
a) Si por error escribe la respuesta como 4.25×10^{4}, ¿por cuánto es errónea su respuesta?
b) Si por error escribe su respuesta como 5.25×10^{5}, ¿por cuánto es errónea su respuesta?
c) ¿Cuál de los dos errores es más grave? Explique.

82. Órbita de la Tierra
a) La Tierra completa su órbita de 5.85×10^{8} millas alrededor del Sol en 365 días. Determine la distancia recorrida por día.
b) La velocidad de la Tierra es alrededor de ocho veces más rápida que la de una bala. Estime la velocidad de una bala en millas por hora.



83. Distancia al Sol La distancia entre la Tierra y el Sol es de 93,000,000 millas. Si una nave espacial viaja a una velocidad de 3,100 millas por hora, ¿cuánto tardará en llegar al Sol?

84. Universo Hemos demostrado que existen al menos mil trillones, 10^{21}, de estrellas en el Universo.
a) Escriba el número sin exponentes.
b) ¿Cuántos millones de estrellas es esto? Explique cómo determinó su respuesta para la parte **b).**

85. Poblaciones de Estados Unidos y del mundo La población de Estados Unidos el 1 de septiembre de 2006 se estimó en 2.995×10^{8}. En ese día la población del mundo era de casi 6.536×10^{9}.
Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos.
a) ¿Cuántas personas vivían fuera de Estados Unidos en 2005?
b) ¿Qué porcentaje de la población mundial vivía en Estados Unidos en 2005?

86. El puente New River George El puente New River George, que se muestra abajo, tiene una longitud de 3030.5 pies. Se terminó en 1977 cerca de Fayetteville, Virginia del Oeste, y es el arco de acero con mayor amplitud en el mundo. Su peso total es de 8.80×10^{7} libras y el de su pieza más pesada es de 1.84×10^{5} libras.
a) ¿Cuántas veces es mayor el peso total del puente que el peso de la pieza más pesada?
b) ¿Cuál es la diferencia de pesos entre el peso total del puente y el peso de la pieza más pesada?

87. Producto Nacional Bruto El producto nacional bruto (PNB) es una medida de la actividad económica. El PNB es la cantidad total de bienes y servicios producidos en un país en un año. En 2005, el PNB para Estados Unidos fue de casi \$11.728 billones y la población de Estados Unidos era de alrededor de 296.5 millones.
Fuente: Sitio web del Tesoro de Estados Unidos.
a) Escriba cada uno de estos números en notación científica.
b) Determine el PNB *per cápita* dividiendo el PNB entre la población de Estados Unidos.

88. Producto Nacional Bruto EN 2003, el PNB (vea el ejercicio 87) del mundo fue de alrededor de \$36.356 billones y la población mundial fue de alrededor de 6.3 mil millones de personas.
Fuente: Sitio web del Tesoro de Estados Unidos y www.en.wikipedia.org/wiki
a) Escriba cada uno de estos números en notación científica.
b) Determine el PNB *per capita* dividiendo el PNB entre la población mundial.

89. Densidad de población La densidad de población (personas por kilómetro cuadrado) se determina dividiendo la población de un país entre su área. Determine la densidad de población de China, si su población en 2005 fue 1.29×10^{9} y el área de su territorio era 9.8×10^6 kilómetros cuadrados. (Redondee su respuesta a la unidad más cercana).

90. **Densidad de población** Determine la densidad poblacional (vea el ejercicio 89) de India, si su población en 2005 fue 1.095×10^9 personas y su área es 3.2×10^6 kilómetros cuadrados. (Redondee su respuesta a la unidad más cercana).

91. **Reciclaje de plástico** En Estados Unidos sólo alrededor de 5% de las 4.2×10^9 libras de plástico usado se recicla anualmente.

a) ¿Cuántas libras se reciclan cada año?

b) ¿Cuántas libras no se reciclan anualmente?

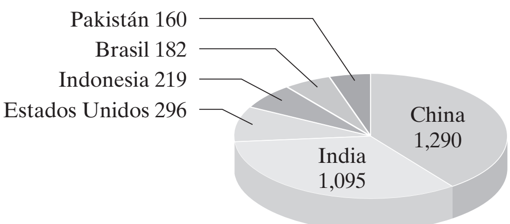
92. **Distancia a Próxima Centauri** La distancia de la Tierra al Sol es de alrededor de 150 millones de kilómetros. La siguiente estrella más cercana a la Tierra es Próxima Centauri. Está casi 268,000 veces más alejada de la Tierra que del Sol. Aproxime la distancia de Próxima Centauri a la Tierra. Escriba su respuesta en notación científica.

Próxima Centauri

Fuente: sitio web de la NASA.

93. **Países más poblados** En 2005, los seis países más poblados contaban con 3,242,000,000 personas del total de 6,446,000,000 de la población total del mundo. Los seis países más poblados en 2005 se muestran en la gráfica siguiente, junto con la población de cada país.

Los seis países más poblados (población en millones)



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos
Nota: China incluye China continental y Taiwán.

a) ¿Cuántas personas más vivían en China que en Estados Unidos?

b) ¿Qué porcentaje de la población mundial vivía en China?

c) Si el área de China es 3.70×10^6 millas cuadradas, determine la densidad de población de China (personas por milla cuadrada).

d) Si el área de Estados Unidos es 3.62×10^6 millas cuadradas, determine la densidad de población de Estados Unidos.*

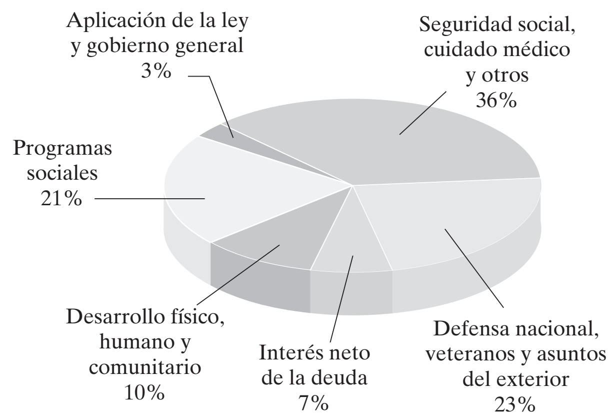
94. **Población mundial** Se requirió el desarrollo total de la historia de la humanidad para que la población mundial alcanzara 6.52×10^9 personas en el año 2006. A las tasas actuales, la población mundial se duplicará en alrededor de 62 años.

a) Estime la población mundial en 2068.

b) Suponiendo años de 365 días, estime el número promedio de personas que se agregan a la población mundial cada día entre 2006 y 2068.

95. **Gasto federal** La gráfica siguiente apareció en la página 81 del folleto de impuestos Internal Revenue Service Form del 2005. La gráfica muestra la distribución del gasto (desembolso) del gobierno federal en el Año Fiscal (AF) 2004. El gasto total del desembolso del gobierno federal en el AF 2004 fue $\$2.3 \times 10^{12}$.

Gastos



Utilice esta gráfica circular para responder las preguntas siguientes. Escriba todas las respuestas en notación científica.

a) ¿Cuál fue el gasto en el AF 2004 destinado al gobierno general y aplicación de la ley?

b) ¿Cuánto se destinó, en el AF 2004, en Seguridad Social, Gastos Médicos y otros programas de retiro?

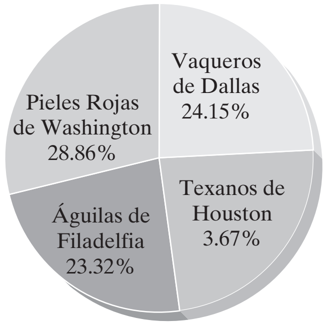
c) ¿Cuál fue el gasto destinado en el AF 2004 a todos los programas, distintos al pago de interés de la deuda nacional?

96. **Ingresos en el Fútbol en la NFL** En 2004, los 32 equipos de la NFL generaron más de \$5 mil millones en ingresos. Los cuatro equipos que generaron los mayores ingresos fueron Washington Redskins, Dallas Cowboys, Philadelphia Eagles y Houston Texans (Pieles Rojas de Washington, Vaqueros de Dallas, Águilas de Filadelfia y Texanos de Houston). El ingreso de estos cuatro equipos fue $\$8.49 \times 10^8$. La gráfica en la página siguiente muestra la distribución en porcentaje de los $\$8.49 \times 10^8$ entre estos cuatro equipos.

* El 1 de julio de 2005, la región con la mayor densidad de población es Macao con una densidad de población de 45,978 personas por milla cuadrada. El país con la densidad de población más grande es Mónaco, con una densidad de población de 42,172 personas por milla cuadrada.

Utilice esta gráfica para responder las preguntas siguientes.

Los cuatro equipos de la NFL que generaron mayor ingreso, total de $\$8.49 \times 10^8$



Fuente: NFL, *Forbes Magazine*, *The Washington Post* (8 de enero de 2005)

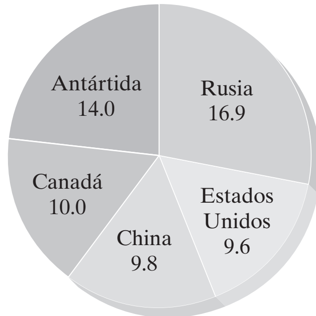
a) Determine el ingreso para Dallas Cowboys y Houston Texans. Exprese su respuesta en notación científica.

b) ¿Cuál es la diferencia en el ingreso entre Dallas Cowboys y Houston Texans?

c) Si el ingreso total de los 32 equipos fue de $5 mil millones en 2004, ¿qué porcentaje del ingreso total tuvieron estos cuatro equipos? Exprese su respuesta al por ciento más cercano.

97. Área territorial El área territorial, en kilómetros cuadrados, para los cinco países más grandes de nuestro planeta se da en la gráfica siguiente.

Área territorial (en millones de kilómetros cuadrados)



Fuente: www.world-gazetteer.com

a) ¿Cuál es el área territorial de los cinco países más grandes? Escriba su respuesta en notación científica.

b) ¿Cuánto mayor es el área de la Antártida que la de Estados Unidos? Escriba su respuesta en notación científica.

Retos

98. Año-luz Un *año-luz* es la distancia que la luz recorre en 1 año.

a) Determine el número de millas en un año luz, si la luz viaja a 1.86×10^5 millas *por segundo*.

b) Si la Tierra está a 93,000,000 millas del Sol, ¿cuánto tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra?

c) Nuestra galaxia, la Vía Láctea, tiene una longitud de casi 6.25×10^{16} millas. Si una nave espacial viajase a la mitad de la velocidad de la luz, ¿cuánto tardaría en ir de un extremo a otro de la galaxia?

Resumen del capítulo 1

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 1.2	
Una **variable** es una letra utilizada para representar varios número. Una **constante** es una letra que se usa para representar un valor particular. Una **expresión algebraica** (o **expresión**) es cualquier combinación de números, variables, exponentes, símbolos matemáticos y operaciones.	Por lo común, x y y se utilizan para las variables. Si h es el número de horas en un día, entonces $h = 24$, una constante $3x^2(x - 2) + 2x$ es una expresión algebraica.
Un **conjunto** es una colección de objetos. Los **objetos** se denominan **elementos**. La **forma de lista** es un conjunto que tiene listados sus elementos dentro de un par de llaves. Un primer conjunto es un **subconjunto** de un segundo conjunto cuando cada elemento del primer conjunto también es elemento del segundo conjunto. El **conjunto nulo**, o **conjunto vacío**, se simboliza $\{\ \}$ o $\emptyset$, no tiene elementos.	Si $A = \{\text{azul, verde, rojo}\}$, entonces azul, verde y rojo son los elementos de A. $\{1, 3, 5\}$ es un subconjunto de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ El conjunto de personas vivas con más de 200 años de edad es un conjunto vacío.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 1.2 (continuación)

Símbolos de desigualdad

$>$ se lee "es mayor que".
$\geq$ se lee "es mayor o igual a".
$<$ se lee "es menor que".
$\leq$ se lee "es menor o igual a"
$\neq$ se lee "no es igual a".

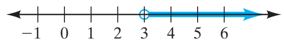
$6 > 2$ se lee, 6 es mayor que 2
$5 \geq 5$ se lee, 5 es mayor o igual a 5
$-4 < 3$ se lee, -4 es menor que 3
$-10 \leq -1$ se lee, -10 es menor o igual a -1
$-5 \neq 17$ se lee, -5 no es igual a 17

Las desigualdades pueden graficarse en una recta numérica.
La notación constructiva de conjuntos tiene la forma

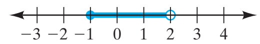
$$\{ \quad x \quad | \; x \text{ tiene la propiedad } p \; \}$$

El conjunto de — todos los elementos x — tales que — x tiene la propiedad dada

$x > 3$



$\{x|-1 \leq x < 2\}$



Conjuntos importantes de números reales

Números reales: $\mathbb{R} = \{x|x \text{ es un punto en una recta numérica}\}$
Números naturales o de conteo: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
Números enteros no negativos: $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
Números enteros: $I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Números racionales: $Q = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \text{ y } q \text{ son enteros, } q \neq 0 \right\}$
Números irracionales: $I = \{x|x \text{ es un número real que no es racional}\}$

La **unión** del conjunto A y el conjunto B, escrita $A \cup B$, es el conjunto de elementos que pertenecen al conjunto A *o* al conjunto B.
La **intersección** del conjunto A y el conjunto B, escrita $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que son comunes a ambos conjuntos A *y* B.

Dados $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A \cap B = \{3, 5, 7\}$.

Sección 1.3

Inverso aditivo

Para cualquier número real a, su inverso aditivo es $-a$.

-8 es el inverso aditivo de 8

Propiedad del doble negativo

Para cualquier número real a, $-(-a) = a$.

$-(-5) = 5$

Valor absoluto

Si a representa cualquier número real, entonces

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$|9| = 9, \quad |-9| = 9$

Para sumar dos números con el **mismo signo** (ambos positivos o ambos negativos), sume sus valores absolutos y coloque el signo común antes de la suma.

Sume $-6 + (-8)$.

$$|-6| = 6 \text{ y } |-8| = 8$$
$$|-6| + |-8| = 6 + 8 = 14$$

Por lo tanto, $-6 + (-8) = -14$.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 1.3 (continuación)	
Para sumar dos números con **signos diferentes** (uno positivo y el otro negativo), reste el valor absoluto más pequeño del mayor valor absoluto. La respuesta tiene el signo del número con mayor valor absoluto.	Suma $8 + (-2)$. $$\begin{aligned} 8 + (-2) &= \lvert 8\rvert - \lvert -2\rvert \\ &= 8 - 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$ Por lo tanto, $8 + (-2) = 6$.
Resta de números reales $$a - b = a + (-b)$$	$$-14 - 10 = -14 + (-10) = -24$$
Para multiplicar dos números con **signos iguales**, ambos positivos o ambos negativos, multiplique sus valores absolutos. La respuesta es **positiva**.	$$(-1.6)(-8.9) = 14.24$$
Para multiplicar dos números con **signos diferentes**, uno positivo y el otro negativo, multiplique sus valores absolutos. La respuesta es **negativa**.	$$21\left(-\frac{1}{7}\right) = -3$$
Propiedad multiplicativa del cero Para cualquier número a, $$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$	$$0 \cdot 5 = 0$$
División entre cero Para cualquier número real $a \neq 0$, entonces $\frac{a}{0}$ no está definida.	$\frac{7}{0}$ no es definida
División de dos números reales **1.** Para dividir dos números reales con **signos iguales**, ambos positivos o ambos negativos, divida sus valores absolutos. La respuesta es **positiva**.	$$\frac{-8}{-2} = 4$$
2. Para dividir dos números con **signos diferentes**, uno positivo y el otro negativo, divida sus valores absolutos. La respuesta es **negativa**.	$$\frac{-21}{7} = -3$$
Propiedades de los números reales. Para números reales a, b, c.	
Propiedad conmutativa $$a + b = b + a$$ $$a \cdot b = b \cdot a$$	$$6 + 7 = 7 + 6$$ $$3 \cdot 16 = 16 \cdot 3$$
Propiedad asociativa $$(a + b) + c = a + (b + c)$$ $$(ab)c = a(bc)$$	$$(5 + 4) + 11 = 5 + (4 + 11)$$ $$(8 \cdot 2) \cdot 15 = 8 \cdot (2 \cdot 15)$$
Propiedad de la identidad $$a + 0 = 0 + a = a$$ $$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$	$$31 + 0 = 0 + 31 = 31$$ $$6 \cdot 1 = 1 \cdot 6 = 6$$
Propiedad del inverso $$a + (-a) = (-a) + a = 0$$ $$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$	$$18 + (-18) = -18 + 18 = 0$$ $$14 \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{14} \cdot 14 = 1$$
Propiedad distributiva $$a(b + c) = ab + ac$$	$$9(x + 10) = 9 \cdot x + 9 \cdot 10$$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 1.4	
Los **factores** son números o expresiones que se multiplican.	En $3 \cdot 5 = 15$, el 3 y el 5 son factores de 15.
Para cualquier número natural n, b^n es una expresión exponencial tal que $b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores}}$	$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$
La **raíz cuadrada** de un número $\sqrt{a} = b$ si $b^2 = a$	$\sqrt{36} = 6$ ya que $6^2 = 36$
La **raíz cúbica** de un número $\sqrt[3]{a} = b$ si $b^3 = a$	$\sqrt[3]{64} = 4$ ya que $4^3 = 64$
La **raíz enésima** de un número $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$	$\sqrt[4]{625} = 5$ ya que $5^4 = 625$
Orden de las operaciones Para evaluar expresiones matemáticas, utilice el orden siguiente: **1.** Primero, evalúe las expresiones dentro de los símbolos de agrupación, incluyendo paréntesis, ( ), corchetes, [ ], llaves { } y valor absoluto | |. Si la expresión contiene símbolos de agrupación anidados (un par de símbolos de agrupación dentro de otro par), primero evalúe la expresión dentro de los símbolos de agrupación más internos. **2.** Después, evalúe todos los términos que tengan exponentes y radicales. **3.** A continuación, evalúe todas las multiplicaciones o divisiones en el orden en el que aparezcan, trabajando de izquierda a derecha. **4.** Por último, evalúe todas las sumas o restas en el orden en que aparezcan, trabajando de izquierda a derecha.	Evalúe $4 + 3 \cdot 9^2 - \sqrt{121}$. $4 + 3 \cdot 9^2 - \sqrt{121} = 4 + 3 \cdot 81 - 11$ $= 4 + 243 - 11$ $= 247 - 11$ $= 236$
Sección 1.5	
Regla del producto para exponentes Si m y n son números naturales y a es cualquier número real, entonces $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$x^8 \cdot x^{15} = x^{8+15} = x^{23}$
Regla del cociente para exponentes Si a es cualquier número real y m y n son enteros diferentes de cero, entonces $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{z^{21}}{z^{14}} = z^{21-14} = z^7$
Regla del exponente negativo Para cualquier número real, a, diferente de cero y cualquier entero no negativo m, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$y^{-13} = \frac{1}{y^{13}}$
Elevar una potencia a una potencia (regla de la potencia) Si a es un número real y m y n son números enteros, entonces $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(c^{-8})^{-5} = c^{(-8)(-5)} = c^{40}$
Regla del exponente cero Si a es cualquier número real distinto de cero, entonces $a^0 = 1$	$7x^0 = 7 \cdot 1 = 7$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 1.5 (continuación)	
Elevar un producto a una potencia Si a y b son números reales y m es un entero, entonces $(ab)^m = a^m b^m$	$(8x^6)^2 = 8^2(x^6)^2 = 64x^{12}$
Elevar un cociente a una potencia Si a y b son números reales y m es un entero, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, \quad a \neq 0, b \neq 0$	$\left(\frac{2}{r}\right)^3 = \frac{2^3}{r^3} = \frac{8}{r^3}$ $\left(\frac{6}{x^3}\right)^{-5} = \left(\frac{x^3}{6}\right)^5 = \frac{(x^3)^5}{6^5} = \frac{x^{15}}{6^5}$
Sección 1.6	
Un número escrito en **notación científica** tiene la forma $a \times 10^n$, donde $1 \le a < 10$ y n es un entero.	$5.2 \times 10^7, \quad 1.036 \times 10^{-8}$
Para escribir un número en notación científica **1.** Desplace el punto decimal del número hacia la derecha del primer dígito distinto de cero. **2.** Cuente el número de lugares que movió el punto decimal en el paso 1. Si el número original es 10 o mayor, la cuenta es positiva. Si el número original es menor que 1, la cuenta es negativa. **3.** Multiplique el número obtenido en el paso 1 por 10 elevado a la cuenta (potencia) determinada en el paso 2.	$12{,}900 = 1.29 \times 10^4$ $0.035 = 3.5 \times 10^{-2}$
Para convertir un número en notación científica a forma decimal **1.** Observe el exponente de la base 10. **2. a)** Si el exponente es positivo, mueva hacia la derecha el punto decimal en el número el mismo número de lugares que el exponente. **b)** Si el exponente es negativo, mueva hacia la izquierda el punto decimal en el número el mismo número de lugares que el exponente.	$3.08 \times 10^3 = 3080$ $8.76 \times 10^{-4} = 0.000876$

Ejercicios de repaso del capítulo 1

[1.2] *Liste cada conjunto en forma de lista.*

1. $A = \{x \mid x$ es un número natural entre 3 y 9$\}$.

2. $B = \{x \mid x$ es un entero no negativo múltiplo de 3$\}$.

Sea N = al conjunto de los naturales, W = conjunto de los enteros no negativos, Z = conjunto de enteros, Q = conjunto de números racionales, I = conjunto de números irracionales y $\mathbb{R}$ = conjunto de números reales. Determine si el primer conjunto es un subconjunto del segundo conjunto para cada pareja de conjuntos.

3. N, W

4. $Q, \mathbb{R}$

5. Q, H

6. $H, \mathbb{R}$

Considere el conjunto de números $\left\{-2, 4, 6, \frac{1}{2}, \sqrt{7}, \sqrt{3}, 0, \frac{15}{27}, -\frac{1}{5}, 1.47\right\}$. *Liste los elementos del conjunto que son:*

7. números naturales.
8. enteros no negativos.
9. enteros.
10. números racionales.
11. números irracionales.
12. números reales.

Indique si cada proposición es verdadera o falsa.

13. $\frac{0}{1}$ no es un número real.
14. $0, \frac{3}{5}, -2$ y 4 son números racionales.
15. Un número real no puede dividirse entre 0.
16. Todo número racional y todo número irracional son números reales.

Determine $A \cup B$ y $A \cap B$, para cada conjunto A y B.

17. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
18. $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$
19. $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
20. $A = \{4, 6, 9, 10, 11\}$, $B = \{3, 5, 9, 10, 12\}$

Ilustre cada conjunto en la recta numérica.

21. $\{x|x > 5\}$
22. $\{x|x \leq -2\}$
23. $\{x|-1.3 < x \leq 2.4\}$
24. $\left\{x \middle| \frac{2}{3} \leq x < 4 \text{ y } x \in N\right\}$

[1.3] *Inserte $<, >$, o $=$ en el área sombreada entre los dos números para hacer que cada proposición sea verdadera.*

25. -3 ▢ 0
26. -4 ▢ -3.9
27. 1.06 ▢ 1.6
28. $|-8|$ ▢ 8
29. $|-4|$ ▢ $|-10|$
30. 13 ▢ $|-9|$
31. $\left|-\frac{2}{3}\right|$ ▢ $\frac{3}{5}$
32. $-|-2|$ ▢ -6

Escriba los números en cada lista de menor a mayor.

33. $\pi, -\pi, -3, 3$
34. $0, \frac{3}{5}, 2.7, |-3|$
35. $|-10|, |-5|, 3, -2$
36. $|-3|, -7, |-7|, -3$
37. $-4, 6, -|-3|, 5$
38. $|1.6|, |-2.3|, -2, 0$

Diga el nombre de cada propiedad que se ilustra.

39. $-7(x + 4) = -7x - 28$
40. $rs = sr$
41. $(x + 5) + 2 = x + (5 + 2)$
42. $q + 0 = 0$
43. $5(rs) = (5r)s$
44. $-(-6) = 6$
45. $9(0) = 0$
46. $a + (-a) = 0$
47. $x \cdot \frac{1}{x} = 1$
48. $k + l = 1 \cdot (k + l)$

[1.3, 1.4] *Evalúe.*

49. $8 + 3^2 - \sqrt{36} \div 2$
50. $-4 \div (-2) + 16 - \sqrt{81}$
51. $(7 - 9) - (-3 + 5) + 15$
52. $2|-7| - 4|-6| + 5$
53. $(6 - 9) \div (9 - 6) + 2$
54. $|6 - 3| \div 3 + 4 \cdot 8 - 12$
55. $\sqrt{9} + \sqrt[3]{64} + \sqrt[5]{32}$
56. $3^2 - 6 \cdot 9 + 4 \div 2^2 - 5$
57. $4 - (2 - 9)^0 + 3^2 \div 1 + 3$
58. $5^2 + (-2 + 2^2)^3 + 1$
59. $-3^2 + 14 \div 2 \cdot 3 - 6$
60. $\{[(12 \div 4)^2 - 1]^2 \div 16\}^3$
61. $\dfrac{9 + 7 \div (3^2 - 2) + 6 \cdot 8}{\sqrt{81} + \sqrt{1} - 10}$
62. $\dfrac{-(5 - 7)^2 - 3(-2) + |-6|}{18 - 9 \div 3 \cdot 5}$

Evalúe.

63. Evalúe $2x^2 + 3x + 8$ cuando $x = 2$.
64. Evalúe $5a^2 - 7b^2$ cuando $a = -3$ y $b = -4$.

65. Campaña política El costo de las campañas políticas ha cambiado de forma dramática desde 1952. El monto gastado, en millones de dólares, en todas las elecciones de Estados Unidos, incluyendo elecciones locales, estatales y de oficinas nacionales, partidos políticos, comités de acción política y papelería para la votación, se aproxima por medio de

$$\text{dólares destinados} = 50.86x^2 - 316.75x + 541.48,$$

donde x representa cada periodo de 4 años desde 1948. Sustituya 1 por x para obtener el monto gastado en 1952, 2 por x para obtener el monto gastado en 1956, 3 por x para obtener el monto gastado en 1960, y así sucesivamente.

a) Determine el monto gastado para las elecciones en 1976.

b) Determine el gasto proyectado que se gastará para las elecciones en 2008.

66. Tráfico ferroviario El tráfico ferroviario se ha incrementado de manera continua desde 1965. La razón principal de esto se debe al aumento en los trenes utilizados para transportar bienes por medio de contenedores. Podemos aproximar el monto de la carga transportada en toneladas−milla (1 tonelada-milla es igual a 1 tonelada de carga transportada una milla) mediante

$$\text{carga transportada} = 14.04x^2 + 1.96x + 712.05$$

donde x representa cada periodo de 5 años desde 1960. Sustituya 1 por x para obtener la cantidad de carga en 1965, 2 por x para obtener la cantidad de carga transportada en 1970, 3 por x para 1975, etcétera.

a) Determine la cantidad de carga transportada por medio de trenes en 1980.

b) Determine la cantidad proyectada de carga transportada por medio de trenes en 2010.

[1.5] *Simplifique cada expresión y escriba la respuesta sin exponentes negativos.*

67. $2^3 \cdot 2^2$ **68.** $x^2 \cdot x^3$ **69.** $\dfrac{a^{12}}{a^4}$ **70.** $\dfrac{y^{12}}{y^5}$

71. $\dfrac{b^7}{b^{-2}}$ **72.** $c^3 \cdot c^{-6}$ **73.** $5^{-2} \cdot 5^{-1}$ **74.** $8x^0$

75. $(-9m^3)^2$ **76.** $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{-1}$ **77.** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$ **78.** $\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^{-1}$

79. $(5xy^3)(-3x^2y)$ **80.** $(2v^3w^{-4})(7v^{-6}w)$ **81.** $\dfrac{6x^{-3}y^5}{2x^2y^{-2}}$ **82.** $\dfrac{12x^{-3}y^{-4}}{4x^{-2}y^5}$

83. $\dfrac{g^3h^{-6}j^{-9}}{g^{-2}h^{-1}j^5}$ **84.** $\dfrac{21m^{-3}n^{-2}}{7m^{-4}n^2}$ **85.** $\left(\dfrac{4a^2b}{a}\right)^3$ **86.** $\left(\dfrac{x^5y}{-3y^2}\right)^2$

87. $\left(\dfrac{p^3q^{-1}}{p^{-4}q^5}\right)^2$ **88.** $\left(\dfrac{-2ab^{-3}}{c^2}\right)^3$ **89.** $\left(\dfrac{5xy^3}{z^2}\right)^{-2}$ **90.** $\left(\dfrac{9m^{-2}n}{3mn}\right)^{-3}$

91. $(-2m^2n^{-3})^{-2}$ **92.** $\left(\dfrac{15x^5y^{-3}z^{-2}}{-3x^4y^{-4}z^3}\right)^4$ **93.** $\left(\dfrac{2x^{-1}y^5z^4}{3x^4y^{-2}z^{-2}}\right)^{-2}$ **94.** $\left(\dfrac{8x^{-2}y^{-2}z}{-x^4y^{-4}z^3}\right)^{-1}$

[1.6] *Exprese cada número en notación científica.*

95. 0.0000742 **96.** 460,000 **97.** 183,000 **98.** 0.000001

Simplifique cada expresión y exprese la respuesta sin exponentes.

99. $(25 \times 10^{-3})(1.2 \times 10^6)$ **100.** $\dfrac{27 \times 10^3}{9 \times 10^5}$ **101.** $\dfrac{4{,}000{,}000}{0.02}$ **102.** $(0.004)(500{,}000)$

103. Publicidad en línea Las tres compañías con el mayor gasto en publicidad en línea en 2004, se listan a continuación.

Compañía	Monto gastado
SBC Communications	$\$2.86 \times 10^7$
Netflix	$\$2.69 \times 10^7$
Dell Computers	$\$2.23 \times 10^7$

a) ¿Cuánto más gastó SBC Communications que Netflix?

b) ¿Cuánto más gastó Netflix que Dell Computers?

c) ¿Cuántas veces es mayor la cantidad que gastó SBC Communications que la cantidad que gastó Dell Computers?

104. Voyager El 17 de febrero de 1998, la astronave *Voyager I* se convirtió en el explorador más distante en el sistema solar, rompiendo el récord del *Pioneer 10*. El *Voyager* 1, con 28 años de edad, ha recorrido más de 1.4×10^{10} kilómetros desde la Tierra (alrededor de 150 veces la distancia del Sol a la Tierra).

a) Represente 1.4×10^{10} como un número entero.

b) ¿Cuántos miles de millones de kilómetros ha recorrido el *Voyager 1?*

c) Suponiendo que el *Voyager 1* haya recorrido casi el mismo número de kilómetros en cada uno de los 28 años, ¿cuántos kilómetros recorrió en promedio en un año?

d) Si 1 kilómetro ≈ 0.6 millas, ¿qué tan lejos, en millas, ha viajado el *Voyager 1*?

Examen de práctica del capítulo 1

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección donde se estudia por primera vez el material, se proporcionan en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en **el CD-Rom que acompaña a este libro.** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. Escriba en forma de lista $A = \{x|x$ es un número natural mayor o igual a $6\}$.

Indique si cada proposición es verdadera o falsa.

2. Todo número real es un número racional.

3. La unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales es el conjunto de los números reales.

Considere el conjunto de números $\left\{-\frac{3}{5}, 2, -4, 0, \frac{19}{12}, 2.57, \sqrt{8}, \sqrt{2}, -1.92\right\}$. *Liste los elementos del conjunto que sean*

4. números racionales.

5. números reales.

Determine $A \cup B$ y $A \cap B$ para los conjuntos A y B.

6. $A = \{8, 10, 11, 14\}, B = \{5, 7, 8, 9, 10\}$

7. $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

En los ejercicios 8 y 9, ilustre cada conjunto en la recta numérica.

8. $\{x|-2.3 \leq x < 5.2\}$

9. $\left\{x \middle| -\frac{5}{2} < x < \frac{6}{5} \text{ y } x \in I\right\}$

10. Liste de menor a mayor: $|3|, -|4|, -2, 9$.

Diga el nombre de cada propiedad que se ilustra.

11. $(x + y) + 8 = x + (y + 8)$

12. $3x + 4y = 4y + 3x$

Evalúe cada expresión.

13. $\{6 - [7 - 3^2 \div (3^2 - 2 \cdot 3)]\}$

14. $2^4 + 4^2 \div 2^3 \cdot \sqrt{25} + 7$

15. $\dfrac{-3|4 - 8| \div 2 + 6}{-\sqrt{36} + 18 \div 3^2 + 4}$

16. $\dfrac{-6^2 + 3(4 - |6|) \div 6}{4 - (-3) + 12 \div 4 \cdot 5}$

17. Evalúe $-x^2 + 2xy + y^2$ cuando $x = 2$ y $y = 3$.

18. Bala de cañón Para celebrar el 4 de julio se dispara un cañón apuntado hacia arriba desde un fuerte desde donde, hacia abajo, se ve el océano. La altura, h, en pies, de la bala de cañón sobre el nivel del mar en cualquier instante t, en segundos, puede determinarse mediante la fórmula $h = -16t^2 + 120t + 200$. Determine la altura de la bala de cañón sobre el nivel del mar **a)** 1 segundo después que se disparó el cañón, **b)** 5 segundos después que se disparó el cañón.

Simplifique cada expresión y escriba la respuesta sin exponentes negativos.

19. 3^{-2}

20. $\left(\dfrac{4m^{-3}}{n^2}\right)^2$

21. $\dfrac{24a^2b^{-3}c^0}{30a^3b^2c^{-2}}$

22. $\left(\dfrac{-3x^3y^{-2}}{x^{-1}y^5}\right)^{-3}$

23. Convierta 389,000,000 a notación científica.

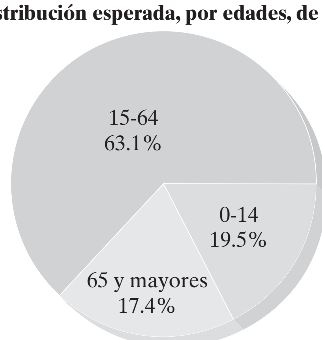
24. Simplifique $\dfrac{3.12 \times 10^6}{1.2 \times 10^{-2}}$ y escriba el número sin exponentes.

25. Población mundial

a) Se espera que en 2050 la población mundial sea de alrededor de 9.2 millones de personas. Escriba este número en notación científica.

b) La gráfica siguiente muestra la distribución esperada de la población mundial en 2050, para los tres grupos de edades 0−14, 15−64 y 65 y mayores. Utilice notación científica para determinar el número de personas en cada uno de estos grupos de edades en 2050.

Distribución esperada, por edades, de la población mundial



2 Ecuaciones y desigualdades

OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En este capítulo nos centramos en resolver ecuaciones y desigualdades lineales, y en utilizar ecuaciones lineales, fórmulas y desigualdades para resolver problemas de la vida real. También introducimos una poderosa técnica para la resolución de problemas que utilizaremos a lo largo de este texto. Daremos testimonio del poder del álgebra como una herramienta para la resolución de problemas en una multitud de áreas, que incluyen bienes raíces, química, negocios, la banca, física y finanzas personales.

PARA MUCHAS PERSONAS, LA SELECCIÓN de un plan telefónico de llamadas de larga distancia es una decisión muy importante. Algunas compañías telefónicas ofrecen planes con un pago mensual más una tarifa reducida por cada minuto de llamada de larga distancia que se realiza. Otros planes no tienen un pago mensual, pero puede cobrar tarifas más altas por cada minuto de llamada de larga distancia que se realice. ¿Cuál plan debe usted elegir?

En el ejemplo 4 de la página 90, investigaremos dos de tales planes, los cuales ofrece la compañía telefónica BellSouth.

2.1 Resolución de ecuaciones lineales

1 Identificar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.
2 Reducir términos semejantes.
3 Resolver ecuaciones lineales.
4 Resolver ecuaciones con fracciones.
5 Identificar ecuaciones condicionales, contradicciones e identidades.
6 Entender los conceptos para resolver ecuaciones.

1 Identificar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva

En álgebra elemental usted aprendió a resolver ecuaciones lineales. En esta sección repasamos brevemente estos procedimientos. Antes de hacerlo, necesitamos introducir tres útiles propiedades de la igualdad: la *propiedad reflexiva*, la *propiedad simétrica* y la *propiedad transitiva*.

Propiedades de la igualdad

Para todos los números reales a, b y c:

1. $a = a$.	*propiedad reflexiva*
2. Si $a = b$, entonces $b = a$.	*propiedad simétrica*
3. Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.	*propiedad transitiva*

Ejemplos de la propiedad reflexiva

$$7 = 7$$

$$x + 5 = x + 5$$

Ejemplos de la propiedad simétrica

Si $x = 3$, entonces $3 = x$.

Si $y = x + 9$, entonces $x + 9 = y$.

Ejemplos de la propiedad transitiva

Si $x = a$ y $a = 4y$, entonces $x = 4y$.

Si $a + b = c$ y $c = 4d$, entonces $a + b = 4d$.

En este libro utilizaremos con frecuencia estas propiedades, aun cuando no nos refiramos a ellas por su nombre.

2 Reducir términos semejantes

Cuando una expresión algebraica consta de varias partes, las partes sumadas o restadas son los **términos** de la expresión. La expresión $3x^2 - 6x - 2$, que puede escribirse $3x^2 + (-6x) + (-2)$, tiene tres términos; $3x^2$, $-6x$ y -2. La expresión

$$6x^2 - 3(x + y) - 4 + \frac{x + 2}{8}$$

tiene cuatro términos: $6x^2$, $-3(x + y)$, -4 y $\dfrac{x + 2}{8}$.

Expresión	Términos
$\frac{1}{2}x^2 - 3x - 7$	$\frac{1}{2}x^2$, $-3x$, -7
$-5x^3 + 3x^2y - 2$	$-5x^3$, $3x^2y$, -2
$4(x + 3) + 2x + \frac{1}{5}(x - 2) + 1$	$4(x + 3)$, $2x$, $\frac{1}{5}(x - 2)$, 1

La parte numérica de un término que precede a la variable es su **coeficiente numérico** o simplemente su **coeficiente**. En el término $6x^2$, el 6 es el coeficiente numérico.

Cuando el coeficiente es 1 o -1, por lo general no escribimos el número 1. Por ejemplo, x significa, $1x$, $-x^2y$ significa $-1x^2y$ y $(x + y)$ significa $1(x + y)$.

Términos	Coeficiente numérico
$\frac{5k}{9}$	$\frac{5}{9}$
$-4(x + 2)$	-4
$\frac{x - 2}{7}$	$\frac{1}{7}$
$-(x + y)$	-1

Observe que $\frac{x - 2}{7}$ *significa* $\frac{1}{7}(x - 2)$ *y* $-(x + y)$ *significa* $-1(x + y)$.

Cuando un término consta sólo de un número, a este número por lo general se le llama **constante**. Por ejemplo, en la expresión $x^2 - 4$, el -4 es una constante.

El **grado de un término** con exponentes enteros no negativos es la suma de los exponentes de la variable del término. Por ejemplo, $3x^2$ es un término de segundo grado y $-4x$ es un término de primer grado ($-4x$ significa $-4x^1$). El número 3 puede escribirse como $3x^0$, así que el número 3 (y cualquier otra constante diferente de cero) tiene grado cero. Se dice que el término 0 no tiene grado. El término $4xy^5$ es un término de sexto grado ya que la suma de los exponentes es $1 + 5 = 6$. El término $6x^3y^5$ es un término de octavo grado puesto que $3 + 5 = 8$.

Términos semejantes son aquellos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes. Por ejemplo, $3x$ y $5x$ son términos semejantes, $2x^2$ y $-3x^2$ son términos semejantes, así como $3x^2y$ y $-2x^2y$. Los términos que no son semejantes se denominan **términos no semejantes**. Todas las constantes se consideran términos semejantes.

Simplificar una expresión significa reducir (o combinar) todos los términos semejantes en la expresión. Para reducir términos semejantes, podemos aplicar la propiedad distributiva.

Ejemplos de reducción de términos semejantes

$$8x - 2x = (8 - 2)x = 6x$$
$$3x^2 - 5x^2 = (3 - 5)x^2 = -2x^2$$
$$-7x^2y + 3x^2y = (-7 + 3)x^2y = -4x^2y$$
$$4(x - y) - (x - y) = 4(x - y) - 1(x - y) = (4 - 1)(x - y) = 3(x - y)$$

Al simplificar expresiones podemos reordenar los términos aplicando las propiedades conmutativa y asociativa estudiadas en el capítulo 1.

EJEMPLO 1 Simplificar. Si una expresión no puede simplificarse, dígalo.

a) $-2x + 5 + 3x - 7$ **b)** $7x^2 - 2x^2 + 3x + 4$ **c)** $2x - 3y + 5x - 6y + 3$

Solución

a) $-2x + 5 + 3x - 7 = \underbrace{-2x + 3x}_{x} + \underbrace{5 - 7}_{-2}$ *Coloque términos semejantes juntos.*

Esta expresión se simplifica y resulta $x - 2$.

b) $7x^2 - 2x^2 + 3x + 4 = 5x^2 + 3x + 4$

c) $2x - 3y + 5x - 6y + 3 = 2x + 5x - 3y - 6y + 3$ *Coloque juntos los términos semejantes.*

$= 7x - 9y + 3$

Ahora resuelva el ejercicio 39

EJEMPLO 2 Simplificar $-2(a + 7) - [-3(a - 1) + 8]$.

Solución

$$\begin{aligned}
-2(a + 7) - [-3(a - 1) + 8] &= -2(a + 7) - 1[-3(a - 1) + 8] \\
&= -2a - 14 - 1[-3a + 3 + 8] && \text{Propiedad distributiva} \\
&= -2a - 14 - 1[-3a + 11] && \text{Reduzca términos semejantes} \\
&= -2a - 14 + 3a - 11 && \text{Propiedad distributiva.} \\
&= a - 25 && \text{Reduzca términos semejantes.}
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 55

3 Resolver ecuaciones lineales

Una **ecuación** es una proposición matemática de igualdad. *Una ecuación debe contener un signo igual* y una expresión matemática de cada lado del signo igual.

Ejemplos de ecuaciones

$$x + 8 = -7$$

$$2x^2 - 4 = -3x + 13$$

Los números que hacen de una ecuación una proposición verdadera se llaman **soluciones** (o raíces) de la ecuación. El **conjunto solución** de una ecuación es el conjunto de números reales que hacen verdadera a la ecuación.

Ecuación	Solución	Conjunto solución
$2x + 3 = 9$	3	$\{3\}$

Dos o más ecuaciones con el mismo conjunto solución son **ecuaciones equivalentes**. Por lo general las ecuaciones se resuelven comenzando con la ecuación dada y produciendo una serie de ecuaciones equivalentes más simples.

Ejemplos de ecuaciones equivalentes

Ecuaciones	Conjunto solución
$2x + 3 = 9$	$\{3\}$
$2x = 6$	$\{3\}$
$x = 3$	$\{3\}$

En esta sección analizaremos cómo resolver **ecuaciones lineales con una variable**. Una ecuación lineal es aquella que puede escribirse en la forma $ax + b = c, a \neq 0$.

Para resolver ecuaciones, aplicamos las propiedades de suma y multiplicación de la igualdad para aislar la variable en un lado del signo igual.

Propiedad de la suma para la igualdad

Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$ para cualesquiera a, b y c.

La propiedad de la suma para la igualdad establece que podemos sumar el mismo número en ambos lados de una ecuación sin cambiar la solución de la ecuación original. Como la resta está definida en términos de una suma, *la propiedad de la suma para la igualdad también nos permite restar el mismo número en ambos lados de una ecuación.*

Propiedad de la multiplicación para la igualdad

Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$ para cualesquiera a, b y c.

La propiedad de la multiplicación para la igualdad establece que podemos multiplicar ambos lados de una ecuación por el mismo número sin cambiar la solución. Como la división está definida en términos de la multiplicación, *la propiedad de la multiplica-*

ción para la igualdad también nos permite dividir ambos lados de una ecuación por el mismo número distinto de cero.

Con frecuencia, para resolver una ecuación tendremos que aplicar una combinación de propiedades a fin de aislar la variable. Nuestra meta es tener la variable completamente sola en un lado de la ecuación (para aislar la variable). A continuación damos un procedimiento general para resolver ecuaciones lineales.

Para resolver ecuaciones lineales

1. **Quite fracciones.** Si la ecuación contiene fracciones, elimínelas multiplicando ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador.
2. **Simplifique cada lado de forma separada.** Simplifique cada lado de la ecuación tanto como sea posible. Utilice la propiedad distributiva para eliminar paréntesis y reduzca términos semejantes como sea necesario.
3. **Aísle el término variable en un lado.** Utilice la propiedad de la suma para dejar todos los términos que contienen la variable en un lado de la ecuación y todos los términos constantes en el otro lado. Para hacer esto quizá se requiera aplicar varias veces la propiedad de la suma.
4. **Despeje la variable.** Aplique la propiedad de la multiplicación para obtener una ecuación que tenga sola la variable (con un coeficiente de 1) en un lado.
5. **Compruebe.** Verifique, mediante sustitución, la solución obtenida en el paso 4 en la ecuación original.

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $2x + 9 = 14$.

Solución

$$2x + 9 = 14$$

$$2x + 9 - 9 = 14 - 9 \qquad \text{Reste 9 en ambos lados.}$$

$$2x = 5$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}}x}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{5}{2} \qquad \text{Divida ambos lados entre 2.}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Verifique

$$2x + 9 = 14$$

$$\cancel{2}\left(\frac{5}{\cancel{2}}\right) + 9 \stackrel{?}{=} 14$$

$$5 + 9 \stackrel{?}{=} 14$$

$$14 = 14 \qquad \text{Verdadero}$$

Como el valor satisface la ecuación, la solución es $\frac{5}{2}$.

Ahora resuelva el ejercicio 61

Cuando una ecuación contenga términos semejantes del mismo lado del signo igual, reduzca los términos semejantes antes de aplicar las propiedades de suma o multiplicación.

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $-2b + 8 = 3b - 7$.

Solución

$$-2b + 8 = 3b - 7$$

$$-2b + 2b + 8 = 3b + 2b - 7 \qquad \text{Sume } 2b \text{ a ambos lados.}$$

$$8 = 5b - 7$$

$$8 + 7 = 5b - 7 + 7 \qquad \text{Sume 7 a ambos lados.}$$

$$15 = 5b$$

$$\frac{15}{5} = \frac{5b}{5} \qquad \text{Divida ambos lados entre 5.}$$

$$3 = b$$

Ahora resuelva el ejercicio 63

El ejemplo 5 contiene números decimales. Resuelva este problema siguiendo el procedimiento dado anteriormente.

EJEMPLO 5 Resuelva la ecuación $4(x - 3.1) = 2.1(x - 4) + 3.5\,x$.

Solución

$$\begin{aligned}
4(x - 3.1) &= 2.1(x - 4) + 3.5x \\
4(x) - 4(3.1) &= 2.1(x) - 2.1(4) + 3.5x && \text{Propiedad distributiva.} \\
4x - 12.4 &= 2.1x - 8.4 + 3.5x \\
4x - 12.4 &= 5.6x - 8.4 && \text{Reduzca términos semejantes.} \\
4x - 12.4 + 8.4 &= 5.6x - 8.4 + 8.4 && \text{Sume 8.4 a ambos lados.} \\
4x - 4.0 &= 5.6x \\
4x - 4x - 4.0 &= 5.6x - 4x && \text{Reste 4x de ambos lados.} \\
-4.0 &= 1.6x \\
\frac{-4.0}{1.6} &= \frac{1.6x}{1.6} && \text{Divida ambos lados entre 1.6.} \\
-2.5 &= x
\end{aligned}$$

La solución es -2.5.

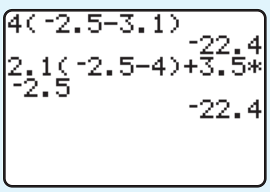
Ahora resuelva el ejercicio 111

Para ahorrar espacio, no siempre mostraremos la comprobación de nuestras respuestas; sin embargo, usted sí debe verificar todas sus respuestas. Cuando la ecuación contiene números decimales, utilizar una calculadora para resolver y verificar la ecuación podría ahorrarle tiempo.

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA Comprobación de soluciones por sustitución

Las soluciones de las ecuaciones pueden comprobarse por medio de una calculadora. Para verificar, sustituya su solución en ambos lados de la ecuación para ver si obtiene el mismo valor (algunas veces puede haber una pequeña diferencia en los últimos dígitos). La pantalla de la calculadora graficadora de la **figura 2.1** muestra que ambos lados de la ecuación dada en el ejemplo 5 son iguales a -22.4 cuando se sustituye -2.5 por x. Así la solución -2.5 satisface la ecuación.

$$\begin{aligned}
4(x - 3.1) &= 2.1(x - 4) + 3.5x \\
4(-2.5 - 3.1) &= 2.1(-2.5 - 4) + 3.5(-2.5)
\end{aligned}$$



Valor del lado izquierdo de la ecuación

Valor del lado derecho de la ecuación

FIGURA 2.1

EJERCICIOS

Utilice su calculadora para determinar si el número dado es una solución para la ecuación.

1. $5.2(x - 3.1) = 2.3(x - 5.2)$; 1.4
2. $-2.3(4 - x) = 3.5(x - 6.1)$; 10.125

Ahora resolveremos un ejemplo que contiene paréntesis anidados.

EJEMPLO 6 Resuelva la ecuación $7c - 15 = -2[6(c - 3) - 4(2 - c)]$.

Solución

$$\begin{aligned}
7c - 15 &= -2[6(c - 3) - 4(2 - c)] \\
7c - 15 &= -2[6c - 18 - 8 + 4c] && \text{Propiedad distributiva.} \\
7c - 15 &= -2[10c - 26] && \text{Reduzca términos semejantes.} \\
7c - 15 &= -20c + 52 && \text{Propiedad distributiva.} \\
7c + 20c - 15 &= -20c + 20c + 52 && \text{Sume 20c a ambos lados.} \\
27c - 15 &= 52
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27c - 15 \boxed{+15} &= 52 \boxed{+15} && \text{Sume 15 a ambos lados.} \\ 27c &= 67 \\ \frac{27c}{\boxed{27}} &= \frac{67}{\boxed{27}} && \text{Divida ambos lados entre 27.} \\ c &= \frac{67}{27} \end{aligned}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 91

Observe que las soluciones a los ejemplos 5 y 6 no son enteros. No debe esperar que las soluciones a las ecuaciones sean números enteros.

Al resolver algunas de las siguientes ecuaciones omitiremos algunos pasos intermedios. Ahora ilustraremos cómo puede acortarse la solución.

Solución		Solución abreviada
a) $x + 4 = 6$		**a)** $x + 4 = 6$
$x + 4 \boxed{-4} = 6 \boxed{-4}$	⟵ Realice mentalmente este paso.	$x = 2$
$x = 2$		
b) $3x = 6$		**b)** $3x = 6$
$\dfrac{3x}{\boxed{3}} = \dfrac{6}{\boxed{3}}$	⟵ Realice mentalmente este paso.	$x = 2$
$x = 2$		

4 Resolver ecuaciones con fracciones

Cuando una ecuación tiene fracciones, empezamos multiplicando *ambos* lados de la ecuación por el mínimo común denominador. El **mínimo común denominador** (**MCD**) de un conjunto de denominadores, (también llamado **mínimo común múltiplo, MCM**), es el número más pequeño que cada uno de los denominadores divide sin residuo. Por ejemplo, si los denominadores de dos fracciones son 5 y 6, entonces el mínimo común denominador es 30, ya que 30 es el número más pequeño que dividen 5 y 6.

Al multiplicar ambos lados de la ecuación por el MCD, *cada término* de la ecuación se multiplicará por el mínimo común denominador. *Después de realizar este paso, la ecuación no debe tener fracciones*.

EJEMPLO 7 ▸ Resuelva la ecuación $5 - \dfrac{2a}{3} = -9$.

Solución El mínimo común denominador es 3. Multiplique ambos lados de la ecuación por 3 y después aplique la propiedad distributiva en el lado izquierdo de la ecuación. *Este proceso eliminará todas las fracciones de la ecuación*.

$$\begin{aligned} 5 - \frac{2a}{3} &= -9 \\ \boxed{3}\left(5 - \frac{2a}{3}\right) &= \boxed{3}(-9) && \text{Multiplique ambos lados por 3.} \\ 3(5) - \overset{1}{\cancel{3}}\left(\frac{2a}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right) &= -27 && \text{Propiedad distributiva.} \\ 15 - 2a &= -27 \\ 15 \boxed{-15} - 2a &= -27 \boxed{-15} && \text{Reste 15 de ambos lados.} \\ -2a &= -42 \\ \frac{-2a}{\boxed{-2}} &= \frac{-42}{\boxed{-2}} && \text{Divida ambos lados entre } -2. \\ a &= 21 \end{aligned}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 97

EJEMPLO 8 Resuelva la ecuación $\frac{1}{2}(x + 4) = \frac{1}{3}x$.

Solución Empiece multiplicando ambos lados de la ecuación por 6, el mínimo común denominador de 2 y 3.

$$
\begin{aligned}
6\left[\frac{1}{2}(x + 4)\right] &= 6\left(\frac{1}{3}x\right) && \textit{Multiplique ambos lados por 6.}\\
3(x + 4) &= 2x && \textit{Simplifique.}\\
3x + 12 &= 2x && \textit{Propiedad distributiva.}\\
3x - 2x + 12 &= 2x - 2x && \textit{Reste 2x de ambos lados.}\\
x + 12 &= 0 &&\\
x + 12 - 12 &= 0 - 12 && \textit{Reste 12 de ambos lados.}\\
x &= -12 &&
\end{aligned}
$$

Ahora resuelva el ejercicio 99

En la sección 6.4 estudiaremos ecuaciones que contienen fracciones.

Sugerencia útil

La ecuación en el ejemplo 8 también puede escribirse como $\frac{x + 4}{2} = \frac{x}{3}$. ¿Puede explicar por qué?

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Las ecuaciones con una variable pueden resolverse de manera gráfica, por medio de una calculadora graficadora. En la sección 3.3 analizamos cómo hacerlo. Quizá quiera revisar ese material ahora.

5 Identificar ecuaciones condicionales, contradicciones e identidades

Todas las ecuaciones analizadas hasta aquí han sido verdaderas sólo para un valor de la variable, y se denominan **ecuaciones condicionales**. Algunas ecuaciones nunca son verdaderas y no tienen solución; éstas se denominan **contradicciones** (o ecuaciones inconsistentes). Otras ecuaciones, llamadas **identidades** tienen un número infinito de soluciones. La **tabla 2.1** resume estos tipos de ecuaciones lineales y sus correspondientes números de soluciones.

TABLA 2.1

Tipo de ecuación lineal	Solución
Ecuación condicional	Una
Contradicción	Ninguna (conjunto solución: $\varnothing$)
Identidad	Número infinito (conjunto solución: $\mathbb{R}$)

El conjunto solución de una ecuación condicional tiene la solución dada en un conjunto entre llaves. Por ejemplo, el conjunto solución del ejemplo 8 es $\{-12\}$. El conjunto solución de una contradicción es el conjunto vacío o nulo, $\{\ \}$ o $\varnothing$. El conjunto solución de una identidad es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 9 Determine si la ecuación $5(d - 7) + 4d + 3 = 3(3d - 10) - 2$ es una ecuación condicional, una contradicción o una identidad. Dé el conjunto solución para la ecuación.

Solución

$$
\begin{aligned}
5(d - 7) + 4d + 3 &= 3(3d - 10) - 2 &&\\
5d - 35 + 4d + 3 &= 9d - 30 - 2 && \textit{Propiedad distributiva}\\
9d - 32 &= 9d - 32 && \textit{Reduzca términos semejantes}
\end{aligned}
$$

Como obtenemos la misma expresión en ambos lados de la ecuación, es una identidad. Esta ecuación es verdadera para todos los números reales, su solución es $\mathbb{R}$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 125

EJEMPLO 10 ▸ Determine si $2(3m + 1) = 6m + 3$ es una ecuación condicional, una contradicción o una identidad. Proporcione el conjunto solución para la ecuación.

Solución

$$\begin{aligned} 2(3m + 1) &= 6m + 3 \\ 6m + 2 &= 6m + 3 && \textit{Propiedad distributiva} \\ 6m - 6m + 2 &= 6m - 6m + 3 && \textit{Reste 6m de ambos lados} \\ 2 &= 3 \end{aligned}$$

Como $2 = 3$ nunca es una proposición verdadera, esta ecuación es una contradicción, su conjunto solución es $\varnothing$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 119

6 Entender los conceptos para resolver ecuaciones

Los números o variables que aparecen en las ecuaciones no afectan los procedimientos utilizados para resolver las ecuaciones. En el ejemplo siguiente, que no tiene letras ni números, resolveremos la ecuación utilizando los conceptos y procedimientos que se han presentado.

EJEMPLO 11 ▸ En la ecuación siguiente, suponga que $\odot$ representa la variable para la cual estamos resolviendo y que los demás símbolos representan números reales diferentes de cero. Despeje $\odot$ de la ecuación.

$$\square\odot + \triangle = \#$$

Solución Para despejar $\odot$ necesitamos aislar $\odot$. Utilizamos las propiedades de la suma y la multiplicación para despejar $\odot$.

$$\begin{aligned} \square\odot + \triangle &= \# \\ \square\odot + \triangle - \triangle &= \# - \triangle && \textit{Reste } \triangle \textit{ de ambos lados.} \\ \square\odot &= \# - \triangle \\ \frac{\square\odot}{\square} &= \frac{\# - \triangle}{\square} && \textit{Divida ambos lados entre } \square. \\ \odot &= \frac{\# - \triangle}{\square} \end{aligned}$$

Por lo que la solución es $\odot = \dfrac{\# - \triangle}{\square}$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 143

Considere la ecuación $5x + 7 = 12$. Si hacemos $5 = \square$, $x = \odot$, $7 = \triangle$ y $12 = \#$, la ecuación tiene la misma forma que la ecuación del ejemplo 11. Por lo tanto, la solución será de la misma forma.

Ecuación	Solución
$\square\odot + \triangle = \#$	$\odot = \dfrac{\# - \triangle}{\square}$
$5x + 7 = 12$	$x = \dfrac{12 - 7}{5} = \dfrac{5}{5} = 1$

Si usted resuelve la ecuación $5x + 7 = 12$, verá que su solución es 1. Así el procedimiento utilizado para resolver una ecuación no depende de los números o variable dados en la ecuación.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué son los términos de una ecuación?
2. Determine los coeficientes de cada término.

a) x^2y^5 **b)** $-a^3b^7$ **c)** $-\dfrac{m-7n}{5}$.

3. Determine el coeficiente de cada término.

a) $\dfrac{x+y}{4}$ **b)** $-(p+3)$ **c)** $-\dfrac{3(x+2)}{5}$

4. ¿Cómo determina el grado de un término?
5. **a)** ¿Qué son términos semejantes?
   b) ¿Los términos $3x$ y $3x^2$, son términos semejantes? Explique.
6. ¿Qué es una ecuación?
7. ¿4 es solución de la ecuación $2x + 3 = x + 5$? Explique.
8. ¿8 es solución para la ecuación $x + 1 = 2x - 7$? Explique.
9. Establezca la propiedad de la suma para la igualdad.
10. Establezca la propiedad de la multiplicación para la igualdad.
11. **a)** ¿Cuántas soluciones tiene una identidad?
    b) Si una ecuación lineal es una identidad, ¿cuál es su conjunto solución?
12. **a)** ¿Qué es una contradicción?
    b) ¿Cuál es el conjunto solución de una contradicción?
13. **a)** Explique paso a paso cómo resolvería la ecuación

$$5x - 2(x - 4) = 2(x - 2)$$

    b) Resuelva esta ecuación.
14. **a)** Explique paso a paso cómo resolvería la ecuación

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{3}n - \frac{1}{8}$$

    b) Resuelva esta ecuación.

Práctica de habilidades

Diga el nombre de la propiedad indicada.

15. Si $x = 13$, entonces $13 = x$.
16. Si $m + 2 = 3$, entonces $3 = m + 2$.
17. Si $b = c$ y $c = 9$, entonces $b = 9$.
18. Si $x + 1 = a$ y $a = 2y$, entonces $x + 1 = 2y$.
19. $a + c = a + c$
20. Si $r = 4$, entonces $r + 3 = 4 + 3$.
21. Si $x = 8$, entonces $x - 8 = 8 - 8$.
22. Si $2x = 4$, entonces $3(2x) = 3(4)$.
23. Si $5x = 4$, entonces $\frac{1}{5}(5x) = \frac{1}{5}(4)$.
24. Si $a + 2 = 4$, entonces $a + 2 - 2 = 4 - 2$.
25. Si $\frac{t}{4} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, entonces $12\left(\frac{t}{4} + \frac{1}{3}\right) = 12\left(\frac{5}{6}\right)$.
26. Si $x - 3 = x + y$ y $x + y = z$, entonces $x - 3 = z$.

Proporcione el grado de cada término.

27. $5c^3$ **28.** $-6y^2$ **29.** $3ab$ **30.** $\frac{1}{2}x^4y$
31. 6 **32.** -3 **33.** $-5r$ **34.** $18p^2q^3$
35. $5a^2b^4c$ **36.** m^4n^6 **37.** $3x^5y^6z$ **38.** $-2x^4y^7z^8$

Simplifique cada expresión. Si una expresión no puede simplificarse, dígalo.

39. $7r + 3b - 11x + 12y$ **40.** $3x^2 + 4x + 5$ **41.** $5x^2 - 11x + 10x - 5$
42. $11a - 12b - 4c + 5a$ **43.** $10.6c^2 - 2.3c + 5.9c - 1.9c^2$ **44.** $7y + 3x - 7 + 5x - 2y$
45. $w^3 + w^2 - w + 1$ **46.** $b + b^2 - 4b + b^2 + 3b$ **47.** $8pq - 9pq + p + q$
48. $7x^3y^2 + 11y^3x^2$ **49.** $12\left(\frac{1}{6} + \frac{d}{4}\right) + 5d$ **50.** $4.3 - 3.2x - 2(x - 2)$
51. $3\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}x + 5$ **52.** $6n + 0.6(n - 3) - 5(n + 0.7)$
53. $4 - [6(3x + 2) - x] + 4$ **54.** $3(a + c) - 4(a + c) - 3$
55. $9x - [3x - (5x - 4y)] - 2y$ **56.** $-2[3x - (2y - 1) - 5x] + y$
57. $5b - \{7[2(3b - 2) - (4b + 9)] - 2\}$ **58.** $2\{[3a - (2b - 5a)] - 3(2a - b)\}$
59. $-\{[2rs - 3(r + 2s)] - 2(2r^2 - s)\}$ **60.** $p^2q + 4pq - [-(pq + 4p^2q) + pq]$

Resuelva cada ecuación.

61. $5a - 1 = 14$ **62.** $5x + 3 - 2x = 9$ **63.** $5x - 9 = 3(x - 2)$
64. $5s - 3 = 2s + 6$ **65.** $4x - 8 = -4(2x - 3) + 4$ **66.** $8w + 7 = -3w - 15$

67. $-6(z-1)=-5(z+2)$
68. $7(x-1)=3(x+2)$
69. $-3(t-5)=2(t-5)$
70. $4(2x-4)=-2(x+3)$
71. $3x+4(2-x)=4x+5$
72. $6(3-q)=-4(q+1)$
73. $2-(x+5)=4x-8$
74. $4x-2(3x-7)=2x-6$
75. $p-(p+4)=4(p-1)+2p$
76. $8x+2(x-4)=8x+12$
77. $-3(y-1)+2y=4(y-3)$
78. $5r-13-6r=3(r+5)-16$
79. $6-(n+3)=3n+5-2n$
80. $8-3(2a-4)=5+3a-4a$
81. $4(2x-2)-3(x+7)=-4$
82. $-2(3w+6)-(4w-3)=21$
83. $-4(3-4x)-2(x-1)=12x$
84. $-4(2z-6)=-3(z-4)+z$
85. $5(a+3)-a=-(4a-6)+1$
86. $3(2x-4)+3(x+1)=9$
87. $5(x-2)-14x=x-5$
88. $3[6-(h+2)]-6=4(-h+7)$
89. $2[3x-(4x-6)]=5(x-6)$
90. $-z-6z+3=4-[6-z-(3-2z)]$
91. $4\{2-[3(c+1)-2(c+1)]\}=-2c$
92. $3\{[(x-2)+4x]-(x-3)\}=4-(x-12)$
93. $-\{4(d+3)-5[3d-2(2d+7)]-8\}=-10d-6$
94. $-3(6-4x)=4-\{5x-[6x-(4x-(3x+2))]\}$

Resuelva cada ecuación. Si su respuesta no es un entero, déjela como una fracción.

95. $\frac{s}{4}=-16$
96. $\frac{15c+3}{9}=2$
97. $\frac{4x-2}{3}=-6$
98. $\frac{1}{2}(6r-10)=7$
99. $\frac{3}{4}t+\frac{7}{8}t=39$
100. $\frac{1}{4}(x-2)=\frac{1}{3}(2x+6)$
101. $\frac{1}{2}(x-2)=\frac{1}{3}(x+2)$
102. $\frac{1}{2}x+2=\frac{1}{8}x-1$
103. $4-\frac{3}{4}a=7$
104. $x-2=\frac{3}{4}(x+4)$
105. $\frac{1}{2}=\frac{4}{5}x-\frac{1}{4}$
106. $\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}=2x$
107. $\frac{1}{4}(x+3)=\frac{1}{3}(x-2)+1$
108. $\frac{5}{6}m-\frac{5}{12}=\frac{7}{8}m+\frac{2}{3}$

Resuelva cada ecuación. Redondee las respuestas al centésimo más cercano.

109. $0.4n+4.7=5.1n$
110. $0.2(x-30)=1.6x$
111. $4.7x-3.6(x-1)=4.9$
112. $6.1p-4.5(3-2p)=15.7$
113. $5(z+3.41)=-7.89(2z-4)-5.67$
114. $0.05(2000+2x)=0.04(2500-6x)$
115. $0.6(500-2.4x)=3.6(2x-4000)$
116. $0.42x-x=5.1(x+3)$
117. $1000(7.34q+14.78)=100(3.91-4.21q)$
118. $0.6(14x-8000)=-0.4(20x+12{,}000)+20.6x$

Determine el conjunto solución para cada ejercicio. Luego indique si la ecuación es condicional, una identidad o una contradicción.

119. $3(y+3)-4(2y-7)=-5y+2$
120. $9x+12-8x=-6(x-2)+7x$
121. $4(2x-3)+15=-6(x-4)+12x-21$
122. $-5(c+3)+4(c-2)=2(c+2)$
123. $4-\left(\frac{2}{3}x+2\right)=2\left(-\frac{1}{3}x+1\right)$
124. $7-\left(\frac{1}{2}x+4\right)=3\left(-\frac{1}{6}x+2\right)$
125. $6(x-1)=-3(2-x)+3x$
126. $0.6(z+5)-0.5(z+2)=0.1(z-23)$
127. $0.8z-0.3(z+10)=0.5(z+1)$
128. $4(2-3x)=-[6x-(8-6x)]$

Resolución de problemas

129. Densidad poblacional La densidad poblacional de Estados Unidos ha aumentado de manera constante desde 2000. La densidad poblacional de Estados Unidos puede estimarse por medio de la ecuación

$$P=0.82t+78.5$$

donde P es la densidad poblacional, medido en personas por millas cuadradas, y t es el número de años desde 2000. Utilice $t=1$ para 2001, $t=2$ para 2002, y así sucesivamente. Si la densidad de población continúa en aumento a la tasa actual,

a) determine la densidad poblacional de Estados Unidos en 2008.

b) ¿durante qué año la densidad población de Estados Unidos alcanzará 100 personas por milla cuadrada?

130. Bebés dormilones El doctor Richard Ferber, un experto pediatra del sueño, ha desarrollado un método* para ayudar a que los niños de 6 meses de edad y mayores, puedan dormir toda la noche. Se conoce como "Ferberizing", e indica a los padres que deben esperar intervalos de tiempo cada vez mayores antes de entrar a la habitación del niño en la noche a consolarlo cada vez que llora. El tiempo sugerido de espera depende de cuántas noches han utilizado los padres el método y puede determinarse por medio de la ecuación

$$W = 5n + 5$$

donde W es el tiempo de espera en minutos y n es el número de noches. Por ejemplo, en la primera noche, $n = 1$, en la segunda noche, $n = 2$, etcétera.

a) ¿Cuánto deben esperar los padres la primera noche?
b) ¿Cuánto deben esperar los padres en la cuarta noche?
c) ¿En qué noche los padres deben esperar 30 minutos?
d) ¿En qué noche los padres deben esperar 40 minutos?

131. *Participación de mercado de los fabricantes de automóviles americanos* En años recientes, los fabricantes de automóviles americanos han ido perdiendo parte del mercado ante los fabricantes de Asia y Europa. El porcentaje del total de automóviles vendidos en Estados Unidos fabricados por fabricantes americanos puede estimarse usando la ecuación

$$M = -1.26x + 61.48$$

donde M es el porcentaje del total de automóviles vendidos en Estados Unidos producidos por fabricantes americanos y x es el número de años desde 2004. Utilice $x = 1$ para 2005, $x = 2$ para 2006, etcétera.

a) ¿Cuál es el porcentaje del total de automóviles vendidos en Estados Unidos producidos por fabricantes americanos en 2006?
b) Si esta tendencia continúa, ¿durante qué año el porcentaje del total de ventas en Estados Unidos producidos por fabricantes americanos será de 53.92%?

132. Anualidades Las anualidades son contratos de seguro de vida que garantizan pagos futuros. Un tipo de anualidad, denominada anualidad variable, es una cuenta de retiro que permite a alguien invertir en un fondo mutuo y difiere el pago de impuestos hasta que se realicen los retiros en un tiempo posterior. El número de anualidades variables vendidas ha crecido de manera constante. Las ventas de anualidades variables pueden aproximarse por la ecuación

$$S = 10x + 150$$

donde S representa las ventas totales de anualidades variables (en miles de millones de dólares) y x es el número de años desde 2004. Utilice $x = 1$ para 2005, $x = 2$ para 2006, etcétera.

a) Determine las ventas totales de anualidades variables en 2005.
b) ¿En qué año la venta de anualidades alcanzará la marca de 200 mil millones de dólares?

133. Maratón de Boston Desde 1940, los ganadores masculinos de la Maratón de Boston, por lo general, han disminuido su tiempo para concluir la prueba. El tiempo, en horas, para terminar la carrera puede aproximarse mediante la ecuación

$$t = 2.405 - 0.005x$$

donde t es el tiempo para terminar y x es el número de años desde 1940. Utilice $x = 1$ para 1941, $x = 2$ para 1942, y así sucesivamente.

a) Estime el tiempo ganador de la Maratón de Boston en 1941.
b) Estime el tiempo ganador de la Maratón de Boston en 2005.

134. Considere la ecuación $x = 4$. Proporcione tres ecuaciones equivalentes. Explique por qué las ecuaciones son equivalentes.

135. Considere la ecuación $2x = 5$. Proporcione tres ecuaciones equivalentes. Explique por qué las ecuaciones son equivalentes.

136. Invente una ecuación que sea una identidad. Explique cómo creó la ecuación.

137. Invente una ecuación que sea una contradicción. Explique cómo creó la contradicción.

138. Escriba una ecuación con tres términos en la izquierda del signo de igual y dos términos en la derecha del signo de igual que sea equivalente a la ecuación $3m + 1 = m + 5$.

139. Escriba una ecuación con dos términos en la izquierda del signo de igual y tres términos en la derecha del signo de igual que sea equivalente a la ecuación $\frac{1}{2}p + 3 = 6$.

---

*Antes de tratar al niño con este método, los padres deben consultar con su pediatra.

140. Considere la ecuación $-3(x + 2) + 5x + 12 = n$. ¿Qué número real debe ser n para que la solución de la ecuación sea 6? Explique cómo determinó su respuesta.

141. Considere la ecuación $2(a + 5) + n = 4a - 8$. ¿Qué número real debe ser n para que la solución de la ecuación sea -2? Explique cómo determinó su respuesta.

142. Considere la ecuación $\frac{n}{6} + \frac{x}{4} = 2$. ¿Qué número real debe ser n para que la solución de la ecuación sea $x = 2$? Explique cómo determinó su respuesta.

Resuelva cada ecuación para el símbolo dado. Suponga que el símbolo que despeja representa la variable y que todos los demás símbolos representan números reales diferentes de cero. Vea el ejemplo 11.

143. De $\ast\triangle - \square = \odot$ despeje $\triangle$.

144. De $\triangle(\odot + \square) = \otimes$ despeje $\triangle$.

145. De $\odot\square + \triangle = \otimes$ despeje $\odot$.

146. De $\triangle(\odot + \square) = \otimes$ despeje $\square$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] **147. a)** Explique cómo determinar el valor absoluto de un número.

b) Escriba la definición de valor absoluto.

[1.4] *Evalúe.*

148. a) -3^2 **b)** $(-3)^2$

149. $\sqrt[3]{-125}$ **150.** $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$

2.2 Resolución de problemas y uso de fórmulas

1 Usar el procedimiento para resolución de problemas.

2 Despejar una variable en una ecuación o fórmula.

George Polya

1 Usar el procedimiento para resolución de problemas

Una de las razones principales para estudiar matemáticas es que las podemos utilizar para resolver problemas de la vida diaria. Para resolver de forma matemática la mayor parte de los problemas de aplicación de la vida real, necesitamos ser capaces de expresar el problema en símbolos matemáticos usando expresiones o ecuaciones, y cuando lo hacemos creamos un **modelo matemático** de la situación.

En esta sección presentamos un procedimiento para resolución de problemas y analizamos fórmulas. Una **fórmula** es una ecuación que es un modelo matemático de una situación de la vida real. A lo largo del libro resolveremos problemas; para hacerlo determinaremos una ecuación o fórmula que represente o modele la situación del mundo real.

Ahora daremos un procedimiento general de cinco pasos para la resolución de problemas, desarrollado por George Polya y presentado en su libro *How to Solve it*. Podemos enfocar cualquier problema siguiendo este procedimiento general.

Guía para la resolución de problemas

1. **Entienda el problema.**
   - Lea el problema **cuidadosamente** al menos dos veces. En la primera lectura, obtenga un panorama general del problema. En la segunda lectura, determine a) de forma precisa qué le piden determinar y b) qué información proporciona el problema.
   - Si es posible, haga un bosquejo que ilustre el problema. Etiquete la información dada.
   - Liste la información en una tabla, si eso le ayuda en la resolución del problema.
2. **Traduzca el problema a lenguaje matemático.**
   - Por lo general, esto implicará expresar el problema de forma algebraica.
   - En ocasiones esto incluye seleccionar una fórmula particular por utilizar, mientras que en otras debe generar su propia ecuación. Puede ser necesario verificar otras fuentes para la fórmula apropiada por usar.
3. **Realice los cálculos matemáticos necesarios para resolver el problema.**
4. **Compruebe la respuesta obtenida en el paso 3.**
   - Pregúntese: "¿La respuesta tiene sentido?" "¿Es razonable la respuesta?". Si la respuesta no es razonable, vuelva a verificar su método de resolución del problema y sus cálculos.
   - Si es posible, verifique la solución en el problema original.
5. **Responda la pregunta.** Asegúrese de haber respondido la pregunta. Establezca las respuestas con claridad.

Los ejemplos siguientes muestran cómo aplicar las guías para la resolución de problemas. Algunas veces proporcionaremos los pasos en los ejemplos para ilustrar el proceso de cinco pasos. Sin embargo, en algunos problemas no será posible o necesario listar cada paso.

Como se estableció en el paso 2 del proceso de resolución de problemas —*traduzca el problema a lenguaje matemático*— algunas veces necesitaremos encontrar y usar una *fórmula*; en esta sección mostraremos cómo hacerlo. En la sección 2.3 explicaremos cómo desarrollar *ecuaciones* para resolver aplicaciones de la vida real.

EJEMPLO 1 ▸ **Préstamo personal** Diane Basile hace un préstamo personal de $5000 con interés simple del 4% a su hermano, Bob Basile, durante un periodo de 5 años.

a) Al término de 5 años, ¿qué interés le pagará Bob a Diane?

b) Cuando Bob salde su préstamo al final de 5 años, ¿cuánto dinero, en total, debe pagar a Diane?

Solución **a)** Entender Cuando una persona pide prestado dinero por medio de un préstamo con interés simple, debe pagar el interés simple y el capital (el monto original prestado) en la fecha de expiración del préstamo. Por ejemplo, si un préstamo con interés simple es por 5 años, después de 5 años se debe saldar el capital más el interés. En el problema nos dicen que el interés simple es 4% y que el préstamo es durante 5 años.

Traduzca Muchos libros de matemáticas financieras y de inversiones incluyen la **fórmula de interés simple**:

$$\text{interés} = \text{capital} \cdot \text{tasa} \cdot \text{tiempo o } i = prt$$

que puede usarse para determinar el interés simple, i. En la fórmula, p es el capital, r es la tasa de interés simple (siempre se cambia a forma decimal cuando se use en la fórmula) y t es el tiempo. El tiempo y la tasa deben estar en las mismas unidades. Por ejemplo, si la tasa es 4% por *año*, entonces el tiempo debe estar en *años*. En este problema, $p = \$5000$, $r = 0.04$ y $t = 5$. Obtenemos el interés simple, i, sustituyendo estos valores en la fórmula de interés simple.

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} i &= prt \\ &= 5000(0.04)(5) \\ &= 1000 \end{aligned}$$

Compruebe La respuesta parece razonable en que Bob pagará $1000 por el uso de $5000 del dinero de Diane durante 5 años.

Responda **a)** El interés simple que se debe es $1000.
b) Al término de 5 años, Bob debe pagar el capital prestado, $5000, más el interés determinado en la parte **a)**, $1000. Así, cuando Bob salde su deuda, deberá pagar $6000 a Diane.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 67

EJEMPLO 2 ▸ **Una cuenta en el mercado de dinero** Christine Fogel recibe un reembolso de impuestos por $1425 e invierte su dinero para ayudar a pagar el primer semestre del colegio de su hermano. Ella invierte este dinero en un certificado de depósito a una tasa de interés anual del 3% compuesto de forma mensual durante 18 meses.

a) ¿Cuánto dinero valdrá el certificado de depósito en 18 meses?

b) ¿Cuánto interés ganará Christine durante los 18 meses?

Solución **a)** Entienda Antes de entender el problema, debe entender qué es el interés compuesto, el cual significa que obtiene el interés en su inversión por un periodo. En el periodo siguiente obtiene el interés pagado sobre su inversión, más el interés sobre el interés que se pagó en el primer periodo; este proceso continúa para cada periodo. En muchas situaciones de la vida real, y en el mercado de trabajo, quizá necesite hacer alguna investigación para responder las preguntas.

Se invirtieron $1425 durante 18 meses y la tasa de interés es 3% compuesto cada mes.

Traduzca Si investiga en un libro de matemáticas financieras o comenta con una persona relacionada con las finanzas, aprenderá la fórmula del interés compuesto:

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

La fórmula del interés compuesto se usa en instituciones financieras para calcular la cantidad acumulada (o el saldo), A, en una cuenta de ahorros u otras inversiones que devengan interés compuesto. En la fórmula, p representa el capital (o inversión inicial), r representa la tasa de interés escrita en forma decimal, n representa el número de veces por año que se compone el interés y t representa el tiempo medido en años. En este problema, $p = \$1425$, $r = 0.03$, $t = 1.5$ (18 meses es 1.5 años) y como el interés se compone cada mes, $n = 12$. Sustituya estos valores en la fórmula y evalúe.

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$= 1425\left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^{12(1.5)}$$

Realice los cálculos

$$= 1425(1 + 0.0025)^{18}$$

$$= 1425(1.0025)^{18}$$

$$\approx 1425(1.04596912) \quad \text{Realizado en una calculadora.}$$

$$\approx 1490.51 \quad \text{Redondeado al centavo más cercano.}$$

Compruebe La respuesta \$1490.51 es razonable, ya que es más que lo que Christine invirtió al principio.

Responda El certificado de depósito de Christine tendrá un valor de \$1490.51 al término de 18 meses.

b) Entienda El interés será la diferencia entre el monto original invertido y el valor del certificado de depósito al término de 18 meses.

Traduzca

$$\text{interés} = \begin{pmatrix}\text{valor del certificado de} \\ \text{depósito después de 18 meses}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{monto invertido} \\ \text{originalmente}\end{pmatrix}$$

Realice los cálculos

$$= 1490.51 - 1425 = 65.51$$

Compruebe El monto de los intereses es razonable y la aritmética es fácil de verificar.

Responda El interés ganado en el periodo de 18 meses será de \$65.51.

Ahora resuelva el ejercicio 77

Con frecuencia una fórmula tiene **subíndices**, que son números (u otras variables) colocados debajo y a la derecha de las variables; se usan para ayudar a clarificar una fórmula. Por ejemplo, si una fórmula contiene dos velocidades, la velocidad original y la velocidad final, estas velocidades pueden simbolizarse como V_0 y V_f, respectivamente. Los subíndices se leen usando la palabra “sub”. Por ejemplo, V_f se lee “V sub f” y x_2 se lee “x sub 2”. La fórmula en el ejemplo 3 tiene subíndices.

EJEMPLO 3 **Comparación de inversiones** Sharon Griggs está en el rango de ingresos con impuestos federales del 25%, y aún no decide si invertir en bonos municipales libres de impuestos con una tasa de 2.24% o en certificados de depósito gravables con una tasa de 3.70%.

a) Determine la tasa gravable equivalente a 2.24% de interés libre de impuestos para Sharon.

b) Si ambas inversiones estuviesen al mismo periodo, ¿cuál inversión proporcionaría a Sharon el mayor rendimiento en su inversión?

Solución **a)** Entienda Recibimos algunos intereses libres de impuestos, como con bonos municipales. Esto significa que no tenemos que pagar impuestos federales sobre el interés que recibimos. Otros intereses que recibimos, tales como en cuentas de ahorros o certificados de depósito, son gravables en nuestros ingresos. Pagar impuestos sobre el interés tiene el efecto de reducir el monto que en realidad obtenemos de los intereses. Necesitamos determinar la tasa de interés gravable que es equivalente a una tasa del 2.24% libre de impuestos para Sharon (o para cualquiera en el rango de ingresos con tasa de impuestos del 25%).

Traduzca Una fórmula que se encuentra en muchos libros de finanzas y algunas publicaciones gubernamentales y que puede usarse para comparar tasas de interés gravables y libres de impuestos es

$$T_f = T_a(1 - F)$$

donde T_f es la tasa libre de impuestos, T_a es la tasa gravable y F es el rango de ingresos con tasa de impuestos federales. Para determinar la tasa de impuestos gravables, T_a, sustituimos los valores apropiados en la fórmula y despejamos T_a.

$$T_f = T_a(1 - F)$$

$$0.0224 = T_a(1 - 0.25)$$

Realice los cálculos

$$0.0224 = T_a(0.75)$$

$$\frac{0.0224}{0.75} = T_a$$

$$0.0299 \approx T_a$$

Redondee a cuatro decimales.

Compruebe La respuesta, 0.0299 o 2.99%, parece razonable ya que es mayor a 2.24%, lo cual es lo que esperamos.

Responda La tasa de impuestos gravable alrededor de 2.99% le daría a Sharon aproximadamente la misma tasa de interés que una inversión libre de impuestos de 2.24%.

Nos piden determinar cuál inversión proporcionaría a Sharon el mayor rendimiento en su inversión. Podemos comparar la tasa gravable equivalente a los bonos municipales con la tasa de interés gravable de los certificados de depósito. La tasa que sea más alta proporcionará a Sharon el mayor rendimiento en su inversión.

Como vimos en la parte **a)**, la tasa gravable equivalente a los bonos municipales es 2.99%. La tasa sujeta a impuestos de los certificados de depósito es 3.70%. Por lo tanto, el certificado de depósito que paga 3.70% dará a Sharon un mayor rendimiento en su inversión que el bono municipal libre de impuestos que paga 2.24%.

Ahora resuelva el ejercicio 83

2 Despejar una variable en una ecuación o fórmula

En muchas ocasiones usted podría tener una ecuación o fórmula que tenga despejada una variable, pero que necesite despejar una variable diferente. Suponga que en el ejemplo 3 queremos determinar la tasa gravable equivalente, T_a, para muchas tasas de interés libres de impuestos y muchos rangos de ingresos. Podríamos despejar cada problema de forma individual como hicimos en el ejemplo 3. Sin embargo, sería mucho más rápido despejar T_a en la fórmula $T_f = T_a(1 - F)$ y luego sustituir los valores apropiados en la fórmula. Haremos esto en el ejemplo 8.

Comenzaremos despejando la variable y. Esto lo tendremos que hacer en el capítulo 3 cuando estudiemos graficación. Como las fórmulas son ecuaciones, usamos el mismo procedimiento para despejar una variable en una ecuación que el que se usa para despejar una variable en una fórmula.

Cuando se le da una ecuación (o fórmula) que tiene despejada una variable y quiere despejar una variable diferente, trate cada variable en la ecuación, excepto la que quiere despejar, como si fuesen constantes. Entonces *aísle la variable* que quiere despejar utilizando los procedimientos similares a los que se utilizan para resolver ecuaciones.

EJEMPLO 4 ▸ Despeje y de la ecuación $5x - 8y = 32$.

Solución Despejaremos la variable y aislando el término que contiene a y en el lado izquierdo de la ecuación

$$
\begin{aligned}
5x - 8y &= 32 \\
5x - 5x - 8y &= -5x + 32 && \text{Reste 5x de ambos lados.} \\
-8y &= -5x + 32 \\
\frac{-8y}{-8} &= \frac{-5x + 32}{-8} && \text{Divida ambos lados entre } -8. \\
y &= \frac{-5x + 32}{-8} \\
y &= \frac{-1(5x - 32)}{-1(-8)} && \text{Multiplique el numerador y el denominador por } -1. \\
y &= \frac{5x - 32}{8} \quad \text{o} \quad y = \frac{5}{8}x - 4
\end{aligned}
$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 29**

EJEMPLO 5 ▸ Despeje y de la ecuación $2y - 3 = \frac{1}{2}(x + 3y)$ por y.

Solución Como esta ecuación contiene una fracción, empezamos por multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, 2. Luego aislamos la variable y agrupando todos los términos que contienen a la variable en un lado de la ecuación y los demás términos en el otro lado de la ecuación.

$$
\begin{aligned}
2y - 3 &= \frac{1}{2}(x + 3y) \\
2(2y - 3) &= \cancel{2}\left[\frac{1}{\cancel{2}}(x + 3y)\right] && \text{Multiplique ambos lados por el MCD, 2.} \\
4y - 6 &= x + 3y && \text{Propiedad distributiva.} \\
4y - 3y - 6 &= x + 3y - 3y && \text{Reste 3y de ambos lados.} \\
y - 6 &= x \\
y - 6 + 6 &= x + 6 && \text{Sume 6 a ambos lados.} \\
y &= x + 6
\end{aligned}
$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 35**

Ahora despejamos una variable en una fórmula. Recuerde: Nuestro objetivo es aislar la variable que estamos despejando. Usamos el mismo procedimiento general empleado en los ejemplos 4 y 5.

EJEMPLO 6 ▸ La fórmula para el perímetro de un rectángulo es $P = 2l + 2w$, donde l es la longitud y w es el ancho del rectángulo (vea la **figura 2.2**). Despeje de esta fórmula w.

Solución Ya que estamos despejando a w, debemos aislar la w en un lado de la ecuación.

$$
\begin{aligned}
P &= 2l + 2w \\
P - 2l &= 2l - 2l + 2w && \text{Reste 2l de ambos lados.} \\
P - 2l &= 2w \\
\frac{P - 2l}{2} &= \frac{2w}{2} && \text{Divida ambos lados entre 2.} \\
\frac{P - 2l}{2} &= w
\end{aligned}
$$

Así, $w = \frac{P - 2l}{2}$ o $w = \frac{P}{2} - \frac{2l}{2} = \frac{P}{2} - l$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 49**

Rectángulo

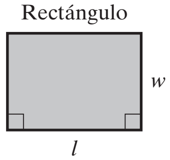


FIGURA 2.2

EJEMPLO 7 Una fórmula para determinar el área de un trapecio es $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$, donde h es la altura y b_1 y b_2 son las longitudes de las bases del trapecio (ver la **figura 2.3**). Despeje b_2 de esta fórmula.

Solución Empezamos multiplicando ambos lados de la ecuación por el MCD, 2, para quitar las fracciones.

Trapecio

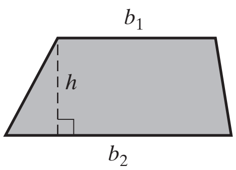


FIGURA 2.3

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) \\
2 \cdot A &= \cancel{2}\left[\frac{1}{\cancel{2}}h(b_1 + b_2)\right] && \text{Multiplique ambos lados por 2.} \\
2A &= h(b_1 + b_2) \\
\frac{2A}{h} &= \frac{h(b_1 + b_2)}{h} && \text{Divida ambos lados entre } h. \\
\frac{2A}{h} &= b_1 + b_2 \\
\frac{2A}{h} - b_1 &= b_1 - b_1 + b_2 && \text{Reste } b_1 \text{ de ambos lados.} \\
\frac{2A}{h} - b_1 &= b_2
\end{aligned}
$$

Ahora resuelva el ejercicio 57

EJEMPLO 8 En el ejemplo 3 se introdujo la fórmula $T_f = T_a(1 - F)$.

a) Despeje T_a de esta fórmula.

b) John y Dorothy Cutter están en el rango de ingresos con el 33% de impuestos. ¿Cuál es el rendimiento gravable equivalente al 2.6% de rendimiento libre de impuestos?

Solución

a) Deseamos despejar T_a de esta fórmula. Por lo tanto, tratamos a las demás variables en la ecuación como si fuesen constantes. Como T_a está multiplicada por $(1 - F)$, para aislar a T_a dividimos ambos lados de la ecuación entre $1 - F$.

$$
\begin{aligned}
T_f &= T_a(1 - F) \\
\frac{T_f}{1 - F} &= \frac{T_a\cancel{(1 - F)}}{\cancel{1 - F}} && \text{Divida ambos lados entre } 1 - F. \\
\frac{T_f}{1 - F} &= T_a \quad \text{o} \quad T_a = \frac{T_f}{1 - F}
\end{aligned}
$$

b) Sustituya los valores apropiados en la fórmula encontrada en la parte **a)**.

$$
\begin{aligned}
T_a &= \frac{T_f}{1 - F} \\
T_a &= \frac{0.026}{1 - 0.33} = \frac{0.026}{0.67} \approx 0.039
\end{aligned}
$$

Así, el rendimiento gravable equivalente sería alrededor de 3.9%.

Ahora resuelva el ejercicio 63

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una fórmula?
2. ¿Qué es un modelo matemático?
3. Haga un bosquejo del proceso de cinco pasos para resolución de problemas que usaremos para trabajar con los problemas.
4. Cuando estamos despejando una variable en una fórmula, necesitamos aislar la variable. Explique qué significa esto.
5. Considere la ecuación $16 = 2l + 2(3)$, y la fórmula $P = 2l + 2w$.
   a) Despeje l *de* la ecuación.
   b) Despeje l de la fórmula.
   c) ¿Fue diferente el procedimiento utilizado para despejar la l del procedimiento para despejar l en la ecuación?
   d) En la fórmula resuelta para l de la parte **b)**, sustituya 16 por P y 3 por w y luego determine el valor para l. ¿Cómo es con respecto a su respuesta de la parte **a)**? Explique por qué esto es así.
6. **a)** ¿Qué son los subíndices?
   b) ¿Cómo se lee x_0?
   c) ¿Cómo se lee v_f?

Práctica de habilidades

Evalúe las fórmulas siguientes para los valores dados. Utilice la tecla π *en su calculadora para* π *cuando sea necesario. Redondee las respuestas al centésimo más cercano.*

7. $E = IR$, cuando $I = 63$, $R = 100$ (una fórmula conocida como *Ley de Ohm* y que se utiliza cuando se estudia electricidad).
8. $C = 2\pi r$ cuando $r = 12$ (fórmula para determinar la circunferencia de un círculo).
9. $R = R_1 + R_2$, cuando $R_1 = 100$, $R_2 = 200$ (fórmula que se usa cuando se estudia electricidad).
10. $A = \frac{1}{2}bh$ cuando $b = 7$, $h = 6$ (fórmula para determinar el área de un triángulo).
11. $A = \pi r^2$ cuando $r = 8$ (fórmula para determinar el área de un círculo).
12. $P_1 = \dfrac{T_1 P_2}{T_2}$ cuando $T_1 = 150$, $T_2 = 300$, $P_2 = 200$ (fórmula química que relaciona la temperatura y la presión de gases).
13. $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ cuando $x_1 = 40$, $x_2 = 90$, $x_3 = 80$ (fórmula para determinar el promedio de tres números).
14. $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ cuando $h = 15$, $b_1 = 20$, $b_2 = 28$ (fórmula para determinar el área de un trapecio).
15. $A = P + Prt$ cuando $P = 160$, $r = 0.05$, $t = 2$ (fórmula bancaria que da el monto total en una cuenta después que se agrega el interés).
16. $E = a_1p_1 + a_2p_2$ cuando $a_1 = 10$, $p_1 = 0.2$, $a_2 = 100$, $p_2 = 0.3$ (fórmula estadística para determinar el valor esperado de un evento).
17. $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ cuando $y_2 = 4$, $y_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_1 = -6$ (fórmula para encontrar la pendiente de una línea recta; estudiaremos esta fórmula en el capítulo 3).
18. $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ cuando $G = 0.5$, $m_1 = 100$, $m_2 = 200$, $r = 4$ (fórmula de física que proporciona la fuerza de atracción entre dos masas separadas por una distancia, r)
19. $R_T = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ cuando $R_1 = 100$, $R_2 = 200$ (fórmula de electrónica para determinar la resistencia total en un circuito en paralelo que tiene dos resistores).
20. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ cuando $x_2 = 5$, $x_1 = -3$, $y_2 = -6$, $y_1 = 3$ (fórmula para determinar la distancia entre dos puntos en una línea recta; estudiaremos esta fórmula en el capítulo 10).
21. $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 2$, $b = -5$, $c = -12$ (de la fórmula cuadrática; analizaremos la fórmula cuadrática en el capítulo 8).
22. $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 2$, $b = -5$, $c = -12$ (de la fórmula cuadrática).
23. $A = p\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt}$ cuando $p = 100$, $r = 0.06$, $n = 1$, $t = 3$ (la fórmula del interés compuesto; vea el ejemplo 2).
24. $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ cuando $\bar{x} = 78$, $\mu = 66$, $\sigma = 15$, $n = 25$ (fórmula estadística para determinar la desviación estándar, o calificación z de una media $\bar{x}$).

Despeje a y de cada ecuación (vea los ejemplos 4 y 5).

25. $3x + y = 5$

26. $8x + 3y = 9$

27. $x - 7y = 13$

28. $-6x + 5y = 25$

29. $6x - 2y = 16$

30. $9x = 7y + 23$

31. $\frac{3}{4}x - y = 5$

32. $\frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 2$

33. $3(x - 2) + 3y = 6x$

34. $y - 4 = \frac{2}{3}(x + 6)$

35. $y + 1 = -\frac{4}{3}(x - 9)$

36. $\frac{1}{5}(x + 3y) = \frac{4}{7}(2x - 1)$

Despeje la variable indicada de cada ecuación (vea los ejemplos 6 al 8).

37. $d = rt$, para t

38. $i = prt$, para t

39. $C = \pi d$, para d

40. $A = lw$, para l

41. $P = 2l + 2w$, para l

42. $P = 2l + 2w$, para w

43. $V = lwh$, para h

44. $V = \pi r^2 h$, para h

45. $A = P + Prt$, para r

46. $Ax + By = C$, para y

47. $V = \frac{1}{3}lwh$, para l

48. $A = \frac{1}{2}bh$, para b

49. $y = mx + b$, para m

50. $IR + Ir = E$, para R

51. $y - y_1 = m(x - x_1)$, para m

52. $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$, para σ

53. $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$, para μ

54. $y = \frac{kx}{z}$, para z

55. $P_1 = \frac{T_1 P_2}{T_2}$, para T_2

56. $F = \frac{mv^2}{r}$, para m

57. $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$, para h

58. $D = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{n}$, para n

59. $S = \frac{n}{2}(f + l)$ para n

60. $S = \frac{n}{2}(f + l)$, para l

61. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, para F

62. $F = \frac{9}{5}C + 32$, para C

63. $F = \frac{km_1 m_2}{d^2}$, para m_1

64. $F = \frac{km_1 m_2}{d^2}$ para m_2

Resolución de problemas

En los ejercicios del 65 al 88, cuando sea apropiado, redondee su respuesta a dos decimales.

65. Tipo de cambio

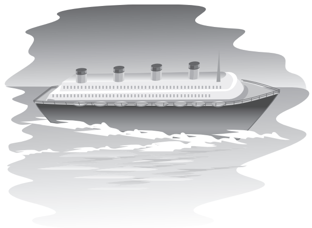
a) De acuerdo con el sitio web Universal Converter, el 5 de febrero de 2005, 1 dólar de Estados Unidos se podría cambiar por 9.11 pesos mexicanos. Escriba una fórmula que utilice d para los dólares y p para los pesos, que pueda utilizarse para convertir dólares a pesos.

b) Escriba una fórmula que pueda emplearse para convertir pesos a dólares.

c) Explique cómo determinó sus respuestas a las partes **a)** y **b)**.

66. Velocidad del Titanic Los barcos en el mar miden su velocidad en nudos. Por ejemplo, cuando el *Titanic* chocó con el iceberg, su velocidad era de casi 20.5 nudos. Un nudo es 1 milla náutica por hora. Una milla náutica es alrededor de 6076 pies. Cuando se mide la velocidad en millas por hora, una milla son 5280 pies.

a) Determine una fórmula para convertir una velocidad en nudos (k) a una velocidad en millas por hora (m).
b) Explique cómo determinó esta fórmula.
c) Determine la velocidad, en millas por hora, a la cual el *Titanic* chocó con el iceberg.



En los ejercicios del 67 al 70, utilice la fórmula para el interés simple $i = prt$. Vea el ejemplo 1.

67. Un préstamo personal Edison Tan prestó a su colega, Ken Pothoven, \$1100 por 4 años a una tasa de interés simple del 7% anual. Determine el interés simple que debe pagar Ken a Edison cuando salde el préstamo al término de los 4 años.

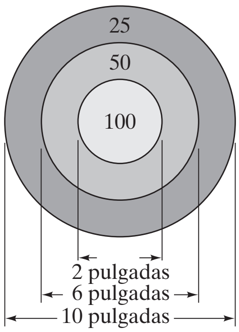
68. Determinación de la tasa Steve Marino pidió prestados \$500 por dos años a su unión de crédito. El interés simple que pagó fue de \$52.90. ¿Cuál fue la tasa de interés simple que se le cobró?

69. Determinación del periodo de un préstamo Mary Haran prestó a su hermana, Dawn, \$20,000 a una tasa de interés simple de 3.75% anual. Al final del periodo del préstamo, Dawn pagó a Mary los \$20,000 originales más \$4875 de interés. Determine el tiempo que duró el préstamo.

70. Un certificado de depósito Erin Grabish recibió \$2000 por una conferencia en un seminario de planeación financiera. Fred invirtió el dinero en un certificado de depósito durante 2 años. Cuando ella redimió el certificado, recibió \$2166. ¿Cuál fue la tasa de interés simple que recibió en este certificado de depósito?

En los ejercicios del 71 al 76, si no está seguro de la fórmula a usar, consulte el apéndice A.

71. Área de un blanco Marc Mazzoni, campeón en tiro de dardos en el estado de Michigan, practica en un blanco con círculos concéntricos como se muestra en la figura.



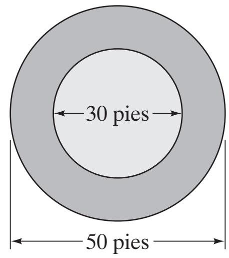
a) Determine el área del círculo marcado con 100.
b) Determine el área total del blanco.

72. Planeación de un arenero Betsy Nixon está planeando construir un arenero rectangular para su hija. Cuenta con 38 pies de madera para utilizar en los lados. Si el largo del arenero será de 11 pies, ¿cuál será el ancho?

73. Volumen de concreto en una entrada de automóvil Anthony Palmiotto, está instalando concreto para una entrada de cochera, será de 15 pies de largo por 10 pies de ancho y 6 pulgadas de profundidad.

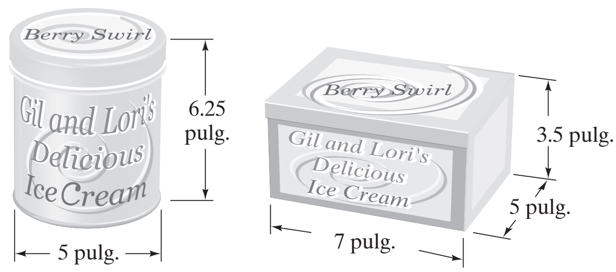
a) Determine el volumen del concreto necesario en pies cúbicos.
b) Si 1 yarda cúbica = 27 pies cúbicos, ¿cuántas yardas cúbicas de concreto se necesitan?
c) Si el concreto cuesta \$35 por yarda cúbica, ¿cuál es el costo del concreto? El concreto debe comprarse en yardas cúbicas completas.

74. Área de un helipuerto Un helipuerto en Raleigh, Carolina del Norte, tiene dos círculos concéntricos como se muestra en la figura.

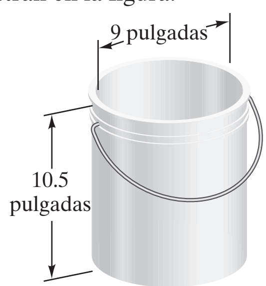


Determine el área de la región roja en la figura.

75. Contenedores para helado La compañía de helados de Gil y Lori vende helados en dos contenedores, un bote cilíndrico y una caja rectangular como se muestra en la figura. ¿A cuál contenedor le cabe más helado y cuál es la diferencia de volúmenes?



76. Capacidad de una cubeta Sandra Hakanson tiene una cubeta en la que desea mezclar detergente. Las dimensiones de la cubeta se muestran en la figura.



a) Determine la capacidad de la cubeta en pulgadas cúbicas.
b) Si 231 pulgadas cúbicas = 1 galón, ¿cuál es la capacidad de la cubeta en galones?
c) Si las instrucciones en la botella de detergente dicen que agregue 1 onza por galón de agua, ¿cuánto detergente debe añadir Sandra a la cubeta llena de agua?

Para los ejercicios del 77 *al* 80, *consulte el ejemplo* 2.

77. **Cuenta de ahorros** Beth Rechsteiner invirtió $10,000 en una cuenta de ahorros que paga 6% de interés compuesto cada trimestre. ¿Cuánto dinero tendrá en su cuenta de ahorros al cabo de 2 años?

78. **Capitalización mensual** Vigay Patel invirtió $8500 en una cuenta de ahorros que paga 3.2% de interés compuesto cada mes. ¿Cuánto dinero tendrá en su cuenta al final de 4 años?

79. **Certificado de depósito** Keather Kazakoff invierte $4390 en un certificado de depósito que paga 4.1% de interés capitalizable cada semestre. ¿Cuánto valdrá el certificado después de 36 meses?

80. **Comparación de cuentas** James Misenti tiene $1500 para invertir durante un año. Él tiene la opción de una cuenta en una unión de crédito que paga 4.5% de interés simple anual y una cuenta bancaria que paga 4% de interés compuesto cada trimestre. Determine cuál cuenta pagaría más interés y por cuánto.

Para los ejercicios del 81 al 84, consulte el ejemplo 3.

81. **Tasa gravable equivalente** Kimberly Morse-Austin es una estudiante que está en el rango de ingresos con el 15% de impuestos federales. Está considerando invertir $1500 en un bono de un fondo mutuo libre de impuestos que paga 3.5% de interés simple. Determine la tasa gravable equivalente a 3.5% de tasa libre de impuestos.

82. **Comparación de inversiones** Dave Ostrow está en el rango de ingresos con el 35% de impuestos federales y considera dos inversiones: un bono municipal libre de impuestos que paga 3% de interés simple o bien un certificado de depósito gravable que paga 4.5% de interés simple. ¿Cuál inversión le da un mayor rendimiento?

83. **Inversión de padre e hijo** Anthony Rodriguez está en el rango de ingresos con impuestos federales de 35% y su hijo, Angelo, está en el rango del 28%. Ambos están considerando un fondo mutuo libre de impuestos que les produce 4.6% de interés simple.
   - **a)** Determine la tasa gravable equivalente a una tasa libre de impuestos del 4.6% para Anthony.
   - **b)** Determine la tasa gravable equivalente a una tasa libre de impuestos del 4.6% para Angelo.

84. **Comparación de inversiones** Marissa Felberty considera invertir $9200 en una cuenta gravable que da 6.75% o en una cuenta libre de impuestos que produce 5.5%. Si está en el rango de ingresos con el 25% de impuestos, ¿qué inversión le producirá el mayor rendimiento?

Los ejercicios del 85 *al* 88 *tienen diversas situaciones*. *Resuelva cada ejercicio*.

85. **Pérdida de peso** Un nutriólogo le explica a Robin Thomas que una persona pierde peso quemando más calorías de las que consume. Por ejemplo, Robin, una mujer de 5′6″ que pesa 132 libras, estará alrededor del mismo peso con ejercicio normal si sigue una dieta diaria de 2400 calorías. Si quema más de 2400 calorías diariamente, perderá peso que puede aproximarse por el modelo matemático $w = 0.02c$, donde w es la pérdida de peso *semanal* y c es el número de calorías quemadas *por día* por *arriba* de 2400 calorías.
   - **a)** Determine la pérdida semanal de peso de Robin, si hace ejercicio y quema 2600 calorías por día.
   - **b)** ¿Cuántas calorías debería quemar Robin en un día para perder 2 libras en una semana?

86. **Prueba de presión** Cuando a una persona se le somete a una prueba de presión, por lo general se le indica que al llegar el ritmo cardiaco a cierto punto, la prueba deberá detenerse. El máximo ritmo cardiaco permitido, m, en latidos por minuto, puede ser aproximado por la ecuación $m = -0.875x + 190$, donde x representa la edad del paciente de 1 a 99. Usando este modelo matemático determinar
   - **a)** el ritmo cardiaco máximo para una persona de 50 años.
   - **b)** la edad de una persona cuyo máximo ritmo cardiaco sea de 160 latidos por minuto.

87. **Saldo de una cartera de inversión** Algunos planeadores financieros recomiendan la siguiente regla empírica a los inversionistas. El porcentaje de acciones en su cartera total debe ser igual a 100 menos su edad. El resto se debe colocar en bonos o tenerlo en efectivo.
   - **a)** Construya modelos matemáticos para el porcentaje que se conserva en acciones (utilice S para el porcentaje en acciones y a para la edad de la persona).
   - **b)** Por medio de esta regla empírica, determine el porcentaje en acciones para una persona de 60 años de edad.

88. **Índice de masa corporal** El índice de masa corporal es una manera estándar de evaluar el peso corporal de una persona con respecto a su estatura. Para determinar su índice de masa corporal (IMC) usando medidas métricas, divida su peso, en kilogramos, entre su estatura, en metros, elevada al cuadrado. Una forma abreviada para calcular el IMC usando libras y pulgadas, es multiplicar por 705 su peso en libras y luego dividir entre el cuadrado de su altura en pulgadas.
   - **a)** Cree una fórmula para determinar el IMC de una persona usando kilogramos y metros.
   - **b)** Cree una fórmula para determinar el IMC de una persona cuando el peso se da en libras y la altura se da en pulgadas.
   - **c)** Determine su IMC.

Reto

89. De la fórmula $r = \dfrac{s/t}{t/u}$ despeje **a)** s, **b)** u.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **90.** Evalúe $-\sqrt{3^2 + 4^2} + |3 - 4| - 6^2$.

91. Evalúe $\dfrac{7 + 9 \div (2^3 + 4 \div 4)}{|3 - 7| + \sqrt{5^2 - 3^2}}$.

92. Evalúe $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ cuando $a = -2$, $b = 3$.

[2.1] **93.** Resuelva la ecuación $\frac{1}{4}t + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8}t$.

2.3 Aplicaciones del álgebra

1 Traducir una proposición verbal a una expresión algebraica o en una ecuación.

2 Utilizar el procedimiento de resolución de problemas.

1 Traducir una proposición verbal a una expresión algebraica o en una ecuación

Las siguientes secciones presentarán algunos de los muchos usos del álgebra en situaciones de la vida real. Cuando sea posible, incluiremos otras aplicaciones relevantes en el libro.

Quizá la parte más difícil al resolver un problema verbal sea transformarlo en una ecuación. Éste es el paso 2 en el procedimiento de resolución de problemas presentado en la sección 2.2. Antes de representar los problemas como ecuaciones, damos algunos ejemplos o frases representadas como expresiones algebraicas.

Frase	Expresión algebraica
un número incrementado en 8	$x + 8$
dos veces un número	$2x$
7 menos que un número	$x - 7$
un noveno de un número	$\frac{1}{9}x$ o $\frac{x}{9}$
2 más que 3 veces un número	$3x + 2$
4 menos que 6 veces un número	$6x - 4$
12 veces la suma de un número y 5	$12(x + 5)$

En estas expresiones algebraicas se utilizó la variable x, pero podríamos haber utilizado cualquier otra variable para representar la cantidad desconocida.

EJEMPLO 1 ▸ Exprese cada frase como una expresión algebraica.

a) El radio, r, disminuido en 9 centímetros.

b) 5 menos que dos veces la distancia, d.

c) 7 veces un número, n, aumentado en 8.

Solución

a) $r - 9$ **b)** $2d - 5$ **c)** $7n + 8$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 3**

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

Es importante que se prepare cuidadosamente para el resto del capítulo; asegúrese de leer el libro y los ejemplos con cuidado. *Asista a clase todos los días y, sobre todo, trabaje en todos los ejercicios que se le asignen*.

Conforme lea los ejemplos en el resto del capítulo, piense acerca de cómo se pueden extender a otros problemas similares. Así, en el ejemplo 1 **a)** establecimos que el radio, r, disminuido en 9 centímetros, podía representarse por $r - 9$. Puede generalizar esto a otros problemas similares; por ejemplo, un peso, w, disminuido en 15 libras, puede representarse como $w - 15$.

EJEMPLO 2 ▸ Escriba cada una de las siguientes frases como una expresión algebraica.

a) El costo por adquirir x camisas a \$4 cada una
b) La distancia recorrida en t horas a 65 millas por hora
c) El número de centavos en n monedas de cinco centavos
d) Una comisión del 8% en la venta de x dólares.

Solución

a) Podemos razonar así: una camisa costaría 1(4) dólares, dos camisas, 2(4) dólares, tres camisas, 3(4) dólares, cuatro camisas, 4(4) dólares, y así sucesivamente. Continuando con este proceso, podemos ver que x camisas costarían $x(4)$ o $4x$ dólares. Podemos aplicar el mismo razonamiento para resolver cada una de las otras partes.
b) $65t$
c) $5n$
d) $0.08x$ (8% se escribe como 0.08 en forma decimal).

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 7**

Sugerencias útiles

Cuando se nos pide determinar un porcentaje, siempre estamos determinando el porcentaje de alguna cantidad. Por lo tanto, cuando se lista un porcentaje, **siempre** se multiplica por un número o una variable. En los ejemplos siguientes utilizamos la variable c, pero podríamos utilizar cualquier otra letra para representar la variable.

Frase	Cómo se escribe
6% de un número	$0.06c$
el costo de un artículo incrementado en un 7% de impuestos	$c + 0.07c$
el costo de un artículo reducido en 35%	$c - 0.35c$

A veces, en un problema hay dos números que se relacionan entre sí. Con frecuencia representamos uno de ellos con una variable y el otro con una expresión que contiene esa variable. Por lo general representamos con la variable la descripción menos complicada, y escribimos la segunda (la expresión más compleja) en términos de la variable. En los ejemplos siguientes, utilizamos x para la variable.

Frase	Un número	Segundo número
La edad de Dawn ahora y la edad de Dawn dentro de 6 años	x	$x + 3$
un número es 9 veces el otro	x	$9x$
un número es 4 menos que el otro	x	$x - 4$
un número y el número aumentado en 16%	x	$x + 0.16x$
un número y el número disminuido en 10%	x	$x - 0.10x$
la suma de dos números es 19	x	$19 - x$
una tabla de 13 pies cortada en dos pedazos	x	$13 - x$
\$10,000 compartidos por dos personas	x	$10{,}000 - x$

Los últimos tres ejemplos podrían no ser muy obvios. Considere "La suma de dos números es 10". Cuando sumamos x y $10 - x$ obtenemos $x + (10 - x) = 10$. Cuando una tabla de 6 pies se corta en dos tramos serán x y $6 - x$. Por ejemplo, si un tramo es de 2 pies, el otro debe ser de $6 - 2 = 4$ pies.

Sugerencia útil

Suponga que lee el enunciado siguiente en un problema de aplicación: "Una cuerda de 12 pies se corta en dos partes". Probablemente sabe que debe usar x (o alguna otra variable) para representar la longitud de la primera parte de la cuerda. Lo que podría no estar seguro es si debe utilizar $x - 12$ o $12 - x$ para representar la longitud de la segunda parte. Para ayudarle a decidir puede ser útil usar números específicos para establecer el patrón. En este ejemplo podría utilizar un patrón similar al que se muestra a continuación para auxiliarse.

Si la primera pieza es de ...	Entonces la segunda pieza es de ...
2 pies	10 pies = 12 pies − 2 pies
5 pies	7 pies = 12 pies − 5 pies

Con base en este patrón puede ver que si la primera pieza es de x pies, entonces la segunda pieza es de $12 - x$ pies.

EJEMPLO 3 ▸ Para cada una de las siguientes relaciones, elija una variable para representar una cantidad y exprese la segunda cantidad en términos de la primera.

a) La velocidad del segundo tren es 1.8 veces la velocidad del primero.
b) David y su hermano comparten $90.
c) A Tom le lleva tres horas más que a Roberta terminar la tarea.
d) Hilda tiene $5 más que dos veces la cantidad de dinero que tiene Héctor.
e) La longitud de un rectángulo es 7 unidades menos que 3 veces su ancho.

Solución

a) Velocidad del primer tren, s; velocidad del segundo tren, $1.8s$
b) La cantidad que tiene David, x; la cantidad que tiene su hermano, $90 - x$.
c) Roberta, t; Tom, $t + 3$
d) Héctor, x; Hilda, $2x + 5$
e) Ancho, w; longitud, $3w - 7$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 11**

La palabra *es* en un problema verbal con frecuencia significa **es igual a** y se representa por un signo de igual, =.

Proposición verbal	Ecuación algebraica
4 menos que 3 veces un número *es* 17	$6x - 4 = 17$
un número reducido en 4 *es* 5 más que el doble del número	$x - 4 = 2x + 5$
el producto de dos enteros consecutivos *es* 72	$x(x + 1) = 72$
un número incrementado en su 15% *es* 90	$x + 0.15x = 90$
un número reducido en su 12% *es* 52	$x - 0.12x = 52$
la suma de un número y el número incrementado en su 4% *es* 324	$x + (x + 0.04x) = 324$
el costo por rentar un VCR durante x días a $18 por día *es* $120	$18x = 120$

2 Utilizar el procedimiento de resolución de problemas

Existen muchos tipos de problemas verbales y el procedimiento general para la resolución de problemas dado en la sección 2.2 puede utilizarse para resolver todos los problemas. Ahora presentamos otra vez los cinco pasos del procedimiento para resolver problemas de modo que pueda consultarlo con facilidad. Hemos incluido información adicional después del paso 2, ya que en esta sección vamos a enfatizar la traducción de problemas verbales en ecuaciones.

Procedimiento para resolver problemas de aplicación

1. **Entienda el problema.** Identifique la cantidad o cantidades que se pide determinar.
2. **Traduzca el problema a lenguaje matemático** (exprese el problema como una ecuación).
   a) Elija una variable para representar una cantidad, y **escriba exactamente lo que representa**. Represente cualquier otra cantidad a determinar en términos de esta variable.
   b) Utilice la información del paso a), escriba una ecuación que represente el problema verbal.
3. **Realice los cálculos matemáticos** (resuelva la ecuación).
4. **Compruebe la respuesta** (utilice el texto original del problema).
5. **Responda la pregunta que se hizo.**

Algunas veces combinaremos los pasos o no mostraremos algunos pasos del procedimiento para resolver problemas, debido a la limitación de espacio. Aun cuando no mostremos una comprobación para un problema, usted siempre debe comprobarlo para asegurarse de que su respuesta es razonable y tiene sentido.

EJEMPLO 4 ▸ **Planes para llamadas de larga distancia** El plan de pago Tasa Preferencial de la compañía telefónica BellSouth requiere que el cliente pague una cuota mensual de \$3.95 y luego 6.9 centavos por minuto por cualquier llamada de larga distancia realizada. El plan Servicio Básico de la misma compañía no tiene un pago mensual, pero el cliente paga 18 centavos por minuto por cualquier llamada de larga distancia realizada. Determine el número de minutos que un cliente necesitaría dedicar a llamadas de larga distancia para que el costo de los dos planes fuesen iguales.

Solución **Entienda** Nos dan dos planes en los que uno tiene una cuota mensual y el otro no. Se nos pide determinar el *número de minutos* de llamadas de larga distancia que resultaría en que ambos planes tengan el mismo costo total. Para resolver el problema estableceremos el costo de los dos planes iguales entres sí y resolvemos para el número de minutos.

Traduzca Sea n = número de minutos en llamadas de larga distancia.

Entonces $0.069n$ = costo por n minutos a 6.9 centavos por minuto

y $0.18n$ = costo por n minutos a 18 centavos por minuto.

Costo del plan Tasa preferencial = Costo del plan Servicio básico

gasto mensual + costo de llamadas = costo de llamadas

$$3.95 + 0.069n = 0.18n$$

Realice los cálculos

$$3.95 = 0.111n$$

$$\frac{3.95}{0.111} = \frac{0.111n}{0.111}$$

$$35.59 \approx n$$

Compruebe El número de minutos es razonable y la aritmética es sencilla de verificar.

Responda Si se emplearan alrededor de 36 minutos por mes, ambos planes tendrían casi el mismo costo total.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 33**

Edificios del CCPE

EJEMPLO 5 ▸ **Gasto en CCPE** En 2004, los Centros para el Control y Prevención de Enfermedades (CCPE) tenían un presupuesto de \$4.440 mil millones; tuvo un incremento de 2.3% con respecto al presupuesto de 2003. Determine el presupuesto del CCPE de 2000.

Solución Entienda Necesitamos determinar el presupuesto del CCPE de 2003. Para resolver este problema, usaremos el hecho de que el presupuesto se incrementó 2.3% de 2003 a 2004 y que el presupuesto de 2004 fue \$4.440 mil millones.

Traduzca Sea x = al presupuesto del CCPE en 2003.

Entonces $0.023x$ = incremento en el presupuesto de 2003 a 2004.

$$\begin{pmatrix}\text{presupuesto del}\\ \text{CCPE de 2003}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{aumento en el presupuesto}\\ \text{de 2003 a 2004}\end{pmatrix} = (\text{presupuesto del CCPE de 2004})$$

$$x \quad + \quad 0.023x \quad = 4.440$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} x + 0.023x &= 4.440\\ 1.023x &= 4.440\\ x &\approx 4.340 \end{aligned}$$

Compruebe y responda El número obtenido es menor que el presupuesto de 2004, que es lo que esperamos. El presupuesto de 2003 fue alrededor de \$4.340 mil millones.

Fuente: www.cdc.gov/fm.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 41**

EJEMPLO 6 ▸ **Área territorial** El total de área territorial de las cuatro poblaciones: Gibraltar, Nauru, Bermudas y la Isla Norfolk es de 116 km^2 (kilómetros cuadrados). El área territorial de Gibraltar es $\frac{1}{3}$ del área de Nauru. El área de la Isla Norfolk es $\frac{5}{3}$ del área de Nauru. El área de Bermudas es 10 km^2 menos que 3 veces el área de Nauru. Determine el área de cada una de estas poblaciones.

Solución Entienda Necesitamos determinar el área (en km^2) de Gibraltar, Nauru, Bermudas e Isla Norfolk. Observe que el área de las poblaciones puede determinarse a partir del área de Nauru. Por tanto, estableceremos como variable desconocida el área de Nauru. Entonces podemos representar el área de las otras tres poblaciones mediante esta variable. Además, observe que el área total de las cuatro poblaciones es de 116 km^2.

Traduzca

$$\begin{aligned} \text{Sea } a &= \text{área de Nauru}\\ \frac{1}{3}a &= \text{área de Gibraltar,}\\ \frac{5}{3}a &= \text{área de la Isla Norfolk}\\ \text{y } 3a - 10 &= \text{área de Bermudas.} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}\text{área de}\\ \text{Nauru}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{área de}\\ \text{Gibraltar}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{área de la}\\ \text{Isla Norfolk}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{área de}\\ \text{Bermudas}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{área}\\ \text{total}\end{pmatrix}$$

$$a \quad + \quad \frac{1}{3}a \quad + \quad \frac{5}{3}a \quad + \quad (3a - 10) \quad = \quad 16$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{3}a + \frac{5}{3}a + (3a - 10) &= 116\\ a + 2a + 3a - 10 &= 116\\ 6a - 10 &= 116\\ 6a &= 126\\ a &= 21 \end{aligned}$$

Compruebe y responda El área territorial de Nauru es de 21 km^2. El área de Gibraltar es $\frac{1}{3}(21) = 7 \text{ km}^2$. El área territorial de la Isla Norfolk es $\frac{5}{3}(21) = 35 \text{ km}^2$. El área de Bermudas es $(3 \cdot 21) - 10 = 63 - 10 = 53 \text{ km}^2$. El área total de estas cuatro poblaciones es $(21 + 7 + 35 + 53) = 116 \text{ km}^2$, así que la respuesta se verifica.

Fuente: www.worldgazateer.com

▸ Ahora resuelva el ejercicio 53

EJEMPLO 7 ▸ Daytona Beach Erin Grabish llevó a su familia a visitar Daytona Beach, Florida. Permanecieron una noche en un Holiday Inn. Cuando hicieron su reservación del hotel se les cotizó una tarifa de \$95 por noche, antes de aplicar los impuestos. Cuando salieron, su facturación total fue \$110.85, que incluía el impuesto de la habitación y un cargo de \$3.50 por una barra de dulce (del servibar de la habitación). Determine la tasa de impuestos por la habitación.

Carrera Daytona 500

Solución **Entienda** Su facturación total consiste en la tarifa de la habitación, el impuesto por la habitación y el costo de \$3.50 por la barra de dulce. El impuesto de la habitación se determina multiplicando el costo de la tarifa de la habitación por la tasa de impuesto. Nos piden determinar la tasa de impuesto de la habitación.

Traduzca Sea t = taza de impuesto por la habitación

entonces $0.01t$ = tasa de impuesto, como decimal

costo de la habitación + impuesto de la habitación + barra dulce = total

$$95 + 95(0.01t) + 3.50 = 110.85$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} 95 + 0.95t + 3.50 &= 110.85 \\ 0.95t + 98.50 &= 110.85 \\ 0.95t &= 12.35 \\ t &= 13 \end{aligned}$$

Compruebe y responda Si sustituye 13 por t en la ecuación, verá que se verifica la respuesta. La tasa de impuesto es 13%.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 47

EJEMPLO 8 ▸ Hipoteca de una casa Mary Shapiro comprará su primera casa y está considerando dos bancos por una hipoteca de \$60,000. Citicorp cobra 6.50% de tasa de interés sin puntos por un préstamo a 30 años. (Un punto es un cobro por única vez de 1% del monto de la hipoteca). Los pagos mensuales de la hipoteca para la hipoteca de Citicorp serían de \$379.24. Citicorp también cobra una cuota de \$200 por la solicitud. El Banco de América cobra 6.00% de tasa de interés con 2 puntos por un préstamo a 30 años. Los pagos mensuales del Banco de América serían de \$359.73 y el costo de los puntos que Mary necesitaría pagar al momento de contratar es 0.02(\$60,000) = \$1200. El Banco de América no cobra su solicitud.

a) ¿Cuánto tiempo tomaría para que los pagos totales de la hipoteca de Citicorp fueran iguales a los pagos totales de la hipoteca del Banco de América?

b) Si Mary planea conservar su casa durante 20 años, ¿cuál hipoteca resultaría en un costo total menor?

Solución **a) Entienda** Citicorp cobra una tasa de interés más alta y una pequeña cuota de la solicitud pero no cobra puntos. El Banco de América cobra una tasa menor y no cobra por la solicitud, pero cobra 2 puntos. Necesitamos determinar el número de meses cuando los pagos totales de los dos préstamos fueran iguales.

Traduzca Sea x = número de meses.

Entonces $379.24x$ = costo de pagos a la hipoteca por x meses con Citicorp

y $359.73x$ = costo de pagos a la hipoteca por x meses con el Banco de América.

costo total con Citicorp = costo total con Banco de América

pagos a la hipoteca + costo de la solicitud = pagos a la hipoteca + puntos

$$379.24x + 200 = 359.73x + 1200$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} 379.24x + 200 &= 359.73x + 1200 \\ 379.24x &= 359.73x + 1000 \\ 19.51x &= 1000 \\ x &\approx 51.26 \end{aligned}$$

Responda El costo sería el mismo en alrededor de 51.26 meses o casi 4.3 años.

b) El costo total sería el mismo en casi 4.3 años; antes de los 4.3 años, el costo del préstamo con el Banco de América sería mayor a consecuencia del cobro inicial de $1200 por los puntos. Sin embargo, después de 4.3 años el costo del Banco de América sería menor ya que el pago mensual es menor. Si evaluamos el costo total con Citicorp durante 20 años (240 pagos mensuales), obtenemos $91,217.60. Si evaluamos el costo total con el Banco de América durante 20 años, obtenemos $87,535.20. Por lo tanto, Mary ahorrará $3682.40 durante el periodo de 20 años con el Banco de América.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 49**

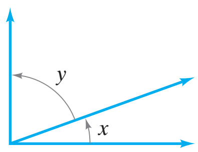


FIGURA 2.4

Ahora veamos dos ejemplos que incluyen ángulos. En el ejemplo 9 utilizamos **ángulos complementarios**, éstos son dos ángulos cuya suma de medidas es 90° (vea la **figura 2.4**).

En la **figura 2.4**, el ángulo x (representado $\measuredangle x$) y el ángulo y ($\measuredangle y$) son ángulos complementarios ya que su suma mide 90°.

EJEMPLO 9 ▸ Ángulos complementarios

Si el ángulo A y el ángulo B son complementarios y el ángulo B es 42° mayor que el ángulo A, determine las medidas de los ángulos A y B.

Solución **Entienda** La suma de las medidas de los dos ángulos debe ser 90°, ya que son ángulos complementarios. Usaremos este hecho para plantear una ecuación. Como el ángulo B está descrito en términos del ángulo A, representaremos con x la medida del ángulo A.

Traduzca Sea x = medida del ángulo A

Entonces $x + 42$ = medida del ángulo B

medida del ángulo A + medida del ángulo B = 90°

$$x + x + 42 = 90$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} 2x + 42 &= 90 \\ 2x &= 48 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

Compruebe y responda Como $x = 24$, la medida del ángulo A es 24°. La medida del ángulo $B = x + 42 = 24 + 42 = 66$, por lo que el ángulo B tiene una medida de 66°. Observe que el ángulo B es 42° mayor que el ángulo A, y la suma de las medidas de ambos ángulos es $24° + 66° = 90°$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 21**

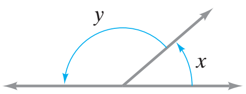


FIGURA 2.5

En el ejemplo 10 utilizamos **ángulos suplementarios**, que son dos ángulos cuya suma de medidas es 180° (vea la **figura 2.5**).

En la **figura 2.5**, los ángulos x y y son ángulos suplementarios ya que la suma de sus medidas es 180°.

EJEMPLO 10 ▸ **Ángulos suplementarios** Si los ángulos C y D son suplementarios y la medida de los ángulos C es 6° mayor que el doble de la medida del ángulo D, determine las medidas de los ángulos C y D.

Solución **Entienda** La suma de las medidas de los dos ángulos debe ser 180°, ya que son suplementarios. Como el ángulo C se describe en términos del ángulo D, representaremos con x la medida del ángulo D.

Traduzca

$$\text{Sea } x = \text{medida del ángulo } D.$$
$$\text{Entonces } 2x + 6 = \text{medida del ángulo } C.$$
$$\text{medida del ángulo } C + \text{medida del ángulo } D = 180°$$
$$2x + 6 + x = 180$$

Realice los cálculos

$$3x + 6 = 180$$
$$3x = 174$$
$$x = 58$$

Compruebe y responda Como $x = 58$, la medida del ángulo D es 58°. La medida del ángulo $C = 2x + 6 = 2(58) + 6 = 122$; por tanto la medida del ángulo $C = 122°$. Observe que la medida del ángulo C es 6° mayor que el doble de la medida del ángulo D y que la suma de las medidas de los ángulos es $122° + 58° = 180°$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 23**

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

A continuación aparecen algunas sugerencias, por si usted tiene alguna dificultad con problemas de aplicación.

1. Instructor. Haga una cita para ver a su instructor. Asegúrese de haber leído el material del libro y haber intentado resolver todos los problemas de tarea. Realice preguntas específicas su instructor.
2. Video en CD. Averigüe si los videos en el CD que acompaña a este libro están disponibles en su colegio. Si es así, vea el de este capítulo; utilice el control de pausa, de forma que pueda observar los videos a su ritmo de trabajo.
3. Tutoría. Si su colegio ofrece tutoría gratis, aproveche esa ventaja.
4. Grupo de estudio. Forme un grupo de estudio con sus compañeros de clase. Intercambie números telefónicos y direcciones de correo electrónico. Podrían ayudarse unos a otros.
5. Manual de soluciones para el estudiante. Si se atora con un ejercicio, podría querer utilizar el Manual de Estudio para el Estudiante a fin de ayudarle a entender el problema. No utilice el manual en lugar de trabajar los ejercicios. En general, el Manual de Soluciones debe usarse sólo para verificar su trabajo.
6. MyMathLab. MyMathLab proporciona ejercicios correlacionados con el texto, que se generan de forma algorítmica para una práctica y dominio sin límite. Además, están disponibles herramientas en línea tales como video clases, animaciones y un libro de texto en multimedios, para ayudarle a entender el material. Verifique con su profesor para determinar si MyMathLab está disponible.
7. MathXL®. MathXL es un poderoso sistema de tareas, tutorial y evaluación correlacionado específicamente con este texto. Puede hacer exámenes de los capítulos en MatXL y recibir un plan de estudio personalizado con base en sus resultados. El plan de estudio lo enlaza directamente a ejercicios de apoyo para los objetivos que necesita estudiar o volver a examinarse. Verifique con su profesor para determinar si está disponible MathXL.
8. Prentice Hall Mathematics Tutor. Una vez que el programa ha sido iniciado por su instructor, usted puede obtener apoyo individual vía telefónica, fax o por email.

¡Es importante que siga intentando! Recuerde, cuanto más practique mayor será su habilidad en la resolución de problemas de aplicación.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.3

MathXL® MyMathLab

Práctica de habilidades

En los ejercicios del 1 al 10, exprese cada frase como una expresión algebraica.

1. 3 menos que un número, x.

2. 17 más que 4 veces un número, m.

3. el volumen, v, aumentado en 6 metros^3.

4. 11 veces un número n, disminuido en 7.5

5. la distancia, d, aumentada en 2 millas.

6. 7 veces un número, p, aumentado en 8.

7. el costo de comprar y libros a \$19.95 cada uno

8. el número de centavos en q monedas de 25 centavos

9. 9.6% de comisión en la venta de casas por un total de x dólares

10. el monto de interés generado en un año a una tasa de 3.5% sobre d dólares.

En los ejercicios del 11 al 20, seleccione una variable para representar una cantidad y exprese la segunda cantidad en términos de la primera.

11. Un tablón de madera de 12 pies se corta en dos partes.

12. Un ángulo de un triángulo es 7° mayor que otro ángulo.

13. La longitud de un rectángulo es 29 metros mayor que el ancho.

14. Una tarea de 17 horas se divide entre Robin y Tom.

15. \$165 se reparten entre Max y Lora.

16. George puede pintar una casa el doble de rápido que Jason.

17. Nora puede correr 1.3 millas por hora más rápido que Betty.

18. La velocidad límite en una autopista es 30 millas por hora mayor que la velocidad límite en un camino local.

19. El costo por electricidad ha aumentado 22%.

20. El precio de un refrigerador ha aumentado en 6%.

Resolución de problemas

En los ejercicios del 21 al 72, plantee una ecuación que pueda usarse para resolver el problema. Determine la solución del problema.

21. Ángulos complementarios Los ángulos A y B son ángulos complementarios. Determine las medidas de los ángulos A y B si el ángulo A es cuatro veces el tamaño del ángulo B. Vea el ejemplo 9.

22. Ángulos complementarios Los ángulos C y D son complementarios. Determine las medidas de los ángulos C y D, si el ángulo D es 15° menor que el doble del ángulo C.

23. Ángulos suplementarios Los ángulos A y B son suplementarios. Determine las medidas de los ángulos A y B, si el ángulo B es 4 veces el tamaño del ángulo A. Vea el ejemplo 10.

24. Ángulos suplementarios Los ángulos A y B son suplementarios. Determine las medidas de cada ángulo, si el ángulo A es 30° mayor que el ángulo B.

25. Ángulos en un triángulo La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°. Determine los tres ángulos de un triángulo, si un ángulo es 20° mayor que el ángulo más pequeño y el tercer ángulo es el doble del ángulo más pequeño.

26. Ángulos en un triángulo Determine las medidas de los tres ángulos de un triángulo si un ángulo es el doble del ángulo más pequeño y el tercer ángulo es 60° mayor que el ángulo más pequeño.

27. Sociedad de Honor de historia Un beneficio de ser miembro de una sociedad de honor, es un 25% de descuento en todas las suscripciones en revistas de historia. Thomas usó este descuento para pedir una suscripción anual a la revista *American Heritage* y pagó \$24. ¿Cuál era el costo de una suscripción regular?

28. Traje nuevo Matthew Stringer comprará un traje nuevo. En K & G Menswear encuentra que el precio de venta de un traje con una reducción de 25% es \$187.50. Determine el precio regular del traje.

29. Pase de autobús Kate Spence compra un pase mensual de autobús, con valor de \$45, que da derecho al tenedor del mismo a un número ilimitado de viajes en autobús. Sin el pase cada viaje en autobús cuesta \$1.80, ¿Cuántos viajes por mes tendría que tomar Kate para que el costo de los viajes sin el pase fuese igual al costo total de los viajes con el pase?

30. Costo de lavandería A Bill Winschief le cuesta \$12.50 a la semana lavar y secar su ropa en la lavandería de la esquina. Si una lavadora y secadora cuestan un total de \$940, ¿cuántas semanas tomaría para que el costo de la lavandería fuese igual al costo de la lavadora y secadora? (No tome en cuenta el costo de la energía eléctrica).

31. Renta de un camión El costo de rentar un camión es de \$35 diarios más \$0.20 por milla. Si Tanya Richardson sólo tiene \$80, ¿qué tan lejos puede llegar en 1 día?

32. Pago a camarera Candice Colton es una camarera en banquetes, tiene un sueldo de \$2.63 por hora más 15% del costo total de los alimentos y bebidas que ella sirve durante el banquete. Si durante un turno de 5 horas, Candice ganó \$400, ¿cuál fue el costo total de los alimentos y bebidas que ella sirvió?

33. Juego de golf Albert Sánchez tiene dos opciones de membresías en un club de golf. Una membresía social cuesta \$1775 en cuotas anuales. Además pagaría una cuota de \$50 por el green y una cuota de \$25 por el carrito de golf cada vez que juegue. Una membresía de golf cuesta \$2425 en cuotas anuales; con ésta Albert sólo pagaría \$25 por el carrito de golf cuando él juegue. ¿Cuántas veces por año necesitaría jugar Albert para que las dos opciones cuesten lo mismo?

34. Peaje en el puente George Washington Al ir a Nueva York por el puente George Washington, los clientes deben pagar un peaje (no hay peaje para regresar a Nueva Jersey). Ellos pagan \$6 en efectivo o pueden pagar \$5 (en horas no pico) usando el sistema de pase EZ. El sistema de pase EZ es un plan prepagado que también requiere de un pago por única vez de \$12 para su activación. ¿Cuántos viajes a Nueva York necesitaría hacer una persona (en horas no pico) de modo que el gasto total con el pase EZ sea igual al gasto por peaje sin el uso del pase EZ?

35. Peaje en un puente El señor y la señora Morgan viven en un desarrollo turístico de una isla comunicado con tierra firme por un puente de peaje. La cuota es de \$2.50 por automóvil que va a la isla, pero no hay pago para regresar de la isla. Los residentes de la isla pueden comprar un pase mensual por \$20, que les permite cruzar el puente por sólo \$0.50 cada vez. ¿Cuántas veces al mes deberían los Morgan ir a la isla desde tierra firme para que el costo con el pase mensual iguale al costo de peaje regular?

36. Impuesto a ventas La tasa de impuesto a ventas en Carolina del Norte es 4.5%. ¿Cuál es el máximo precio que Don y Betty Lichtenberg pueden gastar en un escritorio para computadora, si el costo total del escritorio, incluyendo el impuesto a la venta, es de \$650?

37. Renta de un departamento La familia DuVall está rentando un departamento en el Sur de California. Para 2007, la renta será de \$1720 mensuales. La renta mensual en 2007 es 7.5% mayor que la renta mensual en 2006. Determine la renta mensual en 2006.

38. Fondos de retiro Eva Chanf realiza contribuciones regulares de \$5000 anuales a un plan de retiro. Algunas de sus contribuciones van al fondo de acciones y otras al fondo global. Sus contribuciones al fondo de acciones es \$250 menos que el doble de las contribuciones al fondo global. ¿Con cuánto contribuye a cada fondo?

39. Niñas exploradoras Para reunir dinero para la organización, las niñas exploradoras tienen su jornada anual de galletas. Este año, las ventas totales de dos distritos, el distrito del sudeste y el distrito del noroeste, ascendieron a \$4.6 millones. Si las ventas del distrito del sudeste fueron \$0.31 millones más que las ventas del distrito del noroeste, determine las ventas de cada distrito.

40. Valores de franquicia Al final de la temporada 2004 de la Liga Nacional de Fútbol, los Washington Redskins, y los Dallas Cowboys tenían los valores más altos de franquicia. El valor total de las dos franquicias fue de \$2.023 mil millones. El valor de la de Washington Redskins fue 19.2% mayor que el valor de la de Dallas Cowboys. Determine el valor de la franquicia de cada equipo.

41. Ingreso personal El ingreso personal ha aumentado desde 1980. El ingreso personal promedio en 2004 fue \$29,367. Esto representa alrededor de 232% de aumento en el ingreso promedio desde 1980. Determine el ingreso personal promedio en 1980.

Fuente: Oficina de Análisis Económico de Estados Unidos

42. Presupuesto de Amtrak Amtrak ha aprobado presupuestos para los años fiscales 2006 y 2007. El presupuesto 2007 para Amtrak es $3.242 mil millones. Éste es 0.527% mayor que el presupuesto 2006. Determine el presupuesto de Amtrak para 2006.

43. Aumento de salario mínimo Desde 1980 a 2005, el aumento en el salario mínimo por hora aumentó alrededor de 66.13% a $5.15 por hora. ¿Cuál era el salario mínimo por hora en 1980?

44. Huesos y acero De acuerdo con la revista *Health*, la fuerza que puede soportar un hueso en libras por pulgada cuadrada es 6000 libras más que 3 veces la cantidad que el acero puede soportar. Si la diferencia entre la cantidad de fuerza que pueden soportar un hueso y el acero es de 18,000 libras por pulgada cuadrada, determine la fuerza que tanto el acero como el hueso pueden soportar.

45. Polen Hay 57 fuentes principales de polen en Estados Unidos; estas fuentes se clasifican como pastos, malezas y árboles. Si el número de malezas es 5 menos que el doble del número de pastos y el número de árboles es 2 más que el doble del número de pastos, determine el número de pastos, malezas y árboles que son fuentes principales de polen.

46. Sistema antiasalto en autos En la compra e instalación de un sistema antiasalto LoJack, Pola Sommers puede ahorrarse 15% del precio de su seguro automotriz. La compra e instalación del sistema LoJack cuesta $743.65. Si el seguro anual de Pola antes de la instalación del sistema LoJack es $849.44, ¿En cuántos años el sistema LoJack se pagaría por sí mismo?

47. Orden de comida Después de que Valerie Fandl se sentó en un restaurante, se dio cuenta de que sólo tenía $20.00. Si debe pagar 7% de impuesto por ventas y desea dejar un 15% de propina sobre el costo total (alimentos más impuesto), ¿cuál es el precio máximo del consumo que puede ordenar?

48. Impuesto a la tarifa de un hotel A los Ahmeds, mientras vacacionaban en Milwaukee, les cotizaron el precio de una habitación de hotel en $85 por noche más impuestos. Permanecieron una noche y vieron una película que cuesta $9.25. Su facturación total ascendió a $106.66. ¿Cuál fue la tasa de impuestos?

49. Comparación de hipotecas Los Chos están adquiriendo una casa nueva y consideran una hipoteca a 30 años de $70,000 con dos bancos diferentes. Madison Savings cobra 9.0% con 0 puntos y First National cobra 8.5% con 2 puntos. First National también cobra $200 por la solicitud, mientras que Madison no cobra ninguna cuota. Los pagos hipotecarios mensuales con Madison serían de $563.50 y con First National serían de $538.30.

a) ¿Después de cuántos meses los pagos totales para los dos bancos serían los mismos?

b) Si el plan de los Chos es mantener su casa por 30 años, ¿cuál plan hipotecario les saldría a más bajo costo? (Vea el ejemplo 8).

50. Plan de pago El club de tenis Midtown ofrece dos planes de pago para sus miembros. El plan 1 es un pago mensual de $25 más $10 por hora de renta de la cancha. El plan 2 no tiene pagos mensuales, pero la hora de renta de la cancha es de $18.50. ¿Cuántas horas tendría que jugar al mes la señora Levin para que le convenga el plan 1?

51. Refinanciamiento hipotecario Dung Nguyen considera refinanciar su casa con una tasa de interés más baja. Tiene un préstamo hipotecario de 11.875%; en la actualidad hace pagos mensuales de capital e intereses de $510 y le quedan 20 años de hipoteca. Ya que han bajado las tasas de interés, Countrywide Mortgage Corporation le ofrece una tasa del 9.5%, que produciría pagos de capital e interés de $420.50 a 20 años. Sin embargo, para obtener ese préstamo, el precio de contratación sería de $2500.

a) ¿Cuántos meses después de la refinanciación gastaría la misma cantidad con su nueva hipoteca más el precio de contratación que lo que gastaría con su hipoteca original?

b) Si planea pasar los próximos 20 años en esa casa, ¿ahorraría dinero al refinanciar?

52. Comidas para seminarios Heather Jockson, una planificadora financiera, promueve comidas para seminarios. Debe pagar de su propio bolsillo las comidas de las personas a las que atiende. Elige un restaurante donde caben 40 personas y le cobran $9.50 por cada una. Si gana 12% de comisión por ventas, ¿cuánto le debe vender a estas 40 personas

a) para no perder ni ganar;

b) para obtener una ganancia de $500?

53. Medallas olímpicas En las Olimpiadas de verano de 2004, realizadas en Atenas, Grecia, Estados Unidos, China, Rusia, Australia y Alemania ganaron un total de 355 medallas (oro, plata y bronce). Australia ganó 1 medalla más que Alemania, Rusia ganó 4 menos que el doble del número de medallas que ganó Alemania, China ganó 15 medallas más que Alemania. Y por último, Estados Unidos ganó 7 más que el doble del número de medallas que ganó Alemania. Determine el número de medallas ganadas por Estados Unidos, China, Rusia, Australia y Alemania en los juegos Olímpicos de 2004.

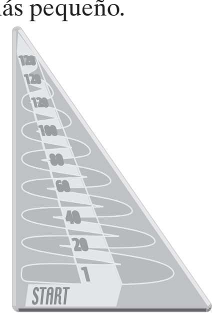
Fuente: athens2004.com

54. **Calificación de exámenes** En un reciente examen, en un grupo de álgebra intermedia, 34 estudiantes obtuvieron calificaciones de A, B, C o D. Hubo el doble de C que de D. Hubo 2 B más que D y hubo 2 más que el doble de A que de D. Determine el número de A, B, C y D en este examen.

55. **Plantas y animales** En el mundo existen aproximadamente 1,500,000 especies clasificadas como plantas, animales o insectos. Los insectos a su vez están subdivididos en escarabajos e insectos que no son escarabajos. Existen aproximadamente 100,000 más plantas que animales. Existen 290,000 más insectos no escarabajos que animales. El número de escarabajos es 140,000 menos que dos veces el número de animales. Encuentre el número de animales, plantas, insectos no escarabajos y escarabajos.

56. **Precio de gasolina** De junio de 2005 a noviembre del mismo año el costo promedio de un galón de gasolina aumentó 36%. Si el costo de un galón de gasolina el 1 de noviembre de 2005 era de \$2.69, determine el costo el 1 de junio de 2005.

57. **Perímetro de un triángulo** John está desarrollando un juego que contiene un tablero triangular. El perímetro del tablero triangular es de 36 pulgadas. Determine la longitud de los tres lados si un lado es 3 pulgadas mayor que el lado más pequeño y el tercer lado es 3 pulgadas menor que el doble de la longitud del lado más pequeño.

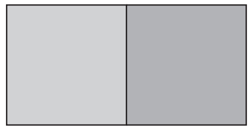


58. **Ángulos de un triángulo** Una pieza rectangular de papel se corta desde esquinas opuestas para formar un triángulo. Un ángulo del triángulo mide 12° más que el ángulo más pequeño. El tercer ángulo mide 27° menos que tres veces el ángulo más pequeño. Si la suma de los ángulos interiores de un triángulo mide 180°, determine las medidas de los tres ángulos.

59. **Jardín triangular** El perímetro de un jardín triangular es de 60 pies. Determine la longitud de los tres lados si uno es 4 pies mayor que el doble de la longitud del lado más pequeño, y el tercer lado es 4 pies menor que 3 veces la longitud del lado más pequeño.

60. **Barandal de escalera** Un barandal de escalera tiene un diseño con triángulos. En uno de los triángulos uno de los ángulos mide 20° menos que el doble del ángulo menor. El tercer ángulo mide 25° más que el doble del ángulo menor. Determine las medidas de los tres ángulos.

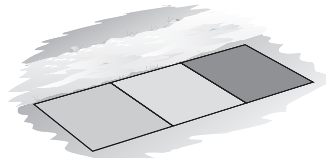
61. **Dimensiones de una cerca** Greg Middleton, un arquitecto que diseña jardines, desea poner una cerca en dos áreas iguales como se ilustra en la figura. Si ambas áreas son cuadradas y la longitud total de la cerca utilizada es de 91 metros, encuentre las dimensiones de cada cuadro.



62. **Arenero** Edie Hall planea construir un arenero rectangular para sus hijos. Desea que el largo sea de 3 pies más que su ancho. Encuentre el largo y ancho del arenero si sólo dispone de 22 pies de madera para formar el armazón. Utilice $P = 2l + 2w$.

63. **Dimensiones de un estante** Eric Krassow desea construir un estante con cuatro repisas (incluyendo la parte superior) como se muestra en la figura. El ancho del estante será 3 pies mayor que la altura. Si sólo hay disponibles 30 pies de madera para construir el estante, ¿qué dimensiones tendrá el estante?

64. **Dimensiones de una cerca** Collete Siever desea cercar tres áreas rectangulares junto a un río, como ilustra la figura. Cada rectángulo tendrá las mismas dimensiones, y la longitud de cada rectángulo será 1 metro mayor que su ancho (a lo largo del río). Determine la longitud y ancho de cada rectángulo si la cantidad total de cerca utilizada es de 114 metros.



65. **Reducción de precio** Durante la primera semana de ofertas por liquidación, el almacén general Sam reduce todos sus precios en un 10%. En la segunda semana de ofertas, Sam reduce todos sus artículos en 5 dólares adicionales. Si Sivle Yelserp compró una calculadora por \$49 durante la segunda semana de oferta, encuentre el precio original de la calculadora.

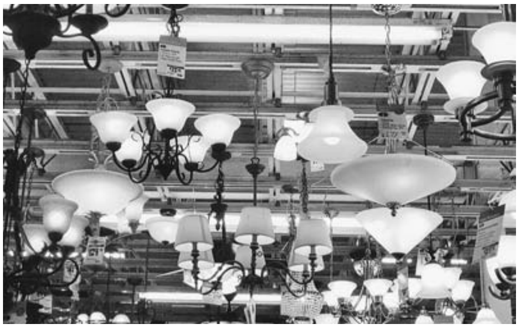
66. **División de una granja** La granja de Deborah Schmidt está dividida en tres regiones. El área de una región es dos veces más larga que el área de la región más pequeña, y el área de la tercera región es 4 acres menor que tres veces el área de la región más pequeña. Si el total de acres de la granja es de 512, encuentre el área de cada una de las tres regiones.

67. Venta de pinturas J.P. Richardson vende cada una de sus pinturas por \$500. La galería donde expone su trabajo le cobra \$1350 al mes, más una comisión del 10% sobre las ventas. ¿Cuántas pinturas debe vender J.P. al mes para no ganar ni perder?

68. Comparación de venta de juguetes Kristen Hodge va a comprar una bicicleta para su sobrina y sabe que Toys "R" US y Wal-Mart venden la bicicleta en el mismo precio. El 26 de diciembre, Toy "R" US tiene la bicicleta en venta con 37% de descuento del precio original y Wal-Mart tiene la bicicleta en venta con \$50 de ahorro sobre el precio original. Después de visitar ambas tiendas, Kristen descubre que los precios de venta siguen siendo iguales.

a) Determine el precio original de la bicicleta.
b) Determine el precio de venta de la bicicleta.

69. Bulbos incandescentes El costo de los bulbos incandescentes para utilizarlos durante un periodo de 9750 horas es de \$9.75. El costo de la energía para los bulbos incandescentes durante este periodo es de \$73. El costo de un bulbo fluorescente equivalente que dura aproximadamente 9750 horas es de \$20. Utilizando un bulbo fluorescente en vez de uno incandescente por 9750 horas, el ahorro total del precio de adquisición más el costo de la energía es de \$46.75. ¿Cuál es el costo de la energía utilizando el bulbo fluorescente durante este periodo?



70. Costo de una cena Los cinco miembros de la familia Newton van a cenar con tres miembros de la familia Lee. Antes de la cena, deciden que los Newton pagarán $\frac{5}{8}$ de la cuenta (sin la propina) y los Lee pagarán $\frac{3}{8}$ más toda la propina del 15%. Si la cuenta total, incluido el 15% de propina, es de \$184.60, ¿cuánto pagará cada familia?

71. Obtener una A Para encontrar el promedio de un conjunto de calificaciones de exámenes, dividimos la suma de las calificaciones entre el número de calificaciones. En sus primeros exámenes de álgebra, las calificaciones de Paula West fueron 88, 92, 97 y 96.

a) Escriba una ecuación que pueda usarse para determinar la calificación que Paula necesita obtener en su quinto examen para tener un promedio de 90.

b) Explique cómo determinó su ecuación.

c) Resuelva la ecuación y determine la calificación.

72. Promedio en examen de física Las calificaciones de Francis Timoney en cinco exámenes de física fueron 70, 83, 97, 84 y 74.

a) Si el examen final contará el doble que cada examen, ¿qué calificación necesita Francis en el examen final para tener 80 de promedio?

b) Si la calificación más alta posible en el examen final es 100, ¿es posible para Philip obtener 90 de promedio? Explique.

73. a) Construya su propio problema realista que incluya porcentajes. Represente este problema en palabras como una ecuación.

b) Resuelva la ecuación y responda el problema.

74. a) Construya un problema realista en palabras que incluya dinero. Represente este problema como una ecuación.

b) Resuelva la ecuación y responda el problema.

Retos

75. Renta de un camión La agencia de renta de camiones Elmers cobra \$28 por día más \$0.15 por milla. Si Martina Estaban rentó un pequeño camión por tres días y el cobro total fue de \$121.68, incluyendo 4% de impuestos, ¿cuántas millas condujo?

76. Mercado de dinero El lunes Sophia Murkovic compró acciones en un fondo del mercado de dinero. El martes el valor de las acciones subió 5%, y el miércoles el valor de las acciones cayó 5%. ¿Cuánto pagó Sophia el lunes por las acciones, si las vendió el jueves por \$59.85?

Actividad en grupo

Analice y responda el ejercicio 77 en grupo.

77. a) Cada miembro del grupo selecciona un número. Luego lo multiplica por 2, le agrega 33, resta 13, divide entre 2 y resta el número con que inició. Registre cada respuesta.

b) Ahora compare las respuestas. Si no obtuvieron la misma respuesta, verifique cada uno el trabajo de otro.

c) Como grupo, expliquen por qué este procedimiento tiene como resultado una respuesta de 10 para cualquier número real n seleccionado.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] *Evalúe.*

78. $2 + \left|-\frac{3}{5}\right|$

79. $-6.4 - (-3.7)$

80. $\left|-\frac{5}{8}\right| \div |-4|$

81. $5 - |-3| - |12|$

[1.5] **82.** Simplifique $(2x^4y^{-6})^{-3}$.

Examen de mitad de capítulo: 2.1-2.3

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en donde se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

1. Proporcione el grado de $6x^5y^7$.

Simplifique cada expresión.

2. $3x^2 + 7x - 9x + 2x^2 - 11$

3. $2(a - 1.3) + 4(1.1a - 6) + 17$

Resuelva cada ecuación.

4. $7x - 9 = 5x - 21$

5. $\frac{3}{4}y + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}y - \frac{5}{4}$

6. $3p - 2(p + 6) = 4(p + 1) - 5$

7. $0.6(a - 3) - 3(0.4a + 2) = -0.2(5a + 9) - 4$

Determine el conjunto solución para cada ecuación. Luego indique si la ecuación es condicional, una identidad o una contradicción.

8. $4x + 15 - 9x = -7(x - 2) + 2x + 1$

9. $-3(3x + 1) = -[4x + (6x - 5)] + x + 7$

10. Evalúe $A = \frac{1}{2}hb$, donde $h = 10$ y $b = 16$.

11. Evalúe $R_T = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$, donde $R_1 = 100$ y $R_2 = 50$.

12. Despeje x de $y = 7x + 13$.

13. Despeje x_3 de $A = \frac{2x_1 + x_2 + x_3}{n}$.

14. Robert invirtió \$700 en un certificado de depósito que genera 6% de interés compuesto cada trimestre. ¿Cuál será el valor del certificado al cabo de 5 años?

Resuelva cada ejercicio.

15. Los ángulos A y B son ángulos complementarios. Determine las medidas de los ángulos A y B, si el ángulo A es 6° más que el doble del ángulo B.

16. El costo de rentar una escalera es \$15 más \$1.75 por día. ¿Cuántos días Tom Lang rentó la escalera, si el costo total fue \$32.50?

17. El perímetro de un triángulo es 100 pies. El lado más largo es cuatro veces la longitud del lado más corto y el otro lado es 10 pies más largo que el lado más corto. Determine las longitudes de los tres lados del triángulo.

18. Tien compró un par de zapatos en \$36.00. Con impuestos, el costo fue de \$37.62. Determine la tasa de impuestos.

19. La población de un pequeño pueblo aumenta en 52 personas por mes. Si la población actual es de 5693 personas, ¿hace cuántos meses la población fue de 3613 personas?

20. Cuando le pidieron a Mary Dunwell que resolviera la ecuación $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$, aseguró que para eliminar fracciones, el lado izquierdo debería multiplicarse por 6 y el derecho debería multiplicarse por 8. Esto es incorrecto. ¿Por qué esto es incorrecto? Explique su respuesta. ¿Cuál es el número *único* por el que debe multiplicarse *toda* la ecuación para eliminar las fracciones? Resuelva la ecuación de forma correcta.

2.4 Problemas adicionales de aplicación

1 Resolver problemas de movimiento.

2 Resolver problemas de mezclas.

En esta sección analizaremos dos tipos adicionales de problemas de aplicación: problemas de movimiento y de mezcla. Los hemos colocado en la misma sección porque se resuelven utilizando procedimientos similares.

1 Resolver problemas de movimiento

Una fórmula con muchas aplicaciones útiles es

Fórmula de movimiento

cantidad = velocidad · tiempo

La "cantidad" en esta fórmula puede ser una medida de muchas cantidades diferentes, dependiendo de la tasa (o velocidad). Por ejemplo, si la tasa se mide en *distancia* por unidad de tiempo la cantidad será la distancia. Si la tasa se mide en *volumen* por unidad de tiempo, la cantidad será volumen, etcétera.

Cuando apliquemos esta fórmula debemos estar seguros de que las unidades sean consistentes. Por ejemplo, cuando hablamos acerca de una copiadora, si la velocidad está dada en copias por *minuto*, el tiempo debe estar dado en *minutos*. Los problemas que pueden resolverse usando esta fórmula se denominan **problemas de movimiento** ya que ellos incluyen movimiento, a una tasa constante, durante cierto periodo.

Una enfermera que aplica una inyección intravenosa a un paciente puede utilizar esta fórmula para determinar la tasa de goteo del fluido que se está inyectando. Una compañía de perforación de petróleo o de agua puede emplear esta fórmula para determinar la cantidad de tiempo necesario para alcanzar su meta.

Cuando la fórmula de movimiento se utiliza para calcular distancia, la palabra *cantidad* es reemplazada con la palabra *distancia* y la fórmula se denomina **fórmula de distancia**.

Fórmula de distancia

La fórmula de distancia es

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}$$

$$\text{o } d = rt$$

Cuando un problema de movimiento tiene dos velocidades diferentes, con frecuencia es útil poner la información en una tabla para ayudar a analizar el problema.

EJEMPLO 1 **Barcos en el mar** El portaviones USS *John F Kennedy* y el submarino nuclear USS *Memphis* partieron al mismo tiempo de la estación naval Puget Sound dirigiéndose al mismo destino en el Océano Índico. El portaviones viaja a su velocidad máxima de 34.5 millas por hora y el submarino viaja sumergido a su velocidad máxima de 20.2 millas por hora. El portaviones y el submarino viajan a esas velocidades hasta que están a 100 millas de separación. ¿Cuánto tiempo pasará para que el portaviones y el submarino estén a 100 millas de separación? (Vea la **figura 2.6**)

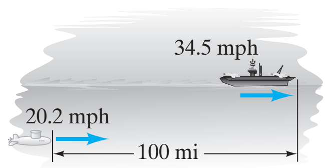


FIGURA 2.6

Solución **Entienda** Deseamos determinar cuánto tiempo pasa para que la diferencia de sus distancias sea 100 millas. Para resolver este problema, usaremos la fórmula de distancia, $d = rt$. Cuando se introdujo por primera vez el procedimiento para resolver problemas, indicamos que para ayudar a entender un problema podría ser útil poner la información en una tabla, y eso es lo que haremos ahora.

Sea t = tiempo.

	Velocidad	Tiempo	Distancia
Portaviones	34.5	t	$34.5t$
Submarino	20.2	t	$20.2t$

Traduzca La diferencia entre sus distancias es de 100 millas. Por lo que,

$$\text{distancia del portaviones} - \text{distancia del submarino} = 100$$

$$34.5t \quad - \quad 20.2t = 100$$

Realice los cálculos

$$14.3t = 100$$

$$t \approx 6.99$$

Responda El portaviones y el submarino estarán a 100 millas de separados en alrededor de 7 horas.

Ahora resuelva el ejercicio 3

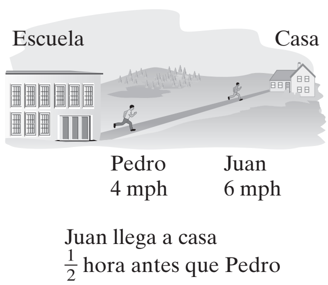


FIGURA 2.7

EJEMPLO 2 **Corriendo a casa** Para estar en forma para la próxima carrera de temporada, Juan y Pedro Santiago corren a casa después de la escuela. Juan corre a una velocidad de 6 mph y Pedro corre a 4 mph. Cuando dejan la misma escuela al mismo tiempo, Juan llega a casa $\frac{1}{2}$ hora antes que Pedro (vea la **figura 2.7**).

a) ¿Cuánto tiempo le toma a Pedro llegar a casa?

b) ¿A qué distancia viven Juan y Pedro de la escuela?

Solución **a)** **Entienda** Ambos muchachos correrán la misma distancia; sin embargo, como Juan corre más rápido que Pedro, el tiempo de Juan será menor que el de Pedro por $\frac{1}{2}$ hora.

$$\text{Sea } t = \text{tiempo de Pedro para llegar a casa.}$$
$$\text{Entonces } t - \frac{1}{2} = \text{tiempo de Juan para llegar a casa.}$$

Corredor	Velocidad	Tiempo	Distancia
Pedro	4	t	$4t$
Juan	6	$t - \frac{1}{2}$	$6\left(t - \frac{1}{2}\right)$

Traduzca Cuando los muchachos están en casa ambos habrán corrido la misma distancia desde la escuela. De modo que

$$\text{distancia de Pedro} = \text{distancia de Juan}$$
$$4t = 6\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} 4t &= 6t - 3 \\ -2t &= -3 \\ t &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Responda A Pedro le tomará $1\frac{1}{2}$ horas llegar a casa.

b) La distancia puede determinarse usando la velocidad y el tiempo de Pedro o de Juan. Multiplicaremos la velocidad de Pedro por el tiempo de Pedro para determinar la distancia.

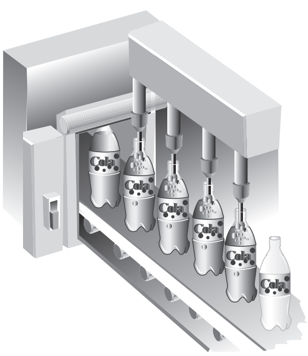
$$d = rt = 4\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{12}{2} = 6 \text{ millas}$$

Por lo tanto, Juan y Pedro viven a 6 millas de su escuela.

Ahora resuelva el ejercicio 9

En el ejemplo 2, ¿la respuesta habría cambiado si hubiésemos representado con t el tiempo que Juan corre, en lugar del tiempo que corre Pedro? Inténtelo y vea.

EJEMPLO 3 **Producción de refrescos** Una máquina llena botellas de Coca-Cola y coloca las tapas. La máquina puede trabajar a dos velocidades diferentes. A la más rápida la máquina llena y coloca las tapas a 600 botellas más por hora que a la velocidad más lenta. La máquina se enciende durante 4.8 horas a la velocidad más lenta, luego se cambia a la velocidad más rápida durante otras 3.2 horas. Durante estas 8 horas se llenaron y colocaron las tapas de un total de 25,290 botellas. Determine ambas velocidades.



Solución **Entienda** Este problema utiliza un número de botellas, una cantidad, en lugar de una distancia; sin embargo, el problema se resuelve de una manera similar. Utilizaremos la fórmula cantidad = velocidad · tiempo. Se nos da que hay dos velocidades diferentes y nos piden determinar estas dos velocidades. Usaremos el hecho de que la cantidad de botellas llenadas a la velocidad más lenta más la cantidad de llenadas a la velocidad más rápida es igual a la cantidad total de llenadas.

$$\text{Sea } r = \text{velocidad más lenta.}$$
$$\text{Entonces } r + 600 = \text{velocidad más rápida.}$$

	Velocidad	Tiempo	Cantidad
Velocidad más lenta	r	4.8	$4.8r$
Velocidad más rápida	$r + 600$	3.2	$3.2(r + 600)$

Traduzca cantidad de llenadas a la velocidad más lenta + cantidad de llenadas a la velocidad más rápida = 25,290

$$4.8r \quad + \quad 3.2(r + 600) \quad = 25.920$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} 4.8r + 3.2r + 1920 &= 25{,}920 \\ 8r + 1920 &= 25{,}920 \\ 8r &= 24{,}000 \\ r &= 3000 \end{aligned}$$

Responda La velocidad más lenta es 3000 botellas por hora. La velocidad más rápida es $r + 600$ o $3000 + 600 = 3600$ botellas por hora.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 11**

2 Resolver problemas de mezclas

Cualquier problema en el que dos o más cantidades se combinan para producir una cantidad diferente, o donde una cantidad simple es separada en dos o más cantidades diferentes, puede considerarse un **problema de mezcla**. Como cuando trabajamos con problemas de movimiento, usaremos tablas para ayudar a organizar la información. Los ejemplos 4 y 5 son problemas de mezcla que incluyen dinero.

EJEMPLO 4 ▸ **Dos inversiones** Bettie Truitt vendió su bote por $15,000, y prestó una parte de este dinero a su amiga Kathy Testone. El préstamo fue por 1 año con una tasa de interés simple de 4.5%. Bettie puso el resto en una cuenta en el mercado de valores en su unión de crédito que producía 3.75% de interés simple. Un año más tarde, mientras trabajaba con sus impuestos, Bettie determinó que había ganado un total de $637.50 de las dos inversiones, pero no podía recordar cuánto dinero le había prestado a Kathy. Determine la cantidad que Bettie le prestó a Kathy.

Solución **Entienda y traduzca** Para resolver este problema usaremos la fórmula de interés simple, interés = capital · tasa · tiempo. Sabemos que parte de la inversión produjo 4.5% y el resto 3.75% de interés simple; se nos pide determinar la cantidad que Bettie prestó a Kathy.

Sea p = cantidad prestada a Kathy al 4.5%.
Entonces $15{,}000 - p$ = cantidad invertida al 3.75%.

Observe que la suma de las dos cantidades es igual a la cantidad total invertida, $15,000. Determinaremos la cantidad prestada a Kathy con la ayuda de una tabla

Inversión	Capital	Tasa	Tiempo	Interés
Préstamo a Kathy	p	0.045	1	$0.045p$
Mercado de valores	$15{,}000 - p$	0.0375	1	$0.0375(15{,}000 - p)$

Como el interés total cobrado es $637.50, escribimos:

interés del préstamo a 4.5% + interés de la cuenta de 3.75% = interés total

$$0.045p \quad + \quad 0.0375(15{,}000 - p) \quad = 637.50$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} 0.045p + 0.0375(15{,}000 - p) &= 637.50 \\ 0.045p + 562.50 - 0.0375p &= 637.50 \\ 0.0075p + 562.50 &= 637.50 \\ 0.0075p &= 75 \\ p &= 10{,}000 \end{aligned}$$

Responda Por lo tanto, el préstamo fue de $10,000 y $15,000 − p o $15,000 − $10,000 = $5000 que fue lo invertido en la cuenta del mercado de valores.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 15

EJEMPLO 5 ▶ **Ventas en un puesto de hot dogs** El puesto de hot dogs de Matt en Chicago vende hot dogs por $2.00 cada uno y tacos de bistec por $2.25 cada uno. Si la venta total del día fue de $585.50 y se vendieron 278 productos, ¿cuántos de cada uno se vendieron?

Solución **Entienda y traduzca** Se nos pide determinar el número de hot dogs y de tacos de bistec vendidos.

Sea x = número de hot dogs vendidos.

Entonces $278 - x$ = número de tacos de bistec vendidos.

Producto	Costo del producto	Número de productos	Ventas totales
Hot dogs	2.00	x	$2.00x$
Tacos de bistec	2.25	$278 - x$	$2.25(278 - x)$

$$\begin{array}{ccccc} \text{ventas totales de hot dogs} & + & \text{ventas totales de tacos de bistec} & = & \text{ventas totales} \\ 2.00x & + & 2.25(278 - x) & = & 585.50 \end{array}$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} 2.00x + 625.50 - 2.25x &= 585.50 \\ -0.25x + 625.50 &= 585.50 \\ -0.25x &= -40 \\ x = \frac{-40}{-0.25} &= 160 \end{aligned}$$

Responda Por lo tanto, se vendieron 160 hot dogs y $278 - 160 = 118$ tacos de bistec.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 17

En el ejemplo 5 podríamos haber multiplicado ambos lados de la ecuación por 100 para eliminar los números decimales y luego resolver la ecuación.

El ejemplo 6 es un problema de mezcla que incluye la mezcla de dos soluciones.

EJEMPLO 6 ▶ **Mezcla de medicina** George Devenney, un químico, tiene soluciones de citrato de litio al 6% y al 15%. Desea obtener 0.5 litros de una solución de citrato de litio al 8%. ¿Qué cantidad de cada solución debe utilizar en la mezcla?

Solución **Entienda y traduzca** Se nos pide determinar la cantidad de cada solución mezclada.

Sea x = número de litros de solución al 6%.

Entonces $0.5 - x$ = número de litros de solución al 15%.

La cantidad de citrato de litio en una solución se determina multiplicando el porcentaje de citrato de litio en la solución por el volumen de la solución. Haremos un bosquejo del problema (vea la **figura 2.8**) y luego construiremos una tabla.

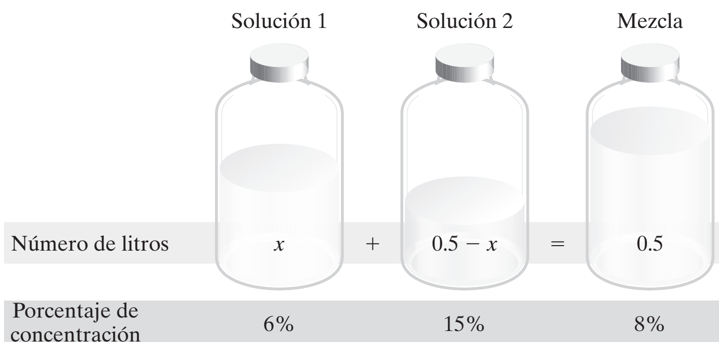


FIGURA 2.8

Solución	Concentración de la Solución	Número de litros	Cantidad de citrato de litio
1	0.06	x	$0.06x$
2	0.15	$0.5 - x$	$0.15(0.5 - x)$
Mezcla	0.08	0.5	$0.08(0.5)$

$$\left(\begin{array}{c}\text{cantidad de}\\ \text{citrato de litio en la}\\ \text{solución al 6\%}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{cantidad de}\\ \text{citrato de litio en la}\\ \text{solución al 15\%}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{cantidad de citrato}\\ \text{de litio en la mezcla}\end{array}\right)$$

$$0.06x \quad + \quad 0.15(0.5 - x) \quad = \quad 0.08(0.5)$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} 0.06x + 0.15(0.5 - x) &= 0.08(0.5) \\ 0.06x + 0.075 - 0.15x &= 0.04 \\ 0.075 - 0.09x &= 0.04 \\ -0.09x &= -0.035 \\ x &= \frac{-0.035}{-0.09} \approx 0.39 \quad \left(\begin{array}{c}\text{al centésimo}\\ \text{más cercano}\end{array}\right) \end{aligned}$$

George debe mezclar 0.39 litros de la solución al 6% y $0.5 - 0.39 = 0.11$ litros de la solución al 15% para obtener 0.5 litros de una solución al 8%.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 21**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.4

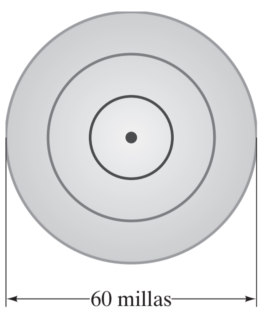
MathXL® MyMathLab

Práctica de habilidades y resolución de problemas

En los ejercicios del 1 al 14, escriba una ecuación que pueda usarse para resolver el problema de movimiento. Resuelva la ecuación y responda la pregunta que se hace.

1. **Una excursión a las Rocosas** Dos amigos, Don O'Neal y Judy McElroy, van de excursión a las Montañas Rocosas; mientras caminan cruzan el Lago Bear y se sorprenden de la distancia que hay alrededor del lago y deciden determinarla. Don sabe que él camina a 5 mph y Judy sabe que ella camina a 4.5 mph. Si comenzaron a caminar al mismo tiempo en direcciones opuestas alrededor del lago y se encontraron después de 1.2 horas, ¿cuál es la distancia alrededor del lago?

2. **Ondas de choque de terremotos** Un terremoto ocurre en un desierto de California. Las ondas de choque viajan alejándose en una trayectoria circular, similar a cuando se lanza una piedra a un lago. Si la onda-p (una clase de onda de choque) viaja a 2.4 millas por segundo, ¿cuánto tardaría la onda en tener un diámetro de 60 millas? (Vea la figura.).



3. **Vuelo en globo** Cada año en Albuquerque, Nuevo México, hay un festival de globos de aire caliente, durante el cual la gente puede pasear en globos de aire caliente. Suponga que parte de la familia Díaz va en un globo y los otros miembros de la familia van en otro globo. Como vuelan a diferentes alturas y llevan diferentes pesos, un globo viaja a 14 millas por hora y el segundo globo viaja a 11 millas por hora en la misma dirección. ¿En cuántas horas estarán a 12 millas de distancia entre sí?

4. **Bicicletas** Juan y Frank se encuentran en la misma pista para bicicletas, a 39.15 millas de distancia uno de otro. Conducen sus bicicletas uno hacia el otro, hasta que se encuentran. Frank inicia el pedaleo $1\frac{1}{2}$ horas antes que Paul. Paul conduce 1.8 millas por hora más rápido que Frank. Si se encuentran 3 horas después de que Paul inició el viaje, determine la velocidad de cada ciclista.

5. **Maizal** Rodney Joseph y Dennis Clarence están recolectando (cosechando) maíz de un campo que mide 1.5 millas de largo. Rodney empieza a recolectar a una velocidad de 0.15 millas por hora. Dennis empieza del lado opuesto al de Rodney y recolecta a 0.10 millas por hora. Si los dos empiezan al mismo tiempo y continúan trabajando a esas velocidades, ¿en cuánto tiempo se encontrarán Rodney y Dennis?

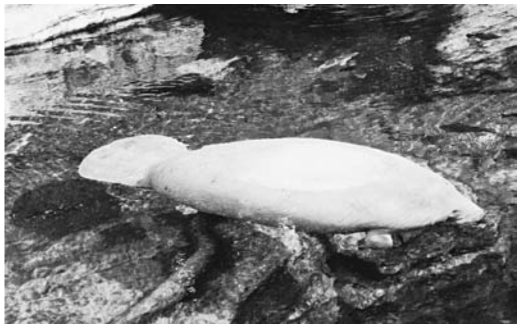
6. **Fotocopias** Para sacar un gran número de copias, Ruth Cardiff utiliza dos fotocopiadoras. Una puede producir 42 copias por minuto; la otra puede producir 52. Si Ruth empieza al mismo tiempo a sacar copias en ambas máquinas, ¿cuánto tiempo tomará para que las dos fotocopiadoras produzcan un total de 1316 copias?

7. **Carrera de beneficencia** El club femenino Alfa Delta Pi consigue dinero para la casa de Ronald Mc Donald, haciendo una carrera anual llamada "Rueda por Ronald" en el Colegio Station, Texas. Mary Lou Baker conduce una bicicleta y viaja a dos veces la velocidad de Wayne Siegert, quien va en patines. Mary y Wayne empiezan la carrera al mismo tiempo; después de 3 horas, Laura va 18 millas adelante de Wayne.
   a) ¿Cuál es la velocidad de Wayne?
   b) ¿Cuál es la velocidad de Mary?

8. **Paseo por el cañón** Jennifer Moyers camina hacia abajo del cañón Bryce, acampa en la noche y regresa al día siguiente. La velocidad que lleva al caminar hacia abajo promedia 3.5 millas por hora y en su viaje de regreso promedia 2.1 millas por hora. Si tardó un total de 16 horas caminando, encuentre
   a) ¿cuánto tiempo le llevó alcanzar la parte inferior del cañón?
   b) la distancia total recorrida.

9. **Alcance** Luis Nunez empieza una larga caminata a 4 mph. Después de 45 minutos de haber partido, su esposa Kristin se da cuenta que Luis olvidó su cartera. Su esposa aborda una bicicleta y empieza a correr a 24 mph por el mismo camino que Luis tomó.
   a) ¿Cuánto tiempo le tomará a Kristin alcanzar a Luis?
   b) ¿Qué tan lejos de su casa alcanzará Kristin a Luis?

10. **Snooty el manatí** En el museo del sur de Florida en Bradenton, vive un manatí llamado Snooty en un tanque de 60,000 galones. Una vez al año le cambian el agua y lo vuelven a llenar. El tanque tiene dos válvulas que tienen la misma velocidad de flujo. Para llenar el tanque, la primera válvula se abre durante un periodo de 17 horas; durante este periodo se abre la segunda válvula durante 7 horas. Determine la velocidad de llenado en galones por hora de las 2 válvulas.



11. **Paquete de espagueti** Dos máquinas empacan espagueti en cajas. La máquina más pequeña puede empacar 400 cajas por hora y la máquina grande puede empacar 600 cajas por hora. Si la máquina mayor se enciende 2 horas antes que la menor, ¿cuánto tiempo después de haberse encendido la menor se habrán empacado 15,000 cajas de espagueti?

12. **Carreras de caracoles** Como parte de su proyecto de ciencias en preescolar, en la clase de la profesora Joy Pribble se lleva a cabo una carrera de caracoles. El primer caracol se llama Zippy, el cual se mueve a una velocidad de 5 pulgadas por hora. El segundo caracol, Lightning, se mueve a 4.5 pulgadas por hora. Si los caracoles siguen un camino recto y si Zippy termina la carrera 0.25 horas antes que Lightning,
   a) determine el tiempo que le tomó a Lightning terminar la carrera.
   b) determine el tiempo que le tomó a Zippy terminar la carrera.
   c) ¿cuál fue la distancia que recorrieron los 2 caracoles?

13. **Viaje al aeropuerto** Linda Smoke inicia su camino a Pizza Hut a una velocidad de 35 millas por *hora*. Quince *minutos* después, su esposo descubre que ella olvidó su cartera con el dinero para pagar las pizzas y trató de alcanzarla. Si viaja a 50 millas por hora, ¿cuánto tiempo le tomará al esposo alcanzar a Linda?

14. **Alcance de radio comunicadores** Un equipo de radio comunicadores RS446 tiene un alcance de alrededor de dos millas. Alice Burstein y Mary Kalscheur inician una caminata a lo largo de un sendero natural en direcciones opuestas, llevando sus radio comunicadores. Si Alice camina a una velocidad de 3.8 mph y Mary camina a una velocidad de 4.2 mph, ¿cuánto tiempo tardarán en estar fuera del alcance de los radio localizadores?

En los ejercicios del 15 al 28, plantee una ecuación que pueda usarse para resolver el problema de mezcla. Resuelva cada ecuación y responda las preguntas.

15. **Dos inversiones** Bill Palow invirtió $30,000 en dos cuentas diferentes, una paga 3% y la otra 4.1% de interés simple anual. Si Bill ganó un total de $1091.73 de las dos inversiones, ¿cuánto invirtió en cada cuenta?

16. **Dos inversiones** Terry Edwards invirtió $3000 durante dos años, parte al 3.5% de interés simple y el resto al 2.5% de interés simple. Al cabo de dos años obtuvo un interés total de $190. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

17. **Mezcla de café** Joan Smith es la propietaria de una cafetería Starbucks. Vende café Kona en $6.20 por libra y un café amaretto en $5.80 por libra. Descubre que mezclando estos dos tipos crea un café que se vende bien. Si utiliza 18 libras de amaretto en la mezcla y desea vender la mezcla en $6.10 por

libra, ¿cuántas libras del café Kona debe mezclar con el café amaretto?

18. Mezcla de nueces J. B. Davis posee una tienda de nueces. Vende almendras a \$6 por libra y nueces a \$5.20 por libra y recibe un pedido especial de un cliente que quiere comprar 30 libras de una mezcla de almendras y nueces en \$165. Determine cuántas libras de almendras y de nueces deben mezclarse.

19. Inversión de una herencia Don Beville ha heredado \$250,000 y desea invertir su herencia en acciones de Johnson & Johnson y en acciones de AOL Time Warner. Desea comprar el doble de acciones de AOL que de acciones de Johnson & Johnson. Recientemente, el precio de Johnson & Johnson fue de \$56.88 por acción y el de AOL fue de \$27.36 por acción.

a) Si Don desea comprar acciones en bloques de 100, ¿cuántas acciones de cada compañía puede comprar?

b) ¿Cuánto dinero le quedaría después de realizar la compra?

20. Soluciones de ácido sulfúrico Read Wickham, un maestro de química, necesita una solución de ácido sulfúrico al 5% para el próximo laboratorio de química. Cuando revisa el almacén, se da cuenta que sólo tiene 8 onzas de una solución de ácido sulfúrico al 25%. No hay suficiente tiempo para solicitar más, de modo que decide hacer una solución de ácido sulfúrico al 5%, agregando de manera muy cuidadosa agua a la solución al 25%. Determine cuánta agua debe agregar Read a la solución al 25% para reducirla a una solución al 5%.

21. Soluciones de vinagre Por lo común, el vinagre blanco destilado que se vende en los supermercados tiene un nivel de 5% de acidez. Para preparar un platillo (sauerbraten), la Chef Judy Ackermary marina ternera toda la noche en un vinagre destilado especial al 8% que ella creó. Para crear la solución al 8%, mezcla una solución de vinagre al 5% regular con una solución de vinagre al 12% que compra por correo. ¿Cuántas onzas del vinagre al 12% debe agregar a 40 onzas del vinagre al 5% para obtener una solución de vinagre al 8%?

22. Solución de peróxido de hidrógeno David Robertson trabaja como ingeniero químico para la compañía Peróxido US. Tiene 2500 galones de solución de peróxido de hidrógeno de clase comercial, que contiene 60% de peróxido de hidrógeno puro. ¿Cuánta agua destilada (que tiene 0% de peróxido de hidrógeno) necesitará agregar David a esta solución para crear una nueva solución que tenga 25% de peróxido de hidrógeno puro?

23. Salsa de rábanos Sally Finkelstein tiene una receta que requiere salsa de rábanos que tenga 45% de rábanos puros. En la tienda encuentra una salsa de rábanos que tiene 30% de rábanos puros y otra con 80%. ¿Cuántas cucharadas de cada una de estas salsas debe mezclar Jennifer para obtener 4 cucharadas de salsa de rábano con 45% de rábanos puros?

24. Mezcla de semillas de césped El vivero Pearlman vende dos tipos de semillas de césped a granel. La semilla de baja calidad tiene una tasa de germinación de 76%, pero la tasa de germinación de la semilla de alta calidad no se conoce. Se mezclan siete libras de la semilla de alta calidad con 14 libras de semilla de baja calidad. Si un análisis posterior de la mezcla revela que la tasa de germinación de la mezcla fue de 80%, ¿cuál es la tasa de germinación de la semilla de alta calidad?

25. Soluciones ácidas Hay dos soluciones ácidas disponibles para un químico. Una es una solución al 20% de ácido sulfúrico, pero la etiqueta que indica la concentración de la otra solución de ácido sulfúrico está perdida. Se mezclan 200 ml de la solución al 20% y 100 ml de la solución con la concentración desconocida. Después de un análisis, se determinó que la mezcla tiene una concentración del 25% de ácido sulfúrico. Determine la concentración de la solución sin etiqueta.

26. Estrategia de impuestos Algunos estados permiten que un matrimonio presente su declaración de impuestos estatales de manera individual aunque presenten sus ingresos federales juntos. Por lo regular es ventajoso para los contribuyentes hacer esto cuando marido y mujer trabajan. Tendrán la menor cantidad de impuestos (o la mayor devolución) cuando los ingresos gravables de esposo y esposa sean iguales.

El ingreso gravable del señor Juenger en 2005 fue de \$28,200 y el de la señora de Juenger fue de \$32,450 en ese año. Las deducciones totales de impuestos de los Juenger para ese año fueron de \$6400. Esta deducción puede dividirse entre el señor y la señora Juenger como ellos lo deseen. ¿Cómo deben dividir los \$6400 entre ellos para que tengan el mismo ingreso gravable?

27. Mezcla de dulces Un supermercado vende dos tipos de dulces, rebanadas de naranja y hojas de fresa. Las rebanadas de naranja cuestan \$1.29 cada libra y las hojas de fresa tienen un costo de \$1.79 por libra. ¿Cuántas libras de cada una deben mezclarse para obtener una mezcla de 12 libras que se venda en \$17.48?

28. Niveles de octano El nivel de octano de una gasolina indica el porcentaje de octano puro en la gasolina. Por ejemplo, la mayoría de las gasolinas comunes tienen un nivel de octanos de 87, lo que significa que esta gasolina es 87% de octanos (y 13% de algún otro combustible que no es octano, como pentano). Blake De Young es propietario de una estación de gasolina y tiene 850 galones de gasolina con 87 octanos. ¿Cuántos galones de gasolina con 93 octanos debe mezclar con la gasolina de 87 octanos para obtener gasolina con 89 octanos?

En los ejercicios del 29 al 46, escriba una ecuación que pueda usarse para resolver el problema de mezcla o de movimiento. Resuelva cada ecuación y responda la pregunta.

29. Ruta 66 La famosa carretera Ruta 66 en Estados Unidos, comunica a Chicago con los Ángeles y tiene una extensión de 2448 millas. Julie Turley parte de Chicago y conduce a una velocidad promedio de 45 mph por la Ruta 66 hacia Los Ángeles. Al mismo tiempo, Kamilia Nemri inicia en Los Ángeles y conduce por la Ruta 66 a una velocidad de 50 mph hacia Chicago. Si Judy y Kamilia mantienen estas velocidades promedio, ¿cuánto tardarán en encontrarse?

30. Reunión en un restaurante Mike Mears y Scott Greenhalgh viven a 110 millas uno del otro. Ellos se reúnen con frecuencia para comer en un restaurante que está entre las casas de Mike y de Scott. Partiendo al mismo tiempo de sus respectivas casas, Mike tarda 1 hora y 45 minutos en llegar al restaurante y Scott tarda 1 hora y 15 minutos. Si cada uno de ellos maneja a la misma velocidad,

a) determine sus velocidades.

b) ¿A qué distancia de la casa de Scott está el restaurante?

31. Velocidades de bombas de agua Gary Egan necesita vaciar su alberca de 15,000 galones, para resanar su superficie. Utiliza dos bombas para drenarla. Una bomba saca 10 galones de agua por minuto y la otra 20 galones por minuto. Si las bombas se encienden al mismo tiempo y permanecen encendidas hasta que la alberca esté vacía, ¿cuánto tiempo tardará en vaciarse la alberca?

32. Dos inversiones Chuy Carreon invirtió $8000 durante un año, parte al 3% y parte al 5% de interés simple. ¿Cuánto se invirtió en cada cuenta, si se recibió la misma cantidad de intereses de cada cuenta?

33. Solución anticongelante ¿Cuántos cuartos de galón de anticongelante puro debe agregar Doreen Kelly a 10 cuartos de una solución al 20% de anticongelante para obtener una solución al 50% de anticongelante?

34. Viaje a Hawai Un avión a propulsión voló de Chicago a Los Ángeles a una velocidad promedio de 500 millas por hora. Después continuó sobre el Océano Pacífico a Hawai a una velocidad promedio de 550 millas por hora. Si el viaje completo cubrió 5200 millas y la parte sobre el océano es dos veces mayor que la parte sobre tierra, ¿cuánto tiempo duró el viaje completo?

35. Reabastecimiento de un jet Un jet de la fuerza aérea realizará un largo vuelo y necesitará reabastecer combustible en pleno vuelo sobre el Océano Pacífico. Un avión de reabastecimiento que transporta combustible puede viajar mucho más lejos, pero vuela a una velocidad menor. El avión de reabastecimiento y el jet saldrán de la misma base, pero el primero partirá 2 horas antes que el jet. Éste volará a 800 mph y el otro volará a 520 millas por hora.

a) ¿Cuánto tiempo después del despegue del jet se encontrarán los aviones?

b) ¿A qué distancia de la base tendrá lugar el reabastecimiento?

36. Dos trabajos Hal Turziz trabaja en dos empleos de tiempo parcial. Uno paga $7.50 por hora y el otro $8.25 por hora. La semana anterior Hal ganó un total de $190.50 y trabajó un total de 24 horas. ¿Cuántas horas trabajó en cada empleo?

37. Venta de pinturas Joseph DeGuizman, un artista, vende pinturas grandes y pequeñas. Vende sus pinturas pequeñas por $60 y las grandes por $180. Al final de la semana determinó que el monto total por la venta de 12 pinturas fue de $1200. Determine el número de pinturas pequeñas y grandes que vendió.

38. Viaje de trabajo Vince Jansen vive a 35 millas del trabajo. Debido a una construcción, él debe manejar los primeros 15 minutos a una velocidad de 10 mph más lenta que el resto del camino. Si el viaje completo le toma 45 minutos, determine la velocidad de Vince en cada parte de su trayecto.

39. Solución de alcohol Herb Garret tiene una solución de alcohol metílico al 80%; desea obtener un galón de solución para el limpia parabrisas mezclando su solución de alcohol metílico con agua. Si 128 onzas, o un galón, de fluido para el parabrisas debe contener 6% de alcohol metílico, ¿cuánto de la solución al 80% y cuánto de agua debe mezclarse?

40. Poda del jardín Richard Stewart poda parte de su jardín en segunda velocidad y parte en tercera velocidad. Tardó 2 horas en podar todo el jardín y el odómetro de su tractor muestra que cubrió 13.8 millas mientras cortaba el pasto. Si promedió 4.2 millas por hora en segunda velocidad y 7.8 millas por hora en tercera velocidad, ¿cuánto tardó en cada velocidad?

41. Pan de carne Lory Sullivan hace un pan de carne combinando trozos de solomillo con cordero. El solomillo contiene 1.2 gramos de grasa por onza y el cordero contiene 0.3 gramos de grasa por onza. Si quiere que su mezcla de 64 onzas sólo tenga 0.8 gramos de grasa por onza, determine cuánto solomillo y cuánto cordero debe usar.

42. Mezcla de leche Sundance Dairy tiene 400 cuartos de galón de leche entera que contiene 6% de crema. ¿Cuántos cuartos de galón de leche baja en grasa con 1.5% de crema deben agregarse para producir leche que contenga 2% de crema?

43. Comparación de transporte George Young puede ir al trabajo en su bicicleta en $\frac{3}{4}$ de hora. Si lo hace en su automóvil, el viaje dura $\frac{1}{6}$ dehora. Si George conduce su automóvil a un promedio de 14 millas por hora más rápido que cuando va en su bicicleta, determine la distancia que recorre al trabajo.

44. Máquina de cajas de leche Una antigua máquina que dobla y sella cajas de leche puede producir 50 cajas de leche por minuto. Una máquina nueva puede producir 70 cajas de leche por minuto. La máquina antigua ha fabricado 1000 cajas de cartón, cuando se enciende la máquina nueva. Si ambas máquinas continúan trabajando, ¿cuánto tiempo, a partir de que se enciende la máquina nueva, ésta producirá el mismo número total de cajas de leche que la máquina antigua?

45. Salinidad del océano La salinidad (contenido de sal) del Océano Atlántico promedia 37 partes por millar. Si se recogen 64 onzas de agua y se colocan al sol, ¿cuántas onzas de agua pura se necesitaría evaporar para elevar la salinidad a 45 partes por millar? (Sólo el agua pura se evapora; la sal queda sedimentada).

46. Dos cohetes Se lanzan dos cohetes desde el centro espacial Kennedy; el primero, lanzado a mediodía, viajará a 8000 millas por hora. El segundo será lanzado poco tiempo después y viajará a 9500 millas por hora. ¿En qué momento debe lanzarse el segundo cohete si los cohetes deben reunirse a una distancia de 38,000 millas de la Tierra?

a) Explique cómo encontró la solución para este problema.

b) Determine la solución al problema.

47. a) Invente su propio problema real de movimiento que pueda representarse como una ecuación.

b) Escriba la ecuación que representa su problema.

c) Resuelva la ecuación y luego determine la respuesta a su problema.

48. a) Invente su propio problema realista de mezclas que pueda representarse como una ecuación.

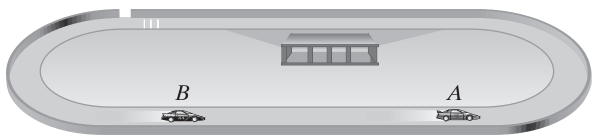
b) Escriba la ecuación que represente su problema.

c) Resuelva la ecuación y luego determine la respuesta a su problema.

Retos

49. Distancia a Calais El Eurotúnel (túnel submarino de Folkestone, Inglaterra a Calais, Francia) tiene 31 millas de longitud. Una persona puede abordar el tren bala TGV de Francia en París, viajar sin parar a través del Eurotúnel y llegar a Londres en 3 horas. El TGV promedia alrededor de 130 millas por hora de París a Calais; después reduce su velocidad a un promedio de 90 millas por hora, a través del Eurotúnel de 31 millas. Cuando deja el Eurotúnel en Folkestone sólo viaja a un promedio de 45 millas por hora para el viaje de 68 millas de Folkestone a Londres, a consecuencia de las vías obsoletas. Utilizando esta información, determine la distancia de París a Calais, Francia.

50. Automóviles de carreras Dos automóviles, A y B, están en una carrera a 500 vueltas; cada vuelta es de 1 milla. El automóvil que va adelante, A, promedia 125 millas por hora cuando llega a la mitad de la carrera; el automóvil B está exactamente 6.2 vueltas atrás.



a) Determine la velocidad promedio del automóvil B.

b) Cuando el automóvil A alcanza la mitad de la carrera, ¿qué tan lejos, en segundos, está el automóvil B del automóvil A?

51. Solución anticongelante El radiador de un automóvil tiene una capacidad de 16 cuartos de galón. En este momento está lleno con una solución anticongelante al 20%. ¿Cuántos cuartos deben drenarse y reemplazarse con anticongelante puro para hacer que el radiador contenga una solución anticongelante al 50%?

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.6] **52.** Exprese el cociente en notación científica $\frac{2.52 \times 10^{17}}{3.6 \times 10^{4}}$

Resuelva.

[2.1] **53.** $0.6x + 0.22 = 0.4(x - 2.3)$

54. $\frac{2}{3}x + 8 = x + \frac{25}{4}$

[2.2] **55.** Despeje y de la ecuación $\frac{3}{5}(x - 2) = \frac{2}{7}(2x + 3y)$

[2.3] **56. Renta de un camión** La agencia de renta de camiones Hertz/Penske cobra \$30 por día más \$0.14 por milla. La agencia de renta de camiones Budget cobra \$16 por día más \$0.24 por milla para el mismo camión. ¿Qué distancia debería conducir en 1 día para hacer que el costo de Hertz/Penske sea igual al costo de renta de Budget?

2.5 Resolución de desigualdades lineales

1 Resolver desigualdades.
2 Graficar soluciones en la recta numérica, notación de intervalo y conjuntos solución.
3 Resolver desigualdades compuestas que incluyan *y*.
4 Resolver desigualdades compuestas que incluyan *o*.

1 Resolver desigualdades

En la sección 1.2 introdujimos las desigualdades y la notación constructiva de conjuntos. Tal vez desee ahora repasar esa sección. A continuación se presentan los símbolos de desigualdad.*

Símbolos de desigualdad

$>$	es mayor que
$\geq$	es mayor o igual que
$<$	es menor que
$\leq$	es menor o igual que

Una expresión matemática con uno o más de estos símbolos es una **desigualdad**. La dirección del símbolo de desigualdad a veces se denomina **orden** o **sentido** de la desigualdad.

Ejemplos de desigualdades con una variable

$$2x + 3 \leq 5 \qquad 4x > 3x - 5 \qquad 1.5 \leq -2.3x + 4.5 \qquad \frac{1}{2}x + 3 \geq 0$$

Para resolver una desigualdad, debemos aislar la variable en un lado del símbolo de desigualdad. Para aislar la variable, utilizamos las mismas técnicas básicas empleadas para resolver ecuaciones.

Propiedades utilizadas para resolver desigualdades

1. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.
2. Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$.
3. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.
4. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
5. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$.
6. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Las primeras dos propiedades establecen que podemos sumar o restar el mismo número en ambos lados de una desigualdad. La tercera y cuarta propiedades estable-

* $\neq$, es distinto a, también es una desigualdad, $\neq$ significa $<$ o $>$. Así, $2 \neq 3$ significa $2 < 3$ o $2 > 3$.

cen que ambos lados de una desigualdad pueden multiplicarse por o dividirse entre cualquier número real positivo. Las dos últimas propiedades indican que **cuando ambos lados de una desigualdad se multiplican por o dividen entre un número negativo, la dirección de la desigualdad se invierte.**

Ejemplo de multiplicación por un número negativo

$$4 > -2$$
$$-1(4) < -1(-2)$$
$$-4 < 2$$

Multiplique ambos lados de la desigualdad por -1 e invierta la dirección del símbolo de desigualdad.

Ejemplo de división entre un número negativo

$$10 \geq -4$$
$$\frac{10}{-2} \leq \frac{-4}{-2}$$
$$-5 \leq 2$$

Divida ambos lados de la desigualdad entre -2 e invierta la dirección del símbolo de desigualdad.

Sugerencia útil

No olvide invertir la dirección del símbolo de desigualdad cuando multiplique o divida ambos lados de la desigualdad por un número negativo.

Desigualdad	Dirección del símbolo de desigualdad
$-3x < 6$	$\frac{-3x}{-3} > \frac{6}{-3}$
$-\frac{x}{2} > 5$	$(-2)\left(-\frac{x}{2}\right) < (-2)(5)$

EJEMPLO 1 Resuelva las desigualdades. **a)** $5x - 7 \geq -17$ **b)** $-6x + 4 < -14$

Solución

a)

$$5x - 7 \geq -17$$
$$5x - 7 + 7 \geq -17 + 7 \qquad \textit{Sume 7 a ambos lados.}$$
$$5x \geq -10$$
$$\frac{5x}{5} \geq \frac{-10}{5} \qquad \textit{Divida ambos lados entre 5.}$$
$$x \geq -2$$

El conjunto solución es $\{x|x \geq -2\}$. Cualquier número real mayor o igual a -2 satisface la desigualdad.

b)

$$-6x + 4 < -14$$
$$-6x + 4 - 4 < -14 - 4 \qquad \textit{Reste 4 a ambos lados.}$$
$$-6x < -18$$
$$\frac{-6x}{-6} > \frac{-18}{-6} \qquad \textit{Divida ambos lados entre 26 e invierta la dirección de la desigualdad.}$$
$$x > 3$$

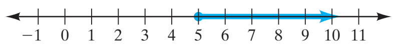
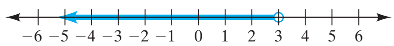
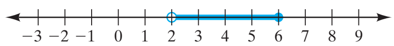
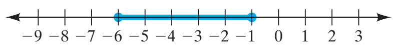
El conjunto solución es $\{x|x > 3\}$. Cualquier número mayor que 3 satisfará la desigualdad.

Ahora resuelva el ejercicio 17

2 Graficar soluciones en la recta numérica, notación de intervalo y conjuntos solución

La solución de una desigualdad puede indicarse sobre una recta numérica o escribirse como un conjunto solución, como se explicó en la sección 1.2. La solución también puede escribirse en notación de intervalo, como se ilustra en la página siguiente. La mayoría de los instructores tienen una forma preferida de indicar la solución de una desigualdad.

Recuerde que *un círculo relleno en la recta numérica indica que el punto extremo es parte de la solución, y un círculo vacío indica que el punto extremo no es parte de la solución. En notación de intervalos, los corchetes* [ ] *se utilizan para indicar que los puntos extremos son parte de la solución y los paréntesis* ( ) *indican que los puntos extremos no son parte de la solución*. El símbolo ∞, que se lee "infinito", indica que el conjunto solución continúa indefinidamente. Cada vez que se utilice ∞ en notación de intervalo, debemos utilizar un *paréntesis* del lado correspondiente de esta notación de intervalo.

Solución de desigualdad	Conjunto solución indicado en la recta numérica	Conjunto solución representado en notación de intervalo
$x \geq 5$		$[5, \infty)$
$x < 3$		$(-\infty, 3)$
$2 < x \leq 6$		$(2, 6]$
$-6 \leq x \leq -1$		$[-6, -1]$
$x > a$		(a, ∞)
$x \geq a$		$[a, \infty)$
$x < a$		$(-\infty, a)$
$x \leq a$		$(-\infty, a]$
$a < x < b$		(a, b)
$a \leq x \leq b$		$[a, b]$
$a < x \leq b$		$(a, b]$
$a \leq x < b$		$[a, b)$

En el ejemplo siguiente, resolveremos una desigualdad que tiene fracciones.

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva la siguiente desigualdad y proporcione la solución tanto en la recta numérica como en notación de intervalo.

$$\frac{1}{4}z - \frac{1}{2} < \frac{2z}{3} + 2$$

Solución Podemos eliminar las fracciones de una desigualdad al multiplicar ambos lados de la desigualdad por el mínimo común denominador, MCD, de las fracciones. En este caso multiplicamos ambos lados de la desigualdad por 12. Luego resolvemos la desigualdad resultante como lo hicimos en el ejemplo anterior.

$$\frac{1}{4}z - \frac{1}{2} < \frac{2z}{3} + 2$$

$$12\left(\frac{1}{4}z - \frac{1}{2}\right) < 12\left(\frac{2z}{3} + 2\right) \qquad \text{Multiplique ambos lados por el MCD, 12.}$$

$$3z - 6 < 8z + 24 \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$3z - 8z - 6 < 8z - 8z + 24 \qquad \text{Reste } 8z \text{ de ambos lados.}$$

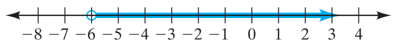
$$-5z - 6 < 24$$

$$-5z - 6 + 6 < 24 + 6 \qquad \text{Sume 6 a ambos lados.}$$

$$-5z < 30$$

$$\frac{-5z}{-5} > \frac{30}{-5} \qquad \text{Divida ambos lados entre 25 y cambie la dirección del símbolo de desigualdad.}$$

$$z > -6$$

Recta numérica	Notación de intervalo
	$(-6, \infty)$

El conjunto solución es $\{z|z > -6\}$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 31**

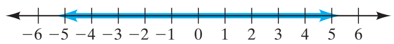
En el ejemplo 2 ilustramos la solución en la recta numérica, en notación de intervalo y como un conjunto solución. Su profesor le puede indicar cuál forma es la que prefiere.

EJEMPLO 3 ▸ Resuelva la desigualdad $2(3p - 5) + 9 \le 8(p + 1) - 2(p - 3)$.

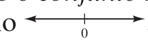
Solución

$$\begin{aligned} 2(3p - 5) + 9 &\le 8(p + 1) - 2(p - 3) \\ 6p - 10 + 9 &\le 8p + 8 - 2p + 6 \\ 6p - 1 &\le 6p + 14 \\ 6p - 6p - 1 &\le 6p - 6p + 14 \\ -1 &\le 14 \end{aligned}$$

Como -1 siempre es menor o igual a 14, la desigualdad es verdadera para todos los números reales. Cuando una desigualdad es verdadera para todos los números reales, el conjunto solución es *el conjunto de todos los números reales*, $\mathbb{R}$. El conjunto solución, para este ejemplo, también puede indicarse en la recta numérica o en notación de intervalo.

 o $(-\infty, \infty)$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 23**

Si en el ejemplo 3 hubiese resultado la expresión $-1 \ge 14$, la desigualdad nunca sería verdadera, ya que -1 nunca es mayor o igual a 14. Cuando una desigualdad nunca es verdadera, no tiene solución; su conjunto solución es el *conjunto vacío o conjunto nulo*, $\varnothing$ o $\{\ \}$. Representaremos al conjunto vacío en la recta numérica como .

Sugerencia útil

Por lo general, cuando se escribe una solución de una desigualdad escribimos la variable a la izquierda. Por ejemplo, cuando resolvemos una desigualdad, si obtenemos $5 \ge y$ escribiríamos la solución como $y \le 5$. Por ejemplo,

$-6 < x$ significa a $x > -6$ (el símbolo de desigualdad apunta a -6 en ambos casos)
$4 > x$ significa a $x < 4$ (el símbolo de desigualdad apunta a x en ambos casos)
$a < x$ significa a $x > a$ (el símbolo de desigualdad apunta a a en ambos casos)
$a > x$ significa a $x < a$ (el símbolo de desigualdad apunta a x en ambos casos).

EJEMPLO 4 ▸ **Paquetes en un bote** Un bote pequeño puede transportar un peso máximo de 750 libras. Millie Harrison tiene que transportar cajas que pesan 42.5 libras cada una.

a) Plantee una desigualdad que pueda usarse para determinar el número máximo de cajas que Millie puede colocar de forma segura en su bote, si ella pesa 128 libras.

b) Determine el número máximo de cajas que Millie puede transportar.

Solución **a)** Entienda y traduzca Sea n = número de cajas.

Peso de Millie	+	peso de n cajas	$\le$	750
128	+	$42.5n$	$\le$	750

b) Realice los cálculos

$$128 + 42.5n \leq 750$$
$$42.5n \leq 622$$
$$n \leq 14.6$$

Responda Por tanto, Millie puede transportar hasta 14 cajas en el bote.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 65

EJEMPLO 5 ▸ Costo de líneas de bolos En el boliche Corbin en Tarzana, California, cuesta \$2.50 rentar zapatos para boliche y cuesta \$4.00 cada juego jugado.

a) Escriba una desigualdad que pueda usarse para determinar el número máximo de juegos que Ricky Olson puede jugar a los bolos, si sólo tiene \$20.

b) Determine el número máximo de juegos que puede jugar Ricky.

Solución **a)** Entienda y traduzca

Sea g = número de juegos jugados.

Entonces $4.00g$ = costo de jugar g juegos.

costo de la renta de zapatos + costo de jugar g juegos ≤ dinero que tiene Ricky

$$2.50 \quad + \quad 4.00g \quad \leq \quad 20$$

b) Realice los cálculos

$$2.50 + 4.00g \leq 20$$
$$4.00g \leq 17.50$$
$$\frac{4.00g}{4.00} \leq \frac{17.50}{4.00}$$
$$g \leq 4.375$$

Responda y entienda Como Ricky no puede jugar parte de un juego, el número máximo de juegos que puede permitirse es 4. Si Ricky fuese a jugar 5 juegos de bolos debería gastar \$2.50 + 5(\$4.00) = \$22.50, que es más que los \$20 que tiene.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 67

EJEMPLO 6 ▸ Utilidad Para que un negocio logre una utilidad, su ingreso, R, debe ser mayor que su costo, C. Esto es, se obtendrá una utilidad cuando $R > C$ (el punto de equilibrio de la compañía es cuando $R = C$). Una compañía que produce naipes tiene una ecuación de costo semanal de $C = 1525 + 1.7x$ y una ecuación de ingresos semanales de $R = 4.2x$, donde x es el número de mazos de naipes producidos y vendidos en una semana. ¿Cuántos mazos de naipes deben producirse y venderse en una semana para que la compañía tenga una utilidad?

Solución Entienda y traduzca La compañía tendrá una utilidad cuando $R > C$, o

$$4.2x > 1525 + 1.7x$$

Realice los cálculos

$$2.5x > 1525$$
$$x > \frac{1525}{2.5}$$
$$x > 610$$

Responda La compañía tendrá una utilidad cuando se produzcan y vendan más de 610 mazos de naipes en una semana.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 69

EJEMPLO 7 ▸ Tablas de impuestos La tabla de la tasa de impuestos 2005 para parejas casadas que presentan ingresos gravables reunidos se muestra a continuación.

Tabla Y-1 Utilice si su estado civil es **Casado por bienes mancomunados** o **viudo(a)**

Si la cantidad en la forma 1040, línea 43, es: Mayor a	Pero no mayor a 2	Ingrese en la forma 1040 línea 44	de la cantidad por encima de 2
\$0	\$14,600	10%	\$0
\$14,600	\$59,400	\$1,460.00 + 15%	\$14,600
\$59,400	\$119,950	\$8,180.00 + 25%	\$59,400
\$119,950	\$182,800	\$23,317.50 + 28%	\$119,950
\$182,800	\$326,450	\$40,915.50 + 33%	\$182,800
\$326,450	∞	\$88,320.00 + 35%	\$326,450

a) Escriba, en notación de intervalo, las cantidades de ingresos gravables (montos en la Forma 1040, línea 43) que conforman cada uno de los cinco rangos de impuestos listados, esto es, los rangos del 10, 15, 25, 28, 33 y 35%.

b) Determine el impuesto de una pareja casada por bienes mancomunados, si sus ingresos gravables (línea 43) es \$13,500.

c) Determine el impuesto para una pareja casada por bienes mancomunados, si sus ingresos gravables son \$136,000.

Solución

a) Las palabras *Pero no mayor a* significa "menor o igual a". Los ingresos gravables que conforman los seis rangos son

$(0, 14{,}600]$ para el rango del 10%

$(14{,}600, 59{,}400]$ para el rango del 15%

$(59{,}400, 119{,}950]$ para el rango del 25%

$(119{,}950, 182{,}800]$ para el rango del 28%

$(182{,}800, 326{,}450]$ para el rango del 33%

$(326{,}450, \infty)$ para el rango del 35%

b) El impuesto para una pareja casada por bienes mancomunados con ingreso gravable de \$13,500 es de 10% de \$13,500. Por lo tanto,

$$\text{impuesto} = 0.10(13{,}500) = \$1{,}350.$$

El impuesto es \$1350.

c) Un ingreso gravable de \$136,000 coloca a la pareja en el rango de impuestos de 28%. El impuesto es \$23,317.50 + 28% del ingreso gravable mayor a \$119,950. El ingreso mayor a \$119,950 es \$136,000 − \$119,950 = \$16,050. Por tanto,

$$\text{impuesto} = 23{,}317.50 + 0.28(16{,}050) = 23{,}317.50 + 4494 = 27{,}811.50$$

El impuesto es \$27,811.50.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 79**

3 Resolver desigualdades compuestas que incluyan *y*.

Una **desigualdad compuesta** está formada por dos desigualdades ligadas con la palabra *y* o la palabra *o*. En ocasiones la palabra *y* está implícita sin que esté escrita.

Ejemplos de desigualdades compuestas

$$3 < x \quad \text{y} \quad x < 5$$
$$x + 4 > 2 \quad \text{o} \quad 2x - 3 < 6$$
$$4x - 6 \geq -3 \quad \text{y} \quad x - 6 < 17$$

En este objetivo, analizamos las desigualdades compuestas que utilizan o implican la palabra *y*. La solución de una desigualdad compuesta que utilice la palabra *y* son todos los números donde *ambas* partes de la desigualdad son verdaderas. Considere

$$3 < x \quad \text{y} \quad x < 5$$

¿Cuáles números satisfacen ambas desigualdades? Los números que satisfacen ambas desigualdades pueden verse con facilidad si graficamos la solución de cada desigualdad en una recta numérica (vea la **figura 2.9**). Ahora observe que los números que satisfacen ambas desigualdades son los números entre 3 y 5. El conjunto solución es $\{x|3 < x < 5\}$.

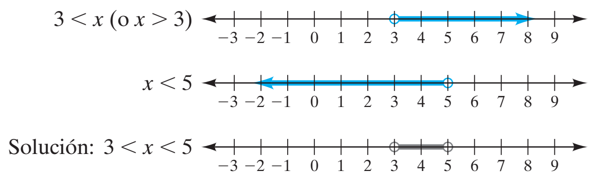


FIGURA 2.9

Recuerde del capítulo 1 que la intersección de dos conjuntos es el conjunto de elementos comunes a ambos conjuntos. *Para determinar el conjunto solución de una desigualdad que contenga la palabra* **y**, *tome la* **intersección** *de los conjuntos solución de las dos desigualdades*.

EJEMPLO 8 ▸ Resuelva $x + 5 \leq 8$ y $2x - 9 > -7$.

Solución Comience por resolver cada desigualdad por separado.

$$\begin{aligned} x + 5 &\leq 8 \quad \text{y} \quad & 2x - 9 &> -7 \\ x &\leq 3 & 2x &> 2 \\ & & x &> 1 \end{aligned}$$

Ahora tome la intersección de los conjuntos $\{x|x \leq 3\}$ y $\{x|x > 1\}$. Cuando encontramos $\{x|x \leq 3\} \cap \{x|x > 1\}$, estamos encontrando los valores de x comunes a ambos conjuntos. **La figura 2.10** ilustra que el conjunto solución es $\{x|\ 1 < x \leq 3\}$. En notación de intervalo, la solución es $(1, 3]$.

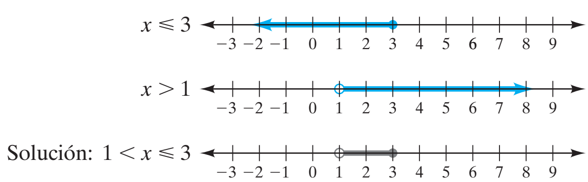


FIGURA 2.10

▸ Ahora resuelva el ejercicio 57

A veces podemos escribir una desigualdad compuesta que utiliza la palabra *y*, en una forma más corta. Por ejemplo, podemos escribir $3 < x$ y $x < 5$ como $3 < x < 5$. La palabra *y* no aparece cuando la desigualdad se escribe en esta forma, pero está implícita. La desigualdad compuesta $-1 < x + 3$ y $x + 3 \leq 5$ puede escribirse como $-1 < x + 3 \leq 5$.

EJEMPLO 9 Resuelva $-1 < x + 3 \leq 5$.

Solución $-1 < x + 3 \leq 5$, significa $-1 < x + 3$ y $x + 3 \leq 5$. Resuelva cada desigualdad por separado.

$$\begin{aligned} -1 &< x + 3 \quad \text{y} \quad & x + 3 &\leq 5 \\ -4 &< x & x &\leq 2 \end{aligned}$$

Recuerde que $-4 < x$ significa $x > -4$. La **figura 2.11** ilustra que el conjunto solución es $\{x|-4 < x \leq 2\}$. En notación de intervalo, la solución es $(-4, 2]$.

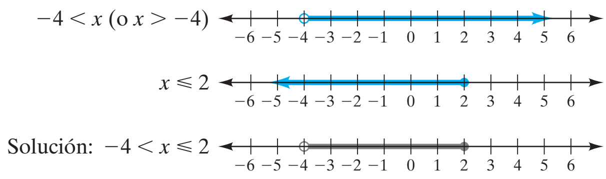


FIGURA 2.11

Ahora resuelva el ejercicio 35

La desigualdad del ejemplo 9, $-1 < x + 3 \leq 5$, puede resolverse de otra forma. Podemos seguir utilizando las propiedades analizadas anteriormente para resolver desigualdades compuestas. Sin embargo, cuando trabajamos con tales desigualdades, lo que hagamos para una parte lo debemos hacer para las tres partes. En el ejemplo 9, podríamos restar 3 de las tres partes para aislar la variable de en medio y resolver la desigualdad.

$$\begin{gathered} -1 < x + 3 \leq 5 \\ -1 - 3 < x + 3 - 3 \leq 5 - 3 \\ -4 < x \leq 2 \end{gathered}$$

Observe que ésta es la misma solución que se obtuvo en el ejemplo 9.

EJEMPLO 10 Resuelva la desigualdad $-3 \leq 2t - 7 < 8$.

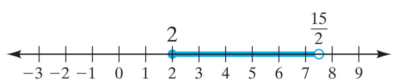
Solución Queremos aislar la variable t. Comenzamos por sumar 7 a las tres partes de la desigualdad.

$$\begin{gathered} -3 \leq 2t - 7 < 8 \\ -3 + 7 \leq 2t - 7 + 7 < 8 + 7 \\ 4 \leq 2t < 15 \end{gathered}$$

Ahora divida las tres partes de la desigualdad entre 2.

$$\begin{gathered} \frac{4}{2} \leq \frac{2t}{2} < \frac{15}{2} \\ 2 \leq t < \frac{15}{2} \end{gathered}$$

La solución también puede ilustrarse en una recta numérica, escribirse en notación de intervalo o escribirse como un conjunto solución. A continuación mostramos cada forma.



La respuesta en notación de intervalo es $\left[2, \frac{15}{2}\right)$. El conjunto solución es $\left\{t \middle| 2 \leq t < \frac{15}{2}\right\}$.

Ahora resuelva el ejercicio 41

EJEMPLO 11 Resuelva la desigualdad $-2 < \frac{4 - 3x}{5} < 8$.

Solución Multiplique las tres partes por 5 para eliminar el denominador.

$$-2 < \frac{4 - 3x}{5} < 8$$

$$-2(5) < \cancel{5}\left(\frac{4 - 3x}{\cancel{5}}\right) < 8(5)$$

$$-10 < 4 - 3x < 40$$

$$-10 - 4 < 4 - 4 - 3x < 40 - 4$$

$$-14 < -3x < 36$$

Ahora divida las tres partes de la desigualdad entre -3. Recuerde que cuando multiplicamos o dividimos una desigualdad por un número negativo, la dirección del símbolo de desigualdad se invierte.

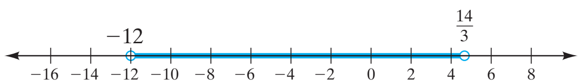
$$\frac{-14}{-3} > \frac{-3x}{-3} > \frac{36}{-3}$$

$$\frac{14}{3} > x > -12$$

Aunque $\frac{14}{3} > x > -12$ es correcto, por lo general escribimos desigualdades compuestas con el valor más pequeño a la izquierda. Por lo tanto, rescribiremos la solución como

$$-12 < x < \frac{14}{3}$$

La solución también puede ilustrarse en la recta numérica, escribirse en notación de intervalo o escribirse como un conjunto solución.



La solución en notación de intervalo es $\left(-12, \frac{14}{3}\right)$. El conjunto solución es $\left\{x \middle| -12 < x < \frac{14}{3}\right\}$.

Ahora resuelva el ejercicio 43

Sugerencia útil

Debe tener cuidado al escribir la solución de una desigualdad compuesta. En el ejemplo 11 podemos cambiar la solución de

$$\frac{14}{3} > x > -12 \quad \text{a} \quad -12 < x < \frac{14}{3}$$

Esto es correcto, ya que ambos dicen que x es mayor que -12 y menor que $\frac{14}{3}$. Observe que el símbolo de la desigualdad en ambos casos apunta al número menor.

En el ejemplo 11, si hubiéramos escrito la respuesta $\frac{14}{3} < x < -12$, habríamos dado una solución incorrecta. Recuerde que la desigualdad $\frac{14}{3} < x < -12$ significa que $\frac{14}{3} < x$ y $x < -12$. No existe ningún número que sea al mismo tiempo mayor que $\frac{14}{3}$ y menor que -12. Además, al examinar la desigualdad $\frac{14}{3} < x < -12$, aparece como si dijéramos que -12 es un número mayor que $\frac{14}{3}$, lo que obviamente es incorrecto.

También sería incorrecto escribir la respuesta como

$$\cancel{-12 < x > \frac{14}{3}} \quad \text{o} \quad \cancel{\frac{14}{3} < x > -12}$$

EJEMPLO 12 ▸ **Cálculo de calificaciones** En un curso de anatomía y fisiología, una calificación promedio mayor o igual a 80 y menor que 90 tiene como resultado una nota de B. Steve Reinquist recibió calificaciones de 85, 90, 68 y 70 en sus primeros cuatro exámenes. Para que Steve reciba una nota final de B en el curso, ¿entre cuáles dos calificaciones debe estar su quinto (y último) examen?

Solución Sea x = calificación en el último examen de Steve.

$$80 \leq \text{promedio de los cinco exámenes} < 90$$

$$80 \leq \frac{85 + 90 + 68 + 70 + x}{5} < 90$$

$$80 \leq \frac{313 + x}{5} < 90$$

$$400 \leq 313 + x < 450$$

$$400 - 313 \leq 313 - 313 + x < 450 - 313$$

$$87 \leq x < 137$$

Steve necesitaría una calificación mínima de 87 en su último examen para obtener una nota final de B. Si la calificación más alta que pudiera recibir en el examen es 100, ¿podría lograr una nota final de A (promedio de 90 o más)? Explique.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 75**

4 Resolver desigualdades compuestas que incluyan *o*

La solución de una desigualdad compuesta que utilice la palabra *o* son todos los números donde *cualquiera* de las desigualdades es una proposición verdadera. Considere la desigualdad compuesta

$$x > 3 \quad \text{o} \quad x < 5$$

¿Cuáles números satisfacen la desigualdad compuesta? Grafiquemos la solución de cada desigualdad mediante la recta numérica (vea la **figura 2.12**). Observe que todo número real satisface al menos una de las dos desigualdades. Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad compuesta es el conjunto de todos los números reales, ℝ.

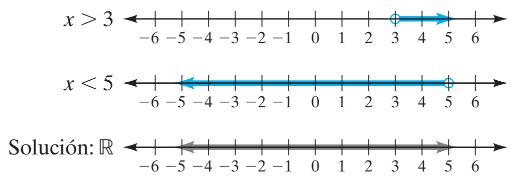


FIGURA 2.12

Recuerde del capítulo 1 que la *unión* de dos conjuntos es el conjunto de elementos que pertenecen a *cualquiera* de los conjuntos. *Para encontrar el conjunto solución de la desigualdad que contenga la palabra* **o**, *tome la* **unión** *de los conjuntos solución de las dos desigualdades que comprenden la desigualdad compuesta*.

EJEMPLO 13 ▸ Resuelva $r - 2 \leq -6$ o $-4r + 3 < -5$.

Solución Resuelva cada desigualdad por separado.

$$\begin{array}{rcl} r - 2 \leq -6 & \text{o} & -4r + 3 < -5 \\ r \leq -4 & & -4r < -8 \\ & & r > 2 \end{array}$$

Ahora grafique cada solución en rectas numéricas y después determine la unión (**figura 2.13**). La unión es $r \leq -4$ o $r > 2$.

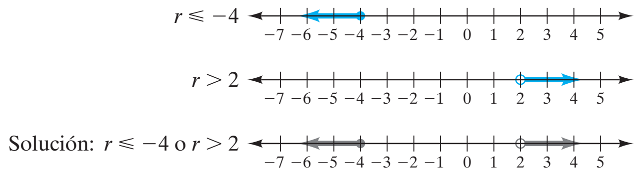


FIGURA 2.13

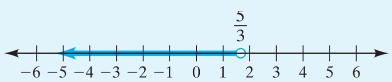
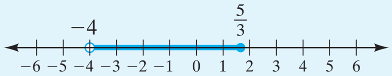
El conjunto solución es $\{r|r \leq -4\} \cup \{r|r > 2\}$, que podemos escribir como $\{r|r \leq -4$ o $r > 2\}$. En notación de intervalo, la solución es $(-\infty, -4] \cup (2, \infty)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 59

Con frecuencia encontramos desigualdades en nuestra vida diaria. Por ejemplo, en una carretera la velocidad mínima puede ser de 45 millas por hora y la máxima de 65 millas por hora. Un restaurante puede tener un letrero que establece que la capacidad máxima es de 300 personas, y la velocidad mínima de despegue de un aeroplano puede ser de 125 millas por hora.

Sugerencia útil

Existen varias formas de escribir la solución de un problema de desigualdad. Asegúrese de indicar la solución de un problema de desigualdad en la forma solicitada por su profesor. A continuación proporcionamos ejemplos de varias formas.

Desigualdad	Recta numérica	Notación de intervalo	Conjunto solución
$x < \frac{5}{3}$		$\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$	$\left\{x \middle| x < \frac{5}{3}\right\}$
$-4 < t \leq \frac{5}{3}$		$\left(-4, \frac{5}{3}\right]$	$\left\{t \middle| -4 < t \leq \frac{5}{3}\right\}$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.5

Ejercicios de concepto/redacción

1. Al resolver una ecuación, ¿cuándo es necesario cambiar el sentido del símbolo de la desigualdad?
2. Explique la diferencia entre $x < 7$ y $x \leq 7$.
3. **a)** Al indicar una solución en una recta numérica, ¿cuándo utiliza círculos vacíos?
   b) ¿Cuándo utiliza círculos llenos?
   c) Proporcione un ejemplo de una desigualdad cuya solución en una recta numérica contendría un círculo vacío.
   d) Proporcione un ejemplo de una desigualdad cuya solución en una recta numérica contendría un círculo lleno.
4. ¿Qué es una desigualdad compuesta? Dé un ejemplo.
5. ¿Qué significa la desigualdad $a < x < b$?
6. Explique por qué $\{x|5 < x < 3\}$ no es un conjunto aceptable para una desigualdad.

Práctica de habilidades

*Exprese cada desigualdad **a)** utilizando una recta numérica, **b)** en notación de intervalo y **c)** como un conjunto solución (utilice la notación constructiva de conjuntos).*

7. $x > -2$ **8.** $t > \frac{5}{3}$ **9.** $w \leq \pi$ **10.** $-4 < x < 3$

11. $-3 < q \leq \frac{4}{5}$ **12.** $x \geq -\frac{6}{5}$ **13.** $-7 < x \leq -4$ **14.** $-2\frac{7}{8} \leq k < -1\frac{2}{3}$

Resuelva cada desigualdad y grafique la solución en la recta numérica.

15. $x - 9 > -6$

16. $2x + 3 > 4$

17. $3 - x < -4$

18. $12b - 5 \leq 8b + 7$

19. $4.7x - 5.48 \geq 11.44$

20. $1.4x + 2.2 < 2.6x - 0.2$

21. $4(x + 2) \leq 4x + 8$

22. $15.3 > 3(a - 1.4)$

23. $5b - 6 \geq 3(b + 3) + 2b$

24. $-6(d + 2) < -9d + 3(d - 1)$

25. $2y - 6y + 8 \leq 2(-2y + 9)$

26. $\frac{y}{2} + \frac{4}{5} \leq 3$

Resuelva cada desigualdad y dé la solución en notación de intervalo.

27. $4 + \frac{4x}{3} < 6$

28. $4 - 3x < 5 + 2x + 17$

29. $\frac{v - 5}{3} - v \geq -3(v - 1)$

30. $\frac{h}{2} - \frac{5}{6} < \frac{7}{8} + h$

31. $\frac{t}{3} - t + 7 \leq -\frac{4t}{3} + 8$

32. $\frac{6(x - 2)}{5} > \frac{10(2 - x)}{3}$

33. $-3x + 1 < 3[(x + 2) - 2x] - 1$

34. $4[x - (3x - 2)] > 3(x + 5) - 15$

Resuelva cada desigualdad y de la solución en notación de intervalo.

35. $-2 \leq t + 3 < 4$

36. $-7 < p - 6 \leq -5$

37. $-15 \leq -3z \leq 12$

38. $-16 < 5 - 3n \leq 13$

39. $4 \leq 2x - 4 < 7$

40. $-12 < 3x - 5 \leq -1$

41. $14 \leq 2 - 3g < 15$

42. $\frac{1}{2} < 3x + 4 < 13$

Resuelva cada desigualdad y proporcione el conjunto solución.

43. $5 \leq \frac{3x + 1}{2} < 11$

44. $\frac{3}{5} < \frac{-x - 5}{3} < 2$

45. $-6 \leq -3(2x - 4) < 12$

46. $-6 < \frac{4 - 3x}{2} < \frac{2}{3}$

47. $0 \leq \frac{3(u - 4)}{7} \leq 1$

48. $-15 < \frac{3(x - 2)}{5} \leq 0$

Resuelva cada desigualdad e indique el conjunto solución.

49. $c \leq 1$ y $c > -3$

50. $d > 0$ o $d \leq 8$

51. $x < 2$ y $x > 4$

52. $w \leq -1$ o $w > 6$

53. $x + 1 < 3$ y $x + 1 > -4$

54. $5x - 3 \leq 7$ o $-2x + 5 < -3$

Resuelva cada desigualdad e indique el conjunto solución.

55. $2s + 3 < 7$ o $-3s + 4 \leq -17$

56. $4a + 7 \geq 9$ y $-3a + 4 \leq -17$

57. $4x + 5 \geq 5$ y $3x - 7 \leq -1$

58. $5 - 3x < -3$ y $5x - 3 > 10$

59. $4 - r < -2$ o $3r - 1 < -1$

60. $-x + 3 < 0$ o $2x - 5 \geq 3$

61. $2k + 5 > -1$ y $7 - 3k \leq 7$

62. $2q - 11 \leq -7$ o $2 - 3q < 11$

Resolución de problemas

63. Paquetería UPS El largo más el contorno (o cincho) de un paquete que se envía por UPS no puede ser mayor a 130 pulgadas.

a) Plantee una desigualdad que exprese esta información, utilice l para la longitud y g para la circunferencia.

b) UPS definió el contorno como el doble del ancho más el doble del grosor. Escriba una desigualdad que use el largo, l, ancho, w, y el grosor, d, para indicar las dimensiones permitidas de un paquete que puede enviarse por UPS.

c) Si el largo de un paquete es de 40 pulgadas y el ancho de un paquete es de 20.5 pulgadas, determine el grosor máximo permitido del paquete.

64. Equipaje Desde el 8 de octubre de 2001, muchas aerolíneas han limitado el tamaño del equipaje que los pasajeros pueden llevar abordo en vuelos nacionales. La longitud, l, más el ancho, w, más el grosor, d, del equipaje que puede llevar no debe exceder a 45 pulgadas.

a) Plantee una desigualdad que describa esta desigualdad; utilice l, w y d como se describieron antes.

b) Si el equipaje de Ryan McHenry es de 23 pulgadas de largo y 12 de ancho, ¿cuál es el grosor máximo que puede tener y aún llevarse en el aeroplano?

En los ejercicios del 65 al 78, plantee una desigualdad que pueda usarse para resolver el problema. Resuelva el problema y determine el valor deseado.

65. Límite de peso Cal Worth, un conserje, debe mover un gran cargamento de libros del primero al quinto piso. El letrero del elevador dice "peso máximo 800 libras". Si cada caja de libros pesa 70 libras, encuentre el número de cajas que Cal debe colocar en el elevador.

66. Límite en un elevador Si el conserje del ejercicio 65, que pesa 195 libras, se debe subir con las cajas de libros, encuentre el número máximo de cajas que puede colocar en el elevador.

67. Larga distancia La caseta telefónica de larga distancia Telecom-USA, cobra a los clientes $0.99 por los primeros 20 minutos y luego $0.07 por cada minuto (o fracción) posterior a los 20 minutos. Si Patricia Lanz utiliza esta caseta, ¿cuánto tiempo puede hablar por $5.00?

68. Estacionamiento Un estacionamiento del centro de la ciudad en Austin, Texas, cobra $1.25 por la primera hora y $0.75 por cada hora adicional o fracción. ¿Cuál es el tiempo máximo que puede estacionar su auto si no desea pagar más de $3.75?

69. Utilidad de un libro April Lemons piensa escribir y publicar su propio libro. Estima su ecuación de ingresos como $R = 6.42x$, y su ecuación de costo como $C = 10{,}025 + 1.09x$, donde x es el número de libros que vende. Encuentre el número mínimo de libros que debe vender para obtener una ganancia. Vea el ejemplo 6.

70. Utilidades de una tintorería Peter Collinge inaugura una tintorería, y estima su ecuación de costo como $C = 8000 + 0.08x$ y su ecuación de ingresos como $R = 1.85x$, donde x es el número de prendas lavadas en un año. Encuentre el número mínimo de prendas que debe lavar en el año para que Peter obtenga una ganancia.

71. Correo de primera clase El 8 de enero de 2006, el costo por enviar un paquete por primera clase fue de $0.39 por la primera onza y $0.24 por cada onza adicional. ¿Cuál es el peso máximo de un paquete que Richard Van Lommel puede enviar en primera clase por $10.00?

72. Correo de primera clase prepagado Las compañías pueden enviar piezas de correo que pesen hasta una onza usando el correo *prepagado de primera clase*. La compañía debe adquirir primero un permiso por $150 por año, y luego pagar $0.275 por pieza enviada. Sin el permiso, cada pieza costaría $0.37. Determine el número mínimo de piezas de correo que tendría que enviar para que le valiera la pena a la compañía utilizar correo prepagado de primera clase.

73. Comparación de planes de pago Melissa Pfistner aceptó en fecha reciente un puesto de ventas en Ohio e incluso puede seleccionar entre dos planes de pago. El plan 1 es un salario de $300 por semana más una comisión de 10% sobre las ventas. El plan 2 es un salario de $400 por semana más 8% de comisión sobre las ventas. ¿Con qué cantidad de ventas semanales Melissa ganaría más con el plan 1?

74. Empleo en el colegio Para que pueda continuar con su ayuda financiera para el colegio, Katie Hanenberg no puede ganar más de $2000 en sus 8 semanas de empleo de verano. Ahora gana $90 por semana como asistente de un día. Está pensando trabajar además por la tarde en un restaurante de comida rápida, donde ganaría $6.25 por hora. ¿Cuál es el máximo número de horas por semana que puede trabajar en el restaurante sin arriesgar su ayuda financiera?

75. Calificación para aprobar Para aprobar un curso, Corrina Schultz necesita un promedio de 60 o más. Si las calificaciones de Corrina son 66, 72, 90, 49 y 59, encuentre la calificación mínima que Corrina debe obtener en su sexto y último examen para aprobar el curso.

76. Calificación mínima Para recibir una A en un curso, Stephen Heasley debe obtener un promedio de 90 o más en cinco exámenes. Si las primeras cuatro calificaciones de Stephen son 92, 87, 96 y 77, ¿cuál es la calificación mínima que debe obtener Stephen en el quinto examen para obtener una A en el curso?

77. Calificación promedio Las calificaciones de Calisha Mahoney en sus primeros cuatro exámenes son 85, 92, 72 y 75. Un promedio mayor o igual que 80 y menor que 90 le darían una nota final de B. ¿Cuál es el rango de calificaciones que debe obtener Calisha en su quinto y último examen para obtener una calificación final de B? Suponga que la calificación máxima es de 100.

78. Aire limpio Para que el aire se considere "limpio", el promedio de tres contaminantes debe ser menor que 3.2 partes por millón (ppm). Si los primeros dos contaminantes son de 2.7 y 3.42 ppm, ¿en qué rango de valores debe estar el tercer contaminante para que el aire resulte limpio?

79. Impuesto a ingresos Consulte el ejemplo 7 de la página 115. Su-hua y Ting-Fang Zheng presentan un ingreso mancomunado para los impuestos. Determine el impuesto de 2005 que corresponderá a Su-hua y Ting-Fang si su ingreso gravable es

a) $78,221.
b) $301,233.

80. Impuesto a ingresos Consulte el ejemplo 7 de la página 115. José y Mildred Battiste presentan un ingreso mancomunado para los impuestos. Determine el impuesto a ingresos de 2005 que corresponderá a José y Mildred si su ingreso gravable es

a) $128,479.
b) $275,248.

Velocidad

En un curso de física, una velocidad positiva indica que un objeto lanzado viaja hacia arriba y una velocidad negativa indica que el objeto está de regreso y viaja hacia abajo. Para ser específicos, un objeto está viajando hacia arriba cuando la velocidad ≥ 0. El objeto alcanza su altura máxima cuando $v = 0$ y el objeto viaja hacia abajo cuando la velocidad es ≤ 0.

En los ejercicios del 81 al 86, se proporciona la velocidad, $v(t)$, de un objeto que se lanza hacia arriba. Mediante la notación de intervalos, determine los intervalos cuando el objeto viaja **a)** *hacia arriba o* **b)** *hacia abajo cuando la velocidad ≤ 0.*

81. $v(t) = -32t + 96, \quad 0 \leq t \leq 10$

82. $v(t) = -32t + 172.8, \quad 0 \leq t \leq 12$

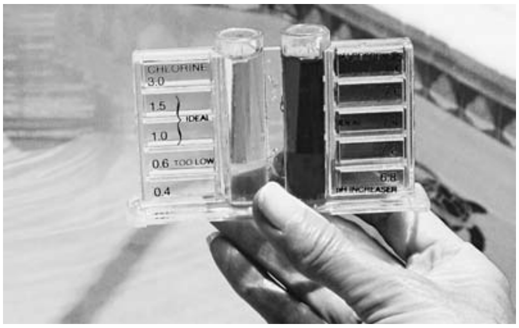
83. $v(t) = -9.8t + 49, \quad 0 \leq t \leq 13$

84. $v(t) = -9.8t + 31.36, \quad 0 \leq t \leq 6$

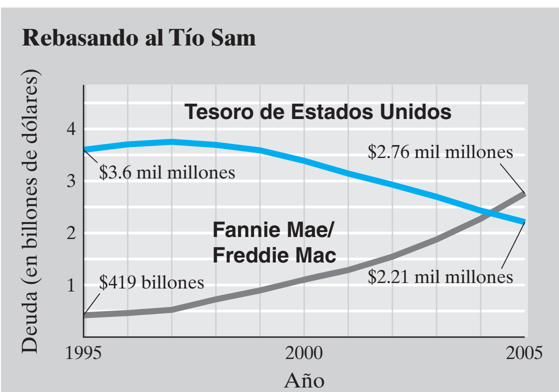
85. $v(t) = -32t + 320, \quad 0 \leq t \leq 8$

86. $v(t) = -9.8t + 68.6, \quad 0 \leq t \leq 5$

87. Acidez del agua Thomas Hayward verifica la acidez del agua en una alberca. La acidez del agua se considera normal cuando el promedio de tres lecturas del pH diarias es mayor que 7.2 y menor que 7.8. Si las dos primeras lecturas del pH son de 7.48 y 7.15, encuentre el rango de valores de pH para la tercera lectura a fin de que resulte un nivel de acidez normal.



88. Comparación de deudas Fannie Mae y Freddie Mac son compañías auspiciadas por el gobierno, destinadas para prestar dinero a la gente que desea comprar casas. Desde 1995, la deuda de Fannie Mae y Freddie Mac ha aumentado de manera abrupta, mientras que la deuda del Tesoro de Estados Unidos ha disminuido bruscamente. La gráfica siguiente muestra las deudas proyectadas de Fannie Mae y Freddie Mac, así como la deuda proyectada del Tesoro de 1995 a 2005.

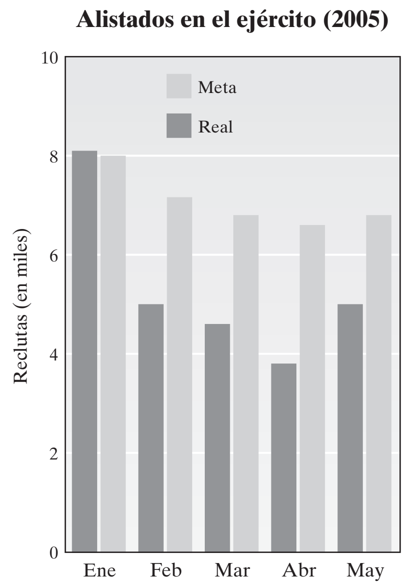


Fuente: Subcomité de Servicios Financieros para Vivienda en Mercados de Capitales.

a) ¿Durante cuáles años de 1995 a 2005 fue la deuda de Fannie Mae/Freddie Mac menor de $1 billón *y* la deuda del Tesoro por arriba de $3 billones? Explique cómo determinó su respuesta.

b) ¿Durante cuáles años de 1995 a 2005 estuvo la deuda de Fannie Mae/Freddie Mac por arriba de $1 billón *o* la deuda del Tesoro por debajo de $3 billones? Explique cómo determinó su respuesta.

89. Alistamiento en el ejército La gráfica siguiente muestra la meta de alistamiento de la armada de Estados Unidos y el número real de alistados de enero a mayo de 2005.



Fuente: Departamento de la Defensa, Newsweek

a) Durante cuáles meses la meta ha sido mayor a 6000 *y* el número de alistados ha sido mayor que 4000?

b) ¿Durante cuáles meses la meta ha sido menor a 7000 *o* el número de alistados es menor que 4000?

c) Durante cuáles meses la meta ha sido menor que 7000 *y* el número de alistados ha sido menor que 4000?

90. Si $a > b$, ¿siempre será mayor a^2 que b^2? Explique y proporcione un ejemplo que respalde su respuesta.

91. Póliza de seguros Una póliza de seguro de Blue Cross/Blue Shield tiene un deducible de \$100, después de que se paga 80% del total del gasto médico, c. El cliente paga 20% hasta que haya pagado un total de \$500; después de eso la póliza paga el 100% de los gastos médicos. Podemos describir esta póliza como sigue:

Blue Cross paga

$$\begin{array}{rl} 0, & \text{si } c \leq \$100 \\ 0.80(c - 100), & \text{si } \$100 < c \leq \$2100 \\ c - 500, & \text{si } c > \$2100 \end{array}$$

Explique por qué este conjunto de desigualdades describe el plan de pago de Blue Cross/Blue Shield.

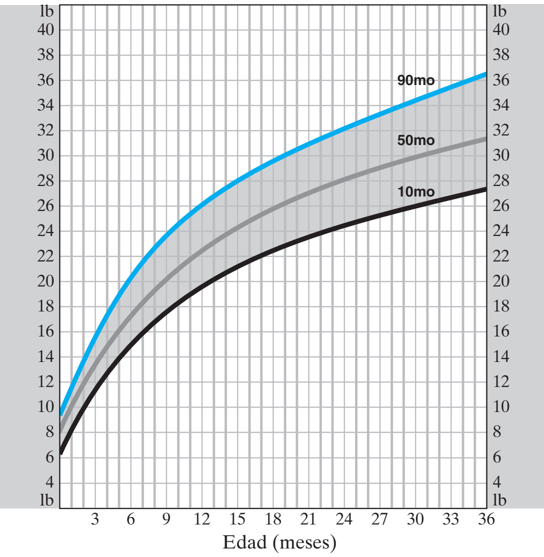
92. Explique por qué no puede despejarse x en la desigualdad $a < bx + c < d$ a menos que se proporcione información adicional.

Gráficas de crecimiento *En los ejercicios 93 y 94 consideraremos los diagramas de crecimiento para niños desde su nacimiento hasta los 36 meses. Las tablas fueron desarrolladas por estadísticas del Centro Nacional para la Salud. En general, el percentil n representa aquel valor para el que n% de los objetos medidos están por abajo y (100 − n)% de los objetos están por arriba. Por ejemplo, suponga que una calificación de 450 en un examen representa el percentil 70. Esto significa que si una persona tiene una calificación de 450, esa persona superó a alrededor del 70% de las demás personas que presentaron el mismo examen y alrededor de 100 − 70 = 30% superó la calificación de esa persona.*

93. El diagrama siguiente muestra los percentiles peso-edad para niños desde recién nacidos hasta la edad de 36 meses. La curva en rojo claro es el percentil 50, lo que significa que para cualquier edad indicada, 50% de los pesos están por arriba del valor indicado por la curva y el 50% de los pesos está por abajo de este valor. La región sombreada está entre el percentil 10 (curva en negro) y el percentil 90 (curva en rojo oscuro). Esto es, 80% de los pesos está entre los valores representados por la curva en negro y la curva en rojo oscuro. Utilice esta gráfica para determinar, en notación de intervalos, dónde ocurre el 80% de los pesos para niños de edad de

a) 9 meses.
b) 21 meses.
c) 36 meses.

Percentiles peso-edad:
Niños, recién nacidos a 36 meses



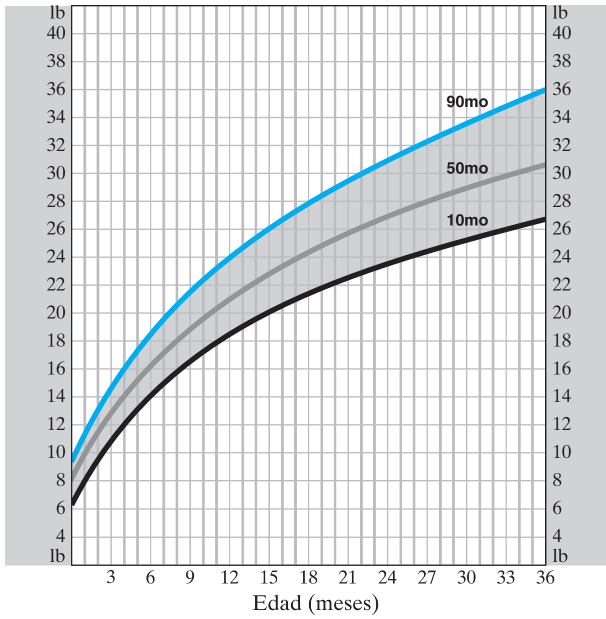
Fuente: Estadísticas del Centro Nacional de Salud

94. (Vea el ejercicio 93.) La gráfica siguiente muestra los percentiles de edad-peso para niñas desde recién nacidas hasta 36 meses de edad. La región sombreada está entre el percentil 10 (curva en negro) y el percentil 90 (curva en rojo oscuro), y el 80% de los pesos está en esta región.

Utilice esta gráfica para determinar, en notación de intervalos, dónde ocurren los pesos para niñas de

a) 9 meses.
b) 21 meses.
c) 36 meses.

Percentiles peso-edad:
Niñas, recién nacidas a 36 meses



Fuente: Estadísticas del Centro Nacional de Salud

Retos

95. Cálculo de calificaciones Las primeras cinco calificaciones de Stephen Heasley en Historia de Europa fueron 82, 90, 74, 76 y 68. El examen final del curso cuenta una tercera parte del promedio final. Un promedio final mayor o igual que 80 y menor que 90 daría como resultado una nota final de B. ¿Cuál es el rango de calificaciones en el examen final que daría, a Stephen, como resultado una calificación final de B en el curso? Suponga que la calificación máxima posible es de 100.

En los ejercicios del 96 al 98, **a)** *explique cómo resolver la desigualdad, y* **b)** *resuelva y proporcione la solución en notación de intervalo.*

96. $x < 3x - 10 < 2x$

97. $x < 2x + 3 < 2x + 5$

98. $x + 5 < x + 3 < 2x + 2$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **99.** Para $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$ y $B = \{1, 3, 4, 5, 8\}$, determine

a) $A \cup B$.

b) $A \cap B$.

100. Para $A = \left\{-3, 4, \frac{5}{2}, \sqrt{7}, 0, -\frac{13}{29}\right\}$, liste los elementos que son

a) Números para contar.
b) Enteros no negativos.
c) Números racionales.
d) Números reales.

[1.3] *Indique el nombre de cada propiedad que se ilustra.*

101. $(3x + 8) + 4y = 3x + (8 + 4y)$

102. $5x + y = y + 5x$

[2.2] **103.** Despeje V de la fórmula $R = L + (V - D)r$.

2.6 Resolución de ecuaciones y desigualdades que incluyen valores absolutos

1 Entender la interpretación geométrica del valor absoluto.

2 Resolver ecuaciones de la forma $|x| = a, a > 0$.

3 Resolver desigualdades de la forma $|x| < a, a > 0$.

4 Resolver desigualdades de la forma $|x| > a, a > 0$.

5 Resolver desigualdades de la forma $|x| > a$ o $|x| < a, a < 0$.

6 Resolver desigualdades de la forma $|x| > 0$ o $|x| < 0$.

7 Resolver ecuaciones de la forma $|x| = |y|$.

1 Entender la interpretación geométrica del valor absoluto

En la sección 1.3 presentamos el concepto de valor absoluto. Establecimos que el valor absoluto de un número puede considerarse como la distancia (sin signo) con respecto al número 0 en la recta numérica. El valor absoluto de 3, escrito $|3|$, es 3, ya que está a 3 unidades del 0 en la recta numérica. De igual manera, el valor absoluto de -3, escrito $|-3|$, también es 3, ya que está a 3 unidades del 0 en la recta numérica.

Considere la ecuación $|x| = 3$; ¿cuáles valores de x hacen verdadera esta ecuación? Sabemos que $|3| = 3$ y $|-3| = 3$. Las soluciones de $|x| = 3$ son 3 y -3. Cuando resolvemos la ecuación $|x| = 3$, queremos encontrar los valores que están exactamente a 3 unidades del 0 en la recta numérica (vea la **figura 2.14a**).

Ahora considere la desigualdad $|x| < 3$. Para resolver esta desigualdad, necesitamos encontrar el conjunto de valores cuya distancia es menor que 3 unidades, con respecto al 0 en la recta numérica. Éstos son los valores de x entre -3 y 3 (vea la **figura 2.14b**).

Para resolver la desigualdad $|x| > 3$, necesitamos determinar el conjunto de valores cuya distancia es mayor que 3 unidades con respecto al 0 en la recta numérica. Éstos son los valores que son menores que -3 o mayores que 3 (vea la **figura 2.14c**).

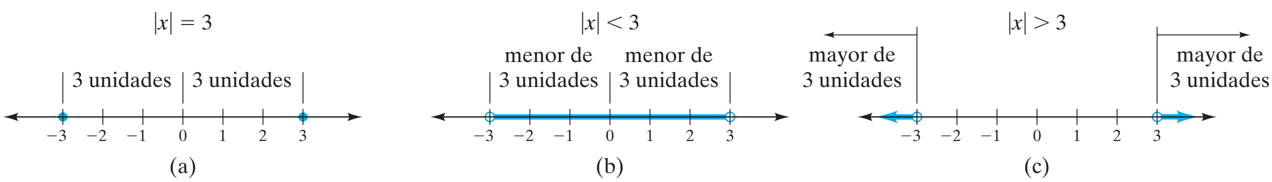


FIGURA 2.14

En esta sección resolveremos ecuaciones y desigualdades como las siguientes:

$$|2x - 1| = 5 \qquad |2x - 1| \le 5 \qquad |2x - 1| > 5$$

La interpretación geométrica de $|2x - 1| = 5$ es similar a $|x| = 3$. Cuando resolvemos $|2x - 1| = 5$, estamos determinando el conjunto de valores para los cuales $2x - 1$ está exactamente a 5 unidades de distancia del 0 en la recta numérica.

La interpretación geométrica de $|2x - 1| \le 5$ es similar a la interpretación geométrica de $|x| \le 3$. Cuando resolvemos $|2x - 1| \le 5$, estamos determinando el conjunto de valores para los cuales $2x - 1$ es menor o igual que 5 unidades con respecto al cero en la recta numérica.

La interpretación geométrica de $|2x - 1| > 5$ es similar a la interpretación geométrica de $|x| > 3$. Cuando resolvemos $|2x - 1| > 5$, estamos determinando el conjunto de valores para los cuales $2x - 1$ es mayor que 5 unidades con respecto al cero en la recta numérica.

En el resto de esta sección resolveremos ecuaciones y desigualdades con valor absoluto de manera algebraica. Primero resolveremos ecuaciones con valor absoluto y después, desigualdades con valor absoluto. Terminaremos la sección resolviendo ecuaciones con valores absolutos en ambos lados de la ecuación, por ejemplo, $|x + 3| = |2x - 5|$.

2 Resolver ecuaciones de la forma $|x| = a, a > 0$

Cuando resolvemos una ecuación de la forma $|x| = a$, $a > 0$, estamos encontrando los valores que están exactamente a a unidades del 0 en la recta numérica. Podemos utilizar el siguiente procedimiento para resolver este tipo de problemas.

Para resolver ecuaciones de la forma $|x| = a$

Si $|x| = a$ y $a > 0$, entonces $x = a$ o $x = -a$.

EJEMPLO 1 ▸ Resuelva cada ecuación.

a) $|x| = 7$ **b)** $|x| = 0$ **c)** $|x| = -7$

Solución

a) Al usar el procedimiento obtenemos $x = 7$ o $x = -7$. El conjunto solución es $\{-7, 7\}$.

b) El único número real cuyo valor absoluto es igual a cero es 0. Así, el conjunto solución para $|x| = 0$ es $\{0\}$.

c) El valor absoluto de un número nunca es negativo, así que no existen soluciones para esta ecuación. El conjunto solución es $\emptyset$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 15

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva la ecuación $|2w - 1| = 5$.

Solución A primera vista no parece ser de la forma $|x| = a$, sin embargo, si hacemos que $2w - 1$ sea x y 5 sea a, entonces verá que la ecuación es de esta forma. Buscamos los valores de w tales que $2w - 1$ esté exactamente a 5 unidades del 0 en la recta numérica. Así, la cantidad $2w - 1$ debe ser igual a 5 o -5.

$$2w - 1 = 5 \quad \text{o} \quad 2w - 1 = -5$$
$$2w = 6 \qquad\qquad 2w = -4$$
$$w = 3 \qquad\qquad w = -2$$

Verifique

$w = 3$:
$$|2w - 1| = 5$$
$$|2(3) - 1| \stackrel{?}{=} 5$$
$$|6 - 1| \stackrel{?}{=} 5$$
$$|5| \stackrel{?}{=} 5$$
$$5 = 5 \quad \text{Verdadero}$$

$w = -2$:
$$|2w - 1| = 5$$
$$|2(-2) - 1| \stackrel{?}{=} 5$$
$$|-4 - 1| \stackrel{?}{=} 5$$
$$|-5| \stackrel{?}{=} 5$$
$$5 = 5 \quad \text{Verdadero}$$

Cada una de las soluciones 3 y -2 hacen que $2w - 1$ esté a 5 unidades del 0 en la recta numérica. El conjunto solución es $\{-2, 3\}$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 21

Considere la ecuación $|2w - 1| - 3 = 2$. El primer paso en la resolución de esta ecuación es aislar el término con el valor absoluto. Hacemos esto sumando 3 a ambos lados de la ecuación; esto resulta en la ecuación que resolvimos en el ejemplo 2.

3 Resolver desigualdades de la forma $|x| < a, a > 0$

Ahora pongamos nuestra atención en desigualdades de la forma $|x| < a$. Considere $|x| < 3$, esta desigualdad representa al conjunto de valores que están a menos de 3 unidades del 0 en una recta numérica (vea la **figura 2.14b**). El conjunto solución es $\{x | -3 < x < 3\}$. El conjunto solución de una desigualdad de la forma $|x| < a$ es el conjunto de valores que están a *menos de a unidades del 0 en la recta numérica*.

Podemos utilizar el mismo proceso de razonamiento para resolver problemas más complicados, como se muestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Resuelva la desigualdad $|2x - 3| < 5$.

Solución La solución de esta desigualdad será el conjunto de valores tales que la distancia entre $2x - 3$ y 0 en la recta numérica sea menor que 5 unidades (vea la **figura 2.15**). Utilizando la **figura 2.15**, podemos ver que $-5 < 2x - 3 < 5$.

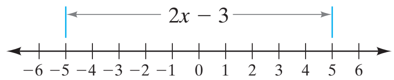


FIGURA 2.15

Resolviendo, obtenemos

$$\begin{aligned} -5 &< 2x - 3 < 5 \\ -2 &< 2x < 8 \\ -1 &< x < 4 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{x|-1 < x < 4\}$. Cuando x es cualquier número entre -1 y 4, la expresión $2x - 3$ representará un número que está a menos de 5 unidades del 0 en la recta numérica (o un número entre -5 y 5).

Ahora resuelva el ejercicio 33

Para resolver desigualdades de la forma $|x| < a$, podemos utilizar el procedimiento siguiente.

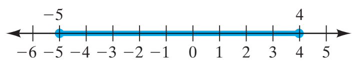
Para resolver desigualdades de la forma $|x| < a$

Si $|x| < a$ y $a > 0$, entonces $-a < x < a$.

EJEMPLO 4 Resuelva la desigualdad $|2x + 1| \leq 9$ y grafique la solución en la recta numérica.

Solución Como esta desigualdad es de la forma $|x| \leq a$, escribimos

$$\begin{aligned} -9 &\leq 2x + 1 \leq 9 \\ -10 &\leq 2x \leq 8 \\ -5 &\leq x \leq 4 \end{aligned}$$



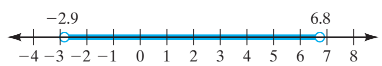
Cualquier valor de x mayor o igual que -5 y menor o igual que 4 da como resultado que $2x + 1$ esté a 9 unidades o menos con respecto del 0 en la recta numérica.

Ahora resuelva el ejercicio 75

EJEMPLO 5 Resuelva la desigualdad $|7.8 - 4x| - 5.3 < 14.1$ y grafique la solución en la recta numérica.

Solución Primero aísle el valor absoluto sumando 5.3 a ambos lados de la desigualdad. Después resuelva como en los ejemplos anteriores.

$$\begin{aligned} |7.8 - 4x| - 5.3 &< 14.1 \\ |7.8 - 4x| &< 19.4 \\ -19.4 < 7.8 - 4x &< 19.4 \\ -27.2 < -4x &< 11.6 \\ \frac{-27.2}{-4} > \frac{-4x}{-4} &> \frac{11.6}{-4} \\ 6.8 > x > -2.9 \quad \text{o} \quad -2.9 &< x < 6.8 \end{aligned}$$



El conjunto solución es $\{x|-2.9 < x < 6.8\}$. El conjunto solución en notación de intervalo es $(-2.9, 6.8)$.

Ahora resuelva el ejercicio 43

4 Resolver desigualdades de la forma $|x| > a$, $a > 0$

Ahora veamos las desigualdades de la forma $|x| > a$. Considere $|x| > 3$. Esta desigualdad representa el conjunto de valores que están a más de 3 unidades del 0 en la recta numérica (vea la **figura 2.14c** en la página 125). El conjunto solución es $\{x|x < -3$ o $x > 3\}$. El conjunto solución de $|x| > a$ es el conjunto de valores que están *a más de a unidades del* 0 en la recta numérica.

EJEMPLO 6 Resuelva la desigualdad $|2x - 3| > 5$ y grafique la solución en la recta numérica.

Solución La solución de $|2x - 3| > 5$ es el conjunto de valores tales que la distancia entre $2x - 3$ y el 0 en la recta numérica será mayor que 5. La cantidad $2x - 3$ debe ser menor que -5 o mayor que 5 (vea la **figura 2.16**).

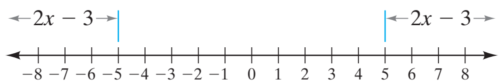
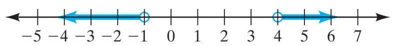


FIGURA 2.16

Como $2x - 3$ debe ser menor que -5 o mayor que 5, establecemos y resolvemos la siguiente desigualdad compuesta:

$$\begin{aligned} 2x - 3 &< -5 \qquad \text{o} \qquad & 2x - 3 &> 5 \\ 2x &< -2 & 2x &> 8 \\ x &< -1 & x &> 4 \end{aligned}$$



El conjunto solución de $|2x - 3| > 5$ es $\{x|x < -1$ o $x > 4\}$. Cuando x es cualquier número menor que -1 o mayor que 4, la expresión $2x - 3$ representará un número que está a más de 5 unidades del 0 en la recta numérica (o un número menor que -5 o mayor que 5).

Ahora resuelva el ejercicio 51

Para resolver desigualdades de la forma $|x| > a$, podemos usar el procedimiento siguiente.

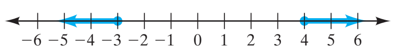
Para resolver desigualdades de la forma $|x| > a$

Si $|x| > a$ y $a > 0$, entonces $x < -a$ o $x > a$.

EJEMPLO 7 Resuelva la desigualdad $|2x - 1| \geq 7$ y grafique la solución en la recta numérica.

Solución Como esta desigualdad es de la forma $|x| \geq a$, utilizamos el procedimiento dado anteriormente.

$$\begin{aligned} 2x - 1 &\leq -7 \qquad \text{o} \qquad & 2x - 1 &\geq 7 \\ 2x &\leq -6 & 2x &\geq 8 \\ x &\leq -3 & x &\geq 4 \end{aligned}$$



Cualquier valor de x menor o igual que -3, o mayor o igual que 4, daría como resultado que $2x - 1$ represente un número que sea mayor o igual que 7 unidades desde el 0 en la recta numérica. El conjunto solución es $\{x|x \leq -3$ o $x \geq 4\}$. En notación de intervalo, la solución es $(-\infty, -3] \cup [4, \infty)$.

Ahora resuelva el ejercicio 53

EJEMPLO 8 Resuelva la desigualdad $\left|\dfrac{3x-4}{2}\right| \geq 9$ y grafique la solución en una recta numérica.

Solución Como la desigualdad es de la forma $|x| \geq a$, escribimos

$$\frac{3x-4}{2} \leq -9 \quad \text{o} \quad \frac{3x-4}{2} \geq 9$$

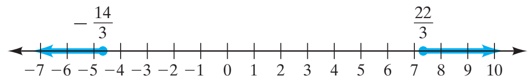
Ahora multiplique ambos lados de cada desigualdad por el mínimo común denominador, 2. Después resuelva cada desigualdad.

$$\cancel{2}\left(\frac{3x-4}{\cancel{2}}\right) \leq -9 \cdot 2 \qquad \text{o} \qquad \cancel{2}\left(\frac{3x-4}{\cancel{2}}\right) \geq 9 \cdot 2$$

$$3x - 4 \leq -18 \qquad\qquad 3x - 4 \geq 18$$

$$3x \leq -14 \qquad\qquad 3x \geq 22$$

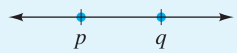
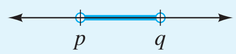
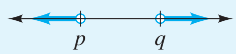
$$x \leq -\frac{14}{3} \qquad\qquad x = \ \geq \frac{22}{3}$$



Ahora resuelva el ejercicio 57

Sugerencia útil

A continuación damos alguna información general acerca de las ecuaciones y desigualdades con valor absoluto. Para números reales a, b y c donde $a \neq 0$ y $c > 0$:

Forma de la ecuación o desigualdad	La solución será:	Solución en la recta numérica:
$\lvert ax + b\rvert = c$	Dos números distintos, p y q.	
$\lvert ax + b\rvert < c$	El conjunto de números entre dos números, $p < x < q$	
$\lvert ax + b\rvert > c$	El conjunto de números menores que un número o mayores que un segundo número, $x < p$ o $x > q$	

5 Resolver desigualdades de la forma $|x| > a$ o $|x| < a$, $a < 0$

Ya resolvimos desigualdades de la forma $|x| < a$ donde $a > 0$. Ahora consideremos lo que sucede en una desigualdad con valor absoluto cuando $a < 0$. Considere la desigualdad $|x| < -3$; como $|x|$ siempre será un valor mayor o igual que 0 para cualquier número real x, esta desigualdad nunca puede ser verdadera, y la solución es el conjunto vacío, $\varnothing$. Siempre que tengamos una desigualdad con valor absoluto de este tipo, la solución será el conjunto vacío.

EJEMPLO 9 Resuelva la desigualdad $|6x - 8| + 5 < 3$.

Solución Comience restando 5 en ambos lados de la desigualdad.

$$|6x - 8| + 5 < 3$$

$$|6x - 8| < -2$$

Como $|6x - 8|$ siempre será mayor o igual que 0 para cualquier número real x, esta desigualdad nunca puede ser verdadera. Así, la solución es el conjunto vacío, $\varnothing$.

Ahora resuelva el ejercicio 41

Ahora considere la desigualdad $|x| > -3$. Como $|x|$ siempre tendrá un valor mayor o igual que 0 para cualquier número real x, esta desigualdad siempre será verdadera. Como todo valor de x hará de esta desigualdad una proposición verdadera, la solución es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$. Siempre que tengamos una desigualdad con valor absoluto de este tipo, la solución será el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 10 ▸ Resuelva la desigualdad $|5x + 3| + 4 \geq -9$.

Solución Comience por restar 4 en ambos lados de la desigualdad.

$$\begin{aligned} |5x + 3| + 4 &\geq -9 \\ |5x + 3| &\geq -13 \end{aligned}$$

Como $|5x + 3|$ siempre será mayor o igual que 0 para cualquier número real x, esta desigualdad es verdadera para todos los números reales; por lo que la solución es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 59**

6 Resolver desigualdades de la forma $|x| > 0$ o $|x| < 0$

Ahora analicemos las desigualdades en las que un lado de la desigualdad es 0. El único valor que satisface la ecuación $|x - 5| = 0$ es 5, ya que 5 hace que la expresión dentro del valor absoluto sea 0. Ahora considere $|x - 5| \leq 0$; como el valor absoluto nunca es negativo, esta desigualdad es cierta sólo cuando $x = 5$. La desigualdad $|x - 5| < 0$ no tiene solución. ¿Puede explicar por qué? ¿Cuál es la solución de $|x - 5| \geq 0$? Como cualquier valor de x dará como resultado que el valor absoluto sea mayor o igual a 0, la solución es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$. ¿Cuál es la solución de $|x - 5| > 0$? La solución es todo número real excepto 5. ¿Puede explicar por qué el 5 se excluye de la solución?

EJEMPLO 11 ▸ Resuelva cada desigualdad. **a)** $|x + 2| > 0$ **b)** $|3x - 8| \leq 0$

Solución

a) La desigualdad será verdadera para todo valor de x excepto -2. El conjunto solución es $\{x | x < -2 \text{ o } x > -2\}$.

b) Determine el número que hace al valor absoluto igual a 0 estableciendo que la expresión dentro del valor absoluto sea igual a 0 y despejando x.

$$\begin{aligned} 3x - 8 &= 0 \\ 3x &= 8 \\ x &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

La desigualdad será cierta sólo cuando $x = \frac{8}{3}$. El conjunto solución es $\left\{\frac{8}{3}\right\}$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 61**

7 Resolver ecuaciones de la forma $|x| = |y|$

Ahora analicemos ecuaciones con valor absoluto en las que hay un valor absoluto en ambos lados de la ecuación. Para resolver ecuaciones de la forma $|x| = |y|$, utilice el procedimiento siguiente.

Para resolver ecuaciones de la forma $|x| = |y|$

Si $|x| = |y|$, entonces $x = y$ o $x = -y$.

Cuando resolvamos una ecuación con valor absoluto con una expresión con valor absoluto en cada lado del signo igual, las dos expresiones deben tener el mismo valor absoluto. Por lo tanto, *las expresiones deben ser iguales entre sí o ser opuestas entre sí*.

EJEMPLO 12 Resuelva la ecuación $|z + 3| = |2z - 7|$.

Solución Si hacemos que $z + 3$ sea x y $2z - 7$ sea y, esta ecuación es de la forma $|x| = |y|$. Utilizando el procedimiento dado anteriormente, obtenemos las dos ecuaciones

$$z + 3 = 2z - 7 \quad \text{o} \quad z + 3 = -(2z - 7)$$

Ahora resuelva cada ecuación.

$$\begin{aligned} z + 3 &= 2z - 7 \\ 3 &= z - 7 \\ 10 &= z \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} z + 3 &= -(2z - 7) \\ z + 3 &= -2z + 7 \\ 3z + 3 &= 7 \\ 3z &= 4 \\ z &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Verifique

$$\begin{aligned} z = 10 \qquad |z + 3| &= |2z - 7| \\ |10 + 3| &\stackrel{?}{=} |2(10) - 7| \\ |13| &\stackrel{?}{=} |20 - 7| \\ |13| &\stackrel{?}{=} |13| \\ 13 &= 13 \quad \text{Verdadero} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z = \frac{4}{3} \qquad |z + 3| &= |2z - 7| \\ \left|\frac{4}{3} + 3\right| &\stackrel{?}{=} \left|2\left(\frac{4}{3}\right) - 7\right| \\ \left|\frac{13}{3}\right| &\stackrel{?}{=} \left|\frac{8}{3} - \frac{21}{3}\right| \\ \left|\frac{13}{3}\right| &\stackrel{?}{=} \left|-\frac{13}{3}\right| \\ \frac{13}{3} &= \frac{13}{3} \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\left\{10, \frac{4}{3}\right\}$.

Ahora resuelva el ejercicio 63

EJEMPLO 13 Resuelva la ecuación $|4x - 7| = |6 - 4x|$.

Solución

$$\begin{aligned} 4x - 7 &= 6 - 4x \\ 8x - 7 &= 6 \\ 8x &= 13 \\ x &= \frac{13}{8} \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} 4x - 7 &= -(6 - 4x) \\ 4x - 7 &= -6 + 4x \\ -7 &= -6 \quad \text{Falso} \end{aligned}$$

Como la ecuación $4x - 7 = -(6 - 4x)$ tiene como resultado una proposición falsa, la ecuación con valor absoluto tiene una única solución. Una verificación mostrará que el conjunto solución es $\left\{\frac{13}{8}\right\}$.

Ahora resuelva el ejercicio 69

Resumen de los procedimientos para resolver ecuaciones y desigualdades con valor absoluto

Para $a > 0$,

Si $|x| = a$, entonces $x = a$ o $x = -a$.

Si $|x| < a$, entonces $-a < x < a$.

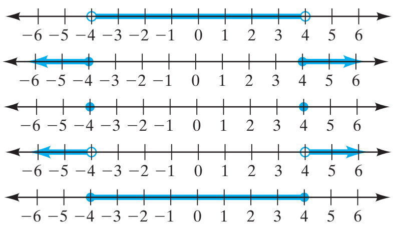
Si $|x| > a$, entonces $x < -a$ o $x > a$.

Si $|x| = |y|$, entonces $x = y$ o $x = -y$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.6

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cómo resolvemos ecuaciones de la forma $|x| = a, a > 0$?
2. Para cada una de las ecuaciones siguientes, determine el conjunto solución y explique cómo determinó su respuesta.
   a) $|x| = -2$
   b) $|x| = 0$
   c) $|x| = 2$
3. ¿Cómo resolvemos desigualdades de la forma $|x| < a, a > 0$?
4. ¿Cómo comprobamos si -7 es una solución para $|2x + 3| = 11$? ¿-7 es una solución?
5. ¿Cómo resolvemos desigualdades de la forma $|x| > a, a > 0$?
6. ¿Cuál es la solución de $|x| < 0$? Explique su respuesta.
7. ¿Cuál es la solución de $|x| > 0$? Explique su respuesta.
8. Suponga que m y n $(m < n)$ son dos soluciones distintas de la ecuación $|ax + b| = c$. Indique las soluciones, usando símbolos de desigualdad y la recta numérica, para cada desigualdad. (Vea la *Sugerencia útil* de la página 129).
   a) $|ax + b| < c$
   b) $|ax + b| > c$
9. Explique cómo resolver una ecuación de la forma $|x| = |y|$.
10. ¿Cuántas soluciones tendrá $|ax + b| = k, a \neq 0$, si
    a) $k < 0$,
    b) $k = 0$,
    c) $k > 0$?
11. ¿Cuántas soluciones tendrán las siguientes ecuaciones o desigualdades, si $a \neq 0$ y $k > 0$?
    a) $|ax + b| = k$
    b) $|ax + b| < k$
    c) $|ax + b| > k$
12. Relacione cada ecuación o desigualdad con valor absoluto etiquetada de la **a)** a la **e)** con la gráfica de su conjunto solución, etiquetado de la A a la E.
    a) $|x| = 4$ A.
    b) $|x| < 4$ B.
    c) $|x| > 4$ C.
    d) $|x| \geq 4$ D.
    e) $|x| \leq 4$ E.



13. Relacione cada ecuación o desigualdad, marcadas de la **a)** a la **e)**, con su conjunto solución marcada con A a la E.
    a) $|x| = 5$ A. $\{x|x \leq -5 \text{ o } x \geq 5\}$
    b) $|x| < 5$ B. $\{x|-5 < x < 5\}$
    c) $|x| > 5$ C. $\{x|-5 \leq x \leq 5\}$
    d) $|x| \leq 5$ D. $\{-5, 5\}$
    e) $|x| \geq 5$ E. $\{x|x < -5 \text{ o } x > 5\}$
14. Suponga que $|x| < |y|$ y $x < 0$ y $y < 0$.
    a) ¿Cuál de lo siguiente debe ser verdadero: $x < y$, $x > y$ o $x = y$?
    b) Dé un ejemplo que apoye su respuesta a la parte **a)**.

Práctica de habilidades

Determine el conjunto solución para cada ecuación.

15. $|a| = 2$
16. $|b| = 17$
17. $|c| = \frac{1}{2}$
18. $|x| = 0$
19. $|d| = -\frac{5}{6}$
20. $|l + 4| = 6$
21. $|x + 5| = 8$
22. $|3 + y| = \frac{3}{5}$
23. $|4.5q + 31.5| = 0$
24. $|4.7 - 1.6z| = 14.3$
25. $|5 - 3x| = \frac{1}{2}$
26. $|6(y + 4)| = 24$
27. $\left|\frac{x - 3}{4}\right| = 5$
28. $\left|\frac{3z + 5}{6}\right| - 2 = 7$
29. $\left|\frac{x - 3}{4}\right| + 8 = 8$
30. $\left|\frac{5x - 3}{2}\right| + 5 = 9$

Determine el conjunto solución para cada desigualdad.

31. $|w| < 11$
32. $|p| \leq 9$
33. $|q + 5| \leq 8$
34. $|7 - x| < 6$
35. $|5b - 15| < 10$
36. $|x - 3| - 7 < -2$
37. $|2x + 3| - 5 \leq 10$
38. $|4 - 3x| - 4 < 11$
39. $|3x - 7| + 8 < 14$
40. $\left|\frac{2x - 1}{9}\right| \leq \frac{5}{9}$
41. $|2x - 6| + 5 \leq 1$
42. $|2x - 3| < -10$
43. $\left|\frac{1}{2}j + 4\right| < 7$
44. $\left|\frac{k}{4} - \frac{3}{8}\right| < \frac{7}{16}$
45. $\left|\frac{x - 3}{2}\right| - 4 \leq -2$
46. $\left|7x - \frac{1}{2}\right| < 0$

Determine el conjunto solución para cada desigualdad.

47. $|y| > 2$
48. $|a| \geq 13$
49. $|x + 4| > 5$

50. $|2b - 7| > 3$
51. $|7 - 3b| > 5$
52. $\left|\dfrac{6 + 2z}{3}\right| > 2$

53. $|2h - 5| > 3$
54. $|2x - 1| \geq 12$
55. $|0.1x - 0.4| + 0.4 > 0.6$

56. $|3.7d + 6.9| - 2.1 > -5.4$
57. $\left|\dfrac{x}{2} + 4\right| \geq 5$
58. $\left|4 - \dfrac{3x}{5}\right| \geq 9$

59. $|7w + 3| - 12 \geq -12$
60. $|2.6 - x| \geq 0$
61. $|4 - 2x| > 0$
62. $|2c - 8| > 0$

Determine el conjunto solución para cada ecuación.

63. $|3p - 5| = |2p + 10|$
64. $|6n + 3| = |4n - 13|$
65. $|6x| = |3x - 9|$

66. $|5t - 10| = |10 - 5t|$
67. $\left|\dfrac{2r}{3} + \dfrac{5}{6}\right| = \left|\dfrac{r}{2} - 3\right|$
68. $|3x - 8| = |3x + 8|$

69. $\left|-\dfrac{3}{4}m + 8\right| = \left|7 - \dfrac{3}{4}m\right|$
70. $\left|\dfrac{3}{2}r + 2\right| = \left|8 - \dfrac{3}{2}r\right|$

Determine el conjunto solución para cada ecuación o desigualdad.

71. $|h| = 1$
72. $|y| \leq 8$
73. $|q + 6| > 2$

74. $|9d + 7| \leq -9$
75. $|2w - 7| \leq 9$
76. $|2z - 7| + 5 > 8$

77. $|5a - 1| = 9$
78. $|2x - 4| + 5 = 13$
79. $|5 + 2x| > 0$

80. $|7 - 3b| = |5b + 15|$
81. $|4 + 3x| \leq 9$
82. $|2.4x + 4| + 4.9 > 3.9$

83. $|3n + 8| - 4 = -10$
84. $|4 - 2x| - 3 = 7$
85. $\left|\dfrac{w + 4}{3}\right| + 5 < 9$

86. $\left|\dfrac{5t - 10}{6}\right| > \dfrac{5}{3}$
87. $\left|\dfrac{3x - 2}{4}\right| - \dfrac{1}{3} \geq -\dfrac{1}{3}$
88. $\left|\dfrac{2x - 4}{5}\right| = 14$

89. $|2x - 8| = \left|\dfrac{1}{2}x + 3\right|$
90. $\left|\dfrac{1}{3}y + 3\right| = \left|\dfrac{2}{3}y - 1\right|$
91. $|2 - 3x| = \left|4 - \dfrac{5}{3}x\right|$

92. $\left|\dfrac{-2u + 3}{7}\right| \leq 5$

Resolución de problemas

93. Grosor de vidrio Idealmente, ciertos tipos de vidrios fabricados por las industrias PPG tendrán un grosor de 0.089 pulgadas. Sin embargo, debido a las limitaciones en el proceso de fabricación, se permite que el grosor varíe con respecto al grosor ideal hasta en 0.004 pulgadas. Si t representa el grosor real del vidrio, entonces el rango de grosor permitido puede representarse por medio de la desigualdad $|t - 0.089| \leq 0.004$.

Fuente: www.ppg.com

a) Resuelva esta desigualdad para t (utilice la notación de intervalo).
b) ¿Cuál es el grosor más pequeño permitido para el vidrio?
c) ¿Cuál es el mayor grosor permitido para el vidrio?

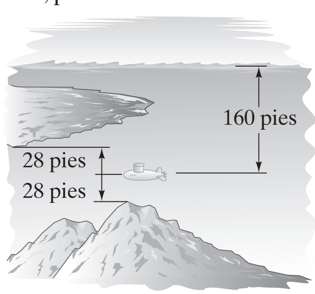
94. Garantía de madera laminada Cierto tipo de madera laminada fabricada por Lafor International garantiza que tiene un grosor de $\frac{5}{8}$ de pulgada con una tolerancia de más o menos $\frac{1}{56}$ de pulgada. Si t representa el grosor real de la madera laminada, entonces el rango permitido puede representarse por medio de la desigualdad $\left|t - \dfrac{5}{8}\right| \leq \dfrac{1}{56}$.

Fuente: www.sticktrade.com

a) Resuelva esta desigualdad para t (utilice la notación de intervalo).
b) ¿Cuál es el menor grosor permitido para la madera laminada?
c) ¿Cuál es el mayor grosor permitido para la madera laminada?

95. Profundidad de un submarino Un submarino está 160 pies por debajo del nivel del mar, y tiene una formación rocosa arriba y abajo de él por lo que no debe cambiar su profundidad en más de 28 pies. Su distancia por debajo del nivel del mar, d, puede describirse por medio de la desigualdad $|d - 160| \leq 28$.

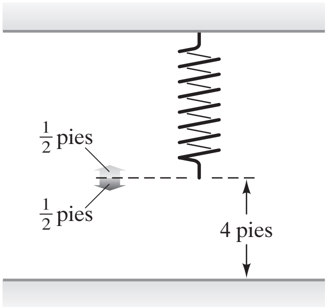
a) Resuelva la desigualdad para d. Escriba su respuesta en notación de intervalo.
b) ¿Entre qué distancias verticales, medidas con respecto al nivel del mar, puede moverse el submarino?



96. Un resorte que oscila Un resorte sujeto al techo está oscilando hacia arriba y hacia abajo de modo que su distancia, d, con respecto al piso satisface la desigualdad $|d - 4| \leq \frac{1}{2}$ pie (vea la figura).

a) Resuelva esta desigualdad para d. Escriba su respuesta en notación de intervalo.

b) ¿Entre qué distancias, medidas con respecto al piso, oscilará el resorte?



En los ejercicios del 97 al 100, determine una ecuación o una desigualdad que tenga el conjunto solución dado.

97. $\{-5, 5\}$ **98.** $\{x|-5 < x < 5\}$

99. $\{x|x \leq -5 \text{ o } x \geq 5\}$ **100.** $\{x|-5 \leq x \leq 5\}$

101. ¿Para qué valores de x será verdadera la desigualdad $|ax + b| \leq 0$? Explique.

102. ¿Para qué valores de x *no* será verdadera la desigualdad $|ax + b| > 0$? Explique.

103. a) Explique cómo determinar la solución para la ecuación $|ax + b| = c$. (Suponga que $c > 0$ y $a \neq 0$).

b) Resuelva esta ecuación para x.

104. a) Explique cómo determinar la solución para la desigualdad $|ax + b| < c$. (Suponga que $a > 0$ y $c > 0$).

b) Resuelva esta desigualdad para x.

105. a) Explique cómo determinar la solución para la desigualdad $|ax + b| > c$. (Suponga que $a > 0$ y $c > 0$).

b) Resuelva esta desigualdad para x.

106. a) ¿Cuál es el primer paso para resolver la desigualdad $-4|3x - 5| \leq -12$?

b) Resuelva esta desigualdad y proporcione la solución en notación de intervalo.

Determine qué valores de x harán verdadera cada ecuación. Explique su respuesta.

107. $|x - 4| = |4 - x|$ **108.** $|x - 4| = -|x - 4|$ **109.** $|x| = x$ **110.** $|x + 2| = x + 2$

Resuelva. Explique cómo determinó su respuesta.

111. $|x + 1| = 2x - 1$ **112.** $|3x + 1| = x - 3$ **113.** $|x - 4| = -(x - 4)$

Retos

Resuelva considerando los signos posibles para x.

114. $|x| + x = 8$ **115.** $x + |-x| = 8$ **116.** $|x| - x = 8$ **117.** $x - |x| = 8$

Actividad en grupo

Analice y responda el ejercicio 118 en grupo.

118. Considere la ecuación $|x + y| = |y + x|$.

a) Cada miembro del grupo seleccione un valor para x y uno para y, y determine si la ecuación se cumple. Repita para otros dos valores de x y y.

b) Como grupo, determine para qué valores de x y y es verdadera la ecuación. Explique su respuesta.

c) Ahora considere $|x - y| = -|y - x|$. ¿Bajo qué condiciones esta ecuación será verdadera?

Ejercicios de repaso acumulativo

Evalúe.

[1.4] **119.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \div \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

120. $4(x + 3y) - 5xy$ cuando $x = 1, y = 3$

[2.4] **121. Natación** Terry Chong cruza a nado un lago a un promedio de 2 millas por hora. Luego da vuelta y regresa a nado; ahora promedia 1.6 millas por hora. Si su tiempo total de nado es 1.5 horas, ¿cuál es el ancho del lago?

[2.5] **122.** Determine el conjunto solución para la desigualdad $3(x - 2) - 4(x - 3) > 2$.

Resumen del capítulo 2

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 2.1	
Propiedades de la igualdad Para todos los números reales a, b y c: **1.** $a = a$. *propiedad reflexiva* **2.** Si $a = b$ entonces $b = a$. *propiedad simétrica* **3.** Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$. *propiedad transitiva*	$9 = 9$ Si $x = 10$, entonces $10 = x$ Si $y = a + b$ y $a + b = 4t$, entonces $y = 4t$.
Los **términos** son las partes que aparecen sumadas en una expresión algebraica. El **coeficiente** es la parte numérica de un término que precede a la variable. El **grado de un término** con exponentes enteros no negativos es la suma de los exponentes en las variables.	En la expresión $9x^2 - 2x + \frac{1}{5}$, los términos son $9x^2$, $-2x$ y $\frac{1}{5}$. **Término** / **Coeficiente** $15x^4y$ / 15 **Término** / **Grado** $17xy^5$ / $1 + 5 = 6$
Términos semejantes son términos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes. **Términos no semejantes** son términos que no son términos semejantes. **Simplificar una expresión** significa reducir (combinar) todos los términos semejantes.	**Términos semejantes** / **Términos no semejantes** $2x, 7x$ / $3x, 4y$ $9x^2, -5x^2$ / $10x^2, 2x^{10}$ $3x^2 + 12x - 5 + 7x^2 - 12x + 1 = 10x^2 - 4$
Una **ecuación** es un enunciado matemático de una igualdad. La **solución** de una ecuación es el o los números que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.	$x + 15 = 36$ La solución para $\frac{1}{2}x + 1 = 7$ es 12.
Una **ecuación lineal en una variable** es una ecuación que tiene la forma $ax + b = c, a \neq 0$	$8x - 3 = 17$
Propiedad de la suma en la igualdad Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$, para cualesquiera números a, b y c.	Si $5x - 7 = 19$, entonces $5x - 7 + 7 = 19 + 7$.
Propiedad de la multiplicación en la igualdad Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$, para cualesquiera números a, b y c.	Si $\frac{1}{3}x = 2$, entonces $3 \cdot \frac{1}{3}x = 3 \cdot 2$.
Para resolver ecuaciones lineales **1.** Elimine las fracciones. **2.** Simplifique cada lado de forma separada. **3.** Aísle el término con la variable en un lado de la ecuación. **4.** Despeje la variable. **5.** Compruebe. Para más detalles, vea la página 69.	Resuelva la ecuación $\frac{1}{2}x + 7 = \frac{4}{3}x - 3$. $\frac{1}{2}x + 7 = \frac{4}{3}x - 3$ $6\left(\frac{1}{2}x + 7\right) = 6\left(\frac{4}{3}x - 3\right)$ $3x + 42 = 8x - 18$ $42 = 5x - 18$ $60 = 5x$ $12 = x$ Una verificación muestra que 12 es la solución.
Sección 2.2	
Un **modelo matemático** es una aplicación de la vida real expresada en forma matemática.	La rapidez, s, de un automóvil aumentada en 20 mph es 60 mph. Modelo: $s + 20 = 60$.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 2.2 (continuación)	
Una **fórmula** es una ecuación que es un modelo matemático para una situación de la vida real.	$A = l \cdot w$
Una **ecuación condicional** es una ecuación que sólo tiene una solución real.	$2x + 4 = 5$
Una **contradicción** es una ecuación que no tiene solución (el conjunto solución es $\varnothing$).	$2x + 6 = 2x + 8$
Una **identidad** es una ecuación que tiene un número infinito de soluciones (el conjunto solución es $\mathbb{R}$).	$3x + 6 = 3(x + 2)$
Guía para la resolución de problemas **1.** Entender el problema. **2.** Traducir el problema a lenguaje matemático. **3.** Realizar los cálculos matemáticos necesarios para resolver el problema. **4.** Comprobar la respuesta obtenida en el paso 3. **5.** Responder la pregunta. Para más detalles, vea la página 77.	Max Johnson le hizo un préstamo personal a Jill Johnson de \$2,000 con una tasa de 3% de interés simple durante seis años. Al término de los seis años, ¿qué interés pagará Jill a Max? Entender Éste es un problema de interés simple. Traducir $i = prt$ Realizar los cálculos $= 2000(0.03)(6)$ $= 360$ Comprobar La respuesta parece razonable. Responder El interés simple que se debe es \$360.
La **fórmula de interés simple** es $i = prt$.	Determine el interés simple al cabo de 2 años, de un préstamo de \$1000 al 6% de interés simple. $i = (1000)(0.06)(2) = 120$ El interés simple es \$120.
La **fórmula del interés compuesto** es $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.	Determine el monto en una cuenta de ahorros para un depósito de \$6500 que paga 4.8% de interés compuesto semestralmente durante 10 años. $A = 6500\left(1 + \frac{0.048}{2}\right)^{2 \cdot 10}$ $\approx 10{,}445.10$ El monto en la cuenta de ahorros es \$10,445.10.
Resolver (o despejar) una ecuación (o fórmula) para una variable significa aislar esa variable.	Resolver, para y, la ecuación $3x + 7y = 2$. $7y = -3x + 2$ $y = -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}$
Sección 2.3	
Las frases y oraciones pueden traducirse a expresiones algebraicas.	Frase: 4 más que 7 veces un número — Expresión algebraica: $7x + 4$
Ángulos complementarios son dos ángulos cuya suma mide 90°.	Si el ángulo $A = 62°$ y el ángulo $B = 28°$, entonces los ángulos A y B son ángulos complementarios.
Ángulos suplementarios son dos ángulos cuya suma mide 180°.	Si el ángulo $A = 103°$ y el ángulo $B = 77°$, entonces los ángulos A y B son ángulos suplementarios.
Sección 2.4	
Una **fórmula para el problema general de movimiento** es cantidad = razón $\cdot$ tiempo.	Determine la cantidad de gas bombeado, cuando se está bombeando gas durante 3 minutos a razón de 6 galones por minuto. $A = 6 \cdot 3 = 18$ galones

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 2.4 (continuación)	
La **fórmula de distancia** es distancia = velocidad · tiempo.	Determine la distancia recorrida cuando un automóvil viaja a 60 millas por hora durante 5 horas. $D = 60 \cdot 5 = 300$ millas
Un **problema de mezcla** es cualquiera donde dos o más calidades se combinan para producir una calidad diferente, o donde una sola cantidad se separa en dos o más cantidades diferentes.	Si 4 litros de una solución al 10% se mezcla con 8 litros de una solución al 16%, determine la concentración de la mezcla. $4(0.10) + 8(0.16) = 12(x)$ o $x = 14\%$
Sección 2.5	
Propiedades utilizadas para resolver desigualdades **1.** Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$. **2.** Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$. **3.** Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$. **4.** Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. **5.** Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$. **6.** Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	**1.** Si $6 > 5$, entonces $6 + 3 > 5 + 3$. **2.** Si $6 > 5$, entonces $6 - 3 > 5 - 3$. **3.** Si $7 > 3$, entonces $7 \cdot 4 > 3 \cdot 4$. **4.** Si $7 > 3$, entonces $\frac{7}{4} > \frac{3}{4}$. **5.** Si $9 > 2$, entonces $9(-3) < 2(-3)$. **6.** Si $9 > 2$, entonces $\frac{9}{-3} < \frac{2}{-3}$.
Una **desigualdad compuesta** está formada al reunir dos desigualdades con la palabra *y* o la palabra *o*.	$x \leq 7$ y $x > 5$ $x < -1$ o $x \geq 4$
Para determinar el conjunto solución de una desigualdad que incluye la palabra *y*, tome la **intersección** de los conjuntos solución de las dos desigualdades.	Resuelva $x \leq 7$ t $x > 5$. La intersección de $\{x\|x \leq 7\}$ y $\{x\|x > 5\}$ es $\{x\|5 < x \leq 7\}$ o $(5, 7]$.
Para determinar el conjunto solución de una desigualdad que incluye la palabra *o*, tome la **unión** de los conjuntos solución de las dos desigualdades.	Resuelva $x < -1$ o $x \geq 4$. La unión de $\{x\|x < -1\}$ con $\{x\|x \geq 4\}$ es $\{x\|x < -1$ o $x \geq 4\}$ o $(-\infty, -1) \cup [4, \infty)$.
Sección 2.6	
Resolver ecuaciones de la forma $\|x\| = a$ Si $\|x\| = a$ y $a > 0$, entonces $x = a$ o $x = -a$.	Resuelva $\|x\| = 6$. $\|x\| = 6$ da $x = 6$ o $x = -6$.
Resolver desigualdades de la forma $\|x\| < a$ Si $\|x\| < a$ y $a > 0$, entonces $-a < x < a$.	Resuelva $\|3x + 1\| < 13$. $-13 < 3x + 1 < 13$ $-\frac{14}{3} < x < 4$ $\left\{x\middle\|-\frac{14}{3} < x < 4\right\}$ o $\left(-\frac{14}{3}, 4\right)$
Resolver desigualdades de la forma $\|x\| > a$ Si $\|x\| > a$ y $a > 0$, entonces $x < -a$ o bien $x > a$.	Resuelva $\|2x - 3\| \geq 5$. $2x - 3 \leq -5$ o $2x - 3 \geq 5$ $2x \leq -2$ $2x \geq 8$ $x \leq -1$ $x \geq 4$ $\{x\|x \leq -1$ o $x \geq 4\}$ o $(-\infty, -1] \cup [4, \infty)$
Si $\|x\| > a$ y $a < 0$, el conjunto solución es $\mathbb{R}$. Si $\|x\| < a$ y $a < 0$, el conjunto solución es $\emptyset$.	$\|x\| > -7$, el conjunto solución es $\mathbb{R}$. $\|x\| < -7$, el conjunto solución es $\emptyset$.
Resolver ecuaciones de la forma $\|x\| = \|y\|$ Si $\|x\| = \|y\|$, entonces $x = y$ o bien $x = -y$.	Resuelva $\|x\| = \|3\|$. $x = 3$ o $x = -3$.

Ejercicios de repaso del capítulo 2

[2.1] *Establezca el grado de cada término.*

1. $15a^3b^5$ **2.** $-5x$ **3.** $-21xyz^5$

Simplifique cada expresión. Si una expresión no puede simplificarse, dígalo.

4. $a(a + 3) - 4(a - 1)$ **5.** $x^2 + 2xy + 6x^2 - 13$

6. $b^2 + b - 9$ **7.** $2[-(x - y) + 3x] - 5y + 10$

Resuelva cada ecuación. Si una ecuación no tiene solución, dígalo.

8. $5(c + 4) - 2c = -(c - 4)$ **9.** $3(x + 1) - 3 = 4(x - 5)$ **10.** $3 + \dfrac{x}{2} = \dfrac{5}{6}$

11. $\dfrac{1}{2}(3t + 4) = \dfrac{1}{3}(4t + 1)$ **12.** $2\left(\dfrac{x}{2} - 4\right) = 3\left(x + \dfrac{1}{3}\right)$ **13.** $3x - 7 = 9x + 8 - 6x$

14. $2(x - 6) = 5 - \{2x - [4(x - 2) - 9]\}$

[2.2] *Evalúe cada fórmula para los valores dados.*

15. $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ cuando $y_2 = 4$, $y_1 = -3$, $x_2 = -8$, $x_1 = 6$ **16.** $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 8$, $b = 10$, $c = -3$

17. $h = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0$ cuando $a = -32$, $v_0 = 0$, $h_0 = 85$, $t = 1$ **18.** $z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ cuando $\overline{x} = 50$, $\mu = 54$, $\sigma = 5$, $n = 25$

Despeje la variable indicada en cada ecuación.

19. $E = IR$, para R **20.** $P = 2l + 2w$, para w **21.** $A = \pi r^2h$, para h

22. $A = \dfrac{1}{2}bh$, para h **23.** $y = mx + b$, para m **24.** $2x - 3y = 5$, para y

25. $R_T = R_1 + R_2 + R_3$, para R_2 **26.** $S = \dfrac{3a + b}{2}$, para a **27.** $K = 2(d + l)$, para l

[2.3] *En los ejercicios del 28 al 32, escriba una ecuación que pueda utilizarse para resolver el problema. Resuelva el problema y verifique su respuesta.*

28. Venta de calendarios El 1 de febrero, todos los calendarios de Hallmark se ponen a la venta con 75% de descuento del precio original. Si Caroline Collins compra un calendario en esa venta por \$7.50, ¿cuál era el precio original del calendario?

29. Aumento de población La población de un pequeño pueblo se incrementa a razón de 350 personas por año. Si la población actual es de 4750, ¿en cuánto tiempo la población alcanzará 7200?

30. Comisión El salario de Celeste Nossiter es de \$300 por semana más 6% de comisión por ventas. ¿Cuánto debe vender Celeste para ganar \$708 en una semana?

31. Comparación de renta de automóviles En el aeropuerto de la ciudad de Kansas, el costo de la renta de un Ford Focus en Hertz es \$24.99 por día con millaje ilimitado. El costo de rentar el mismo automóvil en Avis es \$19.99 por día más \$0.10 por milla que el automóvil sea conducido. Si Cathy Panik necesita rentar un automóvil durante 3 días, determine el número de millas que ella necesitaría conducir para que el costo de la renta del automóvil sea el mismo para ambas compañías.

32. Venta En una venta por liquidación, los muebles se venden al 40% de su precio regular. Además, a los artículos con etiqueta verde se les descuentan \$20 adicionales. Si Alice Barr adquirió un artículo con etiqueta verde y pagó \$136, determine su precio regular.

[2.4] *En los ejercicios del 33 al 37, resuelva los siguientes problemas de movimiento y de mezcla.*

33. Inversión de un bono Después de que Ty Olden recibió un bono en el trabajo por \$5000, invirtió parte del dinero en una cuenta del mercado de valores que produce 3.5% de interés simple y el resto en un certificado de depósito que produce 4.0% de interés simple. Si la cantidad total de interés que el señor Olden ganó durante el año fue \$187.15, determine el monto total invertido en cada inversión.

34. Soluciones de fertilizantes Dale Klitzke tiene soluciones de fertilizante líquido que contienen 20 y 60% de nitrógeno. ¿Cuántos galones de cada una de estas soluciones debe Dale mezclar para obtener 250 galones de una solución que contenga 30% de nitrógeno?

35. Dos trenes Dos trenes parten de Portland, Oregon, al mismo tiempo en direcciones opuestas. Un tren viaja a 60 millas por hora y el otro a 80 millas por hora. ¿En cuántas horas estarán a 910 millas de distancia entre sí?

36. **Transbordadores espaciales** El transbordador espacial 2 despega 0.5 hora después de que despega el transbordador espacial 1. Si el transbordador 2 viaja a 300 millas por hora más rápido que el transbordador 1 y lo rebasa exactamente 5 horas después de haber despegado, encuentre
   a) la velocidad del transbordador espacial 1
   b) la distancia desde el lugar de lanzamiento hasta donde el transbordador 2 rebasa al transbordador 1.

37. **Mezcla de café** El señor Tom Tomlins, propietario de un café gourmet, vende dos tipos de café, uno en \$6.00 la libra y el otro a \$6.80 la libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de café debe mezclar para producir 40 libras de café que venda a \$6.50 la libra?

[2.3, 2.4] *Resuelva.*

38. **Venta de electrónica** En ciudad Circuit, el precio de un teléfono inalámbrico se redujo en 20%. Si el precio de venta es \$28.80, determine el precio original.

39. **Caminata** Nicolle Ryba trota una distancia y luego da vuelta y camina de regreso al punto donde empezó. Mientras trota promedia 7.2 millas por hora, y mientras camina promedia 2.4 millas por hora. Si el tiempo total que emplea en el trote y en la caminata fue de 4 horas, determine
   a) el tiempo total que trotó, y
   b) la distancia total que recorrió.

40. **Medidas de ángulos** Determine las medidas de tres ángulos de un triángulo si uno de ellos mide 25° más que el ángulo más pequeño y el otro ángulo mide 5° menos que el doble del ángulo menor.

41. **Alberca** Dos mangueras llenan una alberca. La manguera con mayor diámetro suministra 1.5 veces más agua que la de menor diámetro. La manguera mayor se abre 2 horas antes de haber abierto la menor. Si después de 5 horas de haber abierto la mayor hay 3150 galones de agua en la alberca, encuentre la velocidad de flujo de cada manguera.

42. **Ángulos complementarios** Un ángulo complementario tiene una medida que es 30° menos que el doble de la medida del otro ángulo. Determine las medidas de los dos ángulos.

43. **Tinte azul** Un fabricante de telas tiene dos soluciones de tinte azul, ambas hechas del mismo concentrado. Una solución tiene 6% de tinte azul y la otra tiene 20%. ¿Cuántas onzas de la solución al 20% debe mezclar con 10 onzas de solución al 6% para que la mezcla tenga 12% de solución de tinte azul?

44. **Dos inversiones** David Alevy invierte \$12,000 en dos cuentas de ahorro. Una cuenta paga 10% de interés simple y la otra cuenta paga 6% de interés simple. Si en un año se gana el mismo interés en cada cuenta. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

45. **Gimnasio** El gimnasio West Ridge tiene dos planes de membresía. Con el primer plan se pagan \$40 al mes más un cargo de \$1.00 por visita. El segundo plan es de \$25 mensual más un pago de \$4.00 por visita. ¿Cuántas visitas debe hacer Jeff Feazell al mes para que le convenga el primer plan?

46. **Trenes en Alaska** Dos trenes parten de Anchorage al mismo tiempo, en vías paralelas, viajando en direcciones opuestas. El tren más rápido viaja 10 millas por hora más rápido que el más lento. Encuentre la velocidad de cada tren, si los trenes están separados una distancia de 270 millas después de 3 horas.

[2.5] *Resuelva la desigualdad. Grafique la solución en una recta numérica.*

47. $3z + 9 \leq 15$

48. $8 - 2w > -4$

49. $2x + 1 > 6$

50. $26 \leq 4x + 5$

51. $\dfrac{4x + 3}{3} > -5$

52. $2(x - 1) > 3x + 8$

53. $-4(x - 2) \geq 6x + 8 - 10x$

54. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4} > x - \dfrac{x}{2} + 1$

Escriba una desigualdad que pueda usarse para resolver cada problema. Resuelva la desigualdad y responda la pregunta.

55. **Límite de peso** Una canoa puede transportar de manera segura un total de 560 libras. Si Bob y Kathy, juntos, pesan 300 libras, ¿cuál es el número máximo de cajas de 40 libras que pueden llevar de manera segura en su canoa?

56. **Llamada en una caseta telefónica** Michael Lamb, un operador telefónico, le informa a un cliente en una cabina que el cargo por una llamada a Omaha, Nebraska, es de \$4.50 por los primeros 3 minutos y 95 centavos cada minuto o fracción de minuto adicional. ¿Cuánto tiempo puede hablar el cliente si tiene \$8.65?

57. **Gimnasio** Un gimnasio garantiza a sus clientes la pérdida de peso por un mínimo de 5 libras la primera semana y $1\frac{1}{2}$ libras cada semana adicional. Encuentre el tiempo máximo necesario para perder 27 libras.

58. **Calificaciones en exámenes** Las primeras cuatro calificaciones de Patrice Lee son 94, 73, 72 y 80. Si para recibir una nota final de B, es necesario un promedio final mayor o igual a 80 y menor que 90, ¿qué rango de calificaciones en el quinto y último examen tendrá como resultado que Patrice reciba una B en el curso? Suponga que una calificación máxima de 100.

Resuelva cada desigualdad. Escriba la solución en notación de intervalo.

59. $1 < x - 4 < 7$

60. $8 < p + 11 \leq 16$

61. $3 < 2x - 4 < 12$

62. $-12 < 6 - 3x < -2$

63. $-1 < \frac{5}{9}x + \frac{2}{3} \leq \frac{11}{9}$

64. $-8 < \frac{4 - 2x}{3} < 0$

Determine el conjunto solución para cada desigualdad compuesta.

65. $h \leq 1$ y $7h - 4 > -25$

66. $2x - 1 > 5$ o $3x - 2 \leq 10$

67. $4x - 5 < 11$ y $-3x - 4 \geq 8$

68. $\frac{7 - 2g}{3} \leq -5$ o $\frac{3 - g}{9} > 1$

[2.5, 2.6] *Determine el conjunto solución para cada ecuación o desigualdad.*

69. $|a| = 2$

70. $|x| < 8$

71. $|x| \geq 9$

72. $|l + 5| = 13$

73. $|x - 2| \geq 5$

74. $|4 - 2x| = 5$

75. $|-2q + 9| < 7$

76. $\left|\frac{2x - 3}{5}\right| = 1$

77. $\left|\frac{x - 4}{3}\right| < 6$

78. $|4d - 1| = |6d + 9|$

79. $|2x - 3| + 4 \geq -17$

Resuelva cada desigualdad. Proporcione la solución en notación de intervalo.

80. $|3c + 8| - 6 \leq 1$

81. $3 < 2x - 5 \leq 11$

82. $-6 \leq \frac{3 - 2x}{4} < 5$

83. $2p - 5 < 7$ y $9 - 3p \leq 15$

84. $x - 3 \leq 4$ o $2x - 5 > 7$

85. $-10 < 3(x - 4) \leq 18$

Examen de práctica del capítulo 2

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección en donde se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en **el CD-Rom que acompaña a este libro.** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. Diga cuál es el grado del término $-3a^2bc^4$.

Simplifique

2. $2p - 3q + 2pq - 6p(q - 3) - 4p$

3. $7q - \{2[3 - 4(q + 7)] + 5q\} - 8$

En los ejercicios del 4 al 8, resuelva la ecuación.

4. $7(d + 2) = 3(2d - 4)$

5. $\frac{r}{12} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

6. $-2(x + 3) = 4\{3[x - (3x + 7)] + 2\}$

7. $7x - 6(2x - 4) = 3 - (5x - 6)$

8. $-\frac{1}{2}(4x - 6) = \frac{1}{3}(3 - 6x) + 2$

9. Determine el valor de S_n para los valores dados.

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, a_1 = 3, r = \frac{1}{3}, n = 3$$

10. Despeje b de $c = \frac{a - 5b}{2}$.

11. Despeje b_2 de $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.

En los ejercicios del 12 al 16, escriba una ecuación que pueda usarse para resolver cada problema. Resuelva la ecuación y responda la pregunta que se hace.

12. **Descuento en club de golf** Determine el costo de un conjunto de palos de golf, antes de impuestos, si el costo de los palos más 7% de impuestos es \$668.75.

13. **Costos en un gimnasio** El costo de ser miembro de un gimnasio es \$240 por año, más \$2 por visita (para la limpieza de toallas y gastos de artículos de tocador). Si Bill Rush desea gastar un total de \$400 al año para el gimnasio, ¿cuántas visitas puede hacer?

14. **Paseo en bicicleta** Jeffrey Chang y Roberto Fernández inician en el mismo punto y van en bicicleta en direcciones opuestas. La velocidad de Jeffrey es de 15 millas por hora y la de Roberto es 20 millas por hora. ¿En cuántas horas estarán a 147 millas de distancia?

15. **Solución salina** ¿Cuántos litros de solución salina al 12% deben añadirse a 10 litros de solución salina al 25% para obtener una solución al 20%?

16. **Dos inversiones** June White tiene \$12,000 para invertir. Ella coloca parte de su dinero en una cuenta de ahorros que paga 8% de interés simple y el resto en una cuenta de ahorros que paga el 7% de interés simple. Si el total de intereses de las dos cuentas al final de un año es de \$910, encuentre las cantidades colocadas en cada cuenta.

Resuelva cada desigualdad y grafique la solución en una recta numérica.

17. $3(2q + 4) < 5(q - 1) + 7$

18. $\dfrac{6 - 2x}{5} \geq -12$

Resuelva cada desigualdad y escriba la solución en la notación de intervalo.

19. $x - 3 \leq 4$ y $2x + 1 > 10$

20. $7 \leq \dfrac{2u - 5}{3} < 9$

Determine el conjunto solución para las ecuaciones siguientes.

21. $|2b + 5| = 9$

22. $|2x - 3| = \left|\dfrac{1}{2}x - 10\right|$

Determine el conjunto solución para las desigualdades siguientes.

23. $|4z + 12| = 0$

24. $|2x - 3| + 6 > 11$

25. $\left|\dfrac{2x - 3}{8}\right| \leq \dfrac{1}{4}$

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen siguiente y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revise aquellas preguntas que haya respondido de forma incorrecta. La sección y objetivo donde se estudia el material están indicados después de la respuesta.

1. $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, determine
   a) $A \cup B$
   b) $A \cap B$

2. Diga el nombre de cada propiedad indicada.
   a) $9x + y = y + 9x$
   b) $(2x)y = 2(xy)$
   c) $4(x + 3) = 4x + 12$

Evalúe.

3. $-4^3 + (-6)^2 \div (2^3 - 2)^2$

4. $a^2b^3 + ab^2 - 3b$ cuando $a = -1$ y $b = -2$

5. $\dfrac{8 - \sqrt[3]{27} \cdot 3 \div 9}{|-5| - [5 - (12 \div 4)]^2}$

En los ejercicios 6 y 7, simplifique

6. $(5x^4y^3)^{-2}$

7. $\left(\dfrac{4m^2n^{-4}}{m^{-3}n^2}\right)^2$

8. **Comparación de tamaños de estados** Rhode Island tiene un área territorial de alrededor de 1.045×10^3 millas cuadradas. Alaska tiene un área territorial de casi 5.704×10^5 millas cuadradas. ¿Cuántas veces es más grande el área territorial de Alaska que la de Rhode Island?

En los ejercicios del 9 al 11, resuelva la ecuación.

9. $-3(y + 7) = 2(-2y - 8)$

10. $1.2(x - 3) = 2.4x - 4.98$

11. $\dfrac{2m}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{9}m$

12. Explique la diferencia entre una ecuación lineal condicional, una identidad y una contradicción (ecuación inconsistente). Proporcione un ejemplo de cada una.

13. Evalúe la fórmula $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para $a = 3$, $b = -8$ y $c = -3$.

14. Despeje x de la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$.

15. Resuelva la desigualdad $-4 < \frac{5x - 2}{3} < 2$ y proporcione la respuesta:

a) en una recta numérica,

b) como un conjunto solución y

c) en notación de intervalo.

En los ejercicios 16 y 17, determine el conjunto solución.

16. $|3h - 1| = 8$

17. $|2x - 4| - 6 \geq 18$

18. Venta en el béisbol Una semana después de la serie mundial, la tienda Target marca el precio de todos los artículo para béisbol con un descuento del 40%. Si Maxwell Allen compra un bate de béisbol marca Louisville Slugger por $21, ¿cuál era el precio original del bate?

19. Dos automóviles Dos autos parten de Newark, Nueva Jersey, al mismo tiempo viajando en direcciones opuestas. El auto que viaja hacia el norte se mueve 20 millas por hora más rápido que el auto que viaja hacia el sur. Si los dos autos están a 300 millas de distancia después de 3 horas, determine la velocidad de cada uno.

20. Mezcla de nueces Molly Fitzgerald, propietaria de La Casa de las Nueces de Molly, tiene castañas que cuestan $6.50 por libra y cacahuates que cuestan $2.50 la libra. Si desea producir 40 libras de una mezcla de castañas y cacahuates que vende a $4.00 la libra, ¿cuántas libras de castañas y cuántas de cacahuates debe mezclar Molly?

3 Gráficas y funciones

OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Los dos objetivos principales de este capítulo son brindarle una mejor comprensión de la graficación y de las funciones. La graficación es un elemento clave en éste y en muchos cursos de matemáticas. Las funciones están estrechamente relacionadas con la graficación, y son un concepto unificador en toda la matemática. Usaremos de manera constante las funciones y la graficación en el resto de este libro.

DIARIAMENTE VEMOS GRÁFICAS en periódicos y revistas. Veremos muchas de tales gráficas en este capítulo. Por ejemplo, en el ejercicio 74 de la página 172, se utiliza una gráfica para mostrar el crecimiento en el embarque de monitores LCD.

3.1 Gráficas

1. Localizar puntos en el sistema de coordenadas cartesianas.
2. Dibujar gráficas por medio de puntos.
3. Graficar ecuaciones no lineales.
4. Usar una calculadora graficadora.
5. Interpretar gráficas.

René Descartes

1 Localizar puntos en el sistema de coordenadas cartesianas

Muchas relaciones algebraicas son más fáciles de entender, si podemos ver una representación visual de ellas. Una gráfica es una imagen que muestra la relación entre dos o más variables en una ecuación. Antes de aprender cómo construir una gráfica, debe conocer el sistema de coordenadas cartesiano.

El **sistema de coordenadas cartesiano** (o **rectangular**), nombrado en honor del matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), consiste en dos ejes (o rectas numéricas) en un plano, dibujadas de forma perpendicular una de la otra (**figura 3.1**). Observe cómo los dos ejes determinan **cuadrantes**, etiquetados con numerales romanos, I, II, III y IV.

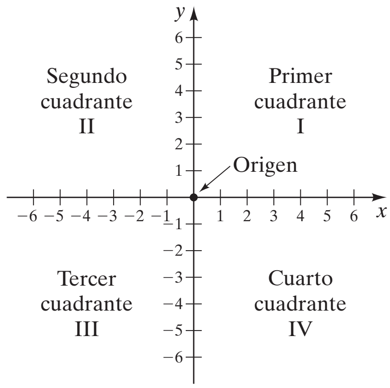


FIGURA 3.1

El eje horizontal se denomina **eje *x***. El eje vertical se denomina **eje *y***. El punto de intersección de los dos ejes se llama **origen**. Iniciando en el origen y moviéndose hacia la derecha, los números crecen; moviéndose hacia la izquierda, los números decrecen. Observe que el eje x y el eje y sólo son rectas numéricas, una horizontal y la otra vertical.

Un **par** (pareja) **ordenado** (x, y) se utiliza para dar las dos **coordenadas** de un punto. Si, por ejemplo, la coordenada x de un punto es 2 y la coordenada y es 3, el par ordenado que representa a ese punto es $(2, 3)$. La coordenada x siempre es la primera coordenada en el par ordenado. Para ubicar un punto, encuentre la coordenada x en el eje x y la coordenada y en el eje y, luego suponga que existe una recta vertical imaginaria desde la coordenada x y una recta horizontal imaginaria desde la coordenada y; el punto se coloca donde se intersequen las dos rectas imaginarias.

Por ejemplo, el punto correspondiente al par ordenado $(2, 3)$ aparece en la **figura 3.2**. Con frecuencia, abreviamos la frase "el punto correspondiente al par ordenado $(2, 3)$" como "el punto $(2, 3)$". Por ejemplo, si escribimos "el punto $(-1, 5)$", esto significa el punto correspondiente al par ordenado $(-1, 5)$. En la **figura 3.3** aparecen los pares ordenados A en $(-2, 3)$, B en $(0, 2)$, C en $(4, -1)$ y D en $(-4, 0)$.

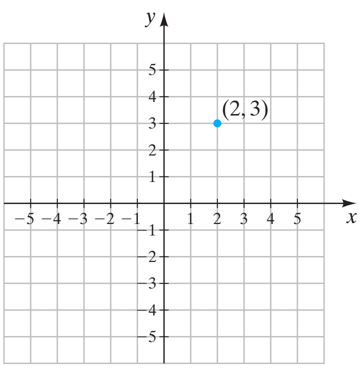


FIGURA 3.2

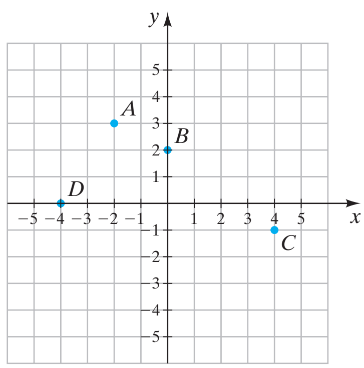


FIGURA 3.3

EJEMPLO 1 ▸ Localice cada uno de los siguientes puntos en el mismo conjunto de ejes.

a) $A(1, 4)$ **b)** $B(5, 5)$ **c)** $C(0, 2)$
d) $D(-3, 0)$ **e)** $E(-3, -1)$ **f)** $F(2, -4)$

Solución Vea la **figura 3.4**. Observe que el punto $(1, 4)$ es diferente del $(4, 1)$. También note que cuando la coordenada x es 0, como en la parte **c)**, el punto está en el eje y. Cuando la coordenada y es 0, como en la parte **d)**, el punto está en el eje x.

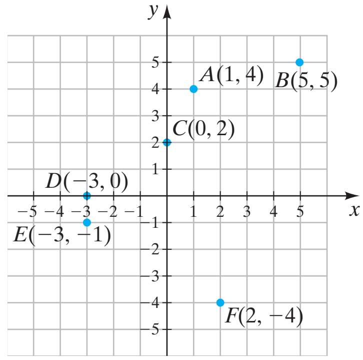


FIGURA 3.4

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 7**

2 Dibujar gráficas por medio de puntos

En el capítulo 2, resolvimos ecuaciones que tenían una variable. Ahora analizaremos ecuaciones que tienen dos variables. Si una ecuación tiene dos variables, sus soluciones son parejas de números.

EJEMPLO 2 ▸ Determine si los siguientes pares ordenados son soluciones de la ecuación $y = 2x - 3$.

a) $(1, -1)$ **b)** $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$
c) $(4, 6)$ **d)** $(-1, -5)$

Solución Sustituimos el primer número en el par ordenado por x y el segundo número por y. Si las sustituciones resultan en un enunciado verdadero, la pareja ordenada es una solución para la ecuación. Si las sustituciones dan como resultado una proposición falsa, la pareja ordenada no es una solución de la ecuación.

a)
$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ -1 &\stackrel{?}{=} 2(1) - 3 \\ -1 &\stackrel{?}{=} 2 - 3 \\ -1 &= -1 \end{aligned}$$
Verdadero

b)
$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ -2 &\stackrel{?}{=} 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3 \\ -2 &\stackrel{?}{=} 1 - 3 \\ -2 &= -2 \end{aligned}$$
Verdadero

c)
$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ 6 &\stackrel{?}{=} 2(4) - 3 \\ 6 &\stackrel{?}{=} 8 - 3 \\ 6 &= 5 \end{aligned}$$
Falso

d)
$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ -5 &\stackrel{?}{=} 2(-1) - 3 \\ -5 &\stackrel{?}{=} -2 - 3 \\ -5 &\stackrel{?}{=} -5 \end{aligned}$$
Verdadero

Por tanto, las parejas ordenadas $(1, -1)$, $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ y $(-1, -5)$ son soluciones para la ecuación $y = 2x - 3$. El par ordenado $(4, 6)$ no es una solución.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 17**

Existen muchas otras soluciones para la ecuación en el ejemplo 2; de hecho, existe una infinidad de soluciones. Un método que puede utilizarse para determinar soluciones de una ecuación como $y = 2x - 3$ es sustituir valores para x y determinar los valores correspondientes de y. Por ejemplo, para determinar la solución para la ecuación $y = 2x - 3$ cuando $x = 0$, sustituimos 0 por x y resolvemos para y.

$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ y &= 2(0) - 3 \\ y &= 0 - 3 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

Así, otra solución para la ecuación es $(0, -3)$.

Una **gráfica** es una ilustración del conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Algunas veces cuando dibujamos una gráfica, listamos en una tabla algunos puntos que satisfacen la ecuación y luego localizamos esos puntos; después dibujamos una línea que pase por esos puntos para obtener la gráfica. A continuación está una tabla de algunos puntos que satisfacen la ecuación $y = 2x - 3$. La gráfica se dibuja en la **figura 3.5**. Observe que la ecuación $y = 2x - 3$ tienen un número infinito de soluciones y que la recta continúa de manera indefinida en ambas direcciones (lo que se indica mediante las flechas).

En la **figura 3.5**, los cuatro puntos están en una línea recta. Puntos que están en una línea recta se dice que son **colineales**. La gráfica se denomina **lineal** ya que es una línea recta. Cualquier ecuación cuya gráfica es una línea recta se denomina **ecuación lineal**. La ecuación $y = 2x - 3$ es un ejemplo de una ecuación lineal. Las ecuaciones lineales, también se les denomina **ecuaciones de primer grado**, ya que el mayor exponente que aparece en las variables es 1. En los ejemplos 3 y 4, graficamos ecuaciones lineales.

x	y	(x, y)
-1	-5	$(-1, -5)$
0	-3	$(0, -3)$
$\frac{1}{2}$	-2	$\left(\frac{1}{2}, -2\right)$
1	-1	$(1, -1)$

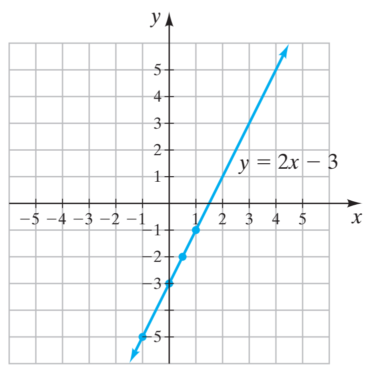


FIGURA 3.5

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

En este capítulo, y en varios de los siguientes, graficaremos puntos y trazaremos gráficas usando el sistema de coordenadas cartesiano. Algunas veces los estudiantes tienen problemas al dibujar gráficas precisas. Las siguientes son algunas sugerencias para mejorar la calidad de sus gráficas.

1. Para su tarea, utilice papel cuadriculado para dibujar sus gráficas. Esto le ayudará a mantener una escala consistente en su gráfica. Pregunte a su profesor si puede utilizar este tipo de papel en sus exámenes.
2. Utilice una regla para dibujar los ejes y rectas. Sus ejes y rectas se verán mucho mejor y mucho más precisos si las dibuja con una regla.
3. Si no utiliza papel cuadriculado, utilice una regla para hacer consistente la escala en sus ejes. Es imposible obtener una gráfica precisa cuando los ejes están marcados con una escala desigual.
4. Utilice un lápiz en lugar de una pluma, pues puede cometer un error al dibujar su gráfica. Así podrá corregir con rapidez un error con una goma y no tendrá que iniciar desde el principio.
5. Necesitará mucha práctica para mejorar sus habilidades. Trabaje todos los problemas que se le asignen. Para verificar sus gráficas de los ejercicios con número par, puede usar una calculadora graficadora.

EJEMPLO 3 ▸ Grafique $y = x$.

Solución Primero determinamos parejas ordenadas que sean soluciones seleccionando valores de x y determinando los valores correspondientes de y. Seleccionaremos 0, algunos valores positivos y algunos valores negativos para x. En general, seleccionaremos números cercanos a 0, de modo que las parejas ordenadas se ajusten en los ejes. La gráfica se ilustra en la **figura 3.6**.

x	y	(x, y)
-2	-2	$(-2, -2)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	2	$(2, 2)$

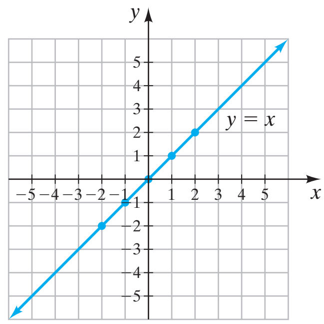


FIGURA 3.6

1. Seleccione valores para x
2. Calcule y
3. Parejas ordenadas
4. Trace los puntos y dibuje la gráfica

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 27**

Al graficar ecuaciones lineales que contienen fracciones solemos seleccionar valores para x que sean múltiplos del denominador del término x. Esta selección, por lo común, da como resultado los valores de y que se convierten en valores enteros. Esto se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 ▸ Grafique $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

Solución Seleccionaremos algunos valores para x, determinaremos los valores correspondientes de y y luego haremos la gráfica. Cuando elegimos valores para x, seleccionaremos algunos valores positivos, algunos valores negativos y 0. La gráfica se ilustra en la **figura 3.7**. (Para ahorrar espacio, en la tabla no siempre listaremos una columna para los pares ordenados).

x	y
-6	3
-3	2
0	1
3	0
6	-1

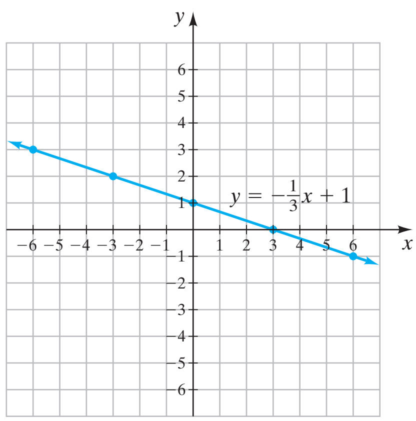


FIGURA 3.7

1. Seleccione valores para x
2. Calcule y
3. Trace los puntos y dibuje la gráfica

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 35**

En el ejemplo 4, observe que seleccionamos valores de x que fueron múltiplos de 3, así no tuvimos que trabajar con fracciones.

Si nos piden graficar una ecuación que no tiene despejada a la y, tal como $x + 3y = 3$, nuestro primer paso será despejar a y de la ecuación. Por ejemplo, si despejamos a y de $x + 3y = 3$, utilizando el procedimiento estudiado en la sección 2.2, obtenemos

$$x + 3y = 3$$

$$3y = -x + 3 \qquad \text{Reste x de ambos lados.}$$

$$y = \frac{-x + 3}{3} \qquad \text{Divida ambos lados entre 3.}$$

$$y = \frac{-x}{3} + \frac{3}{3} = -\frac{1}{3}x + 1$$

La ecuación resultante, $y = -\frac{1}{3}x + 1$, es la misma ecuación que graficamos en el ejemplo 4. Por lo tanto, la gráfica de $x + 3y = 3$ también aparece ilustrada en la **figura 3.7**.

3 Graficar ecuaciones no lineales

Existen muchas ecuaciones cuyas gráficas no son líneas rectas. Tales ecuaciones se denominan **ecuaciones no lineales**. Para graficarlas por medio del trazo de puntos seguimos el mismo procedimiento empleado para graficar ecuaciones lineales. Sin embargo, como las gráficas no son líneas rectas, podríamos necesitar más puntos para dibujar las gráficas.

EJEMPLO 5 ▸ Grafique $y = x^2 - 4$.

Solución Seleccionamos algunos valores para x y determinamos los valores correspondientes de y. Luego trazamos esos puntos y los conectamos por medio de una curva suave. Cuando sustituimos valores para x y evaluamos el lado derecho de la ecuación, seguimos el orden de las operaciones estudiado en la sección 1.4. Por ejemplo, si $x = -3$, entonces $y = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$. La gráfica se muestra en la **figura 3.8**.

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5

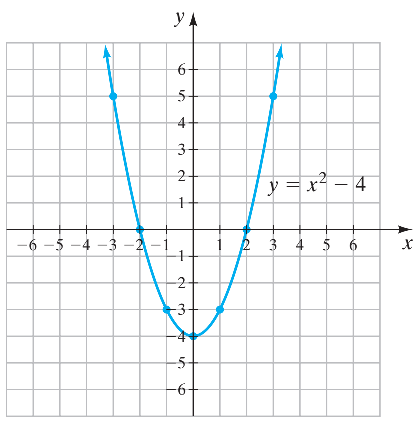


FIGURA 3.8

Si sustituimos 4 por x, y sería igual a 12. Cuando $x = 5$, $y = 21$. Observe que esta gráfica crece de manera consistente alejándose del origen.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 41**

EJEMPLO 6 Grafique $y = \frac{1}{x}$.

Solución Iniciamos por seleccionar valores para x y determinar los valores correspondientes de y. Luego trazamos los puntos y dibujamos la gráfica. Observe que si sustituimos 0 por x, obtenemos $y = \frac{1}{0}$. Como $\frac{1}{0}$ no está definido, no podemos utilizar al 0 como primera coordenada. No habrá parte de la gráfica en $x = 0$. Trazaremos puntos a la izquierda de $x = 0$ y puntos a la derecha de $x = 0$ de forma separada. Seleccione puntos cercanos a 0 para ver qué le sucede a la gráfica cuando x es cercana a $x = 0$. Por ejemplo, observe que cuando $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$. Esta gráfica tiene dos ramas, una a la izquierda del eje y y una a la derecha del eje y, como se muestra en la **figura 3.9**.

x	y
-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$

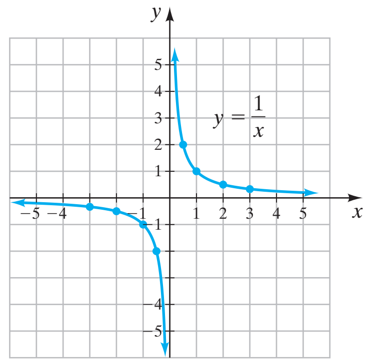


FIGURA 3.9

Ahora resuelva el ejercicio 51

En la gráfica del ejemplo 6, observe que para valores de x lejanos a 0 por la derecha, o lejanos a 0 por la izquierda, la gráfica se aproxima al eje x pero no lo toca. Por ejemplo, cuando $x = 1000$, $y = 0.001$ y cuando $x = -1000$, $y = -0.001$. ¿Puede explicar por qué y nunca puede tener un valor de 0?

EJEMPLO 7 Grafique $y = |x|$.

Solución Recuerde que $|x|$ se lee "valor absoluto de x". Los valores absolutos se estudiaron en la sección 1.3. Para graficar esta ecuación con valor absoluto, seleccionamos algunos valores para x y determinamos los valores correspondientes para y. Por ejemplo, si $x = -4$, entonces $y = |-4| = 4$. Luego trazamos los puntos y dibujamos la gráfica.

Observe que esta gráfica tiene forma de V, como se muestra en la **figura 3.10**.

x	y
-4	4
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4

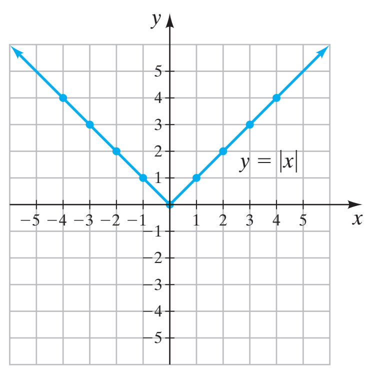


FIGURA 3.10

Ahora resuelva el ejercicio 45

Cómo evitar errores comunes

Cuando se grafican ecuaciones no lineales, muchos estudiantes no trazan suficientes puntos para obtener una imagen verdadera de la gráfica. Por ejemplo, cuando se grafica $y = \frac{1}{x}$ muchos estudiantes sólo consideran valores enteros para x. A continuación está una tabla de valores para la ecuación y dos gráficas que contienen los puntos indicados en la tabla.

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

CORRECTO

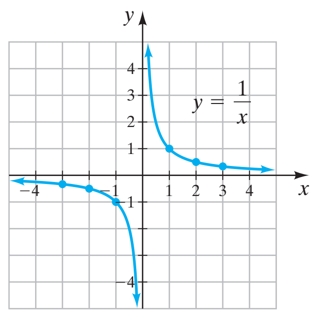


FIGURA 3.11

INCORRECTO

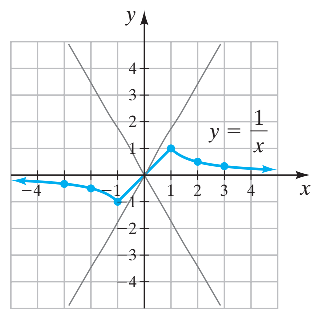


FIGURA 3.12

Si selecciona y traza valores fraccionarios de x cercanos a 0, como se hizo en el ejemplo 6, obtendría la gráfica de la **figura 3.11**. La gráfica de la **figura 3.12** no puede ser correcta ya que la ecuación no está definida cuando x es 0, y por tanto la gráfica no puede cruzar el eje y. Siempre que trace una gráfica que contenga una variable en el denominador, seleccione valores para la variable que estén muy cercanos al valor que haga al denominador igual a 0 y observe lo que sucede. Por ejemplo, cuando grafique $y = \frac{1}{x - 3}$ debe utilizar valores de x cercanos a 3, tales como 2.9 y 3.1 o 2.99 y 3.01, y ver qué valores obtiene para y.

También, cuando grafique ecuaciones no lineales, es buena idea considerar valores positivos y valores negativos. Por ejemplo, si sólo utiliza valores positivos de x cuando grafica $y = |x|$, la gráfica parecería ser una línea recta que pasa por el origen, en lugar de la gráfica en forma de V que se mostró en la **figura 3.10** de la página 149.

4 Usar una calculadora graficadora

Si una ecuación es complicada, determinar parejas de puntos consume tiempo. En esta sección presentamos un procedimiento general que puede usarse para graficar ecuaciones por medio de una **calculadora graficadora**.

Un uso principal de una calculadora graficadora es graficar ecuaciones. Una **ventana de graficación** es la pantalla rectangular en la que se muestra una gráfica.

En este libro todas las ventanas de graficación serán de las calculadoras graficadoras TI-83 Plus o TI-84 Plus. Ambas calculadoras muestran la misma ventana. En los recuadros *Cómo utilizar su calculadora graficadora* utilizados en todo el libro, en ocasiones indicaremos que la secuencia de teclas y las ventanas mostradas son para la calculadora graficadora TI-84 Plus. La misma secuencia de teclas y ventanas también son para la calculadora graficadora TI-83 Plus, aunque podríamos no indicarlo en los recuadros.

La **figura 3.13** muestra la ventana de graficación para una calculadora TI-84 Plus con alguna información ilustrada; la **figura 3.14** muestra el significado de la información dada en la **figura 3.13**.

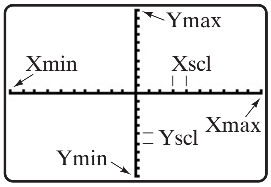


FIGURA 3.13

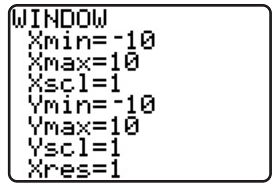
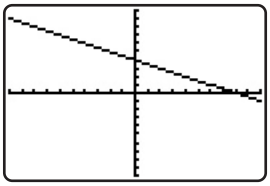


FIGURA 3.14

El eje x en la *pantalla estándar de la calculadora* va desde -10 (el valor mínimo de x, Xmin) hasta 10 (el valor máximo de x, Xmax) con una escala de 1. Por lo tanto, cada marca de división representa 1 unidad (Xscl = 1). El eje y va desde -10 (el valor mínimo de y, Ymin) hasta 10 (el valor máximo de y, Ymax) con una escala de 1 (Yscl = 1).

Como la ventana es rectangular, la distancia entre marcas de división en la ventana estándar son mayores en el eje horizontal que en el eje vertical.



$-10, 10, 1, -10, 10, 1$

FIGURA 3.15

Con frecuencia, al graficar necesitará cambiar los valores de esta ventana. Lea el manual de su calculadora graficadora para aprender a cambiar la configuración de la ventana. En la TI-84 Plus, presione la tecla $\boxed{\text{WINDOW}}$ y luego cambiar los ajustes.

Como la calculadora graficadora no muestra los valores de x y y en la ventana, de forma ocasional listaremos un conjunto de valores debajo de la pantalla. La **figura 3.15** muestra la ventana de una calculadora TI-84 Plus con la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + 4$. Debajo de la ventana mostramos seis números que representan, en orden: Xmin, Xmax, Xscl, Ymin, Ymax y Yscl. Xscl y Yscl representan la escala en los ejes x y y, respectivamente. Cuando mostremos la ventana estándar de la calculadora, por lo general no mostraremos estos valores debajo de la pantalla.

Para graficar la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + 4$ en la TI-84 Plus, presionaría

$$\boxed{Y=}\ \boxed{(-)}\ \boxed{(}\ 1\ \boxed{\div}\ 2\ \boxed{)}\ \boxed{X, T, \Theta, n}\ \boxed{+}\ 4$$

Luego cuando presiona $\boxed{\text{GRAPH}}$, la ecuación se grafica. La tecla $\boxed{X, T, \Theta, n}$ puede usarse para introducir cualquiera de los símbolos en la tecla. En este libro esta tecla siempre se usará para introducir la variable x.

La mayoría de las calculadoras graficadoras ofrecen una **característica TRACE** (rastreo) que le permite investigar puntos individuales después de que se mostró la gráfica. Con frecuencia, la tecla $\boxed{\text{TRACE}}$ se presiona para tener acceso a esta característica. Después de presionar la tecla $\boxed{\text{TRACE}}$ puede mover el cursor a lo largo de la línea presionando las teclas de flechas. Cuando el cursor se mueve a lo largo de la línea, los valores de x y y cambian para corresponder con la posición del cursor. La **figura 3.16** muestra la gráfica de la **figura 3.15** después que se presionó la tecla $\boxed{\text{TRACE}}$ y la tecla de la flecha hacia la derecha se ha presionado varias veces.

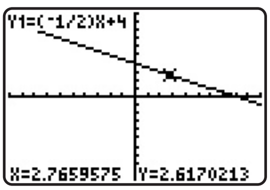


FIGURA 3.16

Muchas calculadoras graficadoras también proporcionan una **característica TABLE** que mostrará una tabla de parejas ordenadas para cualquier función introducida. En la TI-84 Plus, como TABLE aparece arriba de la tecla $\boxed{\text{GRAPH}}$ para obtener una tabla presione $\boxed{2^{\text{nd}}}$ $\boxed{\text{GRAPH}}$. La **figura 3.17** muestra una tabla de valores para la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + 4$. Puede desplazar hacia arriba y hacia abajo la tabla por medio de las teclas de flechas.

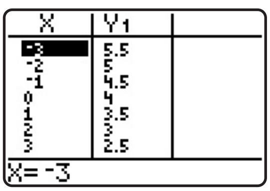


FIGURA 3.17

Mediante TBLSET (por configuración de tabla [Table setup]), puede controlar los valores de x que aparezcan en la tabla. Por ejemplo, si quiere que la tabla muestre los valores de x en décimos, podría hacer esto utilizando TBLSET.

Esta sección sólo es una breve introducción a graficación de ecuaciones, a la característica TRACE y a la característica TABLE de una calculadora graficadora. Usted debe leer el manual de su calculadora graficadora para aprender a utilizar con toda plenitud estas características.

5 Interpretar gráficas

Diariamente vemos una gran diversidad de tipos de gráficas en los periódicos, revistas, televisión, etcétera. A lo largo de este libro, presentamos una variedad de gráficas. Ya que ser capaces de dibujar e interpretar gráficas es muy importante, lo estudiaremos con mayor profundidad en la sección 3.2. En el ejemplo 8 debe entender e interpretar las gráficas para responder la pregunta.

EJEMPLO 8 Cuando Jim Herring fue a visitar a su madre en Cincinnati, él abordó un avión de Southwest Airlines. El avión estuvo en la pista de despegue durante 20 minutos y después despegó. El avión voló a casi 600 millas por hora durante alrededor de 2 horas. Luego redujo su velocidad a 300 millas por hora y voló en círculos alrededor del aeropuerto de Cincinnati durante casi 15 minutos antes de aterrizar. Después de aterrizar, el avión rodó hacia la puerta de salida y se detuvo. ¿Cuál de las gráficas en las figuras **3.18a-3.18d** ilustra mejor esta situación?

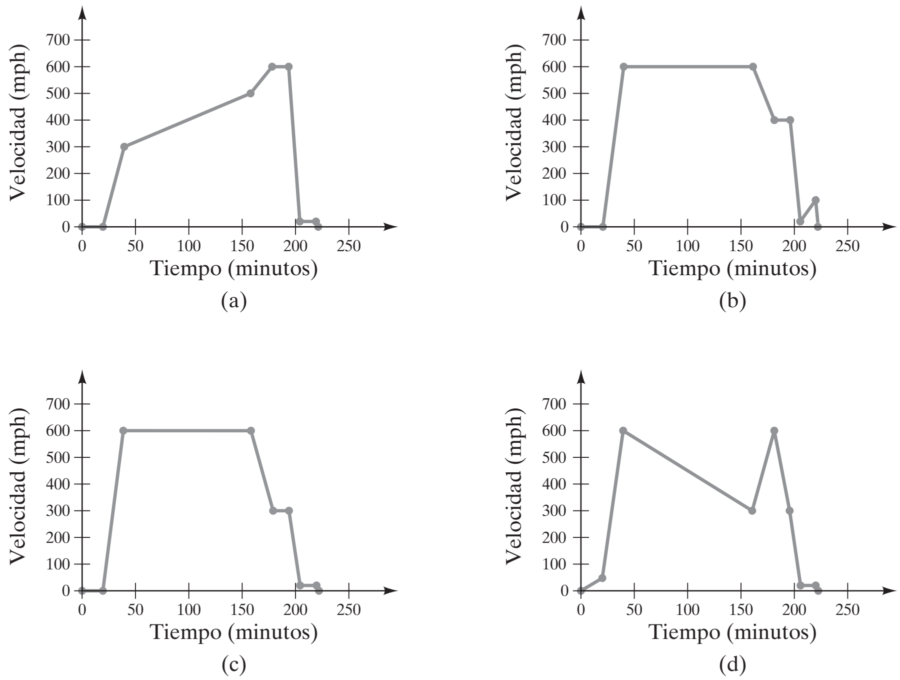


FIGURA 3.18

Solución La gráfica que representa la situación descrita es (c), la cual se reproduce con anotaciones en la **figura 3.19**. Muestra la velocidad contra el tiempo, con el tiempo en el eje horizontal. Mientras el avión se encuentra en la pista de despegue durante 20 minutos, su velocidad es de 0 millas por hora (la recta horizontal en 0 desde 0 hasta 20 minutos). Después de 20 minutos el avión despegó, y su velocidad se incrementó

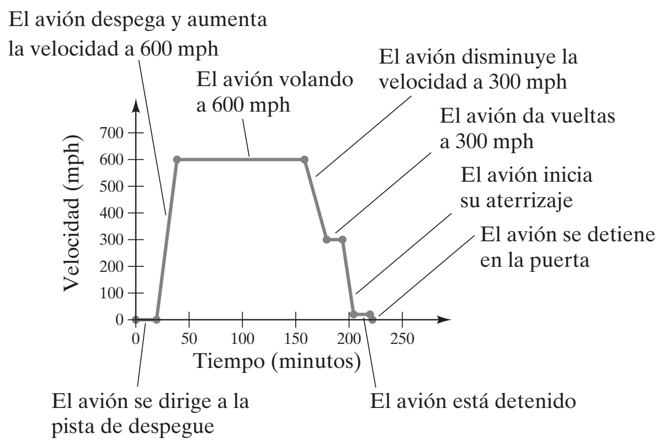


FIGURA 3.19

hasta 600 millas por hora (la recta casi vertical que va de 0 a 600 mph). Luego el avión voló a casi 600 millas por hora durante 2 horas (la recta horizontal en alrededor de 600 mph). Luego desciende a 300 millas por hora (la recta casi vertical de 600 mph a 300 mph). A continuación el avión da vueltas en círculo a casi 300 millas por hora durante 15 minutos (la recta horizontal de alrededor de 300 mph). El avión aterrizó (la recta casi vertical de alrededor de 300 mph a casi 20 mph). Luego rodó hacia la puerta de salida (la recta horizontal en casi 20 mph). Por último, se detuvo en la puerta (la recta casi vertical que cae a 0 mph)

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 81**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) ¿Cómo se ve la gráfica de cualquier ecuación lineal?

b) ¿Cuántos puntos son necesarios para graficar una ecuación lineal? Explique.

2. ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación lineal con dos variables?

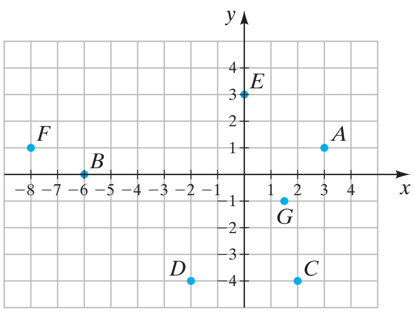
3. ¿Qué significa que un conjunto de puntos sea colineal?

4. Cuando se grafica la ecuación $y = \frac{1}{x}$, ¿qué valor no puede sustituirse para x? Explique.

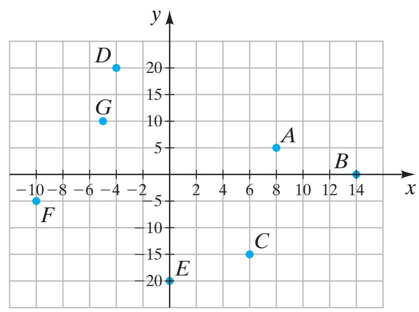
Práctica de habilidades

Liste las parejas ordenadas que corresponden a los puntos indicados.

5.



6.



7. Grafique los puntos siguientes en los mismos ejes.
$A(4, 2)$ $B(-6, 2)$ $C(0, -1)$ $D(-2, 0)$

8. Grafique los puntos siguientes en los mismos ejes.
$A(-4, -2)$ $B(3, 2)$ $C(2, -3)$ $D(-3, 3)$

Determine el cuadrante en el que está cada punto.

9. $(3, 5)$ **10.** $(-9, 1)$ **11.** $(4, -3)$ **12.** $(36, 43)$

13. $(-12, 18)$ **14.** $(-31, -8)$ **15.** $(-11, -19)$ **16.** $(8, -52)$

Determine si la pareja ordenada es una solución para la ecuación dada.

17. $(2, 21)$; $y = 2x - 5$ **18.** $(1, 1)$; $2x + 3y = 6$ **19.** $(-4, -2)$; $y = |x| + 3$ **20.** $(1, -5)$; $y = x^2 + x - 7$

21. $(-2, 5)$; $s = 2r^2 - r - 5$ **22.** $\left(\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right)$; $y = |x - 3|$ **23.** $(2, 1)$; $-a^2 + 2b^2 = -2$

24. $(-10, -2)$; $|p| - 3|q| = 4$ **25.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$; $2x^2 + 6x - y = 0$ **26.** $\left(-3, \frac{7}{2}\right)$; $2m^2 + 3n = 2$

Grafique cada ecuación.

27. $y = x + 1$ **28.** $y = 3x$ **29.** $y = -3x - 5$ **30.** $y = -2x + 2$

31. $y = 2x + 4$ **32.** $y = x + 2$ **33.** $y = \frac{1}{2}x$ **34.** $y = -\frac{1}{3}x$

35. $y = \frac{1}{2}x - 1$ **36.** $y = -\frac{1}{2}x - 3$ **37.** $y = -\frac{1}{3}x + 2$ **38.** $y = -\frac{1}{3}x + 4$

39. $y = x^2$

40. $y = x^2 - 2$

41. $y = -x^2$

42. $y = -x^2 + 4$

43. $y = |x| + 1$

44. $y = |x| + 2$

45. $y = -|x|$

46. $y = -|x| - 3$

47. $y = x^3$

48. $y = -x^3$

49. $y = x^3 + 1$

50. $y = \dfrac{1}{x}$

51. $y = -\dfrac{1}{x}$

52. $x^2 = 1 + y$

53. $x = |y|$

54. $x = y^2$

En los ejercicios del 55 al 62, utilice una calculadora para obtener al menos ocho puntos que son soluciones para la ecuación. Luego grafique la ecuación trazando los puntos.

55. $y = x^3 - x^2 - x + 1$

56. $y = -x^3 + x^2 + x - 1$

57. $y = \dfrac{1}{x + 1}$

58. $y = \dfrac{1}{x} + 1$

59. $y = \sqrt{x}$

60. $y = \sqrt{x + 4}$

61. $y = \dfrac{1}{x^2}$

62. $y = \dfrac{|x^2|}{2}$

63. ¿El punto representado por el par ordenado $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{12}\right)$ está en la gráfica de la ecuación $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$? Explique.

64. ¿El punto representado por el par ordenado $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}\right)$ está en la gráfica de la ecuación $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$? Explique.

65. a) Trace los puntos $A(2, 7)$, $B(2, 3)$, $C(6, 3)$ y luego dibuje $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. ($\overline{AB}$ representa el segmento de recta de A a B).

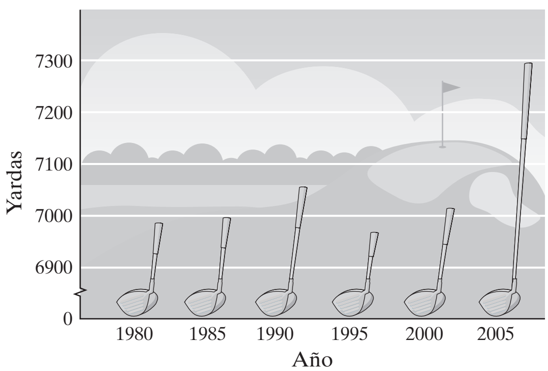
b) Determine el área de la figura.

66. a) Trace los puntos $A(-4, 5)$, $B(2, 5)$, $C(2, -3)$ y $D(-4, -3)$, y luego dibuje $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$.

b) Determine el área de la figura.

67. Campo de golf La gráfica siguiente muestra que la longitud promedio de un campo de golf en los torneos más importantes ha aumentado en los años recientes.

Longitud promedio de campo de golf



Fuente: Rees Jones Inc., PGA Tour, investigación de *USA TODAY.*

a) Estime la longitud promedio del campo de golf, en los torneos más importantes, en 1980.

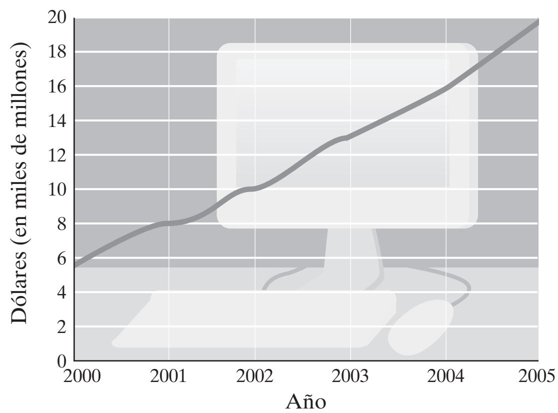
b) Estime la longitud promedio del campo de golf, en los torneos más importantes, en 2005.

c) ¿En cuáles años la longitud promedio fue mayor que 7000 yardas?

d) El aumento en la longitud promedio de los campos de golf, de los torneos más importantes, de 1995 a 2005 parece que es lineal. Explique.

68. Comercio electrónico La gráfica siguiente muestra que el comercio electrónico (ventas por medio de internet) ha aumentado de forma constante. La gráfica muestra las ventas, en el primer trimestre de cada año, durante los años desde 2000 hasta 2005.

Alza en el comercio electrónico



Fuente: Oficina de censos, *USA TODAY* (8/9/05)

a) Estime las ventas por internet en el primer trimestre de 2000.

b) Estime las ventas por internet en el primer trimestre de 2005.

c) ¿En cuáles años las ventas por internet, en el primer trimestre, fueron mayores de $12 mil millones?

d) El aumento en las ventas por internet en el primer trimestre de cada año de 2000 a 2005, ¿parece lineal? Explique.

Analizaremos muchos de los conceptos introducidos en los ejercicios del 69 al 76 en la sección 3.4.

69. Grafique $y = x + 1$, $y = x + 3$ y $y = x - 1$ en los mismos ejes.

a) ¿Qué observa con respecto a las gráficas de las ecuaciones y los valores donde las gráficas intersecan al eje y?

b) ¿Todas las ecuaciones parecen tener la misma inclinación (o pendiente)?

70. Grafique $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x + 3$ y $y = \frac{1}{2}x - 4$ en los mismos ejes.

a) ¿Qué nota con respecto a las gráficas de las ecuaciones y los valores donde las gráficas intersecan al eje y?

b) ¿Todas las ecuaciones parecen tener la misma inclinación (o pendiente)?

71. Grafique $y = 2x$. Determine la *razón de cambio* de y con respecto a x. Esto es, ¿en cuántas unidades cambia y comparado con cada unidad que cambia x?

72. Grafique $y = 4x$. Determine la razón de cambio de y con respecto a x.

73. Grafique $y = 3x + 2$. Determine la razón de cambio de y con respecto a x.

74. Grafique $y = \frac{1}{2}x$. Determine la razón de cambio de y con respecto a x.

75. La pareja ordenada $(3, -7)$ representa un punto en la gráfica de una ecuación lineal. Si y aumenta 4 unidades por cada unidad que aumenta x en la gráfica, determine otras dos soluciones para la ecuación.

76. La pareja ordenada $(1, -4)$ representa un punto en la gráfica de una ecuación lineal. Si y aumenta 3 unidades por cada unidad que aumenta x en la gráfica, determine otras dos soluciones para la ecuación.

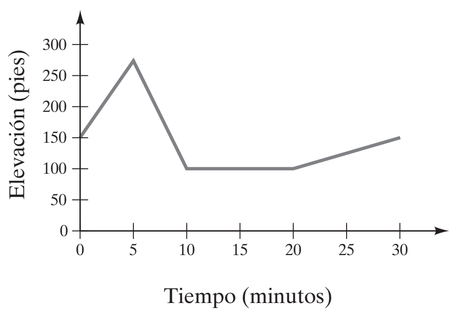
Relacione cada ejercicio del 77 al 80 con la gráfica correspondiente de la altura del nivel del mar con respecto al tiempo, etiquetadas de la a a la d.

77. María Leeseberg caminó durante cinco minutos a nivel del piso. Luego durante cinco minutos escaló una pequeña colina. Después caminó a nivel del piso durante cinco minutos. Posteriormente, durante los siguientes cinco minutos escaló una colina inclinada. Durante los siguientes 10 minutos descendió de manera uniforme hasta que alcanzó la altura a la cual había iniciado.

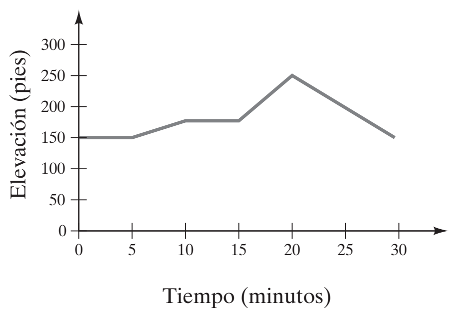
78. Don Gordon caminó a nivel del piso durante cinco minutos, después bajó una colina empinada durante 10 minutos. Los siguientes cinco minutos caminó al nivel del piso. Los siguientes cinco minutos caminó y regresó a la altura en que inició. Los siguientes cinco minutos caminó al nivel del piso.

79. Nancy Johnson inició su caminata ascendente en una colina empinada durante cinco minutos. En los siguientes cinco minutos caminó descendiendo una colina empinada hasta una elevación menor que el punto en que inició. Los siguientes 10 minutos caminó al nivel del piso. Los siguientes 10 minutos caminó hacia arriba en una colina un poco inclinada, en ese momento alcanzó la elevación con que inició.

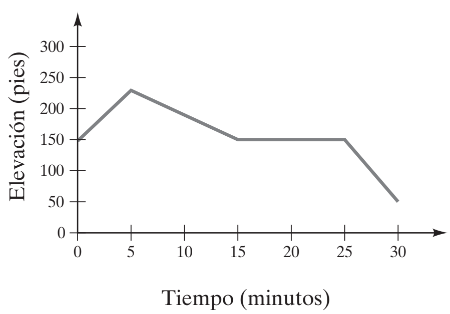
80. James Condor inició ascendiendo una colina durante cinco minutos. Los siguientes 10 minutos descendió caminando una colina hasta una elevación igual a la elevación en que inició. Los siguientes 10 minutos caminó a nivel del piso. Los siguientes cinco minutos caminó descendiendo por la colina.



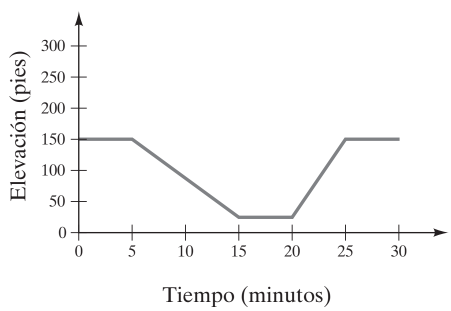
(a)



(c)



(b)



(d)

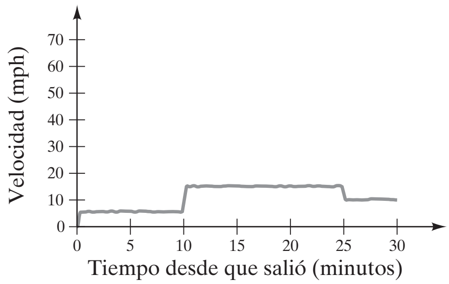
Relacione los ejercicios del 81 al 84 con la gráfica correspondiente de velocidad contra tiempo, etiquetadas con las letras de la a a la d.

81. Para ir al trabajo, Cletidus Hunt caminó durante tres minutos, esperó el tren durante cinco minutos, viajó en el tren durante 15 minutos, y después caminó durante 7 minutos.

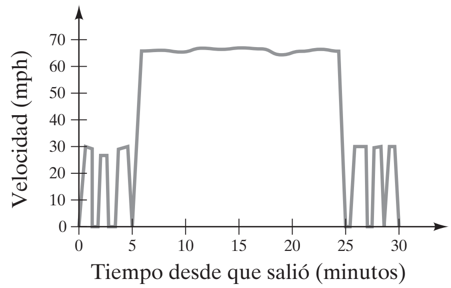
82. Para ir al trabajo, Tyrone Williams condujo en tráfico pesado (paraba y avanzaba) durante cinco minutos, luego manejó en una autopista durante 20 minutos y luego volvió al tráfico pesado durante cinco minutos.

83. Para ir al trabajo, Sheila Washington manejó en una carretera rural durante 10 minutos, después manejó en una autopista durante doce minutos y luego en tráfico pesado durante ocho minutos.

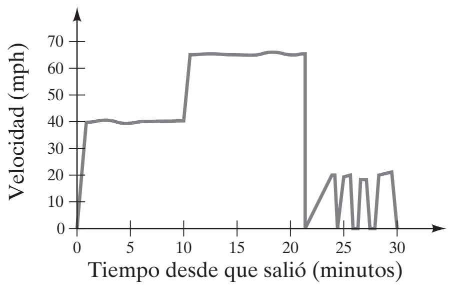
84. Para ir al trabajo, Brenda Pinkney condujo su bicicleta colina arriba durante 10 minutos, después colina abajo durante 15 minutos y luego condujo en una calle plana durante cinco minutos.



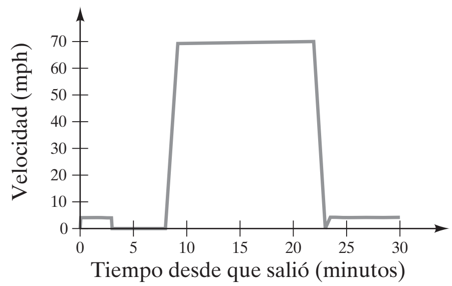
(a)



(c)



(b)



(d)

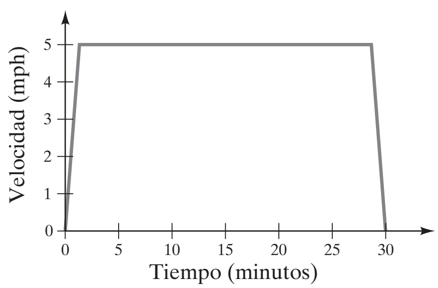
Relacione los ejercicios del 85 al 88 con la gráfica correspondiente de velocidad contra tiempo, etiquetadas de la a a la d.

85. Cristina Dwyer caminó durante cinco minutos para calentar, trotó durante 20 minutos, y después caminó durante cinco minutos para el enfriamiento.

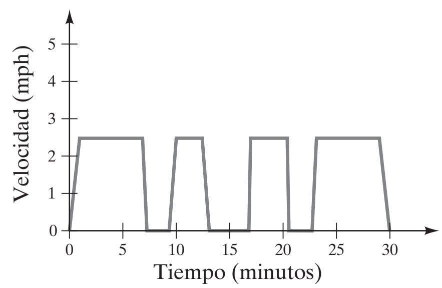
86. Ana Droullard fue por una bicicleta y la condujo a una velocidad constante durante 30 minutos.

87. Miguel Odu tomó un camino a través de su vecindario durante 30 minutos. Se detuvo brevemente en siete ocasiones para recolectar basura.

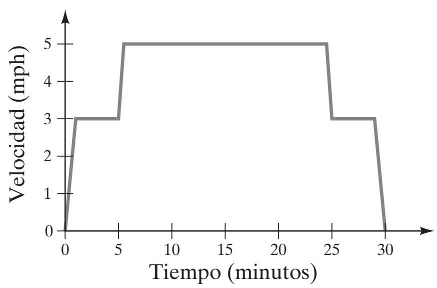
88. Ricardo Dai caminó a través de su vecindario y se detuvo tres veces para platicar con sus vecinos. Estuvo fuera de su casa durante 30 minutos.



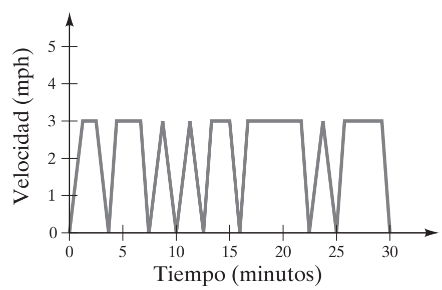
(a)



(c)



(b)



(d)

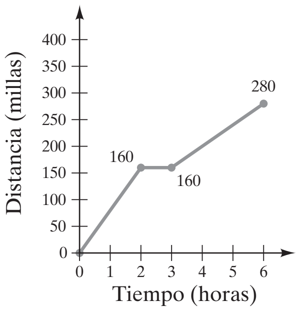
Relacione los ejercicios del 89 al 92 con la gráfica correspondiente de distancia recorrida contra tiempo, etiquetada de la a a la d. Del capítulo 2, recuerde que distancia = velocidad × tiempo. En las gráficas se indican las distancias seleccionadas.

89. El tren A viajó a una velocidad de 40 mph durante una hora, luego durante dos horas a 80 mph y luego a 60 mph durante tres horas.

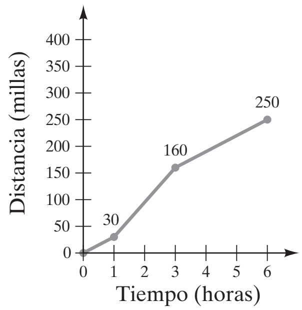
90. El tren C viajó a una velocidad de 80 mph durante dos horas, luego permaneció parado en una estación durante una hora y después viajó a 40 mph durante tres horas.

91. El tren B viajó a una velocidad de 20 mph durante dos horas, luego a 60 mph durante tres horas y luego a 80 mph durante una hora.

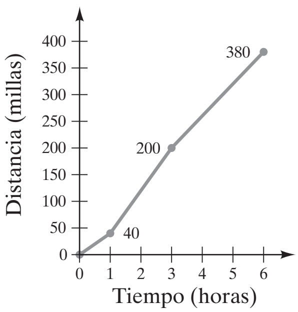
92. El tren D viajó a 30 mph durante una hora, después a 65 mph durante dos horas y después a 30 mph durante tres horas.



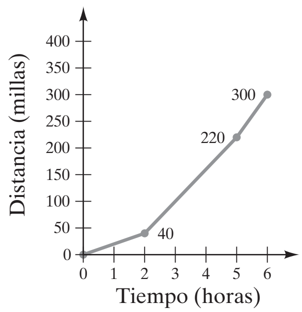
(a)



(c)



(b)



(d)

Utilice una calculadora graficadora para graficar cada función. Asegúrese de seleccionar valores para la ventana que muestre la curvatura de la gráfica. Luego, si su calculadora puede mostrar tablas, despliegue una tabla de valores de x, en unidades, de 0 a 6.

93. $y = 2x - 3$

94. $y = \frac{1}{3}x + 2$

95. $y = x^2 - 2x - 8$

96. $y = -x^2 + 16$

97. $y = x^3 - 2x + 4$

98. $y = 2x^3 - 6x^2 - 1$

Retos

Grafique cada expresión.

99. $y = |x - 2|$

100. $x = y^2 + 2$

Actividad en grupo

Analice y resuelva en grupo los ejercicios del 101 al 102.

101. a) Miembro uno del grupo: Trace los puntos $(-2, 4)$ y $(6, 8)$. Determine *el punto medio* del segmento de recta que conecta estos puntos.

Miembro dos del grupo: Siga las instrucciones anteriores para los puntos $(-3, -2)$ y $(5, 6)$.

Miembro tres del grupo: Siga las instrucciones anteriores para los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 4)$.

b) Como grupo, determine una fórmula para el punto medio de un segmento de línea que conecta los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). (*Nota:* analizaremos la fórmula del punto medio más adelante, en el capítulo 10).

102. Tres puntos en un paralelogramo son: $A(3, 5)$, $B(8, 5)$ y $C(-1, -3)$.

a) De forma individual determine un cuarto punto D que complete el paralelogramo.

b) De forma individual calcule el área de su paralelogramo.

c) Compare sus respuestas. ¿Todos obtuvieron la misma respuesta? Si no, ¿por qué no?

d) ¿Hay más de un punto que se pueda usar para completar el paralelogramo? Si es así, proporcionen los puntos y encuentren las áreas correspondientes de cada uno de los paralelogramos.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **103.** Evalúe $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para $a = 2, b = 7$ y $c = -15$.

[2.3] **104. Renta de un camión** Hertz Truck Rental cobra una cuota diaria de \$60 más \$0.10 por milla. La agencia de renta National Automobile cobra una cuota diaria de \$50 más \$0.24 por milla para el mismo camión. ¿Qué distancia tendría que conducir usted durante un día para que el costo de renta de ambas compañías sea igual?

[2.5] **105.** Resuelva la desigualdad $-1 \leq \dfrac{4 - 3x}{2} < 5$. Escriba la solución en notación constructiva de conjuntos.

[2.6] **106.** Determine el conjunto solución para la desigualdad $|3x + 2| > 7$.

3.2 Funciones

1 Entender las relaciones.

2 Reconocer las funciones.

3 Utilizar la prueba de la recta vertical.

4 Entender la notación de funciones.

5 Aplicación de funciones en la vida diaria.

1 Entender las relaciones

Con frecuencia en la vida diaria encontramos que una cantidad está relacionada con una segunda cantidad. Por ejemplo, la cantidad que gasta en naranjas está relacionada con el número de naranjas que usted compra. La velocidad de un bote de vela está relacionada con la velocidad del viento. Y el impuesto por ingresos que usted paga está relacionado con el ingreso que obtiene.

Suponga que las naranjas cuestan 30 centavos por pieza. Entonces una naranja cuesta 30 centavos, dos naranjas cuestan 60 centavos, tres naranjas cuestan 90 centavos, y así sucesivamente. Podemos listar esta información, o relación, como un conjunto de parejas ordenadas, listando el número de naranjas primero, y el costo en centavos en segundo lugar. Las parejas ordenadas que representan esta situación son $(1, 30)$, $(2, 60)$, $(3, 90)$, etcétera. Una ecuación que representa esta situación es $c = 30n$, donde c es el costo en centavos, y n es el número de naranjas. Como el costo depende del número de naranjas, decimos que el costo es la *variable dependiente* y el número de naranjas es la *variable independiente*.

Ahora considere la ecuación $y = 2x + 3$. Algunas parejas ordenadas que satisfacen esta ecuación son $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 5)$, $(2, 7)$, etcétera. En esta ecuación, el valor obtenido para y depende del valor seleccionado para x. Por lo tanto, x es la *variable independiente* y y es la *variable dependiente*. Observe que en este ejemplo, a diferencia de las naranjas, no existe una conexión física entre x y y. La variable x es la variable independiente y y es la variable dependiente simplemente a consecuencia de su lugar en la ecuación.

Para una ecuación de las variables x y y, si el valor de y depende del valor de x, entonces y es la **variable dependiente** y x es la **variable independiente**. Ya que las cantidades relacionadas pueden representarse como parejas ordenadas, el concepto de **relación** puede definirse como sigue.

Relación

Una **relación** es cualquier conjunto de parejas ordenadas.

Como la ecuación $y = 2x + 3$ puede representarse como un conjunto de parejas ordenadas, es una relación.

2 Reconocer las funciones

Ahora desarrollamos la idea de **función**, uno de los conceptos más importantes en matemáticas. Una función es un tipo especial de relación en la que a cada elemento en un conjunto (llamado el dominio) le corresponde *exactamente un* elemento en un segundo conjunto (llamado el rango).

Considere las naranjas que cuestan 30 centavos por pieza, que acabamos de analizar. Podemos ilustrar el número de naranjas y el costo de las naranjas por medio de la **figura 3.20**.

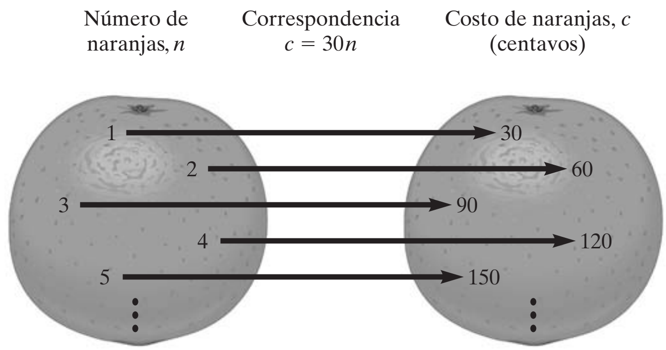


FIGURA 3.20

Observe que cada número en el conjunto de número de naranjas corresponde a (o es transformado en) exactamente un número en el conjunto de costo de naranjas, c. Por consiguiente, esta correspondencia es una función. El conjunto que consiste en el número de naranjas $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, se denomina **dominio**. El conjunto que consiste en los costos en centavos, $\{30, 60, 90, 120, 150, \ldots\}$, se denomina **rango**. En general, el conjunto de valores para la variable independiente se llama **dominio**. El conjunto de valores para la variable dependiente se denomina **rango**, vea la **figura 3.21**.

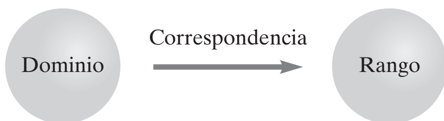


FIGURA 3.21

EJEMPLO 1 Determine si cada correspondencia es una función.

a)
1 → 1
2 → 4
3 → 9

b)
mariquita → insecto
grillo → insecto
águila → ave
halcón → ave

c)
JCPenney → Dallas
JCPenney → Milwaukee
Sears → Chicago

Solución

a) Para que una correspondencia sea una función, cada elemento en el dominio debe corresponder con exactamente un elemento en el rango. Aquí el dominio es $\{1, 2, 3\}$ y el rango es $\{1, 4, 9\}$. Como cada elemento en el dominio corresponde a exactamente un elemento en el rango, esta correspondencia es una función.

b) Aquí el dominio es {mariquita, grillo, águila, halcón} y el rango es {insecto, ave}. Aunque el dominio tiene cuatro elementos y el rango dos, cada elemento en el dominio corresponde con exactamente un elemento en el rango. Por lo tanto, esta correspondencia es una función.

c) Aquí el dominio es {JCPenney, Sears} y el rango es {Dallas, Milwaukee, Chicago}. Observe que JCPenney corresponde tanto a Dallas como a Milwaukee. Por lo tanto, cada elemento en el dominio *no* corresponde a exactamente un elemento en el rango. En consecuencia, esta correspondencia es una relación pero *no* una función.

Ahora resuelva el ejercicio 17

Ahora definiremos de manera formal el concepto de función.

Función

Una **función** es una correspondencia entre un primer conjunto de elementos, el dominio, y un segundo conjunto de elementos, el rango, de modo que cada elemento del dominio corresponde a *exactamente un* elemento en el rango.

EJEMPLO 2 ¿Cuáles de las siguientes relaciones son funciones?

a) $\{(1, 4), (2, 3), (3, 5), (-1, 3), (0, 6)\}$

b) $\{(-1, 3), (4, 2), (3, 1), (2, 6), (3, 5)\}$

Solución

a) El dominio es el conjunto de las primeras coordenadas en el conjunto de parejas ordenadas, $\{1, 2, 3, -1, 0\}$ y el rango es el conjunto de segundas coordenadas, $\{4, 3, 5, 6\}$. Observe que cuando listamos el rango, sólo incluimos el número 3 una vez aunque aparece en $(2, 3)$ y $(-1, 3)$. Al examinar el conjunto de parejas ordenadas, vemos que cada número en el dominio corresponde con exactamente un número en el rango. Por ejemplo, el 1 en el dominio corresponde sólo con el 4 en el rango, y así sucesivamente. Ningún valor de x corresponde a más de un valor de y. Por lo tanto, esta relación *es una función*.

b) El dominio es $\{-1, 4, 3, 2\}$ y el rango es $\{3, 2, 1, 6, 5\}$. Observe que 3 aparece como la primera coordenada de dos parejas ordenadas aunque está listado sólo una vez en el conjunto de elementos que representa al dominio. Como las parejas ordenadas $(3, 1)$ y $(3, 5)$ tienen *la misma primera coordenada* y una segunda coordenada diferente, cada valor en el dominio no corresponde a exactamente un valor en el rango. Por lo tanto, esta relación *no es una función*.

Ahora resuelva el ejercicio 23

El ejemplo 2 conduce a una definición alterna de función.

Función

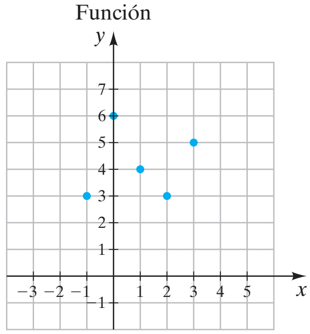
Una **función** es un conjunto de parejas ordenadas en las que ninguna *primera* coordenada se repite.

Si la segunda coordenada en un conjunto de parejas ordenadas se repite, el conjunto de parejas ordenadas todavía puede ser una función, como en el ejemplo 2 **a)**. Sin embargo, si dos o más parejas ordenadas tienen la misma primera coordenada, como en el ejemplo 2 **b)**, el conjunto de parejas ordenadas no es una función.

Ahora consideremos la ecuación $y = 2x + 3$, de la página 158. Como se dijo anteriormente, algunas parejas ordenadas que satisfacen esta ecuación son $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 5)$ y $(2, 7)$. Observe que cada valor de x que sustituimos en la ecuación da un único valor de y. Por lo tanto, la ecuación $y = 2x + 3$ no es sólo una relación, sino también una función. En general, si se nos da una función lineal con variables x y y, en las que x es la variable independiente, como en $y = 2x + 3$, *entonces para cada valor de x hay exactamente un valor de y*. Esta idea la explicaremos más adelante en esta sección.

3 Utilizar la prueba de la recta vertical

La **gráfica de una función o relación** es la gráfica de su conjunto de parejas ordenadas. Los dos conjuntos de parejas ordenadas del ejemplo 2 se grafican en las **figuras 3.22a** y **3.22b**. Observe que en la función de la **figura 3.22a** no es posible trazar una recta vertical que interseque dos puntos. Debemos esperar esto ya que, en una función, cada valor de x debe corresponder a exactamente un valor de y. En la **figura 3.22b** *podemos* trazar una recta vertical a través de los puntos $(3, 1)$ y $(3, 5)$. Esto muestra que cada valor de x no corresponde a exactamente un valor de y, y la gráfica no representa una función.



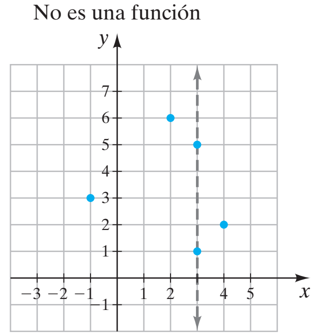


FIGURA 3.22 (a) Primer conjunto de parejas ordenadas (b) Segundo conjunto de parejas ordenadas

Este método para determinar si una gráfica representa una función se denomina **prueba de la recta vertical**.

Prueba de la recta vertical

Si una recta vertical puede dibujarse a través de cualquier parte de la gráfica y la recta interseca otra parte de la gráfica, la gráfica no representa una función. Si una recta vertical no puede dibujarse para intersecar la gráfica en más de un punto, la gráfica representa una función.

Utilizamos la prueba de la recta vertical para mostrar que la **figura 3.23b** representa una función y las **figuras 3.23a** y **3.23c** no representan funciones.

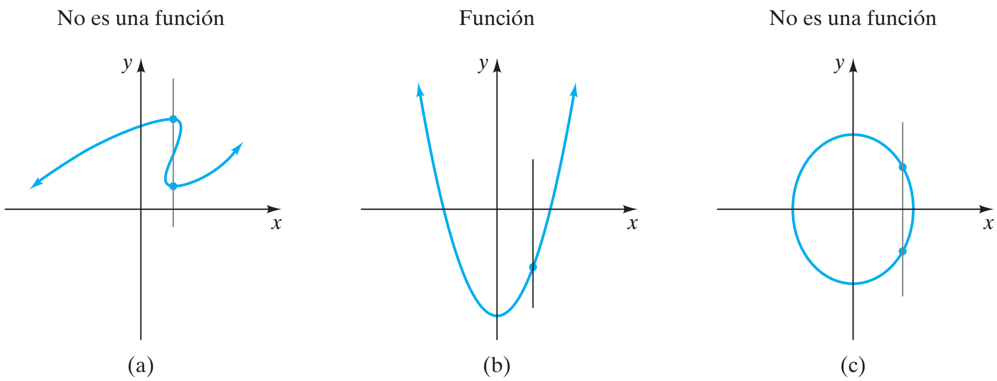


FIGURA 3.23

EJEMPLO 3 Utilice la prueba de la recta vertical para determinar si las gráficas siguientes representan funciones. También determine el dominio y el rango de cada función o relación.

a)

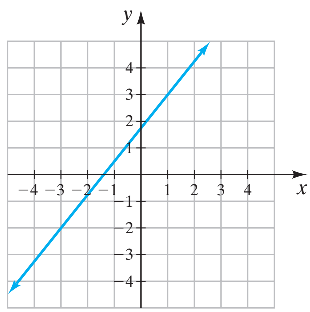


FIGURA 3.24

b)

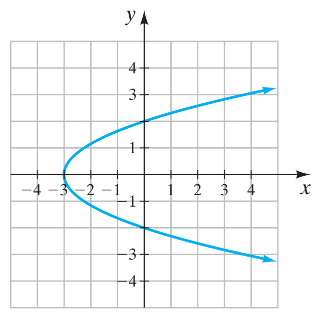


FIGURA 3.25

Solución

a) No se puede dibujar una recta vertical para que interseque la gráfica de la **figura 3.24** en más de un punto. Así, ésta es la gráfica de una función. Como la recta se extiende de manera indefinida en ambas direcciones, cada valor de x estará incluido en el dominio. El dominio es el conjunto de los números reales.

$$\text{Dominio: } \quad \mathbb{R} \quad \text{o} \quad (-\infty, \infty)$$

El rango también es el conjunto de los números reales ya que todos los valores de y están incluidos en la gráfica.

$$\text{Rango: } \quad \mathbb{R} \quad \text{o} \quad (-\infty, \infty)$$

b) Como se puede dibujar una recta vertical para que interseque la gráfica de la **figura 3.25** en más de un punto, ésta *no* es la gráfica de una función. El dominio de esta relación es el conjunto de valores mayores o iguales a -3.

$$\text{Dominio: } \quad \{x \mid x \geq -3\} \quad \text{o} \quad [-3, \infty)$$

El rango es el conjunto de valores de y, y en este caso puede ser cualquier número real.

$$\text{Rango: } \quad \mathbb{R} \quad \text{o} \quad (-\infty, \infty)$$

Ahora resuelva el ejercicio 33

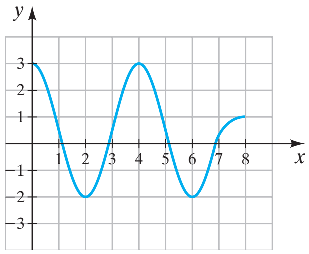


FIGURA 3.26

EJEMPLO 4 ▸ Considere la gráfica que se muestra en la **figura 3.26**.

a) ¿Qué elemento del rango es pareja de 4 en el dominio?

b) ¿Qué elementos del dominio son pareja de -2 en el rango?

c) ¿Cuál es el dominio de la función?

d) ¿Cuál es el rango de la función?

Solución

a) El rango es el conjunto de valores de y. El valor de y que tiene como pareja el valor 4 de x es 3.

b) El dominio es el conjunto de valores de x. Los valores de x que tienen como pareja al valor de y igual -2 son 2 y 6.

c) El dominio es el conjunto de valores de x, del 0 al 8. Por tanto el dominio es

$$\{x|0 \le x \le 8\} \quad \text{o} \quad [0, 8]$$

d) El rango es el conjunto de valores y, de -2 a 3. Así, el rango es

$$\{y|-2 \le y \le 3\} \quad \text{o} \quad [-2, 3]$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 39**

EJEMPLO 5 ▸ La **figura 3.27** ilustra una gráfica de velocidad contra tiempo de un hombre que salió a caminar y trotar. Escriba una historia acerca de la salida de este hombre que corresponda a esta función.

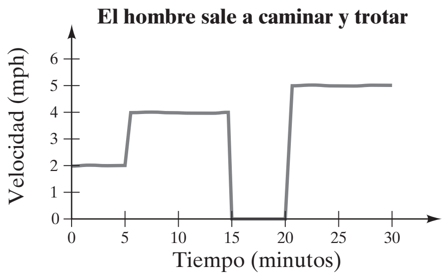


FIGURA 3.27

Solución Entienda el problema El eje horizontal es el tiempo y el eje vertical es la velocidad. Cuando la gráfica es horizontal significa que la persona está trasladándose a una velocidad constante indicada en el eje vertical. Las rectas casi verticales que aumentan con el tiempo (o que tienen una pendiente positiva, como se estudiará más adelante) indican un aumento en la velocidad, mientras que las rectas casi verticales que descienden con el tiempo (o que tienen pendiente negativa) indican una disminución en la velocidad.

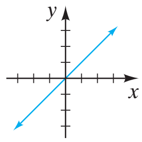
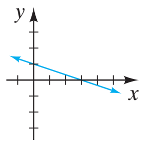
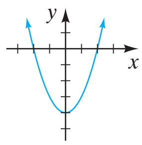
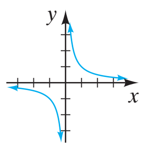
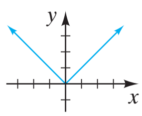
Responda Aquí hay una posible interpretación de la gráfica. El hombre camina durante alrededor de cinco minutos a una velocidad de casi dos millas por hora. Después aumenta su velocidad a casi cuatro millas por hora y camina rápido o trota a esta velocidad durante alrededor de 10 minutos. Luego va más lento y se detiene, y después descansa durante casi cinco minutos. Finalmente, el hombre aumenta su velocidad a casi cinco millas por hora y trota a esta velocidad durante 10 minutos.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 65**

4 Entender la notación de funciones

En la sección 3.1 graficamos varias ecuaciones, como lo resumimos en la **tabla 3.1**. Si examina cada ecuación en la tabla, verá que todas ellas son funciones, ya que sus gráficas pasan la prueba de la recta vertical.

TABLA 3.1 Ejemplo

Ejemplo sección 3.1	Ecuación que se grafica	Gráfica	¿La gráfica representa una función?	Dominio	Rango
3	$y = x$		Sí	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
4	$y = -\frac{1}{3}x + 1$		Sí	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
5	$y = x^2 - 4$		Sí	$(-\infty, \infty)$	$[-4, \infty)$
6	$y = \frac{1}{x}$		Sí	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
7	$y = \lvert x\rvert$		Sí	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$

Como la gráfica de cada ecuación que se muestra representa una función, podemos referirnos a cada ecuación en la tabla como una función. Cuando nos referimos a una ecuación en las variables x y y como una función, significa que la gráfica de la ecuación satisface el criterio para ser función. Esto es, cada valor de x corresponde exactamente a un valor de y, y la gráfica de la ecuación pasa la prueba de la recta vertical.

No todas las ecuaciones son funciones, como lo verá posteriormente en este libro, las secciones cónicas, donde analizaremos ecuaciones de circunferencias y elipses. Sin embargo, hasta llegar a ese capítulo, todas las ecuaciones que estudiaremos serán funciones.

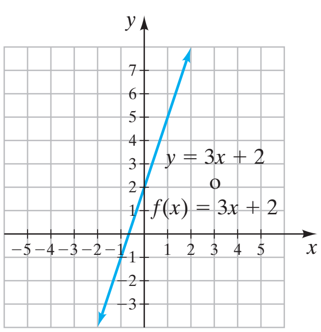


FIGURA 3.28

Considere de la ecuación $y = 3x + 2$. Al aplicar la prueba de la recta vertical a su gráfica (**figura 3.28**), podemos ver que la gráfica representa una función. Cuando una ecuación en las variables x y y es una función, con frecuencia escribimos la ecuación utilizando la **notación de funciones**, $f(x)$, se lee "f de x". Como la ecuación $y = 3x + 2$ es una función, y el valor de y depende del valor de x, decimos que ***y* es una función de *x***. Cuando se nos da un ecuación lineal en las variables x y y, *en la que y está despejada*, podemos escribir la ecuación en notación de función sustituyendo $f(x)$ por y. En este caso, podemos escribir la ecuación en notación de función como $f(x) = 3x + 2$. La notación $f(x)$ representa la variable dependiente *y no significa f por x*. Pueden usarse otras letras para indicar funciones. Por ejemplo, $g(x)$ y $h(x)$ también representan funciones de x, y en la sección 5.1 utilizaremos $P(x)$ para representar funciones polinomiales.

Las funciones escritas en notación de funciones también son ecuaciones ya que contienen un signo de igual. Podemos referirnos a $y = 3x + 2$ ya sea como un ecuación o bien como una función. De manera análoga, podemos referirnos a $f(x) = 3x + 2$ como una función o como una ecuación.

Si y es una función de x, la notación $f(5)$, que se lee "f de 5", significa el valor de y cuando x es 5. Para evaluar una función para un valor específico de x, sustituya ese valor para x en la función. Por ejemplo, si $f(x) = 3x + 2$, entonces $f(5)$ se determina como sigue:

$$f(x) = 3x + 2$$
$$f(5) = 3(5) + 2 = 17$$

Por lo tanto, cuando x es 5, y es 17. La pareja ordenada (5, 17) aparecería en la gráfica de $y = 3x + 2$.

Sugerencia útil

Las ecuaciones lineales en las que y no está despejada, pueden escribirse usando notación de funciones despejando y en la ecuación, y luego reemplazando y con $f(x)$. Por ejemplo, la ecuación $-9x + 3y = 6$ se convierte en $y = 3x + 2$, cuando se despeja y. Por lo tanto, podemos escribir $f(x) = 3x + 2$.

EJEMPLO 6 ▸ Si $f(x) = -4x^2 + 3x - 2$, determine

a) $f(2)$ **b)** $f(-1)$ **c)** $f(a)$

Solución

a) $f(x) = -4x^2 + 3x - 2$

$f(2) = -4(2)^2 + 3(2) - 2 = -4(4) + 6 - 2 = -16 + 6 - 2 = -12$

b) $f(-1) = -4(-1)^2 + 3(-1) - 2 = -4(1) - 3 - 2 = -4 - 3 - 2 = -9$

c) Para evaluar la función en a, reemplazamos cada x en la función con una a.

$$f(x) = -4x^2 + 3x - 2$$
$$f(a) = -4a^2 + 3a - 2$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 45**

EJEMPLO 7 ▸ Determine cada valor indicado de la función.

a) $g(-2)$ para $g(t) = \dfrac{1}{t + 8}$

b) $h(5)$ para $h(s) = 2|s - 6|$

c) $j(-3)$ para $j(r) = \sqrt{22 - r}$

Solución En cada parte, sustituya el valor indicado en la función y evalúe la función.

a) $g(-2) = \dfrac{1}{-2 + 8} = \dfrac{1}{6}$

b) $h(5) = 2|5 - 6| = 2|-1| = 2(1) = 2$

c) $j(-3) = \sqrt{22 - (-3)} = \sqrt{22 + 3} = \sqrt{25} = 5$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 49**

5 Aplicación de funciones en la vida diaria

Muchas de las aplicaciones que se estudiaron en el capítulo 2 eran funciones. Sin embargo, no habíamos definido una función en ese momento. Ahora examinaremos aplicaciones adicionales de funciones.

EJEMPLO 8 **Jets de negocios** La gráfica en la **figura 3.29** se tomó del número del 11 de noviembre de 2004, de *USA Today*. La gráfica muestra el número de jets de negocios fabricados de 1994 a 2004, y con una proyección hasta 2013.

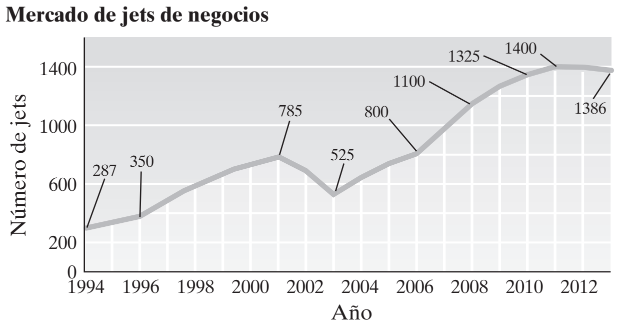


FIGURA 3.29

Fuente: Forecast International, USA TODAY (11/11/04)

a) Explique por qué la gráfica en la **figura 3.29** representa una función.

b) Determine el número de jets de negocios que se pronostica se fabricarán en 2010.

c) Determine el aumento porcentual proyectado, en el número de jets de negocios, que se fabricarán desde 2003 hasta 2011.

d) Determine la disminución porcentual, en el número de jets de negocios, fabricados de 2001 a 2003.

Solución

a) La gráfica representa una función, ya que cada año corresponde con un número específico de jets de negocios fabricados. Observe que la gráfica pasa el criterio de la recta vertical.

b) En 2010, la gráfica muestra que se fabricarán 1325 jets de negocios. Si representamos la función mediante J, entonces $J(2010) = 1325$.

c) Para resolver este problema seguiremos el procedimiento de resolución de problemas.

Entienda el problema y traduzca Necesitamos determinar el aumento porcentual en el número de jets de negocios que se fabricarán de 2003 a 2011. Para hacer esto utilizamos la fórmula

$$\text{cambio porcentual (aumento o disminución)} = \frac{\begin{pmatrix}\text{valor en el}\\ \text{periodo final}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{valor en el}\\ \text{periodo inicial}\end{pmatrix}}{\text{valor en el periodo inicial}}$$

El último periodo es 2011 y el periodo anterior es 2003. Al sustituir valores, obtenemos

$$\text{cambio porcentual} = \frac{1400 - 525}{525}$$

Realizar los cálculos

$$= \frac{875}{525} \approx 1.667 = 166.7\%$$

Compruebe y responda Nuestros cálculos parecen correctos. De 2003 a 2011 está proyectado un aumento de alrededor de 166.7% en el número de jets de negocios fabricados.

d) Para determinar la disminución porcentual de 2001 a 2003, seguimos el mismo procedimiento que en la parte **c)**. El periodo final es 2003 y el periodo inicial es 2001.

$$\text{cambio porcentual (aumento o disminución)} = \frac{\begin{pmatrix}\text{valor en el}\\ \text{periodo final}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{valor en el}\\ \text{periodo inicial}\end{pmatrix}}{\text{valor en el periodo inicial}}$$

$$= \frac{525 - 785}{785} = \frac{-260}{785} \approx -0.331 = -33.1\%$$

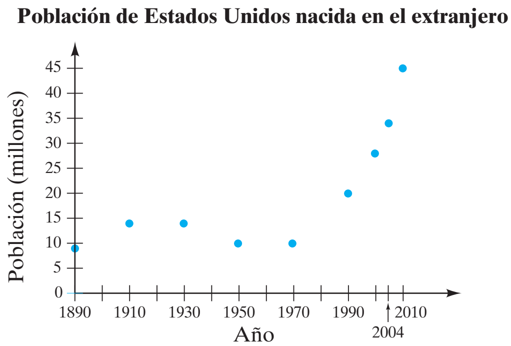
El signo negativo que precede a 33.1% indica una disminución de porcentaje. Así, hubo alrededor de 33.1% de disminución en la fabricación de jets de negocios de 2001 a 2003.

Ahora resuelva el ejercicio 71

EJEMPLO 9 ▸ **Inmigración** El tamaño de la población extranjera de Estados Unidos es el más alto de todos los tiempos. La gráfica en la **figura 3.30** muestra esta población, en millones, desde 1890 hasta 2004 y proyectada hasta 2010.

a) Por medio de la gráfica de la **figura 3.30**, explique por qué este conjunto de puntos representa una función.

b) Por medio de la gráfica de la **figura 3.31**, estime la población extranjera de Estados Unidos en 2008.



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, USA TODAY (8/3/05)

FIGURA 3.30

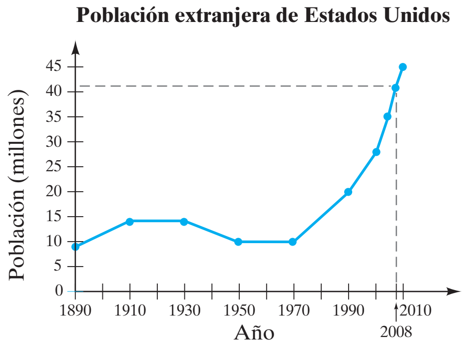


FIGURA 3.31

Solución

a) Como cada año corresponde con exactamente una población, este conjunto de puntos representa una función. Observe que esta gráfica pasa la prueba de la recta vertical.

b) Podemos conectar los puntos con segmentos de línea recta como en la **figura 3.31**. Entonces podemos estimar, a partir de la gráfica, que habría alrededor de 41 millones de estadounidenses extranjeros de Estados Unidos en 2008. Si llamamos f a la función, entonces $f(2008) = 41$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 75**

En la sección 2.2 aprendimos a usar fórmulas. Considere la fórmula para el área de un círculo, $A = \pi r^2$. En la fórmula, π es una constante que es aproximadamente 3.14. Para cada valor específico del radio, r, corresponde exactamente un área, A. Así que el área del círculo es una función de su radio. Por lo tanto, podemos escribir

$$A(r) = \pi r^2$$

Con frecuencia, al igual que ésta, las fórmulas se escriben usando notación de funciones.

EJEMPLO 10 ▸ La temperatura Celsius, C, es una función de la temperatura Fahrenheit, F.

$$C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Determine la temperatura Celsius que corresponde a 50°F.

Solución Necesitamos determinar $C(50)$. Lo hacemos por medio de sustitución.

$$C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$$
$$C(50) = \frac{5}{9}(50 - 32)$$
$$= \frac{5}{9}(18) = 10$$

Por lo tanto, 50°F = 10°C.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 55**

En el ejemplo 10, F es la variable independiente y C es la variable dependiente. Si despejamos F en la función, obtendríamos $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$. En esta fórmula C es la variable independiente y F es la variable dependiente.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una función?
2. ¿Qué es una relación?
3. ¿Todas las funciones también son relaciones? Explique.
4. ¿Todas las relaciones también son funciones? Explique.
5. Explique cómo usar la prueba de la recta vertical para determinar si la relación es una función.
6. ¿Qué es el dominio de una función?
7. ¿Qué es el rango de una función?
8. ¿Cuáles son el dominio y rango de la función $f(x) = 2x + 1$? Explique su respuesta.
9. Considere la función $y = \frac{1}{x}$. ¿Cuál es su dominio y cuál es su rango? Escriba su respuesta mediante la notación de conjuntos. Explique.
10. ¿Cuáles son el dominio y el rango de una función de la forma $f(x) = ax + b, a \neq 0$? Explique su respuesta.
11. Considere la función valor absoluto $y = |x|$. ¿Cuál es su dominio y cuál su rango? Explique.
12. ¿Qué es una variable dependiente?
13. ¿Qué es una variable independiente?
14. ¿Cómo se lee "$f(x)$"?

Práctica de habilidades

En los ejercicios del 15 al 20, **a)** *determine si la relación ilustrada es una función.* **b)** *Proporcione el dominio y rango de cada función o relación.*

15. el doble de un número

$3 \rightarrow 6$
$5 \rightarrow 10$
$11 \rightarrow 22$

16. Sobrenombres

Robert → Bobby
Robert → Rob
Margaret → Peggy
Margaret → Maggie

17. número de descendientes

Cameron → 3
Tyrone → 6
Vishnu → 6

18. un número al cuadrado

$4 \rightarrow 16$
$5 \rightarrow 25$
$7 \rightarrow 49$

19. costo de una estampilla

$1990 \rightarrow 20$
$2001 \rightarrow 34$
$2002 \rightarrow 34$
$2002 \rightarrow 37$

20. valor absoluto

$|-8| \rightarrow 8$
$|8| \rightarrow 8$
$|0| \rightarrow 0$

En los ejercicios del 21 al 28, **a)** *determine cuáles de las siguientes relaciones también son funciones.* **b)** *Proporcione el dominio y el rango de cada relación o función.*

21. $\{(1, 4), (2, 2), (3, 5), (4, 3), (5, 1)\}$

22. $\{(1, 0), (4, 2), (9, 3), (1, -1), (4, -2), (9, -3)\}$

23. $\{(3, -1), (5, 0), (1, 2), (4, 4), (2, 2), (7, 9)\}$

24. $\{(-1, 1), (0, -3), (3, 4), (4, 5), (-2, -2)\}$

25. $\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (2, 2), (1, 1)\}$

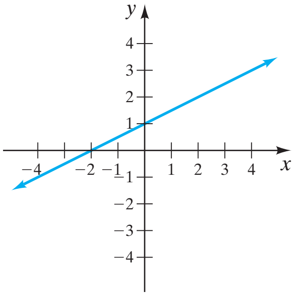
26. $\{(6, 3), (-3, 4), (0, 3), (5, 2), (3, 5), (2, 8)\}$

27. $\{(0, 3), (1, 3), (2, 2), (1, -1), (2, -7)\}$

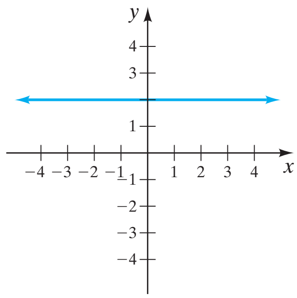
28. $\{(3, 5), (2, 5), (1, 5), (0, 5), (-1, 5)\}$

En los ejercicios del 29 al 40, **a)** *determine si la gráfica ilustrada representa una función.* **b)** *Proporcione el dominio y el rango de cada función o relación.* **c)** *Aproxime el valor o valores de x donde* $y = 2$.

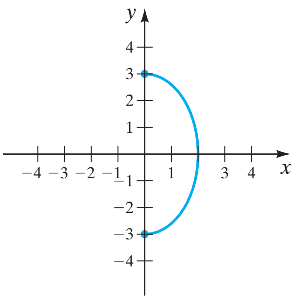
29.



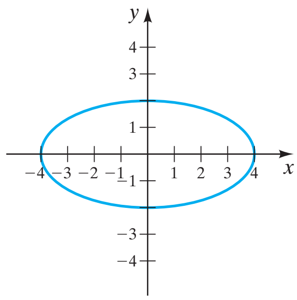
30.



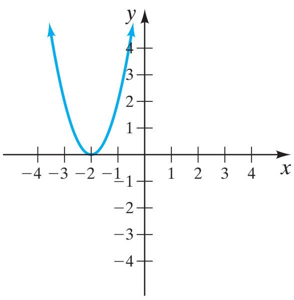
31.



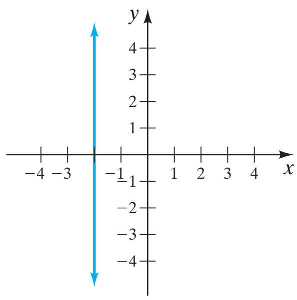
32.



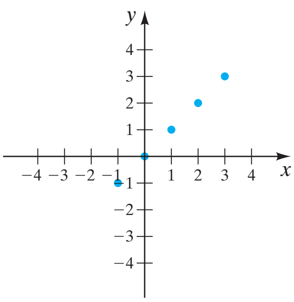
33.



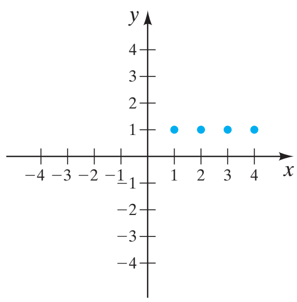
34.



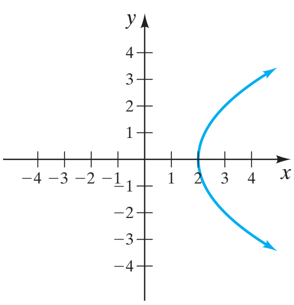
35.



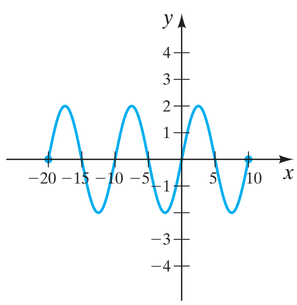
36.



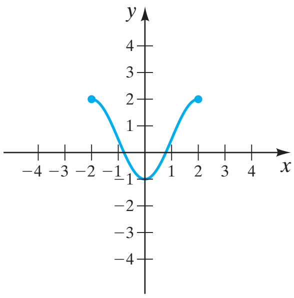
37.



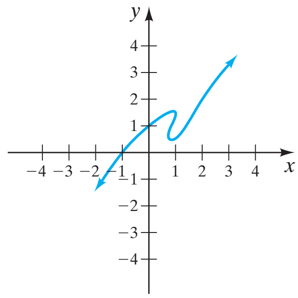
38.



39.



40.



Evalúe cada función en los valores indicados.

41. $f(x) = -2x + 7$; determine
a) $f(2)$.
b) $f(-3)$.

42. $f(a) = \frac{1}{3}a + 4$; determine
a) $f(0)$.
b) $f(-12)$.

43. $h(x) = x^2 - x - 6$; determine
a) $h(0)$.
b) $h(-1)$.

44. $g(x) = -2x^2 + 7x - 11$; determine
a) $g(2)$.
b) $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

45. $r(t) = -t^3 - 2t^2 + t + 4$; determine
a) $r(1)$.
b) $r(-2)$.

46. $g(t) = 4 - 3t + 16t^2 - 2t^3$; determine
a) $g(0)$.
b) $g(3)$.

47. $h(z) = |5 - 2z|$; determine
a) $h(6)$.
b) $h\left(\frac{5}{2}\right)$.

48. $q(x) = -2|x + 8| + 13$; determine
a) $q(0)$.
b) $q(-4)$.

49. $s(t) = \sqrt{t + 3}$; determine
a) $s(-3)$.
b) $s(6)$.

50. $f(t) = \sqrt{5 - 2t}$; determine
a) $f(-2)$.
b) $f(2)$.

51. $g(x) = \frac{x^3 - 2}{x - 2}$; determine
a) $g(0)$.
b) $g(2)$.

52. $h(x) = \frac{x^2 + 4x}{x + 6}$; determine
a) $h(-3)$.
b) $h\left(\frac{2}{5}\right)$.

Resolución de problemas

53. Área de un rectángulo La fórmula para el área de un rectángulo es $A = lw$. Si la longitud de un rectángulo es 6 pies, entonces el área es una función de su ancho, $A(w) = 6w$. Determine el área cuando el ancho es
a) 4 pies.
b) 6.5 pies.

54. Interés simple La fórmula para el interés simple generado durante un periodo de 1 año es $i = pr$, donde p es el capital invertido y r es la tasa de interés simple. Si se invierten \$1000, el interés simple generado en un año es una función de la tasa de interés simple, $i(r) = 1000r$. Determine el interés simple generado en un año si la tasa de interés es
a) 2.5%.
b) 4.25%.

55. Área de un círculo La fórmula para el área de un círculo es $A = \pi r^2$. El área es una función del radio.
a) Escriba esta función por medio de la notación de funciones.
b) Determine el área cuando el radio es 12 yardas.

56. Perímetro del cuadrado La fórmula para el perímetro de un cuadrado es $P = 4s$, donde s representa la longitud de cualquiera de los lados del cuadrado.
a) Escriba esta función utilizando la notación de funciones.
b) Determine el perímetro de un cuadrado con lados de longitud de 7 metros.

57. Temperatura La fórmula para cambiar temperaturas en Fahrenheit a temperaturas en Celsius es $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. La temperatura Celsius es una función de la temperatura Fahrenheit.
a) Escriba esta función utilizando la notación de funciones.
b) Determine la temperatura Celsius que corresponde a −31°F.

58. Volumen de un cilindro La fórmula para el volumen de un cilindro circular recto es $V = \pi r^2 h$. Si la altura, h, es de 3 pies, entonces el volumen es una función del radio, r.

a) Escriba esta fórmula en notación de funciones, donde la altura es 3 pies.

b) Determine el volumen, si el radio es de 2 pies.

59. Temperatura en un sauna La temperatura, T, en grados Celsius, en un sauna n minutos después de haberlo encendido, está dada por la función $T(n) = -0.03n^2 + 1.5n + 14$. Determine la temperatura del sauna después de

a) 3 minutos **b)** 12 minutos

60. Distancia para detenerse La distancia para detenerse, d, en metros para un automóvil que viaja a v km/h, está dado por la función $d(v) = 0.18v + 0.01v^2$. Determine la distancia para detenerse para las velocidades siguientes:

a) 60 km/hr **b)** 25 km/hr

61. Aire acondicionado Cuando un aire acondicionado se enciende al máximo en una habitación que está a 80°, la temperatura, T, en la habitación después de A minutos, puede aproximarse por medio de la función $T(A) = -0.02A^2 - 0.34A + 80,\ 0 \le A \le 15$.

a) Estime la temperatura de la habitación 4 minutos después de que se encendió el aire acondicionado.

b) Estime la temperatura de la habitación 12 minutos después de que se encendió el aire acondicionado.

62. Accidentes El número de accidentes, n, durante un mes que involucran a conductores de x años de edad, puede aproximarse por medio de la función $n(x) = 2x^2 - 150x + 4000$. Determine el número aproximado de accidentes en un mes que involucran a conductores de

a) 18 años.

b) 25 años.

63. Naranjas El número total de naranjas, T, en una pirámide cuadrada cuya base es de n por n naranjas, está dada por medio de la función

$$T(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Determine el número total de naranjas, si la base es de

a) 6 por 6 naranjas.

b) 8 por 8 naranjas.

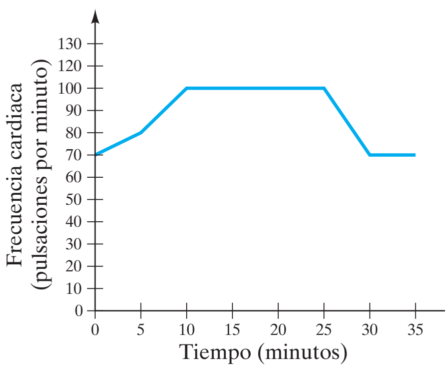
64. Concierto de rock Si el costo de un boleto para un concierto de rock se aumenta en x dólares, el aumento estimado en el ingreso, R, en miles de dólares está dado por medio de la función $R(x) = 24 + 5x - x^2, x < 8$. Determine el aumento en los ingresos, si el costo del boleto se aumenta en

a) \$1.

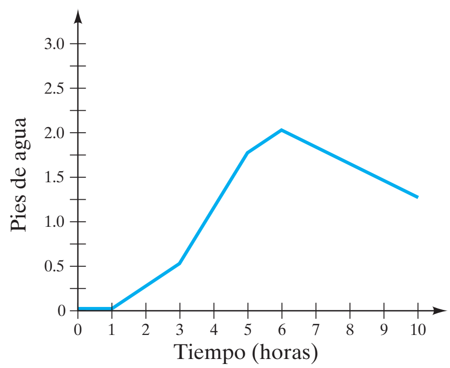
b) \$4.

Revise el ejemplo 5 antes de resolver los ejercicios 65 a 70.

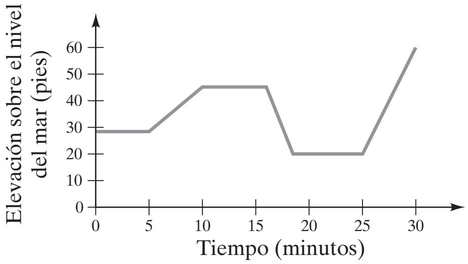
65. Ritmo cardiaco La gráfica siguiente muestra el ritmo cardiaco de una persona mientras está haciendo ejercicio. Escriba una historia que pueda representar esta gráfica.



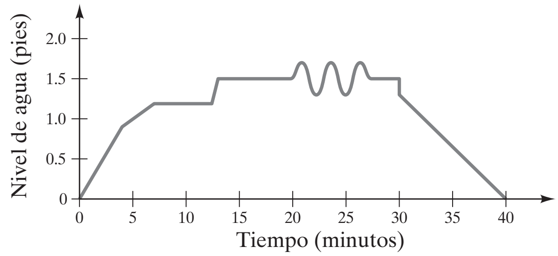
66. Nivel de agua La gráfica siguiente muestra el nivel de agua en un cierto punto durante una inundación. Escriba una historia que pueda representar esta gráfica.



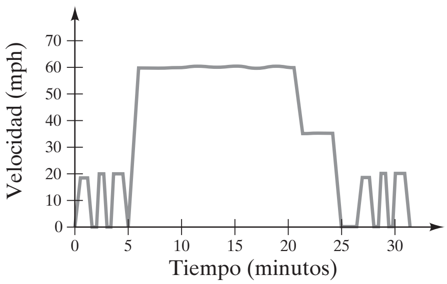
67. Altura sobre el nivel del mar La gráfica siguiente muestra la altura sobre el nivel del mar contra el tiempo cuando un hombre sale de su casa a caminar. Escriba una historia que pueda representar esta gráfica.



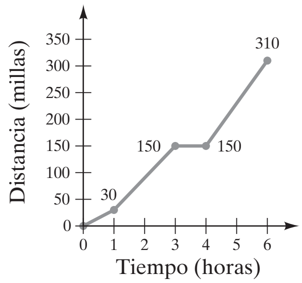
68. Nivel de agua en una tina La gráfica siguiente muestra el nivel de agua en una tina contra el tiempo. Escriba una historia que pueda representar esta gráfica.



69. Velocidad de un automóvil La gráfica siguiente muestra la velocidad de un automóvil contra el tiempo. Escriba una historia que pueda representar esta gráfica.

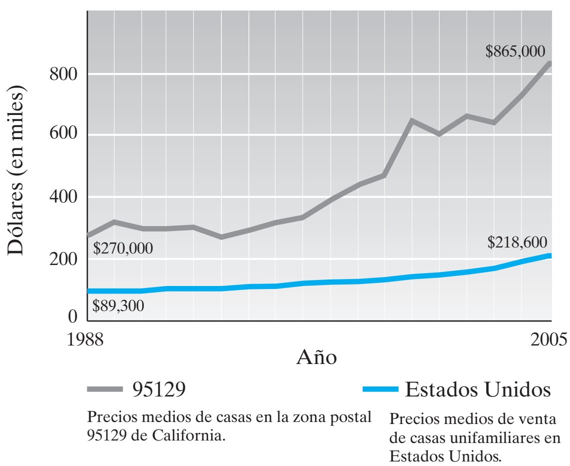


70. Distancia recorrida La gráfica siguiente muestra la distancia recorrida, por una persona en un automóvil, contra el tiempo. Escriba una historia que pueda representar esta gráfica.



71. Precios de casas La gráfica siguiente compara la mediana de los precios de venta de casas en Estados Unidos y en la zona postal 95129 de California.

Costo de casas en la zona postal 95129



Fuente: Sistemas de información DATAQuick: Asociación nacional de agentes inmobiliarios. USA Today (2/8/05)

a) ¿Ambas líneas representan funciones? Explique.

b) En esta gráfica, ¿cuál es la variable independiente?

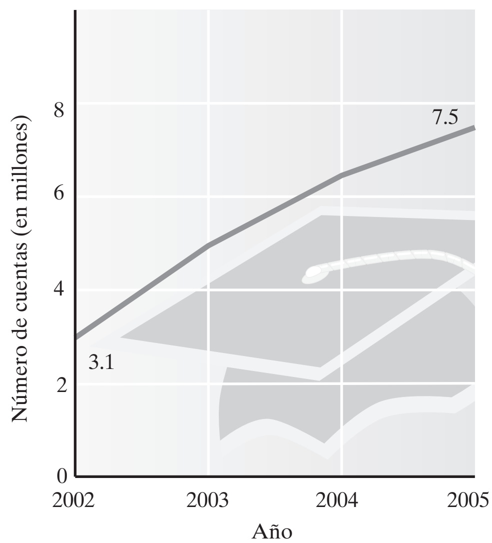
c) Si f representa el promedio del precio de venta de las casas en Estados Unidos, determine $f(2005)$.

d) Si g representa el promedio del precio de venta en la zona postal 95129, determine $g(2005)$.

e) Determine el porcentaje de aumento en el precio de venta de una casa unifamiliar en Estados Unidos de 1988 a 2005.

72. Planes de ahorro escolares El número de los planes 529 de ahorro escolares se ha incrementado en Estados Unidos de 2002 a 2005, como se ilustra en la gráfica siguiente.

Los planes 529 son populares



Fuente: College Savings Plans Network, *USA Today* (8/9/05)

a) ¿Esta gráfica representa una función? Explique.

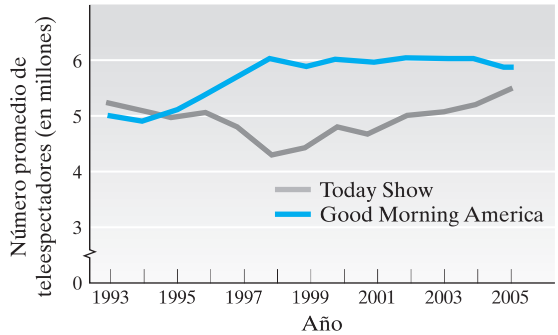
b) En esta gráfica, ¿cuál es la variable dependiente?

c) Si n representa el número de planes 529, determine $n(2005)$.

d) Determine el aumento porcentual en el número de planes 529 de 2002 a 2005.

73. Programa matutino La gráfica siguiente muestra el número de teleespectadores de los programas *The Today Show* (NBC) y *Good Morning America* (ABC) desde la temporada 1992-1993 a la temporada 2004-2005.

Teleespectadores de programas matutinos



Fuente: Nielsen Media Reasearch, *New York Times* (8/9/05)

a) ¿Ambas líneas representan funciones? Explique.

b) Si f representa el número de teleespectadores de *The Today Show*, estime $f(1998)$.

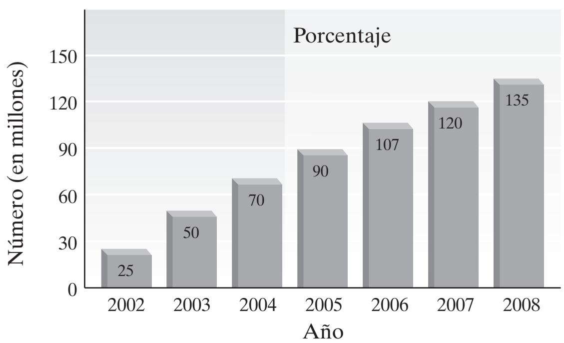
c) Si g representa el número de teleespectadores de *Good Morning America*, estime $g(1998)$.

d) ¿Ambas líneas parecen ser aproximadamente rectas de 1998 a 2005? Explique.

e) Si esta tendencia continúa, estime cuándo los dos programas tendrán el mismo número de teleespectadores.

74. Envíos de monitores LCD Se espera que los envíos de monitores LCD aumenten en los próximos años. La gráfica siguiente muestra los envíos de monitores LCD, en millones de unidades, para los años 2002 a 2008.

Envíos de monitores LCD



Fuente: DisplaySearch, Market Intelligence Center, *Wall Street Journal* (3/24/05)

a) Dibuje una gráfica lineal que muestre esta información.

b) ¿La gráfica que dibujó en la parte **a)** parece ser aproximadamente lineal? Explique.

c) Suponiendo que esta tendencia continúe, estime, con base en la gráfica que dibujó, el número de monitores de LCD que serán enviados en 2009.

d) ¿La gráfica de barras representa una función?

e) ¿La gráfica lineal que dibujó en la parte **a)** representa una función?

75. Comerciales en el Súper Bowl El precio promedio del costo de un comercial de 30 segundos durante el Súper Tazón (Súper Bowl) se ha incrementado al paso de los años. La tabla siguiente proporciona el costo aproximado de un comercial de 30 segundos para años seleccionados desde 1981 hasta 2005.

Año	Costo (miles de dólares)
1981	280
1985	500
1989	740
1993	970
1997	1200
2001	2000
2005	2400

a) Dibuje una gráfica de líneas que muestre esta información.

b) ¿La gráfica parece ser aproximadamente lineal? Explique.

c) Con base en la gráfica, estime el costo de un comercial de 30 segundos en el año 2004.

76. Gasto familiar El promedio anual de gastos familiares es una función del ingreso promedio anual de la familia. El gasto promedio puede estimarse por medio de la función

$$f(i) = 0.6i + 5000 \quad \$3500 \le i \le \$50{,}000$$

donde $f(i)$ es el gasto familiar promedio e i es el ingreso promedio de la familia.

a) Dibuje una gráfica que muestre la relación entre ingreso promedio de la familia y el gasto familiar promedio.

b) Estime el gasto familiar promedio para una familia cuyo ingreso promedio es de $30,000.

77. Oferta y demanda El precio de bienes como la soya, se determina por medio de **la oferta y la demanda**. Si se produce demasiada soya, la oferta será mayor que la demanda y el precio caerá. Si no se produce suficiente soya, la demanda será mayor que la oferta y el precio de la soya subirá. Por lo tanto, el precio de la soya es una función del número de *bushels* de soya producidos. El precio de un *bushel* de soya puede estimarse por medio de la función

$$f(Q) = -0.00004Q + 4.25, \quad 10{,}000 \le Q \le 60{,}000$$

donde $f(Q)$ es el precio de un *bushel* de soya y Q es el número anual de *bushels* de soya producidos.

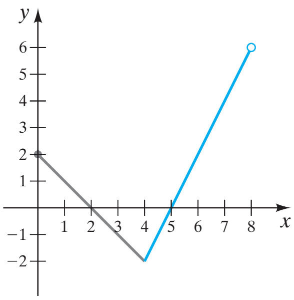
a) Construya una gráfica que muestre la relación entre el número de *bushels* de soya producidos y el precio de *bushel* de soya.

b) Estime el costo de un *bushel* de soya, si se producen 40,000 *bushels* de soya en un año dado.

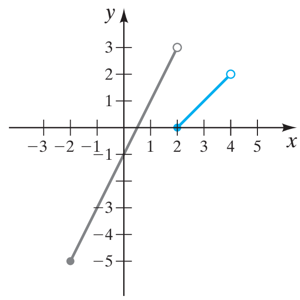
Actividad en grupo

En muchas situaciones de la vida real se puede requerir más de una función para representar un problema. Con frecuencia esto ocurre donde están implicadas dos o más tasas diferentes. Por ejemplo, cuando analizamos los impuestos federales por ingresos hay diferentes tasas de impuestos. Cuando se utilizan dos o más funciones para representar un problema, la función se denomina ***definida por partes****. A continuación están dos ejemplos de funciones definidas por partes y sus gráficas.*

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & 0 \le x < 4 \\ 2x - 10, & 4 \le x < 8 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -2 \le x < 2 \\ x - 2, & 2 \le x < 4 \end{cases}$$



En equipo, grafiquen las siguientes funciones definidas por partes.

78. $f(x) = \begin{cases} x + 3, & -1 \le x < 2 \\ 7 - x, & 2 \le x < 4 \end{cases}$

79. $g(x) = \begin{cases} 2x + 3, & -3 < x < 0 \\ -3x + 1, & 0 \le x < 2 \end{cases}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] **80.** Resuelva $3x - 2 = \frac{1}{3}(3x - 3)$.

[2.2] **81.** Despeje p_2 de la fórmula siguiente.

$$E = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$$

[2.5] **82.** Resuelva la desigualdad $\frac{3}{5}(x - 3) > \frac{1}{4}(3 - x)$ e indique la solución

a) en la recta numérica;

b) en notación de intervalos, y

c) en notación constructiva de conjuntos.

[2.6] **83.** Resuelva la ecuación $\left|\frac{x - 4}{3}\right| + 9 = 11$.

3.3 Funciones lineales: gráficas y aplicaciones

1 Graficar funciones lineales.

2 Graficar funciones lineales mediante sus intercepciones.

3 Graficar ecuaciones de la forma $x = a$ y $y = b$.

4 Estudiar aplicaciones de funciones.

5 Resolver de manera gráfica ecuaciones lineales con una variable.

1 Graficar funciones lineales

En la sección 3.1 graficamos ecuaciones lineales. Para graficar la ecuación lineal $y = 2x + 4$, podemos construir una tabla de valores, trazar los puntos y dibujar la gráfica, como se muestra en la **figura 3.32**. Observe que esta gráfica representa una función, ya que pasa la prueba de la recta vertical.

x	y
-2	0
0	4
1	6

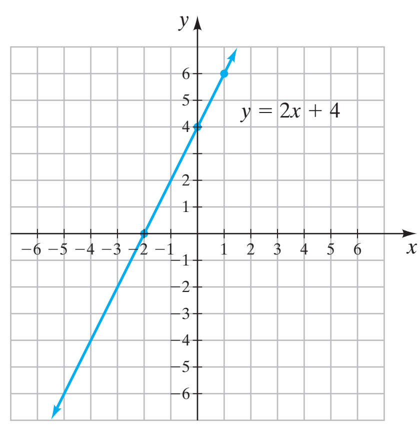


FIGURA 3.32

Podemos escribir la ecuación que se graficó en la **figura 3.32** utilizando la notación de función como $f(x) = 2x + 4$. Éste es un ejemplo de una función lineal. Una **función lineal** es una función de la forma $f(x) = ax + b$. La gráfica de cualquier función lineal es una línea recta. El dominio de cualquier función es el conjunto de números reales para los cuales la función es un número real. El dominio de cualquier función lineal es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$: cualquier número real, x, sustituido en una función lineal tendrá como resultado que $f(x)$ sea un número real. Estudiaremos dominios de funciones más adelante en la sección 3.6.

Para graficar una función lineal, tratamos a $f(x)$ como y y seguimos el mismo procedimiento utilizado para graficar ecuaciones lineales.

Sugerencia útil

Al graficar una función lineal, recuerde que $y = f(x)$.

EJEMPLO 1 ▸ Grafique $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Solución Construimos una tabla de valores por medio de la sustitución de valores para x y determinando los valores correspondientes de $f(x)$ o y. Luego trazamos los puntos y dibujamos la gráfica, como se ilustra en la **figura 3.33**.

x	$f(x)$
−2	−2
0	−1
2	0

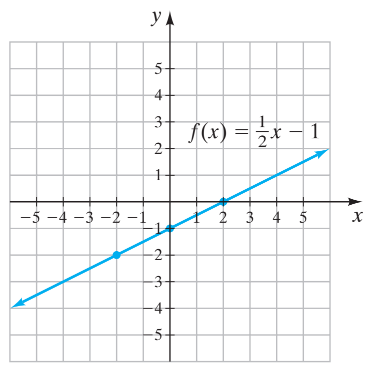


FIGURA 3.33

▸ Ahora resuelva el ejercicio 33

Observe que el eje vertical en la **figura 3.33** también puede etiquetarse como $f(x)$, en lugar de y. En este libro continuaremos etiquetándolo como y.

2 Graficar funciones lineales mediante sus intercepciones

Las ecuaciones lineales no siempre están en la forma $y = ax + b$. La ecuación $2x + 3y = 6$ es un ejemplo de una ecuación lineal dada en *la forma general*.

Forma general de una ecuación lineal

La **forma general de una ecuación lineal** es

$$ax + by = c$$

en donde a, b y c son números reales, y a y b no son ambos iguales a 0.

Ejemplos de ecuaciones lineales en la forma general

$$2x + 3y = 4 \qquad -x + 5y = -2$$

Algunas veces, cuando una ecuación está dada en la forma general, puede ser más fácil dibujar la gráfica usando las intersecciones con el eje x y con el eje y. Examine los dos puntos en la gráfica que se muestra en la **figura 3.32**. Observe que la gráfica cruza el eje x en el punto $(-2, 0)$. Así, $(-2, 0)$ se denomina **intercepción x** o **intersección con el eje x**. En ocasiones decimos que la intercepción x está *en* -2 (en el eje x), la coordenada x de la pareja ordenada.

La gráfica cruza al eje y en el punto $(0, 4)$. Por consiguiente $(0, 4)$ se denomina **intercepción y** o **intersección con el eje y**. En ocasiones decimos que la intercepción y está *en* 4 (en el eje y), la coordenada y de la pareja ordenada.

A continuación explicamos cómo pueden determinarse las intercepciones x y y de manera algebraica.

Para determinar las intercepciones x y y

Para determinar la intercepción y, haga $x = 0$ y despeje a y.

Para determinar la intercepción x, haga $y = 0$ y despeje a x.

Para graficar una ecuación lineal o una función lineal, utilizando las intercepciones x y y, determine las intercepciones y trace los puntos. Luego dibuje una línea recta que pase por los puntos. Cuando grafique ecuaciones lineales por medio de las intercepciones, debe ser muy cuidadoso. Si alguno de sus puntos se traza de manera equivocada, su gráfica será incorrecta.

EJEMPLO 2 Grafique la ecuación $5x = 10y - 20$ trazando las intercepciones x y y.

Solución Para determinar la intercepción y (el punto donde la gráfica cruza el eje y), haga $x = 0$ y despeje a y.

$$\begin{aligned} 5x &= 10y - 20 \\ 5(0) &= 10y - 20 \\ 0 &= 10y - 20 \\ 20 &= 10y \\ 2 &= y \end{aligned}$$

La gráfica cruza el eje y en $y = 2$. La pareja ordenada que representa la intercepción y es $(0, 2)$.

Para determinar la intercepción x (el punto donde la gráfica cruza al eje x), haga $y = 0$ y despeje a x.

$$\begin{aligned} 5x &= 10y - 20 \\ 5x &= 10(0) - 20 \\ 5x &= -20 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

La gráfica cruza el eje x en $x = -4$. La pareja ordenada que representa la intercepción x es $(-4, 0)$. Ahora trace las intercepciones y dibuje la gráfica (**figura 3.34**).

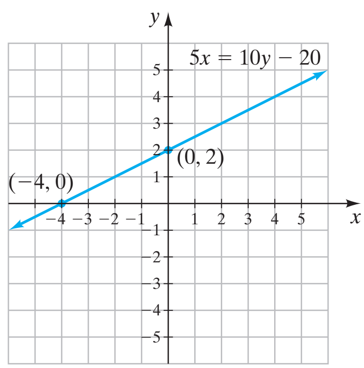


FIGURA 3.34

Ahora resuelva el ejercicio 23

EJEMPLO 3 Grafique $f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$ utilizando las intercepciones x y y.

Solución Trate a $f(x)$ igual que a y. Para determinar la intercepción y, haga $x = 0$ y resuelva para $f(x)$.

$$f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}(0) - 1 = -1$$

La intercepción y es $(0, -1)$.

Para determinar la intercepción x, haga $f(x) = 0$ y despeje a x.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{3}x - 1 \\
0 &= -\frac{1}{3}x - 1 \\
3(0) &= 3\left(-\frac{1}{3}x - 1\right) && \textit{Multiplique ambos lados por 3.} \\
0 &= -x - 3 && \textit{Propiedad distributiva.} \\
x &= -3 && \textit{Sume x a ambos lados.}
\end{aligned}
$$

La intercepción x es $(-3, 0)$. La gráfica se muestra en la **figura 3.35**.

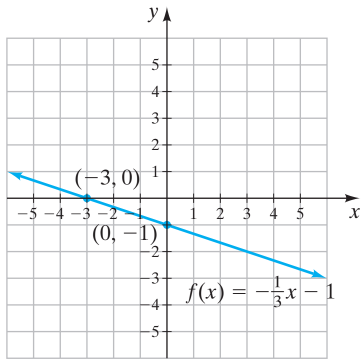


FIGURA 3.35

▸ Ahora resuelva el ejercicio 17

Las gráficas de la forma $ax + by = 0$, pasan por el origen y tienen la misma intercepción x y y $(0, 0)$. Para graficar tales ecuaciones podemos usar la intercepción como un punto y sustituir valores para x y determinar los valores correspondientes de y para obtener otros puntos en la gráfica.

EJEMPLO 4 ▸ Grafique $-6x + 4y = 0$.

Solución Si sustituimos $x = 0$, encontramos que $y = 0$. Por lo que la gráfica pasa por el origen. Seleccionaremos $x = -2$ y $x = 2$ y sustituimos estos valores en la ecuación, uno a la vez, para determinar otros dos puntos en la gráfica.

	Sea $x = -2$.	Sea $x = 2$.
	$-6x + 4y = 0$	$-6x + 4y = 0$
	$-6(-2) + 4y = 0$	$-6(2) + 4y = 0$
	$12 + 4y = 0$	$-12 + 4y = 0$
	$4y = -12$	$4y = 12$
	$y = -3$	$y = 3$
parejas ordenadas:	$(-2, -3)$	$(2, 3)$

Otros dos puntos en la gráfica están en $(-2, -3)$ y $(2, 3)$. La gráfica de $-6x + 4y = 0$ se muestra en la **figura 3.36** de la página 177.

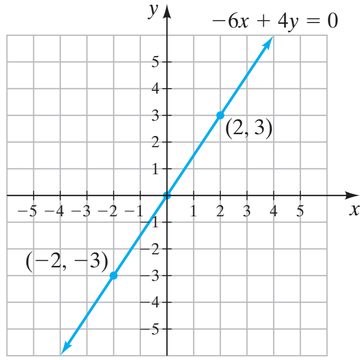


FIGURA 3.36

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 35**

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

En ocasiones puede ser difícil estimar la intercepción de una gráfica de manera precisa. Cuando esto ocurra, quizá desee utilizar una calculadora graficadora. En el ejemplo siguiente demostramos cómo.

Ejemplo Determine las intercepciones x y y de la gráfica de $y = 1.3(x - 3.2)$.

Solución Presione la tecla $\boxed{\text{Y=}}$, y después asigne $1.3(x - 3.2)$ a y. Luego presione la tecla $\boxed{\text{GRAPH}}$ para graficar la función $y = 1.3(x - 3.2)$, como se muestra la **figura 3.37a**.

Con base en la gráfica puede ser difícil determinar las intercepciones. Una manera de determinar la intercepción y es utilizar la característica TRACE, que se analizó en la sección 3.1. La **figura 3.37b** muestra la pantalla de una TI-84 Plus después que ha sido presionada la tecla $\boxed{\text{TRACE}}$. Observe que la intercepción y está en -4.16.

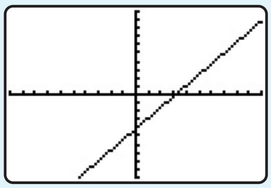


FIGURA 3.37a

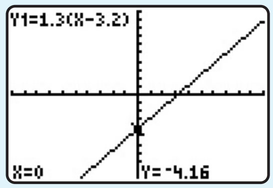


FIGURA 3.37b

Algunas calculadoras graficadoras tienen la capacidad para determinar las intercepciones x de una función presionando sólo algunas teclas. Un **cero** (o **raíz**) de una función es un valor de x tal que $f(x) = 0$. Un cero (o raíz) de una función, es la coordenada x de la intercepción x de la gráfica de la función. Lea el manual de su calculadora para aprender cómo determinar los ceros o raíces de una función. En la TI-84 Plus presione las teclas $\boxed{2^{\text{nd}}}$ $\boxed{\text{TRACE}}$ para obtener el menú CALC (la cual se establece para calcular). Luego seleccione la opción 2, *zero*. Una vez seleccionada la característica cero, la calculadora mostrará

Left bound?

En este momento, mueva el cursor a lo largo de la curva hasta que esté a la *izquierda* del cero. Luego presione $\boxed{\text{ENTER}}$. Ahora la calculadora mostrará

Right bound?

Mueva el cursor a lo largo de la curva hasta que esté a la *derecha* del cero. Luego presione $\boxed{\text{ENTER}}$. Ahora la calculadora muestra

Guess?

Presione $\boxed{\text{ENTER}}$ por tercera vez y el cero se mostrará en la parte inferior de la pantalla, como en la **figura 3.38**. Así, la intercepción x en la función está en 3.2. Para practicar la determinación de intercepciones en su calculadora, resuelva los ejercicios del 69 al 72.

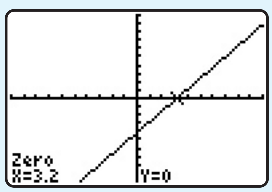


FIGURA 3.38

3 Graficar ecuaciones de la forma $x = a$ y $y = b$

Los ejemplos 5 y 6 ilustran cómo se grafican ecuaciones de la forma $x = a$ y $y = b$, donde a y b son constantes.

EJEMPLO 5 ▸ Grafique la ecuación $y = -3$.

Solución Esta ecuación puede escribirse como $y = -3 + 0x$. Así, para cualquier valor seleccionado de x, y es -3. La gráfica de $y = -3$ se ilustra en la **figura 3.39**.

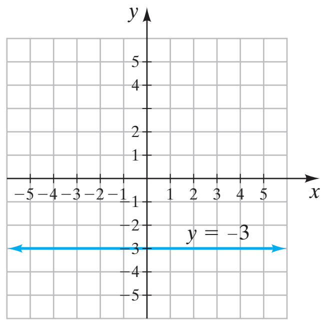


FIGURA 3.39

▸ Ahora resuelva el ejercicio 43

Ecuación de una recta horizontal

La gráfica de cualquier ecuación de la forma $y = b$ siempre será una recta horizontal para cualquier número real b.

Observe que la gráfica de $y = -3$ es una función, ya que pasa la prueba de la recta vertical. Para cada valor seleccionado de x, el valor de y, o el valor de la función, es -3. Éste es un ejemplo de una **función constante**. Podemos escribir

$$f(x) = -3$$

Cualquier ecuación de la forma $y = b$ o $f(x) = b$, donde b representa una constante, es una función constante.

EJEMPLO 6 ▸ Grafique la ecuación $x = 2$.

Solución Esta ecuación puede escribirse como $x = 2 + 0y$. Por lo tanto, para cada valor seleccionado de y, x tendrá un valor de 2 (**figura 3.40**).

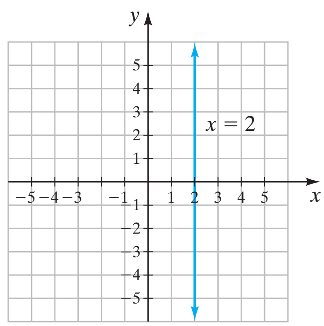


FIGURA 3.40

Ahora resuelva el ejercicio 41

Ecuación de una recta vertical

La gráfica de cualquier ecuación de la forma $x = a$ siempre será una recta vertical para cualquier número real a.

Observe que la gráfica de $x = 2$ no representa una función ya que no pasa la prueba de la recta vertical. Para $x = 2$ existe más de un valor de y. De hecho, cuando $x = 2$ hay un número infinito de valores para y.

4 Estudiar aplicaciones de funciones

Con frecuencia las gráficas se utilizan para mostrar la relación entre variables. Los ejes de una gráfica no tienen que ser etiquetados como x y y; antes bien, pueden designarse con cualquier variable. Considere el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 ▸ **Utilidad en un almacén de neumáticos** La utilidad anual, p, de un almacén de neumáticos puede estimarse por medio de la función $p(n) = 20n - 30{,}000$, en la que n es el número de neumáticos vendidos por año.

a) Dibuje una gráfica de la utilidad contra los neumáticos vendidos hasta e incluyendo 6000 neumáticos.

b) Estime el número de neumáticos que deben venderse para que la compañía no pierda ni gane.

c) Estime el número de neumáticos vendidos, si la compañía tiene una utilidad de \$70,000.

Solución **a)** Entienda el problema La utilidad, p, es una función del número de neumáticos vendidos, n. Por tanto, el eje horizontal estará etiquetado Número de neumáticos vendidos (la variable independiente) y el eje vertical estará etiquetado Utilidad (la variable dependiente). Como el número mínimo de neumáticos que pueden venderse es 0, los valores negativos no tienen que estar listados en el eje horizontal. Por consiguiente, el eje horizontal irá de 0 a 6000 neumáticos.
Graficaremos esta ecuación determinando y trazando las intercepciones.

Traduzca y realice los cálculos Para determinar la intercepción p, hacemos $n = 0$ y le resolvemos para $p(n)$.

$$p(n) = 20n - 30{,}000$$
$$p(n) = 20(0) - 30{,}000 = -30{,}000$$

Así, la intercepción p es $(0, -30{,}000)$

Para determinar la intercepción n, hacemos $p(n) = 0$ y despejamos n.

$$\begin{aligned} p(n) &= 20n - 30{,}000 \\ 0 &= 20n - 30{,}000 \\ 30{,}000 &= 20n \\ 1500 &= n \end{aligned}$$

Así, la intercepción n es $(1500, 0)$.

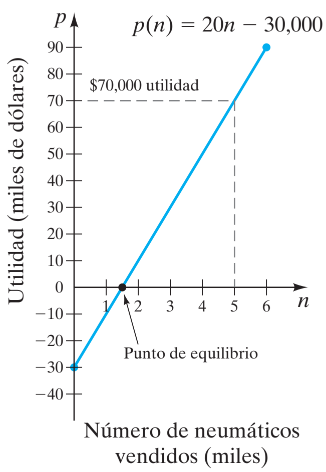


FIGURA 3.41

Responda Ahora utilizamos las intercepciones p y n para dibujar la gráfica (vea la **figura 3.41**).

b) El punto de equilibrio es el número de neumáticos que deben venderse para que la compañía no tenga ganancias ni pérdidas. El punto de equilibrio es donde la gráfica interseca el eje n, que es donde la utilidad, p, es 0. Para estar en equilibrio, deben venderse aproximadamente 1500 neumáticos.

c) Para tener una utilidad de \$70,000, deben venderse aproximadamente 5000 neumáticos (mostrados por la línea discontinua en la **figura 3.41**).

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 51**

Algunas veces es difícil leer una respuesta exacta a partir de una gráfica. A fin de determinar el número exacto de neumáticos necesarios para estar en el punto de equilibrio del ejemplo 7, sustituya 0 por $p(n)$ en la función $p(n) = 20n - 30{,}000$ y despeje n. Para determinar el número exacto de neumáticos para tener una utilidad de \$70,000, sustituya 70,000 por $p(n)$ y resuelva la ecuación para n.

EJEMPLO 8 ▸ **Ventas en una juguetería** Andrew Gestrich es el propietario de una juguetería. Su salario mensual consiste en \$200 más 10% de las ventas de la tienda durante el mes.

a) Escriba una función que exprese su salario mensual, m, en términos de las ventas de la tienda, s.

b) Dibuje una gráfica de su salario mensual para ventas superiores a e incluyendo \$20,000.

c) Si las ventas del almacén durante el mes de abril son \$15,000, ¿cuál será el salario de Andrew para abril?

s	m
0	200
10,000	1200
20,000	2200

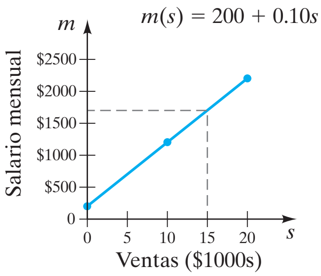


FIGURA 3.42

Solución

a) El salario mensual de Andrew es una función de las ventas. Su salario mensual, m, consiste en $200 más 10% de las ventas, s. Diez por ciento de s es $0.10s$. Así que la función para determinar su salario es

$$m(s) = 200 + 0.10s$$

b) Como el salario mensual es una función de las ventas, Ventas estará representado en el eje horizontal y Salario mensual estará representado en el eje vertical. Como las ventas nunca pueden ser negativas, el salario mensual nunca puede ser negativo. Así, ambos ejes se dibujarán sólo con números positivos. Dibujaremos esta gráfica por medio del trazo de puntos. Seleccionamos valores para s, determinamos los valores correspondientes de m y luego dibujamos la gráfica. Podemos seleccionar valores de s que estén entre $0 y $20,000 (**figura 3.42**).

c) Al leer cuidadosamente nuestra gráfica, podemos estimar que cuando las ventas de la tienda son de $15,000, el salario mensual de Andrew es alrededor de $1700.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 53**

5 Resolver de manera gráfica ecuaciones lineales con una variable

Anteriormente estudiamos la gráfica de $f(x) = 2x + 4$. A continuación, en la **figura 3.43**, ilustramos la gráfica de $f(x)$ junto con la gráfica de $g(x) = 0$. Observe que las dos gráficas se intersecan en $(-2, 0)$. Podemos obtener la coordenada x de la pareja ordenada resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$. Recuerde que $f(x)$ y $g(x)$ representan a y, y que despejando a x de esta ecuación obtendremos el valor de x donde las y son iguales.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \overbrace{2x + 4} &= \overbrace{0} \\ 2x &= -4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Observe que obtenemos -2, la coordenada x de la pareja ordenada en el punto de intersección.

Ahora determinemos la coordenada x del punto en el cual se intersecan las gráficas de $f(x) = 2x + 4$ y $g(x) = 2$. Resolvemos la ecuación $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \overbrace{2x + 4} &= \overbrace{2} \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

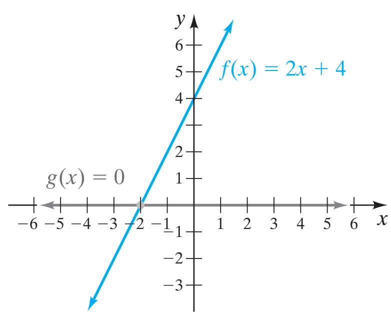


FIGURA 3.43

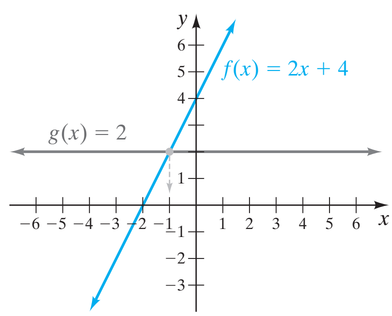


FIGURA 3.44

La coordenada x del punto de intersección de las dos gráficas es -1, como se muestra en la **figura 3.44**. Observe que $f(-1) = 2(-1) + 4 = 2$.

En general, si se nos da una ecuación en una variable, podemos considerar cada lado de la ecuación como una función separada. Para obtener la solución para la ecuación, podemos graficar las dos funciones. La coordenada x del punto de intersección será la solución a la ecuación.

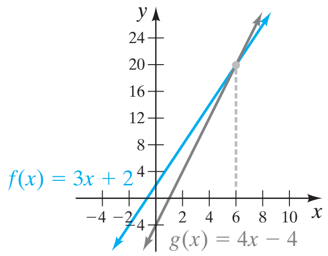


FIGURA 3.45

EJEMPLO 9 Determine, de forma gráfica, la solución a la ecuación $3x + 2 = 4x - 4$.

Solución Sean $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = 4x - 4$. La gráfica de estas funciones se ilustra en la **figura 3.45**. La coordenada x del punto de intersección es 6. Por lo tanto, la solución de la ecuación es 6. Ahora compruebe la solución.

Ahora resuelva el ejercicio 65

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

En el ejemplo 9 resolvimos una ecuación en una variable por medio de la graficación de dos funciones. En el ejemplo siguiente, explicamos cómo determinar el punto de intersección de dos funciones en una calculadora graficadora.

Ejemplo Utilice una calculadora graficadora para determinar la solución de $2(x + 3) = \frac{1}{2}x + 4$.

Solución Asigne $2(x + 3)$ a Y_1 y asigne $\frac{1}{2}x + 4$ a Y_2 para obtener

$$Y_1 = 2(x + 3)$$
$$Y_2 = \frac{1}{2}x + 4$$

Ahora presione la tecla GRAPH para graficar las funciones. La gráfica de las funciones se muestra en la **figura 3.46**.

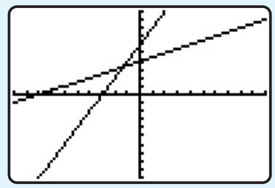


FIGURA 3.46

Examinando la gráfica, ¿puede determinar la coordenada x del punto de intersección? ¿Es −1, −1.5, o algún valor diferente? Podemos determinar el punto de intersección de varias formas. Un método implica utilizar las características TRACE y ZOOM. La **figura 3.47** muestra la ventana de una TI-84 Plus después de que se ha utilizado la característica TRACE y el cursor se ha movido muy cerca del punto de intersección. (Observe que al presionar las teclas de flecha hacia arriba y hacia abajo cambia de una función a la otra).

En la parte inferior de la pantalla de la **figura 3.47**, observe las coordenadas x y y del cursor. Para obtener una vista más cercana alrededor del área del cursor, podemos realizar un *acercamiento* (*zoom in*) por medio de la tecla ZOOM. Después de hacer un acercamiento, puede mover el cursor más cerca del punto de intersección y obtener una mejor lectura (**figura 3.48**). Puede hacer esto una y otra vez hasta que obtenga tanta precisión en su respuesta como necesite. Parece, de la **figura 3.48**, que la coordenada x de la intersección es alrededor de −1.33.

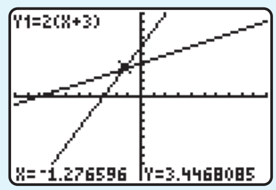


FIGURA 3.47

Las calculadoras graficadoras también pueden mostrar la intersección de dos gráficas utilizando ciertas teclas. Las teclas que hay que presionar dependen de su calculadora; lea el manual de su calculadora para determinar cómo hacer esto. Por lo general, este procedimiento es más rápido y fácil de usar para determinar el punto de intersección de dos gráficas.

En la TI-84 Plus, seleccione la opción 5:INTERSECT, del menú CALC para determinar la intersección. Una vez que se ha seleccionado la característica INTERSECT, la calculadora mostrará

First curve?

En este momento, mueva el cursor a lo largo de la primera curva hasta que esté cerca del punto de intersección. Luego presione la tecla ENTER. Ahora la calculadora mostrará

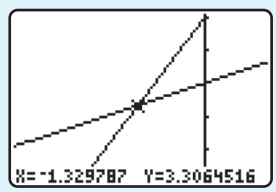


FIGURA 3.48

Second curve?

Entonces, el cursor aparecerá en la segunda curva. Si el cursor no está cerca del punto de intersección, muévalo a lo largo de esta curva hasta que esté cerca. Ahora presione ENTER. A continuación la calculadora mostrará

Guess?

Ahora presione otra vez ENTER y se mostrará el punto de intersección.

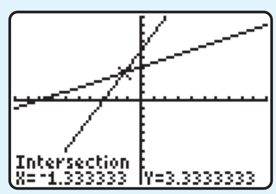


FIGURA 3.49

La **figura 3.49** muestra la ventana después de que se ha realizado este procedimiento. Vemos que la coordenada x del punto de intersección es $-1.333\ldots$ o $-1\frac{1}{3}$ y la coordenada y del punto de intersección es $3.333\ldots 3\frac{1}{3}$.

Para practicar el uso de una calculadora graficadora a fin de resolver una ecuación con una variable, resuelva los ejercicios del 65 al 68.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cuál es la forma general de una ecuación lineal?
2. Si le dan una ecuación lineal en forma general y desea escribir la ecuación por medio de notación de funciones, ¿cómo lo haría?
3. Expliqué cómo determinar las intercepciones x y y de la gráfica de una ecuación.
4. ¿Qué términos utiliza una calculadora graficadora para indicar las intercepciones x?
5. ¿Cómo se verá la gráfica de $x = a$ para cualquier número real a?
6. ¿Qué apariencia tendrá la gráfica de $y = b$ para cualquier número real b?
7. ¿Qué apariencia tendrá la gráfica de $f(x) = b$ para cualquier número real b?
8. ¿La gráfica de $x = a$ es una función? Explique.
9. Explique cómo resolver, de forma gráfica, una ecuación con una variable.
10. Explique cómo resolver la ecuación $4(x - 1) = 3x - 8$ de forma gráfica.

Práctica de habilidades

Escriba cada ecuación en la forma general.

11. $y = -2x + 5$
12. $7x = 3y - 6$
13. $3(x - 2) = 4(y - 5)$
14. $\frac{1}{2}y = 2(x - 3) + 4$

Grafique cada ecuación utilizando las intercepciones x y y.

15. $y = -2x + 1$
16. $y = x - 5$
17. $f(x) = 2x + 3$
18. $f(x) = -6x + 5$
19. $2y = 4x + 6$
20. $2x - 3y = 12$
21. $\frac{4}{3}x = y - 3$
22. $\frac{1}{4}x + y = 2$
23. $15x + 30y = 60$
24. $6x + 12y = 24$
25. $0.25x + 0.50y = 1.00$
26. $-1.6y = 0.4x + 9.6$
27. $120x - 360y = 720$
28. $250 = 50x - 50y$
29. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 12$
30. $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = -3$

Grafique cada ecuación.

31. $y = -2x$
32. $y = \frac{1}{2}x$
33. $f(x) = \frac{1}{3}x$
34. $g(x) = 4x$
35. $2x + 4y = 0$
36. $-10x + 5y = 0$
37. $6x - 9y = 0$
38. $18x + 6y = 0$

Grafique cada ecuación.

39. $y = 4$
40. $y = -4$
41. $x = -4$
42. $x = 4$
43. $y = -1.5$
44. $f(x) = -3$
45. $x = 0$
46. $g(x) = 0$
47. $x = \frac{5}{2}$
48. $x = -3.25$

Resolución de problemas

49. Distancia Por medio de la fórmula de distancia

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo, o } d = rt$$

dibuje una gráfica de distancia contra tiempo para una velocidad constante de 30 millas por hora.

50. Interés simple Por medio de la fórmula de interés simple

$$\text{interés} = \text{capital} \cdot \text{tasa} \cdot \text{tiempo, o } i = prt$$

dibuje una gráfica de interés contra tiempo para un capital de $1000 y una tasa de 3%.

51. Utilidad en bicicletas La utilidad de un fabricante de bicicletas puede aproximarse por medio de la función $p(x) = 60x - 80{,}000$, donde x es el número de bicicletas producidas y vendidas.

a) Dibuje una gráfica de utilidad contra el número de bicicletas vendidas (hasta 5000 bicicletas).

b) Estime el número de bicicletas que deben venderse para que la compañía esté en equilibrio.

c) Estime el número de bicicletas que se debe vender para que la compañía tenga una utilidad de $150,000.

52. Costo de operación de un taxi El costo semanal de Raúl López para la operación de un taxi es $75 más 15 centavos por milla.

a) Escriba una función que exprese el costo semanal de Raúl, c, en términos del número de millas, m.

b) Dibuje una gráfica que ilustre el costo semanal contra el número de millas, hasta 200, conducidas por semana.

c) Si durante una semana, Raúl condujo el taxi 150 millas, ¿cuál sería el costo?

d) ¿Cuántas millas tendría que conducir Raúl para que el costo semanal fuese de $135?

53. Salario más comisión El salario semanal de Jayne Haydack en Charter Network es $500 más 15% de comisión sobre sus ventas semanales.

a) Escriba una función que exprese el salario semanal de Jayne, s, en términos de sus ventas semanales, x.

b) Dibuje una gráfica del salario semanal de Jayne contra sus ventas semanales, hasta $5000 en ventas.

c) ¿Cuál es el salario semanal de Jayne, si sus ventas fueron de $3000?

d) Si el salario semanal de Jayne durante la semana fue de $1100, ¿cuáles fueron sus ventas semanales?

54. Salario más comisión Lynn Hicks, una agente de bienes raíces, gana $100 por semana más 3% de comisión por ventas en cada propiedad que ella venda.

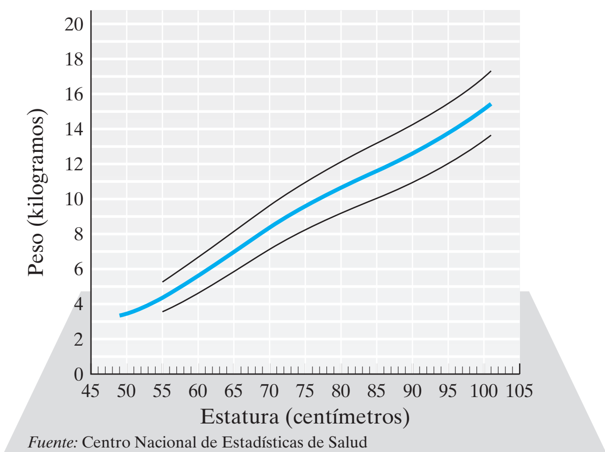
a) Escriba una función que exprese su salario semanal, s, en términos de las ventas, x.

b) Dibuje una gráfica de su salario contra sus ventas semanales, para ventas hasta de $100,000.

c) Si ella vende una casa por semana en $75,000, ¿cuál será su salario semanal?

55. Peso de niñas La gráfica siguiente muestra el peso, en kilogramos, para niñas (hasta de 36 meses de edad) contra la altura (o estatura), en centímetros. La línea roja es el peso promedio de todas las niñas de la estatura dada, y las líneas más delgadas en negro representan los límites superior e inferior del rango normal.

Niñas: Crecimiento físico de recién nacidas a 36 meses



Fuente: Centro Nacional de Estadísticas de Salud

a) Explique por qué la línea roja representa una función.

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

c) ¿La gráfica del peso contra la estatura es aproximadamente lineal?

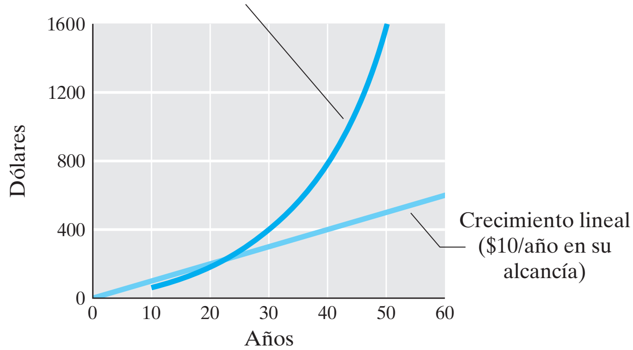
d) ¿Cuál es el peso, en kilogramos, de las niñas que tengan una estatura de 85 centímetros?

e) ¿Cuál es la altura promedio, en centímetros, de las niñas con un peso de 7 kilogramos?

f) ¿Qué pesos son considerados normales para una niña de 95 centímetros de estatura?

g) ¿Qué le sucede al rango normal conforme la altura aumenta? ¿Esto es lo que usted esperaría que sucediese? Explique.

56. Interés compuesto La gráfica siguiente ilustra el efecto del interés compuesto.



Si un niño pone $10 cada año en su alcancía, los ahorros crecerán linealmente, como lo muestra la curva inferior. Si, a la edad de diez años, el niño invierte $100 al 7% de interés compuesto cada año, esos $100 crecerán de manera exponencial.

a) Explique por qué ambas gráficas representan funciones.

b) ¿Qué es la variable independiente? ¿Qué es la variable dependiente?

c) Por medio de la curva de crecimiento lineal, determine cuánto tiempo pasará para ahorrar $600.

d) Por medio de la curva de crecimiento exponencial, la cual inicia en el año 10, determine cuánto tiempo después de que se haya abierto la cuenta la cantidad alcanzaría $600.

e) Iniciando en el año 20 y el dinero creciendo a una tasa lineal, ¿cuánto tiempo pasaría para que el dinero se duplicara?

f) Si se iniciara en el año 20 y el dinero creciera a una tasa exponencial, ¿cuánto tiempo pasaría para que el dinero se duplicara? (El crecimiento exponencial se estudiará con detalle en el capítulo 9).

57. ¿Cuándo, si sucede, las intercepciones x y y de una gráfica serán iguales? Explique.

58. Escriba dos funciones lineales cuyas intercepciones x y y sean $(0, 0)$.

59. Escriba una función cuya gráfica no tenga intercepción x pero que tenga una intercepción y en $(0, 4)$.

60. Escriba una ecuación cuya gráfica no tenga intercepción y, pero que tenga una intercepción x en -5.

61. Si las intercepciones x y y de una función lineal están en 1 y -3, respectivamente, ¿cuáles serán las nuevas intercepciones x y y, si la gráfica se mueve (o traslada) tres unidades hacia arriba?

62. Si las intercepciones x y y de una función lineal son -1 y 3, respectivamente, ¿cuáles serán las nuevas intercepciones x y y, si la gráfica se mueve (o traslada) cuatro unidades hacia abajo?

En los ejercicios 63 y 64, damos dos parejas ordenadas, las cuales son las intercepciones x y y de una gráfica. **a)** *Trace los puntos y dibuje la línea que pasa por los puntos.* **b)** *Determine el cambio en y, cambio vertical, entre los puntos.* **c)** *Determine el cambio en x, cambio horizontal, entre los puntos.* **d)** *Determine la razón del cambio vertical al cambio horizontal entre estos dos puntos. ¿Sabe lo que representa esta razón?* (*Estudiaremos esto con más detalle en la sección* 3.4).

63. $(0, 2)$ y $(-4, 0)$

64. $(3, 5)$ y $(-1, -1)$

Resuelva cada ecuación para x como se hizo en el ejemplo 9. Utilice una calculadora graficadora, si tiene una disponible. Si no, dibuje la gráfica usted mismo.

65. $2x + 5 = 8x - 1$

66. $3(x + 2) + 1 = 2(x - 1) + 7$

67. $0.3(x + 5) = -0.6(x + 2)$

68. $2x + \frac{1}{4} = 5x - \frac{1}{2}$

Por medio de su calculadora graficadora, determine las intercepciones x y y de la gráfica de cada ecuación.

69. $y = 2(x + 3.2)$

70. $5x - 2y = 7$

71. $-4x - 3.2y = 8$

72. $y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{2}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **73.** Evalúe $4\{2 - 3[(1 - 4) - 5]\} - 2$.

[2.1] **74.** Resuelva $\frac{1}{3}y - 3y = 6(y + 2)$.

[2.6] *En los ejercicios del 75 al 77* **a)** *explique el procedimiento para resolver la ecuación o desigualdad para x* (*suponga que* $b > 0$) *y* **b)** *resuelva la ecuación o desigualdad.*

75. $|x - a| = b$

76. $|x - a| < b$

77. $|x - a| > b$

78. Resuelva la ecuación $|x - 4| = |2x - 2|$.

3.4 La forma pendiente intercepción de una ecuación lineal

1 Entender la traslación de gráficas.

2 Determinar la pendiente de una recta.

3 Reconocer la pendiente como una razón de cambio.

4 Escribir ecuaciones lineales en la forma pendiente intercepción.

5 Graficar ecuaciones lineales por medio de la pendiente y la intercepción y.

6 Usar la forma pendiente intercepción para construir modelos a partir de gráficas.

1 Entender la traslación de gráficas

En esta sección estudiamos la traslación de gráficas, el concepto de pendiente y la forma pendiente intercepción de una ecuación lineal.

Considere las tres ecuaciones

$$y = 2x + 3$$
$$y = 2x$$
$$y = 2x - 3$$

Cada ecuación se grafica en la **figura 3.50**.

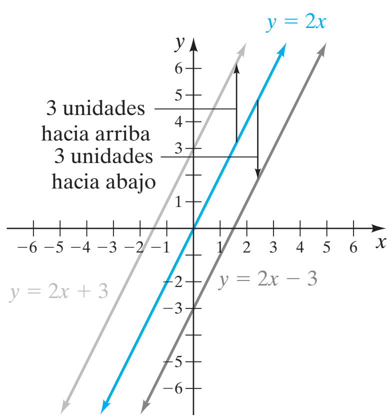


FIGURA 3.50

¿Cuáles son las intercepciones y de $y = 2x + 3$, $y = 2x$ (o $y = 2x + 0$) y $y = 2x - 3$? Las intercepciones y están en $(0, 3)$, $(0, 0)$ y $(0, -3)$, respectivamente. Observe que la gráfica de $y = 2x + 3$ es la gráfica de $y = 2x$ recorrida, o **trasladada**, 3 unidades hacia arriba y $y = 2x - 3$ es la gráfica de $y = 2x$ trasladada 3 unidades hacia abajo. Las tres rectas son **paralelas**; esto es, no se intersecan sin importar cuánto se extiendan.

Por medio de esta información, ¿podría conjeturar cuál será la intercepción y de $y = 2x + 4$? ¿qué hay acerca de la intercepción y de $y = 2x - \dfrac{5}{3}$? Si respondió $(0, 4)$ y $\left(0, -\dfrac{5}{3}\right)$, respectivamente, lo hizo correctamente. En efecto, la gráfica de una ecuación de la forma $y = 2x + b$, tendrá una intercepción y de $(0, b)$.

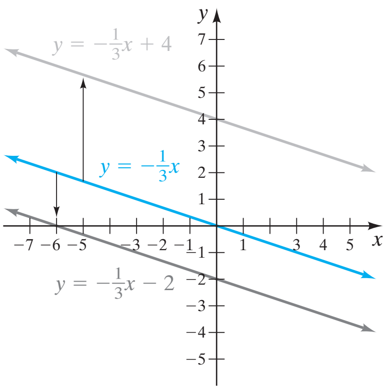


FIGURA 3.51

Ahora considere las gráficas de las ecuaciones $y = -\dfrac{1}{3}x + 4$, $y = -\dfrac{1}{3}x$ y $y = -\dfrac{1}{3}x - 2$, que se muestran en la **figura 3.51**. Las intercepciones y de las tres rectas son $(0, 4)$, $(0, 0)$ y $(0, -2)$, respectivamente. La gráfica de $y = -\dfrac{1}{3}x + b$ tendrá una intercepción y de $(0, b)$.

Al ver las ecuaciones anteriores, sus gráficas e intercepciones y, ¿podría determinar la intercepción y de la gráfica de $y = mx + b$, donde m y b son números reales? Si su respuesta es $(0, b)$, respondió de forma correcta. En general, la gráfica de $y = mx + \boldsymbol{b}$, donde m y b son números reales, tiene una intercepción y igual a $(0, \boldsymbol{b})$.

Se miramos las gráficas en la **figura 3.50**, vemos que las pendientes (o inclinaciones) de las tres rectas parecen ser iguales. Si observamos las gráficas en la **figura 3.51**, vemos que las pendientes de esas tres rectas parecen ser iguales, pero su pendiente es diferente de la pendiente de las tres rectas en la **figura 3.50**.

Si consideramos la ecuación $y = mx + b$, en donde la b determina la intercepción y de la recta, podemos razonar que la m es responsable de la pendiente (o inclinación) de la recta.

2 Determinar la pendiente de una recta

Ahora analicemos la pendiente. La **pendiente de una recta** es la razón del cambio vertical (o elevación) al cambio horizontal (o desplazamiento) entre dos puntos cualesquiera de la recta. Considere la gráfica de $y = 2x$ (la recta de en medio de la **figura 3.50**, y que se repite en la **figura 3.52a**). Dos puntos en esta línea son $(1, 2)$ y $(3, 6)$. Determinamos la pendiente de la recta a través de estos puntos. Si dibujamos una recta paralela al eje x que pase por el punto $(1, 2)$ y una recta paralela al eje y que pase por el punto $(3, 6)$, las dos rectas se intersecan en $(3, 2)$. (Vea la **figura 3.52b**).

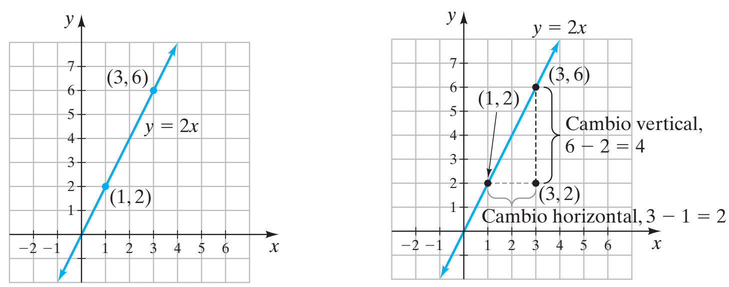


FIGURA 3.52 (a) (b)

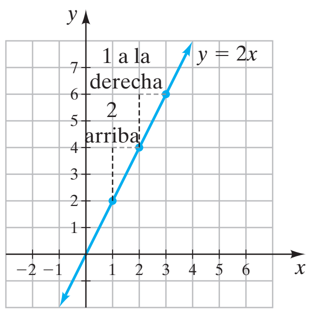


FIGURA 3.53

Con base en la **figura 3.52b** podemos determinar la pendiente de la recta. El cambio vertical (a lo largo del eje y) es $6 - 2$, o 4 unidades. El cambio horizontal (a lo largo del eje x) es $3 - 1$, o 2 unidades.

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{4}{2} = 2$$

Así, la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(3, 6)$ y $(1, 2)$ es 2. Al examinar la recta que conecta estos dos puntos, podemos ver que por cada 2 unidades que la gráfica se mueve hacia arriba en el eje y, se mueve 1 unidad a la derecha en el eje x (vea la **figura 3.53**).

Hemos determinado que la pendiente de la gráfica de $y = 2x$ sea 2. Si tuviera que calcular la pendiente de las otras dos rectas en la **figura 3.50**, determinaría que las gráficas de $y = 2x + 3$ y $y = 2x - 3$ también tienen una pendiente de 2.

¿Puede conjeturar cuál es la pendiente de las gráficas de las ecuaciones $y = -3x + 2$, $y = -3x$ y $y = -3x - 2$? La pendiente de las tres rectas es -3. En general, la pendiente de una ecuación de la forma $y = \boldsymbol{m}x + b$ es $\boldsymbol{m}$.*

Ahora determinaremos el procedimiento para encontrar la pendiente de una recta que pasa por los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Considere la **figura 3.54**. Podemos determinar el cambio vertical restando y_1 de y_2. Podemos también determinar el cambio horizontal restando x_1 de x_2.

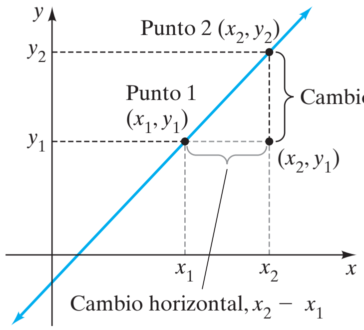


FIGURA 3.54

Pendiente

La **pendiente** de una recta que pasa por los puntos distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cambio en } y \text{ (cambio vertical)}}{\text{cambio en } x \text{ (cambio horizontal)}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

siempre y cuando $x_1 \neq x_2$.

Al determinar la pendiente de una recta no importa cuáles dos puntos de la recta se elijan. Tampoco importa cuál punto se marque como (x_1, y_1) o como (x_2, y_2). Como se mencionó antes, la letra m se utiliza para representar la pendiente de una recta. La letra griega mayúscula delta, Δ, se utiliza para representar las palabras *el cambio en*. Así, en ocasiones la pendiente se indica como

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

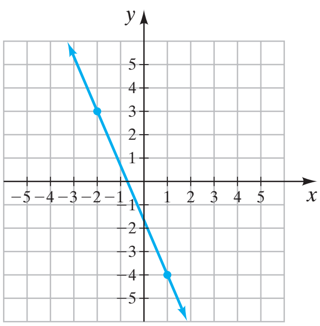


FIGURA 3.55

EJEMPLO 1 Determine la pendiente de la recta de la **figura 3.55**.

Solución Dos puntos en la recta son $(-2, 3)$ y $(1, -4)$. Sea $(x_2, y_2) = (-2, 3)$ y $(x_1, y_1) = (1, -4)$. Entonces

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-4)}{-2 - 1} = \frac{3 + 4}{-3} = -\frac{7}{3}$$

La pendiente de la recta es $-\frac{7}{3}$. Observe que si hubiéramos hecho $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ y $(x_2, y_2) = (1, -4)$, la pendiente seguiría siendo $-\frac{7}{3}$. Inténtelo y lo verá.

Ahora resuelva el ejercicio 35

Una recta que se eleva conforme va de izquierda a derecha (**figura 3.56a** en la página 187) tiene una **pendiente positiva**. Una recta que no se eleva ni baja al ir de izquierda a derecha (**figura 3.56b**) tiene **pendiente cero**. Una recta que baja conforme va de izquierda a derecha (**figura 3.56c**) tiene una **pendiente negativa**.

*Tradicionalmente, la letra m se usa para la pendiente. Se cree que m proviene de la palabra francesa *m*onter, que significa "escalar".

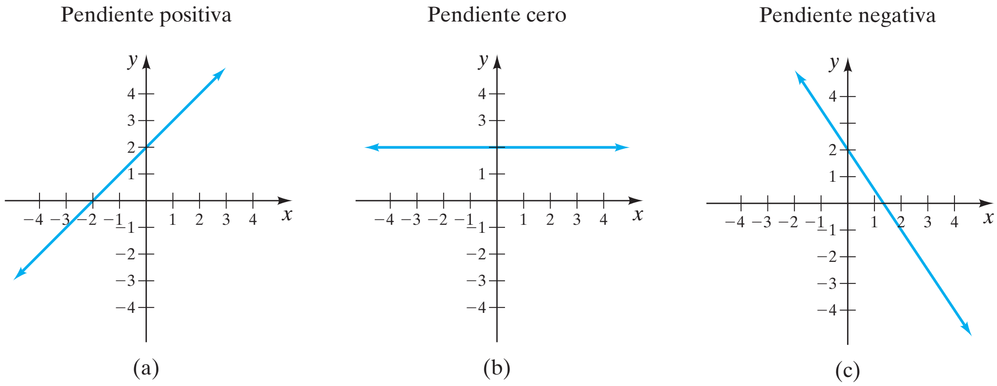


FIGURA 3.56

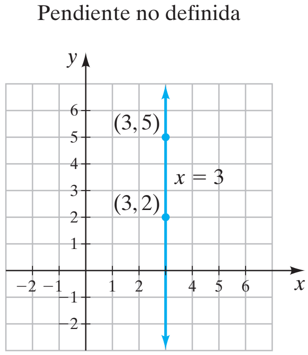


FIGURA 3.57

Considere la gráfica de $x = 3$ (**figura 3.57**). ¿Cuál es su pendiente? La gráfica es una recta vertical y pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(3, 5)$. Sea $(3, 5)$ el punto correspondiente a (x_2, y_2) y sea $(3, 2)$ el punto correspondiente a (x_1, y_1). Entonces la pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 2}{3 - 3} = \frac{3}{0}$$

Como no tiene sentido dividir entre 0, decimos que la pendiente de esta recta es indefinida. **La pendiente de cualquier recta vertical es indefinida**.

Sugerencia útil

Cuando se pide a los estudiantes dar la pendiente de una recta horizontal o una vertical, con frecuencia responden de manera incorrecta. Cuando se les pide la pendiente de una recta horizontal, su respuesta debería ser "la pendiente es 0". Si usted responde "no tiene pendiente", su instructor podría indicar que eso es incorrecto, ya que estas palabras pueden tener varias interpretaciones. Cuando se le pregunte por la pendiente de una recta vertical, su respuesta debe ser "la pendiente es indefinida". Nuevamente, si usted utiliza las palabras "no tiene pendiente", su instructor podría interpretar esto en forma diferente y calificarlo como incorrecto.

3 Reconocer la pendiente como una razón de cambio

En ocasiones es útil describir la pendiente como *una razón de cambio*. Considere una pendiente de $\frac{5}{3}$. Esto significa que el valor de y aumenta 5 unidades por cada aumento de 3 unidades en x. De forma equivalente, podemos decir que el valor de y aumenta $\frac{5}{3}$ unidades, o $1.\overline{6}$ unidades, por cada aumento de una unidad en x. Cuando damos el cambio en y por unidad de cambio en x estamos dando la pendiente como una **razón de cambio**. Cuando analicemos situaciones de la vida real o cuando creemos modelos matemáticos, con frecuencia es útil estudiar pendiente como una razón de cambio.

EJEMPLO 2 ▸ Deuda pública La siguiente tabla de valores y la gráfica correspondiente (**figura 3.58**) ilustran la deuda pública de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1910 a 2005.

Año	Deuda pública de Estados Unidos (miles de millones de dólares)
1910	1.1
1930	16.1
1950	256.1
1970	370.1
1990	3323.3
2002	5957.2
2005	7832.6

Fuente: Departamento del Tesoro de Estados Unidos, Oficina de Deuda Pública.

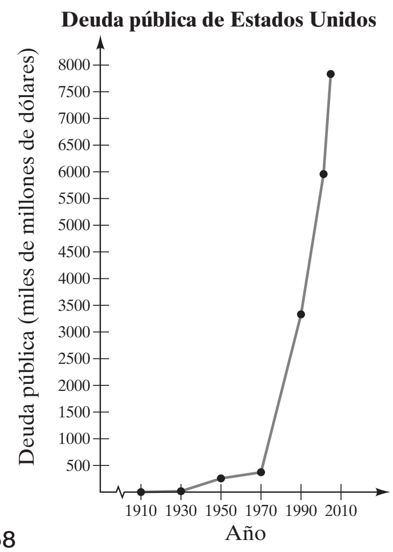


FIGURA 3.58

a) Determine la pendiente de los segmentos de recta entre 1910 y 1930 y entre 2002 y 2005.

b) Compare las dos pendientes determinadas en la parte **a)** y explique lo que esto significa en términos de la deuda pública de Estados Unidos.

Solución Entienda el problema **a)** Para determinar la pendiente entre cualquiera de dos años, determine la razón de cambio en la deuda al cambio en años.

Pendiente de 1910 a 1930

$$m = \frac{16.1 - 1.1}{1930 - 1910} = \frac{15}{20} = 0.75$$

La deuda pública de Estados Unidos de 1910 a 1930 aumentó a una tasa de \$0.75 miles de millones por año.

Pendiente de 1990 a 2002

$$m = \frac{7832.6 - 5957.2}{2005 - 2002} = \frac{1875.4}{3} \approx 625.13$$

La deuda pública de Estados Unidos de 2002 a 2005 aumentó a una tasa de alrededor de \$625.13 miles de millones por año.

b) La pendiente mide una razón de cambio. Al comparar las pendientes para los dos periodos, se observa un incremento mucho mayor en la razón de cambio promedio en la deuda pública de 2002 a 2005 que de 1910 a 1930. La pendiente del segmento de recta de 2002 a 2005 es mayor que la pendiente de cualquier otro segmento de recta en la gráfica. Esto indica que la deuda pública de 2002 a 2005 creció a una tasa más rápida que en cualquier otro periodo ilustrado.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 69

4 Escribir ecuaciones lineales en la forma pendiente intercepción

Ya hemos mostrado que para una ecuación de la forma $y = mx + b$, m representa la pendiente y b representa la intercepción y. Por esta razón, una ecuación lineal escrita en la forma $y = mx + b$ se dice que está en la **forma pendiente intercepción** (o forma pendiente ordenada al origen).

Forma pendiente intercepción

La **forma pendiente intercepción de una ecuación lineal** es

$$y = mx + b$$

donde ***m*** **es la pendiente** de la recta y **(0, *b*)** **es la intercepción** ***y*** de la recta.

Ejemplos de ecuaciones en forma pendiente intercepción

$$y = 3x - 6 \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Pendiente   la intercepción y es (0, b)

$$y = \underset{\uparrow}{m}x + \underset{\uparrow}{b}$$

Ecuación	Pendiente	Intercepción *y*
$y = 3x - 6$	3	$(0, -6)$
$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Cómo escribir una ecuación en la forma pendiente intercepción

Para escribir una ecuación en la forma pendiente intercepción, despeje a y en la ecuación.

EJEMPLO 3 Determine la pendiente y la intercepción y de la ecuación $-5x + 2y = 8$.

Solución Escriba la ecuación en la forma pendiente intercepción, despejando a y en la ecuación.

$$\begin{aligned}-5x + 2y &= 8\\ 2y &= 5x + 8\\ y &= \frac{5x+8}{2}\\ y &= \frac{5x}{2} + \frac{8}{2}\\ y &= \frac{5}{2}x + 4\end{aligned}$$

La pendiente es $\frac{5}{2}$; la intercepción y es $(0, 4)$.

Ahora resuelva el ejercicio 43

5 Graficar ecuaciones lineales por medio de la pendiente y la intercepción *y*

Una razón para estudiar la forma pendiente intercepción de una recta es que puede ser útil al dibujar la gráfica de una ecuación lineal, como se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Grafique $2y + 4x = 6$ utilizando la intercepción y y la pendiente.

Solución Empiece despejando a y para obtener la ecuación en la forma pendiente intercepción.

$$\begin{aligned}2y + 4x &= 6\\ 2y &= -4x + 6\\ y &= -2x + 3\end{aligned}$$

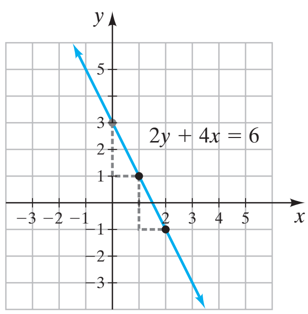


FIGURA 3.59

La pendiente es -2 y la intercepción y es $(0, 3)$. En el eje y coloque un punto en 3 (**figura 3.59**). Luego utilice la pendiente para obtener un segundo punto. La pendiente es negativa; por lo tanto, la gráfica debe descender conforme va de izquierda a derecha. Como la pendiente es -2, la razón del cambio vertical al cambio horizontal debe ser de 2 a 1 (recuerde, 2 significa $\frac{2}{1}$). Así, si usted inicia en $y = 3$ y se mueve dos unidades hacia abajo y una unidad hacia la derecha, obtendrá un segundo punto en la gráfica.

Continúe este proceso de mover 2 unidades hacia abajo y 1 unidad a la derecha para obtener un tercer punto. Ahora dibuje una recta que pase por los tres puntos para obtener la gráfica.

Ahora resuelva el ejercicio 45

En el ejemplo 4 elegimos movernos hacia abajo y a la derecha para obtener los puntos segundo y tercero. También podríamos haber decidido movernos hacia arriba y hacia la izquierda para obtener los puntos segundo y tercero.

EJEMPLO 5 Grafique $f(x) = \frac{4}{3}x - 3$ utilizando la intercepción y y la pendiente.

Solución Ya que $f(x)$ es lo mismo que y, esta función está en la forma pendiente intercepción. La intercepción y es $(0, -3)$ y la pendiente es $\frac{4}{3}$. Coloque en el eje y un punto en -3. Luego, como la pendiente es positiva, obtendrá los puntos segundo y tercero moviéndose cuatro unidades hacia arriba y tres unidades hacia la derecha. La gráfica se muestra en la **figura 3.60**.

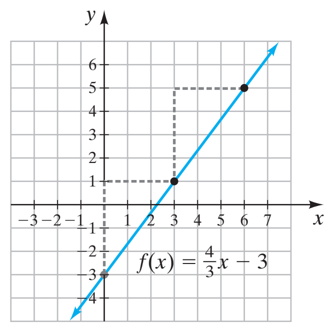


FIGURA 3.60

Ahora resuelva el ejercicio 51

6 Usar la forma pendiente intercepción para construir modelos a partir de gráficas

En ocasiones podemos utilizar la forma pendiente intercepción de una ecuación lineal para determinar una función que modele una situación de la vida real. El ejemplo 6 muestra cómo puede hacerse esto.

EJEMPLO 6 ▸ **Periódicos** Considere la gráfica en la **figura 3.61**, la cual muestra la disminución del número de adultos que leen diariamente el periódico. Observe que la gráfica, de alguna manera, es lineal. La línea discontinua en rojo es una función lineal que se dibujó para aproximar la gráfica en negro.

a) Escriba una función lineal para representar la línea discontinua en rojo.

b) Suponiendo que esta tendencia continúe, utilice la función determinada en la parte **a)** para estimar el porcentaje de adultos que leerán un periódico en 2012.

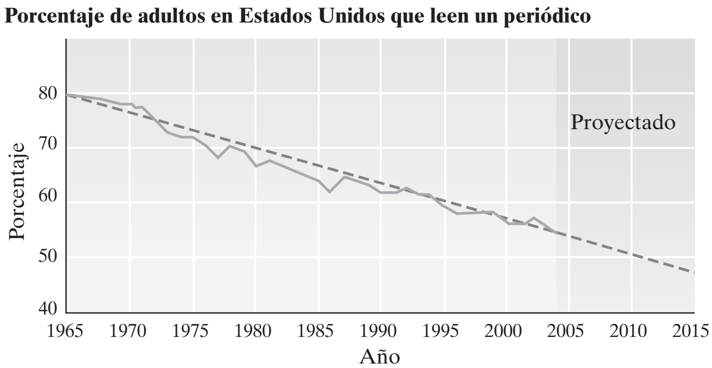


FIGURA 3.61 *Fuente*: NAA Market & Business Analysis; proyecciones de *Newsweek, The Washington Post* (20/2/05)

Solución

a) Para facilitar el trabajo con los números, seleccionaremos 1965 como un *año de referencia*. Entonces podemos reemplazar 1965 con 0, 1966 con 1, 1967 con 2, y así sucesivamente. Entonces 2004 sería 39 y 2005 sería 40 (vea la **figura 3.62**).

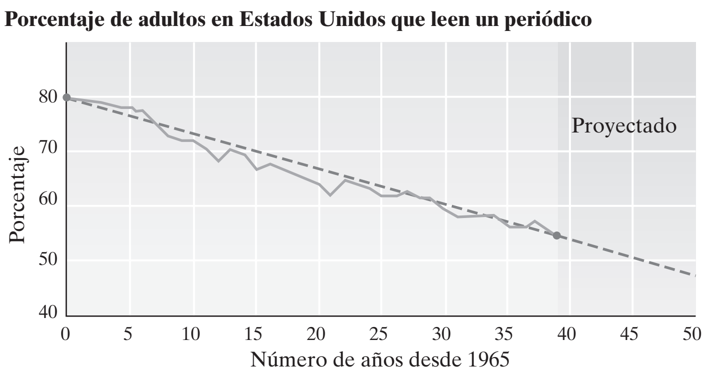


FIGURA 3.62 *Fuente:* NAA Market & Business Analysis; proyecciones de *Newsweek, The Washington Post* (20/2/05)

Seleccionaremos dos puntos en la gráfica que nos permitan determinar la pendiente de la gráfica. Si denominamos al eje vertical y y al eje horizontal x, entonces la intercepción y es 80. Así que, un punto en la gráfica es (0, 80). En 2004, o año 39, en la **figura 3.62**, parece que alrededor de 55% de la población adulta lee un periódico diariamente. Seleccionamos (39, 55) como un segundo punto en la gráfica de la línea recta que dibujamos en la **figura 3.62**. Designamos (39, 55) como (x_2, y_2) y (0, 80) como (x_1, y_1).

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cambio en porcentaje}}{\text{cambio en años}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{55 - 80}{39 - 0} = \frac{-25}{39} \approx -0.641$$

Como la pendiente es aproximadamente -0.641 y la intercepción y es (0, 80), la ecuación de la línea recta es $y = -0.641x + 80$. Esta ecuación en notación de función es

$f(x) = -0.641x + 80$. Para usar esta función recuerde que $x = 0$ representa a 1965, $x = 1$ representa a 1966, etcétera. Observe que $f(x)$, el porcentaje, es una función de x, el número de años a partir de 1965.

b) Para determinar el porcentaje aproximado de lectores en 2012, y como $2012 - 1965 = 47$, sustituimos 47 por x en la función.

$$\begin{aligned} f(x) &= -0.641x + 80 \\ f(47) &= -0.641(47) + 80 \\ &= -30.127 + 80 \\ &= 49.873 \end{aligned}$$

Así, si la tendencia actual continúa, alrededor de 49.9% de adultos leerán diariamente un periódico en 2012.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 73

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.4

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique cómo determinar la pendiente de una línea a partir de su gráfica.
2. Explique qué significa cuando la pendiente de una recta es negativa.
3. Explique qué significa cuando la pendiente de una recta es positiva.
4. ¿Cuál es la pendiente de una recta horizontal? Explique.
5. ¿Por qué la pendiente de una recta vertical es indefinida?
6. **a)** Con la fórmula de pendiente, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, determine la pendiente de la recta que contiene a los puntos (3, 4) y (6, 10). Utilice (3, 4) como (x_1, y_1).
   b) Calcule la pendiente nuevamente, pero esta vez utilice (6, 10) como (x_1, y_1).
   c) Al determinar la pendiente utilizando la fórmula, ¿su respuesta será la misma sin importar cuál de los puntos designe como (x_1, y_1)? Explique.
7. Explique cómo escribir una ecuación dada en forma general a su forma pendiente intercepción.
8. En la ecuación $y = mx + b$, ¿qué representa m? ¿Qué representa b?
9. **a)** ¿Qué se quiere decir cuando una gráfica es trasladada cuatro unidades hacia abajo?
   b) Si la intercepción y de una gráfica es $(0, -3)$ y la gráfica es trasladada cinco unidades hacia abajo, ¿cuál será su nueva intercepción y?
10. **a)** ¿Qué se quiere decir cuando una gráfica es trasladada seis unidades hacia arriba?
    b) Si la intercepción y de una gráfica es $(0, 2)$ y la gráfica es trasladada seis unidades hacia arriba, ¿cuál será la nueva intercepción y?
11. ¿Qué significa cuando la pendiente está dada como una razón de cambio?
12. Explique cómo graficar una ecuación lineal utilizando su pendiente y su intercepción y.

Práctica de habilidades

Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados. Si la pendiente de la recta es indefinida, indíquelo.

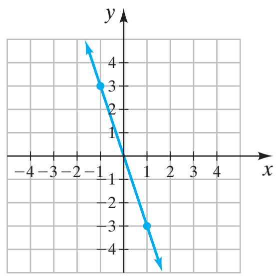
13. $(3, 5)$ y $(0, 11)$
14. $(3, 4)$ y $(6, 5)$
15. $(5, 2)$ y $(1, 4)$
16. $(-3, 7)$ y $(7, -3)$
17. $(-3, 5)$ y $(1, 1)$
18. $(2, 6)$ y $(2, -3)$
19. $(4, 2)$ y $(4, -6)$
20. $(8, -4)$ y $(-1, -2)$
21. $(-3, 4)$ y $(-1, 4)$
22. $(2, 8)$ y $(-5, 8)$
23. $(0, 3)$ y $(9, -3)$
24. $(0, -6)$ y $(-5, -3)$

Si la recta que pasa por los dos puntos dados tiene la pendiente dada, resuelva para la variable que se indica.

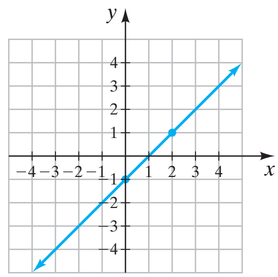
25. $(3, 2)$ y $(4, b)$, $m = 1$
26. $(-4, 3)$ y $(-2, b)$, $m = -3$
27. $(5, 0)$ y $(1, k)$, $m = \frac{1}{2}$
28. $(5, d)$ y $(9, 2)$, $m = -\frac{3}{4}$
29. $(x, 2)$ y $(3, -4)$, $m = 2$
30. $(-2, -3)$ y $(x, 5)$, $m = \frac{1}{2}$
31. $(12, -4)$ y $(r, 2)$, $m = -\frac{1}{2}$
32. $(-4, -4)$ y $(x, -1)$, $m = -\frac{3}{5}$

Determine la pendiente de la recta en cada una de las figuras. Si la pendiente de la recta es indefinida, indíquelo. Luego escriba una ecuación de la recta dada.

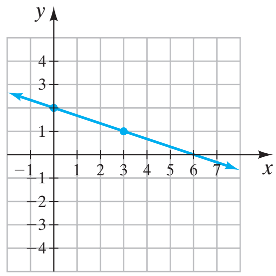
33.



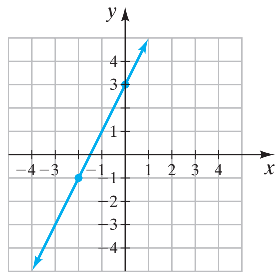
34.



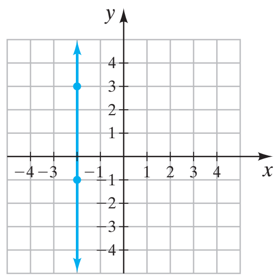
35.



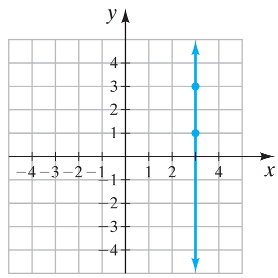
36.



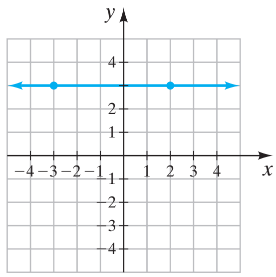
37.



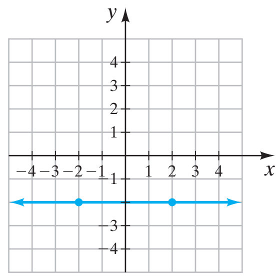
38.



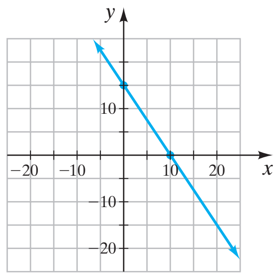
39.



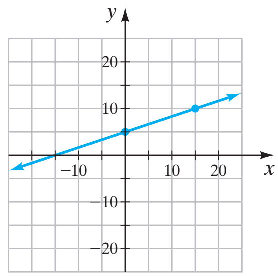
40.



41.



42.



Escriba cada ecuación en la forma pendiente intercepción (si no está dada en esa forma). Determine la pendiente y la intercepción y, y utilícelas para dibujar la gráfica de la ecuación lineal.

43. $y = -x + 2$

44. $-2x + y = 6$

45. $5x + 15y = 30$

46. $-2x = 3y + 6$

47. $-50x + 20y = 40$

48. $60x = -30y + 60$

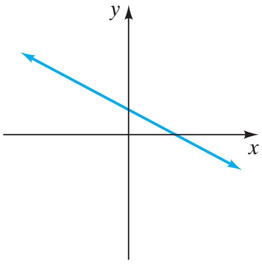
Utilice la pendiente y la intercepción y para graficar cada función.

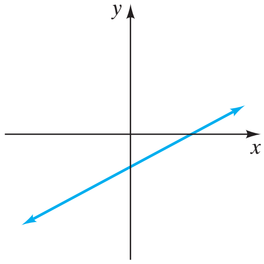
49. $f(x) = -2x + 1$ **50.** $g(x) = \frac{2}{3}x - 4$ **51.** $h(x) = -\frac{3}{4}x + 2$ **52.** $h(x) = -\frac{2}{5}x + 4$

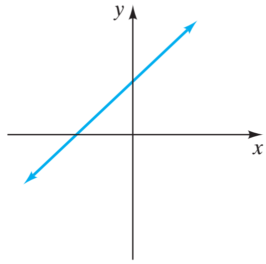
Resolución de problemas

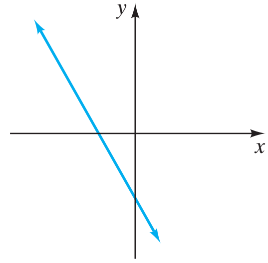
53. Dada la ecuación $y = mx + b$, para los valores de m y b dados, relacione las partes **a)** a **d)** con las gráficas apropiadas etiquetadas del 1 al 4.

a) $m > 0, b < 0$ **b)** $m < 0, b < 0$ **c)** $m < 0, b > 0$ **d)** $m > 0, b > 0$

1.


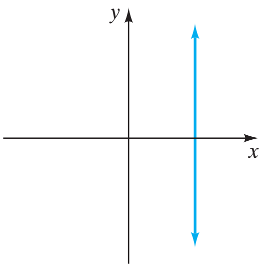
2.


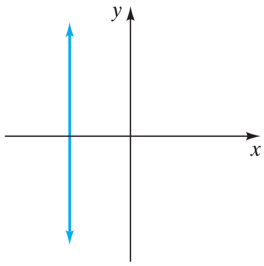
3.


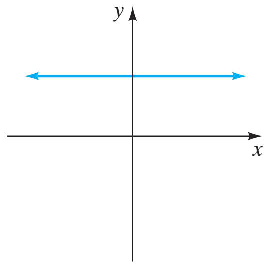
4.


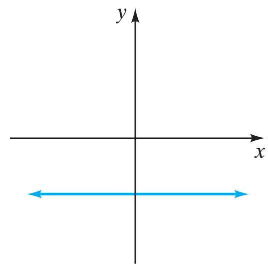
54. Dada la ecuación $y = mx + b$, para los valores de m y b dados, relacione las partes **a)** a **d)** con las gráficas apropiadas etiquetadas del 1 al 4.

a) $m = 0, b > 0$ **b)** $m = 0, b < 0$ **c)** m es indefinida, intercepción $x < 0$ **d)** m es indefinida, intercepción $x > 0$

1.


2.


3.


4.


55. En la sección siguiente estudiaremos rectas paralelas. Con base en lo que ha leído en esta sección, explique cómo podría determinar (sin graficar) que las gráficas de dos ecuaciones son paralelas.

56. ¿Cómo podría determinar si dos rectas son paralelas?

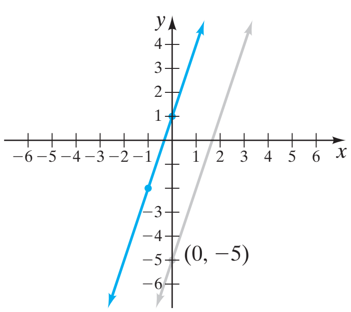
57. Si uno de los puntos de una gráfica es $(6, 3)$ y la pendiente de la recta es $\frac{4}{3}$, determine la intercepción y de la gráfica.

58. Si un punto de la gráfica es $(9, 2)$ y la pendiente de la recta es $m = \frac{2}{3}$, determine la intercepción y de la gráfica.

59. En la gráfica siguiente, la doble flecha gris es una traslación de la doble flecha roja.

a) Determine la ecuación de la recta en color rojo.

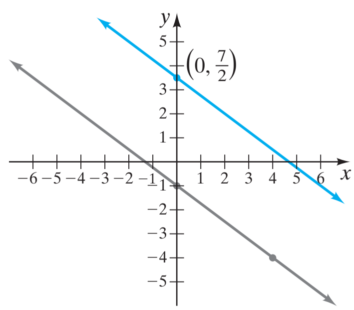
b) Utilice la ecuación de la recta en rojo para determinar la ecuación de la recta en color gris.



60. En la gráfica siguiente la recta en rojo es una traslación de la recta en gris.

a) Determine la ecuación de la recta en color gris.

b) Utilice la ecuación de la recta en gris para determinar la ecuación de la recta en rojo.



61. La gráfica de $y = x - 1$ es trasladada 5 unidades hacia arriba. Determine

a) la pendiente de la gráfica trasladada.

b) la intercepción y de la gráfica trasladada.

c) la ecuación de la gráfica trasladada.

62. La gráfica de $y = -\frac{3}{2}x + 3$ es trasladada 6 unidades hacia abajo. Determine

a) la pendiente de la gráfica trasladada.

b) la intercepción y de la gráfica trasladada.

c) la ecuación de la gráfica trasladada.

63. La gráfica de $3x - 2y = 6$ es trasladada 4 unidades hacia abajo. Determine la ecuación de la gráfica trasladada.

64. La gráfica de $-3x - 5y = 15$ es trasladada 3 unidades hacia arriba. Determine la ecuación de la gráfica trasladada.

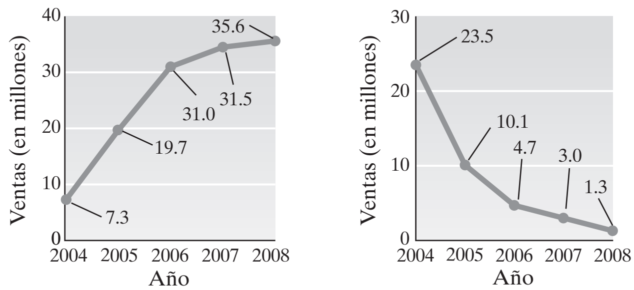
65. Si una recta pasa por los puntos $(6, 4)$ y $(-4, 2)$, determine el cambio de y con respecto a un cambio de una unidad en x.

66. Si una recta pasa por los puntos $(-3, -4)$ y $(5, 2)$, determine el cambio de y con respecto a un cambio de una unidad en x.

Ventas de televisores *Para los ejercicios 67 y 68, utilice la gráfica siguiente. La gráfica de la izquierda muestra las ventas proyectadas de televisores digitales (en millones) y la gráfica de la derecha muestra las ventas proyectadas de televisores analógicos (en millones) para los años de 2004 a 2008.*

Venta de televisores

Ventas proyectadas de televisores digitales | Ventas proyectadas de televisores análogos



Fuente: Consumer Electronics Association, *USA Today* (1/5/05)

67. a) Para la gráfica de ventas de TV digitales, determine la pendiente del segmento de recta de 2005 a 2006.
b) ¿Es positiva o negativa la pendiente del segmento de recta?
c) Determine la razón de cambio promedio de 2004 a 2008.

68. a) Para la gráfica de ventas de TV analógicos, determine la pendiente del segmento de recta de 2005 a 2006.
b) ¿Es positiva o negativa la pendiente del segmento de recta?
c) Determine la razón de cambio promedio de 2004 a 2008.

69. Gastos de Amtrak La National Railroad and Passenger Corporation, mejor conocida en Estados Unidos como Amtrak, continúa enfrentando problemas económicos. La tabla siguiente muestra los gastos, en millones de dólares, de Amtrak en años seleccionados.

Año	Gastos de Amtrak (en millones de dólares)
1995	$ 2257
2000	$ 2876
2004	$ 3133
*2008	$ 3260

Fuente: Amtrak año fiscal 2000 (*Reporte Anual*).
*Proyectado

a) Trace estos puntos en una gráfica.
b) Conecte estos puntos utilizando segmentos de recta.
c) Determine las pendientes de cada uno de los tres segmentos de recta.
d) ¿Durante qué periodo tuvo lugar la mayor razón de cambio promedio? Explique.

70. Demanda de acero En años recientes, la demanda mundial de acero se ha incrementado. La tabla siguiente proporciona la demanda mundial de acero, en millones de toneladas métricas, para los años de 2001 a 2004.

Demanda mundial de acero

Año	Demanda (en millones de toneladas métricas)
2001	740
2002	810
2003	880
2004	950

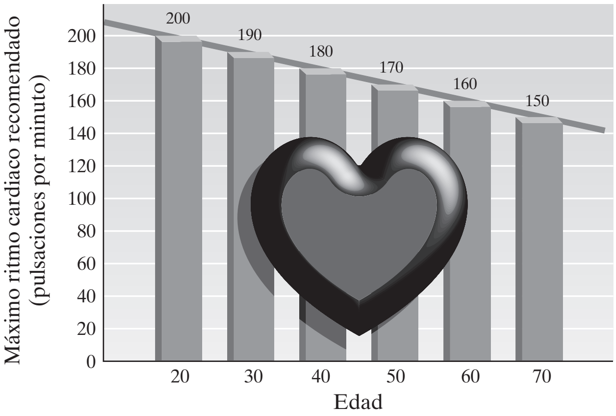
Fuente: "World Steel Dynamics", *Wall Street Journal (12 de agosto de 2004)*

a) Grafique estos puntos en una gráfica.
b) Determine la pendiente de cada segmento de recta.
c) Esta gráfica, ¿es un ejemplo de función lineal? Explique.
d) Determine una función lineal que pueda utilizarse para estimar la demanda mundial de acero, d, desde 2001 a 2004. Represente con x el número de años a partir de 2001. (Esto es, 2001 corresponde a $t = 0$, 2002 corresponde a $t = 1$ y así sucesivamente).
e) Suponiendo que esta tendencia continúe para los siguientes 20 años, determine la demanda mundial de acero en 2016.
f) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿en qué año la demanda alcanzará 1230 toneladas métricas?

71. Ritmo cardiaco La siguiente gráfica de barras muestra el ritmo cardiaco máximo recomendado bajo presión, en latidos por minuto, para hombres de diferentes edades. Las barras están conectadas por medio de una línea recta.
a) Utilice la recta para determinar una función que pueda usarse para estimar el ritmo cardiaco máximo recomendado, h, para $0 \le x \le 50$, donde x es el número de años a partir de la edad de 20.

b) Usando la función de la parte **a)**, determine el ritmo cardiaco máximo recomendado para un hombre de 34 años de edad.

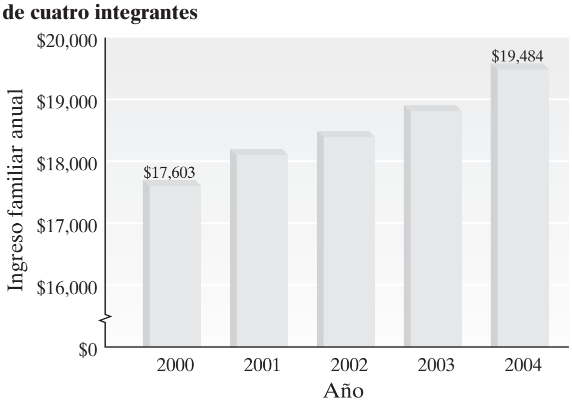
Ritmo cardiaco vs. Edad



Fuente: Sociedad Americana de Geriatría

72. Umbral de pobreza El gobierno de Estados Unidos define el umbral de pobreza como una estimación del ingreso familiar anual necesario para gozar lo que la sociedad define como estándar de vida mínimo aceptable. La siguiente gráfica de barras muestra el umbral de pobreza de 2000 a 2004 para una familia de cuatro integrantes.

Umbral de pobreza en Estados Unidos para una familia de cuatro integrantes



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, www.census.gov/hhes/poverty

a) Determine una función lineal que pueda usarse para estimar el umbral de pobreza para una familia de cuatro integrantes, P, de 2000 a 2004. Sea t el número de años desde 2000. (En otras palabras, 2000 corresponde a $t = 0$, 1996 corresponde a $t = 1$ y así sucesivamente).

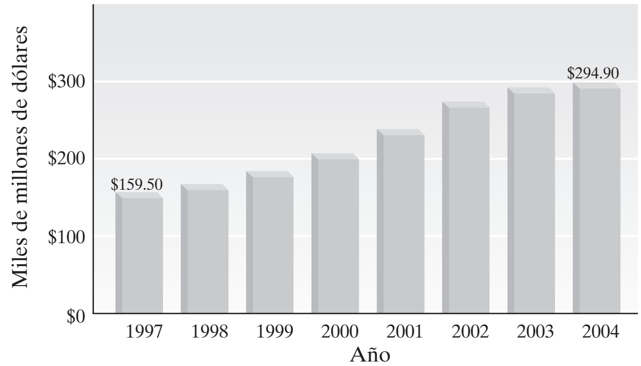
b) Utilizando la función de la parte **a)**, determine el umbral de pobreza en 2003. Compare su respuesta con la gráfica para ver si la gráfica apoya su respuesta.

c) Suponiendo que esta tendencia continúe, determine el umbral de pobreza para una familia con cuatro integrantes en el año 2010.

d) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿en qué año el umbral de pobreza para una familia de cuatro será de $20,424.50?

73. Gasto en Seguro Médico La gráfica siguiente muestra la cantidad de dinero que se gastó en Seguro Médico de 1997 a 2004.

Gasto en Seguro Médico



Fuente: Centros de Salud, USA Today (2/8/05)

a) Tomando 1997 como año de referencia, determine una función lineal que pueda emplearse para estimar el gasto en Seguro Médico (en miles de millones de dólares), M, para 1997 a 2004. En esta función, t representa el número de años a partir de 1997.

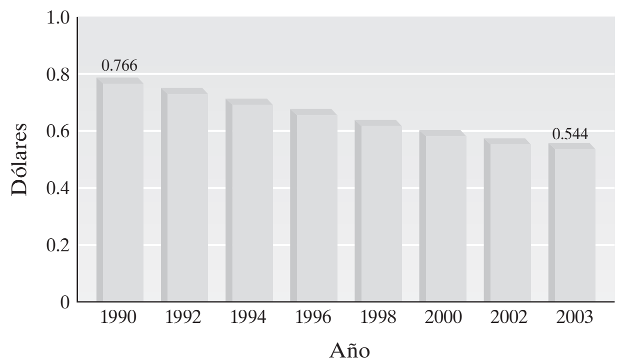
b) Con la función de la parte **a)**, estime el gasto en Seguro Médico para 2003. Compare su respuesta con la gráfica y vea si la gráfica corresponde con su respuesta.

c) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuál será el gasto en Seguro Médico en 2010?

d) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿durante qué año el gasto en Seguro Médico alcanzará $340 mil millones?

74. Poder adquisitivo del dólar El poder adquisitivo del dólar se mide comparando el precio actual de artículos con los precios de esos mismos artículos en 1982. Con base en la gráfica siguiente verá que el poder adquisitivo del dólar ha disminuido de manera constante de 1990 a 2003. Esto significa que $1 compra menos cada año.

Poder adquisitivo del dólar



Fuente: Oficina de Análisis Económico de Estados Unidos

a) Con 1990 como año de referencia, determine una función lineal que pueda usarse para estimar el poder adquisitivo, P, de 1990 a 2003. En la función, haga que t represente el número de años desde 1990.

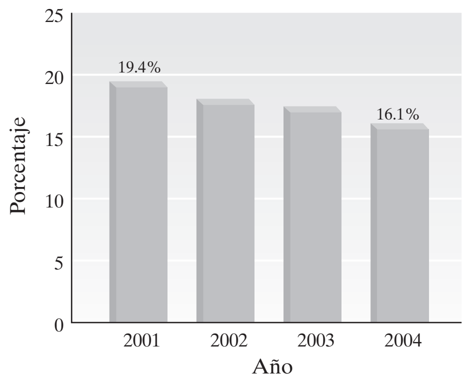
b) Utilizando la función de la parte **a)**, estime el poder de compra del dólar en 1994. Compare su respuesta con la gráfica para ver si la gráfica apoya su respuesta.

c) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuál será el poder adquisitivo del dólar en 2006?

d) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuándo será de $0.426 el poder de compra del dólar?

75. Adolescentes que utilizan drogas ilegales El porcentaje de adolescentes que afirman haber utilizado drogas ilegales (en los últimos 30 días) ha disminuido de 2001 a 2004. Con base en la gráfica siguiente, la disminución parece ser aproximadamente lineal.

Porcentaje de adolescentes que usan drogas ilícitas



Fuente: Universidad de Michigan, 2004 Monitoreo de estudio futuro. *The Washington Post* (22/12/04)

a) Usando 2001 como año de referencia, determine una función lineal que pueda emplearse para estimar el porcentaje, P, de adolescentes que utilizaron drogas ilegales de 2001 a 2004. En esta función, t representa el número de años a partir de 2001.

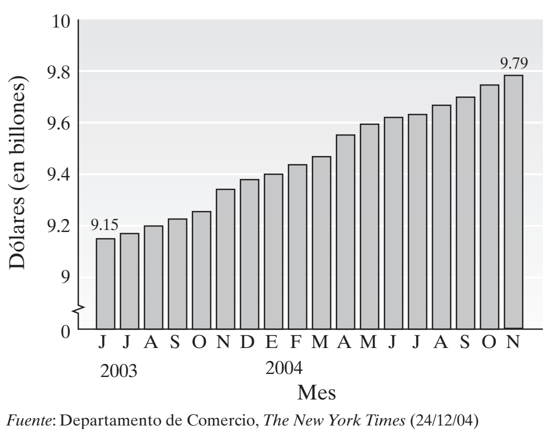
b) ¿La pendiente de la función lineal es positiva o negativa? Explique.

c) Con base en la función de la parte **a)**, estime el porcentaje de adolescentes que utilizaron drogas ilegales en 2003. Compare su respuesta con la gráfica para ver si la gráfica apoya su respuesta.

d) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuál sería el porcentaje de adolescentes que utilizarán drogas ilegales en 2010?

76. Ingreso personal El ingreso personal aumentó cada mes desde junio de 2003 hasta noviembre de 2004. Con base en la gráfica siguiente, parece que el aumento es aproximadamente lineal.

Ingreso personal



Fuente: Departamento de Comercio, *The New York Times* (24/12/04)

a) Tomando como base junio de 2003, determine una función lineal que pueda usarse para estimar el ingreso personal, I, (en billones de dólares), para los meses de junio de 2003 a noviembre de 2004. En esta función, t representa el número de meses a partir de junio de 2003 (esto es, $t = 0$ corresponde con junio de 2003, $t = 1$ corresponde con julio de 2003, $t = 6$ corresponde con diciembre de 2003, $t = 17$ corresponde con noviembre de 2004, etcétera).

b) ¿La pendiente de esta función lineal es positiva o negativa? Explique.

c) Usando la función de la parte **a)**, estime el ingreso personal (en billones de dólares) para febrero de 2004 ($t = 8$). Compare su respuesta con la gráfica para ver si la gráfica corresponde con su respuesta.

d) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuál sería el ingreso personal en diciembre de 2005 ($t \approx 30$).

77. Precios en bienes raíces El precio de venta de casas de tipo medio en Estados Unidos se ha elevado de forma aproximadamente lineal desde 1995. El precio en 1995 fue de $110,500, mientras que en 2004 fue de $185,200. Sea P el precio de venta de casas de tipo medio y sea t el número de años desde 1995. *Fuente:* Asociación Nacional de Vendedores de Bienes Raíces.

a) Determine una función $P(t)$ que se ajuste a los datos.

b) Utilice la función de la parte **a)** para estimar el precio de venta de casas de tipo medio en 2000.

c) Si esta tendencia continúa, estime el precio de venta de casas de tipo medio en 2010.

d) Si esta tendencia continúa, ¿en qué año el precio de venta de casas de tipo medio será de $200,000?

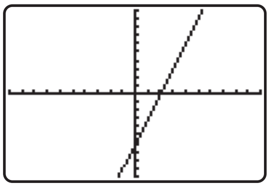
78. Seguridad Social El número de trabajadores por beneficiario de seguridad social ha disminuido de manera casi lineal desde 1970, cuando había 3.7 trabajadores por beneficiario. Se proyecta que para 2050 habrá 2.0 trabajadores por beneficiario. Sea W los trabajadores por beneficiarios de seguridad social y t el número de años desde 1970.

a) Determine la función $W(t)$ que se ajuste a los datos.

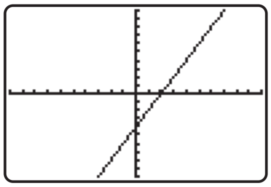
b) Estime el número de trabajadores por beneficiario en 2020.

Suponga que quiere graficar las ecuaciones que se dan y que obtiene las pantallas que se muestran. Explique cómo sabe que cometió un error al introducir cada ecuación. En cada gráfica se utilizó la ventana estándar.

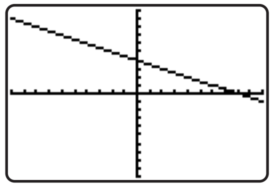
79. $y = 3x + 6$



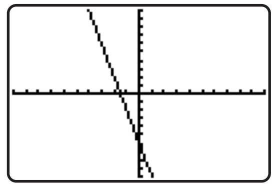
80. $y = -2x - 4$



81. $y = \frac{1}{2}x + 4$



82. $y = -4x - 1$



Retos

83. Castillo La foto siguiente es El castillo, en Chichén Itzá, México. Cada lado del castillo tiene una escalera que consta de 91 escalones, los cuales son muy estrechos y empinados por lo que son difíciles de subir. La distancia vertical total de los 91 escalones es de 1292.2 pulgadas. Si se tuviera que dibujar una línea recta que conectara los bordes de los escalones, el valor absoluto de la pendiente de esta recta sería 2.21875. Determine la altura promedio y ancho de un escalón.

84. Una **recta tangente** es una línea recta que toca una curva en un solo punto (si se prolonga, la recta tangente puede cruzar la curva en un punto diferente). La **figura 3.63** muestra tres rectas tangentes a la curva en los puntos *a*, *b* y *c*. Observe que la recta tangente del punto *a* tiene una pendiente positiva, la recta tangente del punto *b* tiene una pendiente de 0 y la recta tangente del punto *c* tiene una pendiente negativa. Ahora considere la curva en la **figura 3.64**. Imagine que las rectas tangentes se dibujan en todos los puntos de la curva excepto en los extremos *a* y *e*. ¿En dónde, en la curva de la **figura 3.64**, las rectas tangentes tendrían una pendiente positiva, una pendiente de 0 y una pendiente negativa?

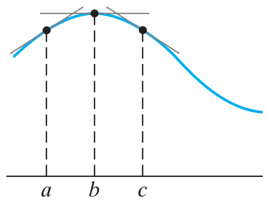


FIGURA 3.63

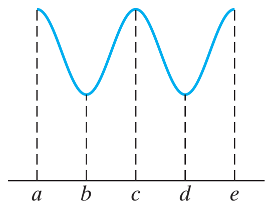


FIGURA 3.64

Actividad en grupo

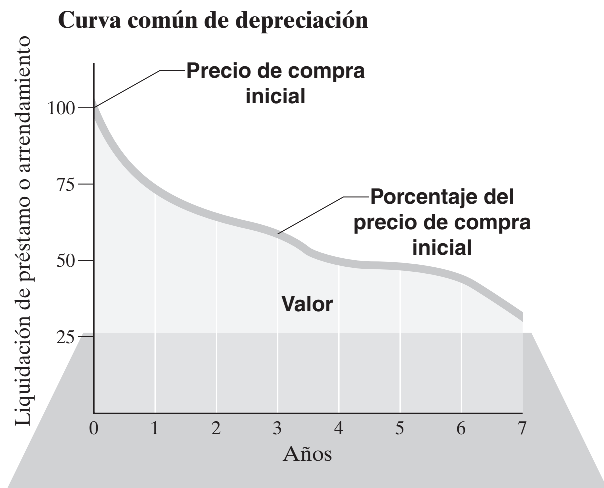
85. La gráfica siguiente de *Consumer Reports*, muestra la depreciación de un automóvil común. El precio de compra inicial se representa como 100%.

a) Miembro uno del grupo: Determine el periodo de un año en el cual un automóvil se deprecia más. Con base en la gráfica, estime el porcentaje que un automóvil se deprecia durante este periodo.

b) Miembro 2 del grupo: Determine entre cuáles años la depreciación parece ser lineal o casi lineal.

c) Miembro 3 del grupo: Determine entre cuáles dos años la depreciación es la más baja.

d) En grupo, estimen la pendiente del segmento de recta del año 0 al año 1. Explique qué significa esto en términos de la razón de cambio.



Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **86.** Evalúe $\dfrac{-6^2 - 32 \div 2 \div |-8|}{5 - 3\cdot 2 - 4 \div 2^2}$.

Resuelva cada ecuación.

[2.1] **87.** $\frac{1}{4}(x + 3) + \frac{1}{5}x = \frac{2}{3}(x - 2) + 1$

88. $2.6x - (-1.4x + 3.4) = 6.2$

[2.4] **89. Trenes** Dos trenes parten de Chicago, Illinois, viajando en la misma dirección a lo largo de vías paralelas. El primer tren parte tres horas antes que el segundo, y su velocidad es de 15 millas por hora más rápido que el segundo. Determine la velocidad de cada tren, si tres horas después que el segundo tren sale de Chicago están a 270 millas uno del otro.

[2.6] **90.** Resuelva

a) $|2x + 1| > 5$. **b)** $|2x + 1| < 5$.

Examen de mitad de capítulo: 3.1-3.4

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en que se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Revise las preguntas que respondió de manera incorrecta.

1. ¿En cuál cuadrante se encuentra el punto $(-3.5, -4.2)$?

Grafique cada ecuación.

2. $y = 3x + 2$ **3.** $y = -x^2 + 3$

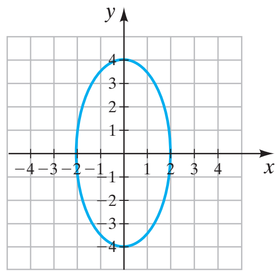
4. $y = |x| - 4$ **5.** $y = \sqrt{x - 4}$

6. a) ¿Qué es una relación?
b) ¿Qué es una función?
c) ¿Toda relación es una función? Explique.
d) ¿Toda función es una relación? Explique.

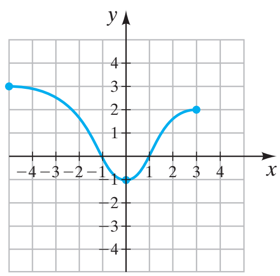
En los ejercicios del 7 al 9, determine cuáles de las relaciones siguientes también son funciones. Proporcione el dominio y el rango de cada relación o función.

7. $\{(1, 5), (2, -3), (7, -1), (-5, 6)\}$

8.



9.



10. Si $g(x) = 2x^2 + 8x - 13$, determine $g(-2)$.

11. La altura, h, en pies a que está una manzana lanzada desde lo alto de un edificio es

$$h(t) = -6t^2 + 3t + 150$$

donde t representa el tiempo en segundos. Determine la altura a que está la manzana 3 segundos después de que se le lanzó.

12. Escriba la ecuación $7(x + 3) + 2y = 3(y - 1) + 18$ en la forma general.

Grafique cada ecuación.

13. $x + 3y = -3$ **14.** $x = -4$

15. $y = 5$

16. Utilidad La utilidad diaria, en dólares, para una compañía de calzado es $p(x) = 30x - 660$, donde x es el número de pares de zapatos que se fabrican y venden.

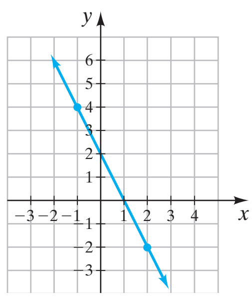
a) Dibuje una gráfica de la utilidad contra el número de zapatos que se venden (de 40 pares en adelante).

b) Determine el número de pares de zapatos que deben venderse para que la compañía no gane ni pierda (esté en equilibrio).

c) Determine el número de pares de zapatos que deben venderse para que la compañía tenga una utilidad diaria de \$360.

17. Determine la pendiente de la recta que pasa por $(9, -2)$ y $(-7, 8)$.

18. Escriba la ecuación de la recta dada en la gráfica siguiente.



19. Escriba la ecuación $-3x + 2y = 18$ en la forma pendiente intercepción. Determine la pendiente y la intercepción y.

20. Si la gráfica de $y = 5x - 3$ se traslada hacia arriba 4 unidades, determine,

a) la pendiente de la gráfica trasladada.
b) la intercepción y de la gráfica trasladada.
c) la ecuación de la gráfica trasladada.

3.5 La forma punto pendiente de una ecuación lineal

1 Entender la forma punto pendiente de una ecuación lineal.

2 Utilizar la forma punto pendiente para construir modelos a partir de gráficas.

3 Reconocer rectas paralelas y perpendiculares.

1 Entender la forma punto pendiente de una ecuación lineal

En la sección anterior aprendimos a utilizar la *forma pendiente intercepción* de una recta para determinar la ecuación de una recta cuando se conocen la pendiente y la intercepción y de la recta. En esta sección aprendemos a utilizar la **forma punto pendiente** de una recta para determinar la ecuación de una recta cuando se conocen la pendiente y un punto de la recta. La forma punto pendiente puede desarrollarse a partir de la expresión para la pendiente entre dos puntos cualesquiera (x, y) y (x_1, y_1) en la recta, como se muestra en la **figura 3.65**.

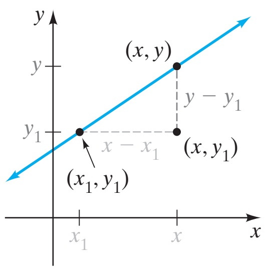


FIGURA 3.65

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $x - x_1$, obtenemos

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma punto pendiente

La **forma punto pendiente de una ecuación lineal** es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

donde m **es la pendiente** de la recta y (x_1, y_1) es un punto en la recta.

EJEMPLO 1 ▸ Escriba, en la forma pendiente intercepción, la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 4)$ y tiene pendiente -3.

Solución Como se nos dio la pendiente de la recta y un punto en ella, podemos escribir la ecuación en la forma punto pendiente. Entonces podemos despejar a y de la ecuación para escribir la ecuación en la forma pendiente intercepción. La pendiente, m, es -3. El punto en la recta, (x_1, y_1), es $(1, 4)$. Sustituya -3 por m, 1 por x_1 y 4 por y_1 en la forma punto pendiente.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 4 &= -3(x - 1) && \text{Forma punto pendiente} \\ y - 4 &= -3x + 3 \\ y &= -3x + 7 && \text{Forma pendiente intercepción} \end{aligned}$$

La gráfica de $y = -3x + 7$ tiene una pendiente de -3 y pasa por el punto $(1, 4)$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 5**

En el ejemplo 1 usamos la forma punto pendiente para obtener la ecuación de una recta cuando se nos dio un punto en la recta y la pendiente de la misma. La forma punto pendiente también puede usarse para encontrar la ecuación de una recta cuando se nos dan dos puntos en ella. En el ejemplo 2 mostramos cómo hacer esto.

EJEMPLO 2 ▸ Escriba, en la forma pendiente intercepción, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(1, 4)$.

Solución Aunque no se nos dio la pendiente de la recta, podemos usar los dos puntos dados para determinarla. Luego podemos proceder como lo hicimos en el ejemplo 1. Hacemos que $(2, 3)$ sea (x_1, y_1) y $(1, 4)$ sea (x_2, y_2).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 3}{1 - 2} = \frac{1}{-1} = -1$$

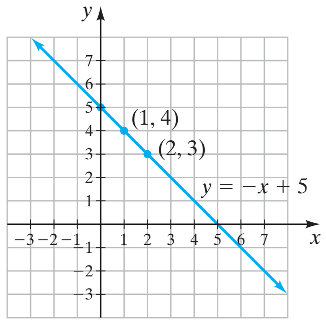


FIGURA 3.66

La pendiente, m, es -1. Ahora debemos elegir uno de los dos puntos dados para utilizar como (x_1, y_1) en la forma punto pendiente de la ecuación de una recta. Seleccionaremos $(2, 3)$. Sustituya -1 por m, 2 por x_1 y 3 por y_1 en la forma punto pendiente.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 3 &= -1(x - 2) \\ y - 3 &= -x + 2 \\ y &= -x + 5 \end{aligned}$$

La gráfica de $y = -x + 5$ se muestra en la **figura 3.66**. Observe que la intercepción y de esta recta está en 5, la pendiente es -1 y la recta pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(1, 4)$.

Observe que también podríamos haber seleccionado el punto $(1, 4)$ para sustituir en la forma punto pendiente. De haber hecho esto aún habríamos obtenido la ecuación $y = -x + 5$. Ahora debe verificar esto.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 11**

2 Utilizar la forma punto pendiente para construir modelos a partir de gráficas

Ahora veamos una aplicación en la cual utilizamos la forma punto pendiente para determinar una función que modele una situación dada.

EJEMPLO 3 ▸ **Quema de calorías** El número de calorías quemadas en una hora de conducir una bicicleta, es una función lineal de la velocidad de la bicicleta. En promedio, una persona que conduce a 12 millas por hora quemará alrededor de 564 calorías en una hora y si conduce a 18 mph quemará alrededor de 846 calorías en una hora. Esta información se muestra en la **figura 3.67**.

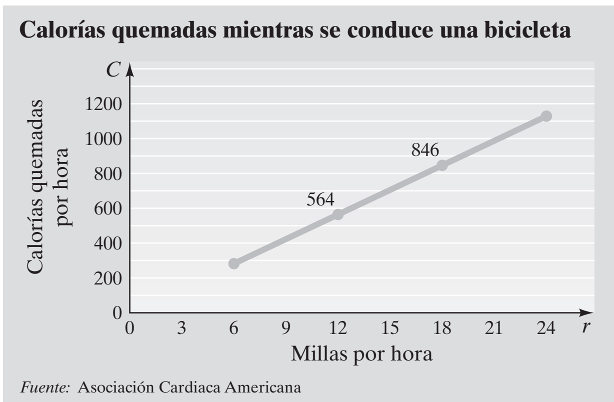


FIGURA 3.67

a) Determine una función lineal que pueda utilizarse para estimar el número de calorías, C, quemadas en una hora cuando una bicicleta se conduce a r mph, para $6 \leq r \leq 24$.

b) Utilice la función determinada en la parte **a)** para estimar el número de calorías quemadas en una hora cuando se conduce una bicicleta a 20 mph.

c) Utilice la función determinada en la parte **a)** para estimar a qué velocidad debe conducirse una bicicleta para quemar 800 calorías en una hora.

Solución **a)** Entienda el problema y traduzca En este ejemplo, en lugar de utilizar las variables x y y que usamos en los ejemplos 1 y 2, utilizamos las variables r (para la velocidad) y C (para las calorías). Sin importar las variables que se utilicen, el procedimiento usado para determinar la ecuación de la recta sigue siendo el mismo. Para determinar la función necesaria usaremos los puntos $(12, 564)$ y $(18, 846)$ y procedemos, como en el ejemplo 2. Primero calcularemos la pendiente y después utilizaremos la forma punto pendiente para determinar la ecuación de la recta.

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} m &= \frac{C_2 - C_1}{r_2 - r_1} \\ &= \frac{846 - 564}{18 - 12} = \frac{282}{6} = 47 \end{aligned}$$

Ahora escribimos la ecuación por medio de la forma punto pendiente. Seleccionaremos el punto (12, 564) para (r_1, C_1).

$$\begin{aligned} C - C_1 &= m(r - r_1) \\ C - 564 &= 47(r - 12) && \textit{Forma punto pendiente} \\ C - 564 &= 47r - 564 \\ C &= 47r && \textit{Forma pendiente intercepción} \end{aligned}$$

Responda Como el número de calorías quemadas, C, es una función de la velocidad, r, la función que buscamos es

$$C(r) = 47r$$

b) Para estimar el número de calorías quemadas en una hora mientras se conduce a 20 mph, sustituimos 20 por r en la función.

$$\begin{aligned} C(r) &= 47r \\ C(20) &= 47(20) = 940 \end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando se conduce a 20 millas por hora durante una hora, se queman 940 calorías.

c) Para estimar la velocidad a la cual debe conducirse una bicicleta para quemar 800 calorías en una hora, sustituimos 800 por $C(r)$ en la función.

$$\begin{aligned} C(r) &= 47r \\ 800 &= 47r \\ \frac{800}{47} &= r \\ r &\approx 17.02 \end{aligned}$$

Así, para quemar 800 calorías en una hora se necesitaría conducir una bicicleta a casi 17.02 mph.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 53**

En el ejemplo 3, la función que se obtuvo fue $C(r) = 47r$. La gráfica de esta función tiene una pendiente de 47 y una intercepción y en (0, 0). Si la gráfica en la **figura 3.67**, de la página 200, se prolongase hacia la izquierda, intersecaría el origen. Esto tiene sentido ya que una velocidad de cero millas por hora tendría como resultado que se quemasen cero calorías en una hora.

Rectas paralelas

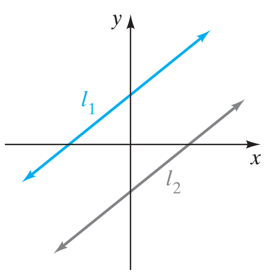


FIGURA 3.68

3 Reconocer rectas paralelas y perpendiculares

La **figura 3.68** ilustra dos rectas *paralelas*.

Rectas paralelas

Dos rectas son **paralelas** cuando tienen la misma pendiente.

Todas las rectas verticales son paralelas aunque su pendiente sea indefinida.

La **figura 3.69** ilustra rectas perpendiculares. Dos rectas son *perpendiculares* cuando se intersecan en ángulos rectos (o 90°).

Rectas perpendiculares

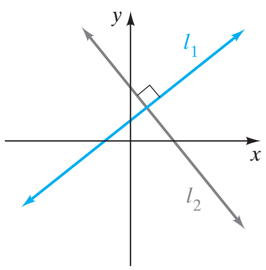


FIGURA 3.69

Rectas perpendiculares

Dos rectas son **perpendiculares** cuando sus pendientes son *recíprocos negativos*.

Para cualquier número distinto de cero, a, su **recíproco negativo** es $\frac{-1}{a}$ o $-\frac{1}{a}$. Por ejemplo, el recíproco negativo de 2 es $\frac{-1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$. El producto de cualquier número distinto de cero y su recíproco negativo es -1.

$$a\left(-\frac{1}{a}\right) = -1$$

Observe que cualquier recta vertical es perpendicular a cualquier recta horizontal aunque no se puede aplicar el recíproco negativo. (¿Por qué no?)

EJEMPLO 4 Dos puntos en l_1 son $(8, 5)$ y $(4, -1)$. Dos puntos en l_2 son $(0, 2)$ y $(6, -2)$. Determine si l_1 y l_2 son rectas paralelas, rectas perpendiculares o ninguna de ellas.

Solución Determine las pendientes de l_1 y l_2.

$$m_1 = \frac{5-(-1)}{8-4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad m_2 = \frac{2-(-2)}{0-6} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

Como sus pendientes son diferentes, l_1 y l_2 no son paralelas. Para ver si las rectas son perpendiculares, necesitamos determinar si las pendientes son recíprocos negativos. Si $m_1m_2 = -1$, las pendientes son recíprocos negativos y las rectas son perpendiculares.

$$m_1m_2 = \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) = -1$$

Como el producto de las pendientes es igual a -1, las rectas son perpendiculares.

Ahora resuelva el ejercicio 15

EJEMPLO 5 Considere la ecuación $2x + 4y = 8$. Determine la ecuación de la recta que tiene una intercepción y de 5 y es **a)** paralela a la recta dada y **b)** perpendicular a la recta dada.

Solución

a) Si conocemos la pendiente de una recta y su intercepción y, podemos utilizar la forma pendiente intercepción, $y = mx + b$, para escribir la ecuación. Iniciamos despejando a y de la ecuación dada.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 8 \\ 4y &= -2x + 8 \\ y &= \frac{-2x + 8}{4} \\ y &= -\frac{1}{2}x + 2 \end{aligned}$$

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente. Por lo tanto, la pendiente de la recta paralela a la línea dada debe ser $-\frac{1}{2}$. Como su pendiente es $-\frac{1}{2}$ y su intercepción y es 5, su ecuación debe ser

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Las gráficas de $2x + 4y = 8$ y $y = -\frac{1}{2}x + 5$ se muestran en la **figura 3.70**.

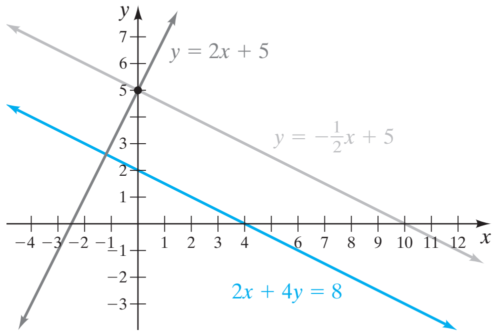


FIGURA 3.70

b) Dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes son recíprocos negativos. Sabemos que la pendiente de la recta dada es $-\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la pendiente de la recta perpendicular debe ser $-1\Big/\left(-\frac{1}{2}\right)$ o 2. La recta perpendicular a la línea dada tiene una intercepción y de 5. Así, la ecuación es

$$y = 2x + 5$$

La **figura 3.70** también muestra la gráfica de $y = 2x + 5$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 35

EJEMPLO 6 ▸ Considere la ecuación $5y = -10x + 7$.

a) Determine la ecuación de la recta que pasa por $\left(4, \frac{1}{3}\right)$ que es perpendicular a la gráfica de la ecuación dada. Escriba la ecuación en la forma general.

b) Escriba la ecuación que determinó en la parte **a)** por medio de la notación de función.

Solución

a) Determine la pendiente de la recta dada despejando y de la ecuación dada.

$$5y = -10x + 7$$
$$y = \frac{-10x + 7}{5}$$
$$y = -2x + \frac{7}{5}$$

Como la pendiente de la recta dada es -2, la pendiente de una recta perpendicular a ella debe ser el recíproco negativo de -2, que es $\frac{1}{2}$. La recta que buscamos debe pasar por el punto $\left(4, \frac{1}{3}\right)$. Por medio de la forma punto pendiente, obtenemos

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(x - 4) \qquad \textit{Forma punto pendiente.}$$

Ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, 6, para eliminar las fracciones.

$$6\left(y - \frac{1}{3}\right) = 6\left[\frac{1}{2}(x - 4)\right]$$
$$6y - 2 = 3(x - 4)$$
$$6y - 2 = 3x - 12$$

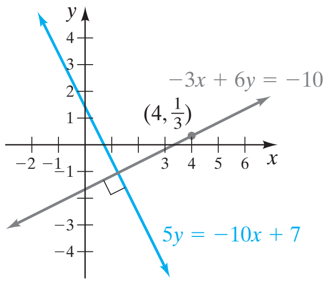


FIGURA 3.71

Ahora escribimos la ecuación en la forma general.

$$-3x + 6y - 2 = -12$$
$$-3x + 6y = -10 \quad \text{Forma general}$$

Observe que $3x - 6y = 10$ también es una respuesta aceptable (vea la **figura 3.71**).

b) Para escribir la ecuación utilizando la notación de función, despejamos a y de la ecuación determinada en la parte **a)**, y luego reemplazamos a y con $f(x)$.

Le dejaremos demostrar que la función es $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{3}$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 39**

Sugerencia útil

La tabla siguiente resume las tres formas de una ecuación lineal que hemos estudiado y menciona cuándo puede ser útil cada una.

Forma general: $ax + by = c$	Útil cuando determinamos las intersecciones de una gráfica La usaremos en el capítulo 4, Sistemas de Ecuaciones y Desigualdades
Forma punto pendiente: $y = mx + b$	Usada para determinar la **pendiente** e **intercepción y** de una recta Usada para determinar la ecuación de una recta dada su pendiente y su intercepción y Usada para determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares Usada para graficar una ecuación lineal
Forma punto pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$	Usada para determinar la ecuación de una recta cuando se da la **pendiente** de una recta y un **punto** en la recta Usada para determinar la ecuación de una recta cuando se dan **dos puntos** en una recta

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.5

Ejercicios de concepto/redacción

1. Proporcione la forma punto pendiente de una ecuación lineal.
2. ¿Cómo puede determinar si dos rectas son paralelas?
3. ¿Cómo puede determinar si dos rectas son perpendiculares?
4. ¿Por qué no puede utilizarse la prueba del recíproco negativo para determinar si una recta vertical es perpendicular a una recta horizontal?

Práctica de habilidades

Utilice la forma punto pendiente para determinar la ecuación de una recta con las propiedades dadas. Luego escriba la ecuación en la forma pendiente intercepción.

5. Pendiente $= 2$, pasa por $(3, 1)$
6. Pendiente $= -3$, pasa por $(1, -2)$
7. Pendiente $= -\frac{1}{2}$, pasa por $(4, -1)$
8. Pendiente $= -\frac{7}{8}$, pasa por $(-8, -2)$
9. Pendiente $= \frac{1}{2}$, pasa por $(-1, -5)$
10. Pendiente $= -\frac{3}{2}$, pasa por $(7, -4)$
11. Pasa por $(2, -3)$ y $(-6, 9)$.
12. Pasa por $(4, -2)$ y $(1, 9)$.
13. Pasa por $(4, -3)$ y $(6, -2)$.
14. Pasa por $(1, 0)$ y $(-4, -1)$.

Se dan dos puntos en l_1 y dos puntos en l_2. Determine si l_1 es paralela a l_2, l_1 es perpendicular a l_2, o ninguna de ellas.

15. l_1: $(2, 0)$ y $(0, 2)$; l_2: $(3, 0)$ y $(0, 3)$
16. l_1: $(7, 6)$ y $(3, 9)$; l_2: $(5, -1)$ y $(9, -4)$
17. l_1: $(4, 6)$ y $(5, 7)$; l_2: $(-1, -1)$ y $(1, 4)$
18. l_1: $(-3, 4)$ y $(4, -3)$; l_2: $(-5, -6)$ y $(6, -5)$
19. l_1: $(3, 2)$ y $(-1, -2)$; l_2: $(2, 0)$ y $(3, -1)$
20. l_1: $(3, 5)$ y $(9, 1)$; l_2: $(4, 0)$ y $(6, 3)$

Determine si las dos ecuaciones representan líneas que son paralelas, perpendiculares o ninguna de ellas.

21. $y = \frac{1}{5}x + 9$
$y = -5x + 2$

22. $2x + 3y = 11$
$y = -\frac{2}{3}x + 4$

23. $4x + 2y = 8$
$8x = 4 - 4y$

24. $2x - y = 4$
$3x + 6y = 18$

25. $2x - y = 4$
$-x + 4y = 4$

26. $6x + 2y = 8$
$4x - 5 = -y$

27. $y = \frac{1}{2}x - 6$
$-4y = 8x + 15$

28. $2y - 8 = -5x$
$y = -\frac{5}{2}x - 2$

29. $y = \frac{1}{2}x + 6$
$-2x + 4y = 8$

30. $-4x + 6y = 11$
$2x - 3y = 5$

31. $x - 2y = -9$
$y = x + 6$

32. $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 1$
$\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = -1$

Determine la ecuación de una recta con las propiedades dadas. Escriba la ecuación en la forma indicada.

33. Pasa por $(2, 5)$ y es paralela a la gráfica de $y = 2x + 4$ (forma pendiente intercepción).

34. Pasa por $(-1, 6)$ y es paralela a la gráfica de $4x - 2y = 6$ (forma pendiente intercepción).

35. Pasa por $(-3, -5)$ y es paralela a la gráfica de $2x - 5y = 7$ (forma general).

36. Pasa por $(-1, 4)$ y es perpendicular a la gráfica de $y = -2x - 1$ (forma general).

37. Con intercepción x $(3, 0)$ e intercepción y $(0, 5)$ (forma pendiente intercepción).

38. Pasa por $(-2, -1)$ y es perpendicular a la gráfica de $f(x) = -\frac{1}{5}x + 1$ (notación de función).

39. Pasa por $(5, -2)$ y es perpendicular a la gráfica de $y = \frac{1}{3}x + 1$ (notación de función).

40. Pasa por $(-3, 5)$ y es perpendicular a la recta con intercepción x $(2, 0)$ e intercepción y $(0, 2)$ (forma general).

41. Pasa por $(6, 2)$ y es perpendicular a la recta con intercepción x $(2, 0)$ e intercepción y $(0, -3)$ (forma pendiente intercepción).

42. Pasa por el punto $(1, 2)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(3, 5)$ y $(-2, 3)$ (notación de función).

Resolución de problemas

43. Rutina en una caminadora El número de calorías quemadas en una hora en una caminadora es una función de la velocidad de la misma. Una persona promedio que utiliza una caminadora (con una inclinación de 0°) a una velocidad de 2.5 millas por hora quemará alrededor de 210 calorías. A 6 millas por hora, esta persona quemará alrededor de 370 calorías. Sea C las calorías quemadas en una hora y s la velocidad de la caminadora.

a) Determine una función lineal $C(s)$ que se ajuste a los datos.

b) Estime las calorías quemadas por una persona promedio en una caminadora en 1 hora a una velocidad de 5 millas por hora.

44. Caminadora inclinada El número de calorías quemadas por una hora en una caminadora que va a una velocidad constante, es una función de la inclinación de la misma. A 4 mph por hora y con una inclinación de 5°, una persona promedio quemará 525 calorías. A 4 mph y con una inclinación de 15° la persona promedio quemará 880 calorías. Sea C las calorías quemadas y d los grados de inclinación de la caminadora.

a) Determine una función lineal $C(d)$ que se ajuste a los datos.

b) Determine el número de calorías quemadas por la persona promedio durante una hora en una caminadora que va a 4 millas por hora y con una inclinación de 9°.

45. Demanda de reproductores de DVD La *demanda* para un producto es el número de artículos que el público está dispuesto a comprar a un precio dado. Suponga que la demanda, d, de reproductores de DVD vendidos en un mes es una función lineal del precio, p, para $\$150 \leq p \leq \$400$. Si el precio es \$200, entonces se venderán 50 DVD por mes. Si el precio es \$300, sólo se venderán 30 DVD.

a) Usando las parejas ordenadas de la forma (p, d), escriba una ecuación para la demanda, d, como una función del precio, p.

b) Por medio de la función de la parte **a)**, determine la demanda cuando el precio de los reproductores de DVD es \$260.

c) Por medio de la función de la parte **a)**, determine el precio que se cobra, si la demanda de reproductores de DVD es 45.

46. Demanda de nuevos sándwiches El gerente de mercadotecnia del restaurante Arby determina que la demanda, d, de un nuevo sándwich de pollo es una función lineal del precio, p, para $\$0.80 \leq p \leq \$4.00$. Si el precio es \$1.00, entonces cada mes se venderán 530 sándwiches de pollo. Si el precio es \$2.00, sólo se venderán cada mes 400 sándwiches de pollo.

a) Usando las parejas ordenadas de la forma (p, d), escriba una ecuación para la demanda, d, como una función del precio, p.

b) Por medio de la función de la parte **a)**, determine la demanda cuando el precio de los sándwiches de pollo es \$2.60.

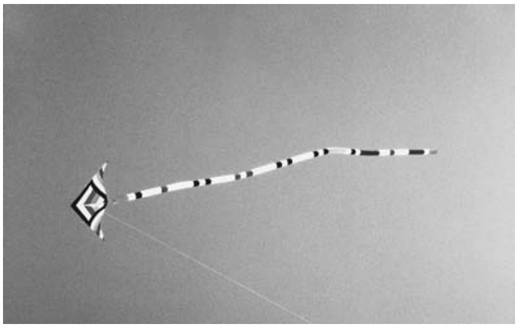
c) Por medio de la función de la parte **a)**, determine el precio que se cobra si la demanda de sándwiches de pollo es 244.

47. Oferta de cometas La *oferta* de un producto es el número de artículos que un vendedor está dispuesto a vender a un precio dado. La productora de una nueva cometa para niños determina que el número de cometas que está dispuesta a proveer, s, es una función lineal del precio de venta p, para $\$2.00 \le p \le \$4.00$. Si una cometa se vende a \$2.00, entonces se proveerán de 130 al mes. Si una cometa se vende a \$4.00, entonces se ofrecerán 320 al mes.

a) Usando las parejas ordenadas de la forma (p, s), escriba una ecuación para la oferta, s, como una función del precio, p.

b) Por medio de la función de la parte **a)**, determine la oferta cuando el precio de las cometas es \$2.80.

c) Por medio de la función de la parte **a)**, determine el precio que se paga si la oferta es de 225 cometas.



48. Oferta de carriolas El fabricante de carriolas determina que la oferta, s, es una función lineal del precio de venta, p, para $\$200 \le p \le \$300$. Si una carriola se vende a \$210.00, entonces se proveerán 20 al mes. Si una carriola se vende a \$230.00, entonces al mes se proveerán 30.

a) Usando las parejas ordenadas de la forma (p, s), escriba una ecuación para la oferta, s, como una función del precio, p.

b) Por medio de la función de la parte **a)**, determine la oferta cuando el precio de una carriola es \$220.00.

c) Por medio de la función de la parte **a)**, determine el precio que se paga si la oferta es de 35 carritos.

49. Obra de teatro El ingreso, i, de una obra de teatro en una escuela es una función lineal del número de boletos vendidos, t. Cuando se venden 80 boletos el ingreso es \$1000. Cuando se venden 200 boletos el ingreso es \$2500.

a) Utilice estos datos para escribir el ingreso, i, como una función del número de boletos vendidos, t.

b) Con la función de la parte **a)**, determine el ingreso si se vendieron 120 boletos.

c) Si el ingreso es \$2200, ¿cuántos boletos se vendieron?

50. Consumo de gasolina de un automóvil El consumo de gasolina, m, de un automóvil específico es una función lineal de la velocidad, s, a la cual se conduce el automóvil para $30 \le s \le 60$. Si se conduce el automóvil a 30 mph el rendimiento de gasolina del automóvil es 35 millas por galón. Si es conducido a 60 mph, el automóvil rinde 20 millas por galón.

a) Utilice esta información para escribir el consumo de gasolina, m, como una función de la velocidad, s.

b) Con la función de la parte **a)**, si se conduce el automóvil a una velocidad de 48 mph, determine el consumo de gasolina.

c) Utilizando la función de la parte **a)**, determine la velocidad a la cual el automóvil debe ser conducido para obtener un consumo de gasolina de 40 millas por galón.

51. Registro de un automóvil El costo del registro, r, para un vehículo en cierta región es una función lineal del peso del vehículo, w, para $1000 \le w \le 6000$ libras. Cuando el peso es de 2000 libras, el costo del registro es \$30. Si el peso es 4000 libras, el costo del registro es \$50.

a) Utilice esta información para escribir el costo del registro, r, como una función del peso del vehículo, w.

b) Usando la función de la parte **a)**, determine el costo del registro para un Ford Mustang 2006, si el peso del vehículo es de 3613 libras.

c) Si el costo por registrar un vehículo es \$60, determine el peso del vehículo.

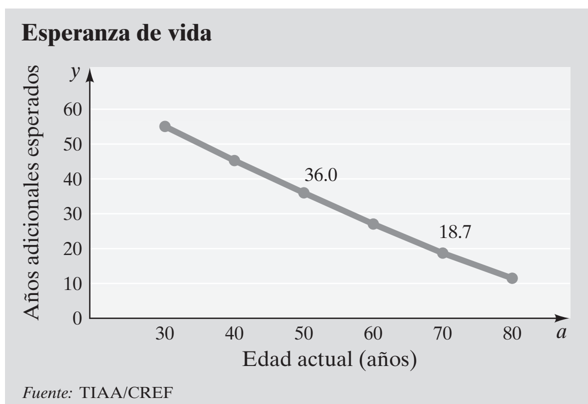
52. Salario de un profesor El salario anual de un profesor en la Universidad de Chaumont es una función lineal del número de años de experiencia en la docencia. Un profesor con nueve años de experiencia recibe \$41,350. Un profesor con 15 años de experiencia en la docencia recibe \$46,687.

a) Utilice estos datos para escribir el salario anual, s, de un profesor, como una función del número de años de experiencia en la enseñanza, n.

b) Con la función de la parte **a)**, determine el salario anual de un profesor con diez años de experiencia.

c) Utilizando la función de la parte **a)**, estime el número de años de experiencia que debe tener un profesor para obtener un salario anual de \$44,908.

53. Expectativa de vida Como se ve en la gráfica siguiente, el número esperado de años, y, de vida de una persona *se aproxima* a una función lineal. El número esperado de años de que sobreviva es una función de la edad actual, a, de la persona, para $30 \le a \le 80$. Por ejemplo, con base en la gráfica vemos que una persona de actualmente 50 años tiene una expectativa de vida de 36.0 años *más*.



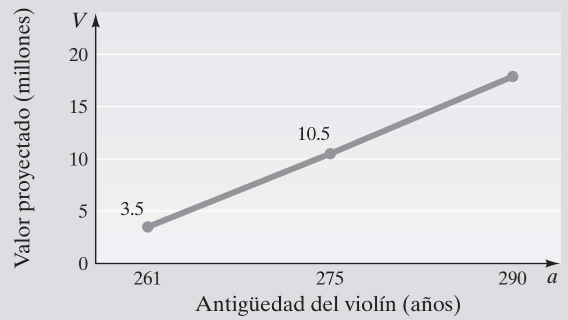
a) Con los dos puntos en la gráfica, determine la función $y(a)$ que puede usarse para aproximar la gráfica.

b) Con la función de la parte **a)**, estime la esperanza de vida de una persona que actualmente tiene 37 años de edad.

c) Utilizando la función de la parte **a)**, estime la edad actual de una persona que tiene una expectativa de vida de 25 años.

54. Violín Guarneri del Gesù Los violines Guarneri del Gesù fabricados a mano alrededor de 1735, son extremadamente raros y valiosos. La gráfica siguiente muestra que el valor proyectado, v, de un violín Guarneri del Gesù, es una función lineal de su antigüedad, a, en años del violín, para $261 \leq a \leq 290$.

Valor de un violín del Gesù



Fuente: Machold Rare Violins, LTD

a) Determine la función $v(a)$ representada por esta línea.

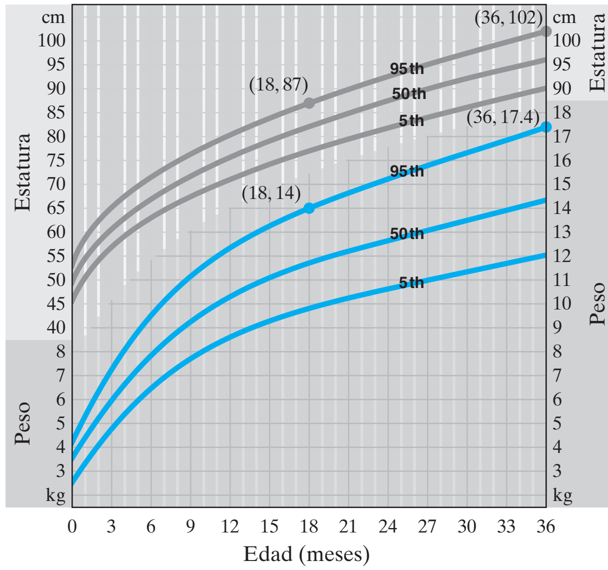
b) Con la función de la parte **a)**, determine el valor proyectado de un violín Guarneri del Gesù con 265 años de antigüedad.

c) Utilizando la función de la parte **a)**, determine la edad de un violín Guarneri del Gesù con un valor proyectado de $15 millones.

Guarneri del Gesù, "Sainton," 1741

55. Peso de niños Los padres pueden reconocer los diagramas siguientes por sus visitas al consultorio del pediatra. El diagrama muestra percentiles para alturas y pesos de niños desde el nacimiento hasta la edad de 36 meses. En general, las gráficas mostradas no son funciones lineales. Sin embargo, ciertas partes de las gráficas pueden aproximarse con una función lineal. Por ejemplo, la gráfica que representa el percentil 95 de pesos de niños (la línea superior en rojo) de la edad de 18 meses a la edad de 36 meses es aproximadamente lineal.

Niños: Recién nacidos a 36 meses
Percentiles de Estatura-Edad y Peso-Edad



Fuente: Centro Nacional para Estadísticas de Salud

a) Utilice los puntos que se muestran en la gráfica del percentil 95 para escribir el peso, w, como una función lineal de edad, a, para niños entre 18 y 36 meses de edad.

b) Con la función de la parte **a)**, estime el peso de un niño de 22 meses, quien está en el percentil 95 para el peso. Compare su respuesta con la gráfica para ver si la gráfica apoya su respuesta.

56. Estatura de niños El diagrama del ejercicio 55 muestra que la gráfica que representa el percentil 95 de estaturas de niños (la línea superior en gris) de la edad de 18 meses a la edad de 36 meses, es aproximadamente lineal.

a) Utilice los puntos que se muestran en la gráfica del percentil 95 para escribir la estatura, l, como una función lineal de la edad, a, para niños entre 18 y 36 meses de edad.

b) Con la función de la parte **a)**, estime la estatura de un niño de 21 meses, quien está en el percentil 95. Compare su respuesta con la gráfica para ver si la gráfica apoya su respuesta.

Actividad en grupo

57. La gráfica en la página 208, muestra el crecimiento de la circunferencia de la cabeza de las niñas. La línea en rojo es la circunferencia promedio de la cabeza de todas las niñas para la edad dada, mientras que las líneas en gris, representan los límites superior e inferior del rango normal. En grupo, analicen y respondan las preguntas siguientes.

a) Explique por qué la gráfica de la circunferencia promedio de la cabeza representa una función.

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

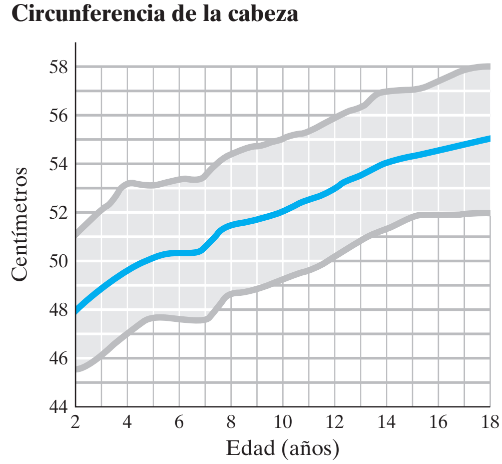
c) ¿Cuál es el dominio de la gráfica de la circunferencia promedio de la cabeza? ¿Cuál es el rango de la gráfica de la circunferencia promedio de la cabeza?

d) ¿Cuál es el intervalo considerado como normal para niñas de 18 años?

e) Para esta gráfica, ¿la circunferencia de la cabeza es una función de la edad o es la edad una función de la circunferencia de la cabeza? Explique su respuesta.

f) Estime la circunferencia promedio de la cabeza de niñas a la edad de 10 y a la edad de 14 años.

g) Esta gráfica parece ser casi lineal. Determine una ecuación o función que pueda usarse para estimar la línea en rojo entre (2, 48) y (18, 55).



Fuente: Centro Nacional para Estadísticas de Salud

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] **58.** Resuelva la desigualdad $6 - \frac{1}{2}x > 2x + 5$ e indique la solución en notación de intervalos.

59. Cuando ambos lados de una desigualdad se multiplican por o se dividen entre un número negativo, ¿qué debe hacer?

[3.2] **60. a)** ¿Qué es una relación?

b) ¿Qué es una función?

c) Dibuje una gráfica que sea una relación pero que no sea función.

61. Determine el dominio y el rango de la función $\{(4, 7), (5, -4), (3, 2), (6, -1)\}$.

3.6 Álgebra de funciones

1 Determinar la suma, diferencia, producto y división de funciones.

2 Graficar la suma de funciones.

1 Determinar la suma, diferencia, producto y división de funciones

Ahora analizamos algunas formas de cómo se pueden combinar las funciones. Si hacemos $f(x) = x - 3$ y $g(x) = x^2 + 2x$, podemos encontrar $f(5)$ y $g(5)$ como sigue.

$$f(x) = x - 3 \qquad g(x) = x^2 + 2x$$
$$f(5) = 5 - 3 = 2 \qquad g(5) = 5^2 + 2(5) = 35$$

Si sumamos $f(x) + g(x)$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (x - 3) + (x^2 + 2x) \\ &= x^2 + 3x - 3 \end{aligned}$$

Esta nueva función formada por la suma de $f(x)$ y $g(x)$ se designa como $(f + g)(x)$. Por lo tanto podemos escribir

$$(f + g)(x) = x^2 + 3x - 3$$

Determinamos $(f + g)(5)$ como sigue.

$$\begin{aligned} (f + g)(5) &= 5^2 + 3(5) - 3 \\ &= 25 + 15 - 3 = 37 \end{aligned}$$

Observe que

$$f(5) + g(5) = (f + g)(5)$$
$$2 + 35 = 37 \quad \textit{Verdadero}$$

De hecho, para cualquier número real sustituido por x encontraremos que

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

Para la resta, multiplicación y división de funciones, existe una notación similar.

Operaciones sobre funciones

Si $f(x)$ representa una función, $g(x)$ representa una segunda función y x está en el dominio de ambas funciones, entonces pueden realizarse las operaciones siguientes sobre funciones.

Suma de funciones: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Diferencia de funciones: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

Producto de funciones: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Cociente de funciones: $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, siempre que $g(x) \neq 0$.

EJEMPLO 1 Si $f(x) = x^2 + x - 6$ y $g(x) = x - 3$, determine

a) $(f + g)(x)$ **b)** $(f - g)(x)$
c) $(g - f)(x)$ **d)** ¿Es $(f - g)(x) = (g - f)(x)$?

Solución Para responder las partes de la **a)** a la **c)**, realizamos las operaciones indicadas

a)
$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (x^2 + x - 6) + (x - 3)\\ &= x^2 + x - 6 + x - 3\\ &= x^2 + 2x - 9\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (x^2 + x - 6) - (x - 3)\\ &= x^2 + x - 6 - x + 3\\ &= x^2 - 3\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}(g - f)(x) &= g(x) - f(x)\\ &= (x - 3) - (x^2 + x - 6)\\ &= x - 3 - x^2 - x + 6\\ &= -x^2 + 3\end{aligned}$$

d) Al comparar las respuestas de la parte **b)** y **c)**, vemos que

$$(f - g)(x) \neq (g - f)(x)$$

Ahora resuelva el ejercicio 11

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x - 2$, determinar

a) $(f - g)(6)$ **b)** $(f \cdot g)(5)$ **c)** $(f/g)(8)$

Solución

a)
$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (x^2 - 4) - (x - 2)\\ &= x^2 - x - 2\\ (f - g)(6) &= 6^2 - 6 - 2\\ &= 36 - 6 - 2\\ &= 28\end{aligned}$$

También podríamos haber encontrado la solución como sigue:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 4 \qquad & g(x) &= x - 2\\ f(6) &= 6^2 - 4 = 32 \qquad & g(6) &= 6 - 2 = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f - g)(6) &= f(6) - g(6)\\ &= 32 - 4 = 28\end{aligned}$$

b) Encontraremos $(f \cdot g)(5)$ utilizando el hecho de que

$$(f \cdot g)(5) = f(5) \cdot g(5)$$

$$f(x) = x^2 - 4 \qquad g(x) = x - 2$$

$$f(5) = 5^2 - 4 = 21 \qquad g(5) = 5 - 2 = 3$$

Así $f(5) \cdot g(5) = 21 \cdot 3 = 63$. Por lo tanto, $(f \cdot g)(5) = 63$. También podríamos haber encontrado $(f \cdot g)(5)$, por medio de la multiplicación de $f(x) \cdot g(x)$ y luego sustituyendo 5 en el producto. En la sección 5.2 analizaremos cómo hacer esto.

c) Determinaremos $(f/g)(8)$ utilizando el hecho de que

$$(f/g)(8) = f(8)/g(8)$$

$$f(x) = x^2 - 4 \qquad g(x) = x - 2$$

$$f(8) = 8^2 - 4 = 60 \qquad g(8) = 8 - 2 = 6$$

Entonces $f(8)/g(8) = 60/6 = 10$. Por lo tanto, $(f/g)(8) = 10$. También podríamos haber encontrado $(f/g)(8)$ dividiendo $f(x)/g(x)$ y luego sustituyendo el 8 en el cociente. En el capítulo 5 analizaremos cómo hacer esto.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 31**

Observe que, en el recuadro Operaciones sobre funciones, de la página 209, incluimos la frase "y x está en el dominio de ambas funciones". Como se mencionó anteriormente, el dominio de una función es el conjunto de valores que pueden ser usados por la variable independiente. Por ejemplo, el dominio de la función $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ es todos los números reales, ya que cuando x es cualquier número real, $f(x)$ también será un número real. El dominio de $g(x) = \dfrac{1}{x - 8}$ es todos los números reales excepto 8, ya que cuando x es cualquier número real excepto 8, la función $g(x)$ es un número real. Cuando x es 8, la función no es un número real ya que $\dfrac{1}{0}$ es indefinida. Estudiaremos el dominio de funciones con mayor detalle en la sección 6.1.

2 Graficar la suma de funciones

Ahora explicaremos cómo podemos graficar la suma, la diferencia, el producto o el cociente de dos funciones. La **figura 3.72** muestra dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$.

Para graficar la suma de $f(x)$ y $g(x)$, o $(f + g)(x)$, utilizamos $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. La tabla de la página siguiente proporciona los valores enteros de x desde -2 hasta 4, los valores de $f(-2)$ a $f(4)$ y los valores de $g(-2)$ a $g(4)$. Estos valores se toman directamente de la **figura 3.72**. Los valores de $(f + g)(-2)$ a $(f + g)(4)$ se determinaron sumando los valores de $f(x)$ y $g(x)$. La gráfica de $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ se ilustra en gris en la **figura 3.73**.

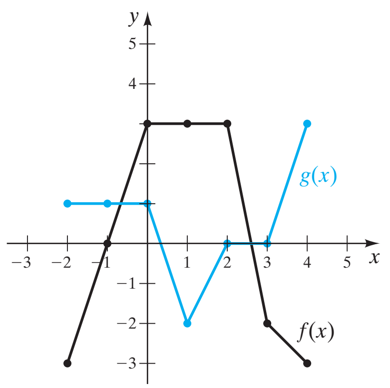


FIGURA 3.72

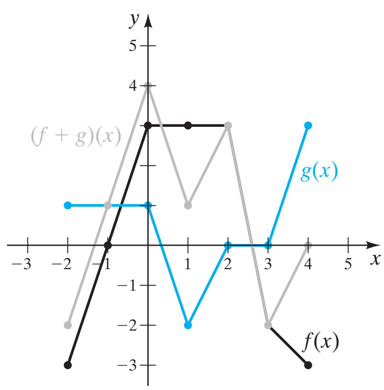


FIGURA 3.73

x	$f(x)$	$g(x)$	$(f + g)(x)$
-2	-3	1	$-3 + 1 = -2$
-1	0	1	$0 + 1 = 1$
0	3	1	$3 + 1 = 4$
1	3	-2	$3 + (-2) = 1$
2	3	0	$3 + 0 = 3$
3	-2	0	$-2 + 0 = -2$
4	-3	3	$-3 + 3 = 0$

Podríamos graficar la diferencia, el producto o el cociente de dos funciones usando una técnica similar. Por ejemplo, para graficar la función producto $(f \cdot g)(x)$, podríamos evaluar $(f \cdot g)(-2)$ como sigue:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(-2) &= f(-2) \cdot g(-2)\\ &= (-3)(1) = -3\end{aligned}$$

Así, la gráfica de $(f \cdot g)(x)$ tendría un par ordenado en $(-2, -3)$. Otros pares ordenados se determinarían por el mismo procedimiento.

En periódicos, revistas e Internet, con frecuencia encontramos gráficas que muestran la suma de dos funciones. Por lo general las gráficas que muestran la suma de dos funciones se ilustra de una de tres formas: gráfica de líneas, gráfica de barras o gráfica lineal apilada (o acumulada). Los ejemplos 3 a 5 muestran los tres métodos generales. Cada uno de estos ejemplos utilizará la misma información respecto al colesterol.

EJEMPLO 3 ▸ **Gráfica de líneas** Jim Silverstone, desde 2002 a 2006, ha mantenido un registro de su colesterol malo (lipoproteínas de baja densidad, o LBD) y de su colesterol bueno (lipoproteínas de alta densidad, o LAD). La **tabla 3.2** muestra su LBD y su LAD, para estos años.

TABLA 3.2 Colesterol

	2002	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**
LBD	220	240	140	235	130
LAD	30	40	70	35	40

a) Explique por qué los datos que consisten en los años y los valores de LBD son una función, y los datos que consisten en los años y los valores de LAD también son una función.

b) Dibuje una gráfica de líneas que muestre la LBD, LAD y el colesterol total de 2002 a 2006. El colesterol total es la suma de LBD y LAD.

c) Si L representa la cantidad de LBD y H representa la cantidad de LAD, muestre que $(L + H)(2006) = 170$.

d) Observando la gráfica que dibujó en la parte **b)**, determine los años en que la LBD fue menor que 180.

Solución

a) Los datos que consisten en los años y los valores de LBD son una función ya que para cada año existe un valor de LBD. Observe que el año es la variable independiente, y el valor de LBD es la variable dependiente. Por la misma razón, los datos que consisten en los años y los valores de LAD son una función.

b) Para cualquier año, el colesterol total es la suma de LBD y LAD, para ese año. Por ejemplo, para 2005, a fin de determinar el colesterol, sumamos $235 + 35 = 270$. La gráfica en la **figura 3.74** muestra LBD, LAD y el colesterol total para los años del 2002 a 2006.

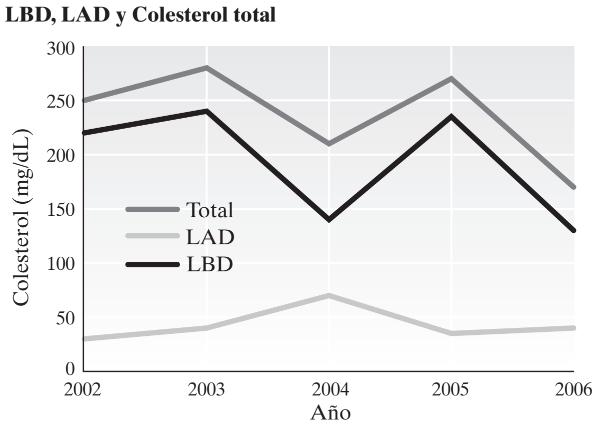


FIGURA 3.74

c) Para determinar LBD y LAD, o el total de colesterol, sumamos los dos valores para 2006.

$$\begin{aligned}(L + H)(2006) &= L(2006) + H(2006)\\ &= 130 + 40 = 170\end{aligned}$$

d) Observando la gráfica que se dibujó en la parte **b)**, vemos que los años en que la LBD fue menor que 180 son 2004 y 2006.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 63a**

EJEMPLO 4 ▸ Gráfica de barras

a) Con los datos de la **tabla 3.2**, en la página 211, dibuje una gráfica de barras que muestre la LBD, LAD y el colesterol total para los años de 2002 a 2006.

b) Si L representa la cantidad de LBD y H representa la cantidad de LAD, utilice la gráfica que se dibujó en la parte **a)** para determinar $(L + H)(2003)$.

c) Observando la gráfica que se dibujó en la parte **a)**, determine en cuáles años el colesterol total fue menor a 220.

d) Observando la gráfica que se dibujó en la parte **a)**, estime la LAD en 2004.

Solución

a) Para obtener la gráfica de barras que muestre el colesterol total, para cada año dado sumamos la LAD a la LBD. Por ejemplo, para 2002 iniciamos dibujando una barra hasta 220, para representar la LBD. Directamente sobre esa barra agregamos una segunda barra de 30 unidades, para representar la LAD. Esto lleva la barra total a $220 + 30$ o 250 unidades. Utilizamos el mismo procedimiento para cada año desde 2002 hasta 2006. La gráfica de barras se muestra en la **figura 3.75**.

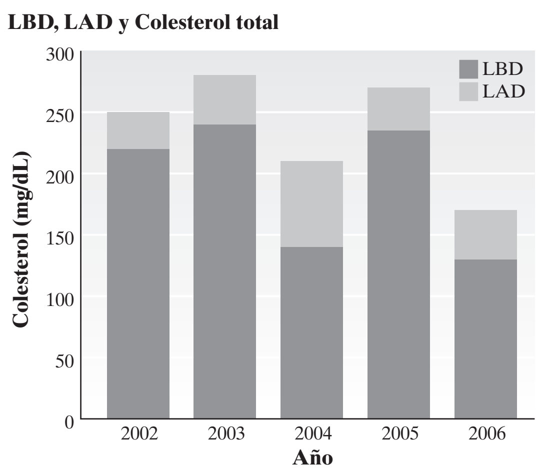


FIGURA 3.75

b) Observando la gráfica en la **figura 3.75**, vemos que $(L + H)(2003)$ o el total de colesterol para 2003 es alrededor de 280.

c) Observando la gráfica, vemos que el colesterol total fue menor que 220 en 2004 y 2006.

d) Para 2004, la barra de LAD inicia en alrededor de 140 y termina en casi 210. La diferencia de estas cantidades, $210 - 140 = 70$, representa la cantidad de LAD en 2004. Por tanto, la LAD en 2004 fue de alrededor de 70.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 63b**

EJEMPLO 5 ▸ Gráfica de líneas apiladas

a) Con los datos de la **tabla 3.2** de la página 211, dibuje una gráfica de líneas apiladas (o acumuladas) que muestre la LBD, LAD y el colesterol total para los años 2002-2006.

b) Con la gráfica que se dibujó en la parte **a)**, determine en cuáles años el colesterol total fue mayor o igual a 200.

c) Usando la gráfica de la parte **a)**, estime la cantidad de LAD en 2006.

d) Mediante la gráfica de la parte **a)**, determine los años en los que la LBD fue mayor o igual a 180 y el colesterol total fue menor o igual a 250.

Solución

a) Para obtener una gráfica de líneas apiladas, dibuje la línea que representa la LBD. Será la misma línea que dibujó para representar a la LBD en la **figura 3.74** en la página 212. Arriba de esta línea dibuje una línea para representar a la LAD. Una forma de obtenerla es trabajando año por año y luego conectando los puntos para cada año mediante segmentos de recta. Por ejemplo, en 2002, la LAD iniciaría en 220, la cantidad de LBD, y se aumentaría en 30, la cantidad de LAD, para obtener un total de 250. Utilice este procedimiento para cada año. La gráfica se muestra en la **figura 3.76**.

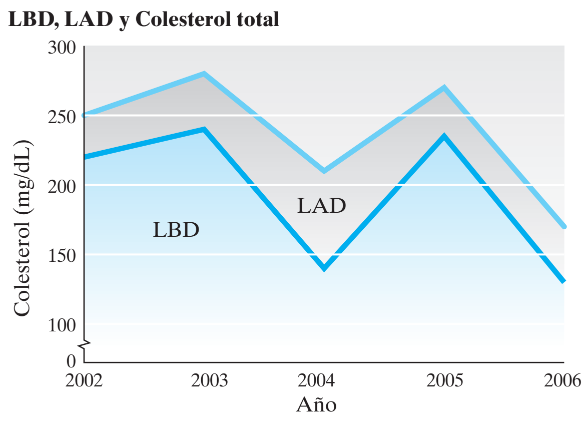


FIGURA 3.76

b) Observando la gráfica, vemos que el colesterol total, indicado por la línea rojo fue mayor o igual a 200 en 2002, 2003, 2004 y 2005.

c) Observando la gráfica en el área de LAD, podemos ver que en 2006 la LAD inicia en alrededor de 130 y termina casi en 170. Si restamos, obtenemos $170 - 130 = 40$. Por lo tanto, la LAD en 2006 fue casi 40. Si representamos con H la cantidad de LAD, entonces $H(2006) \approx 40$.

d) Observando la gráfica, podemos determinar que el único año en que la LBD fue mayor o igual a 180 y el colesterol total fue menor o igual a 250 fue 2002.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 63c**

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Las calculadoras graficadoras pueden graficar las sumas, diferencias, productos y divisiones de funciones. Una manera de hacer esto es introducir las funciones de forma individual. Luego, siguiendo las instrucciones que vienen con su calculadora, puede sumar, restar, multiplicar o dividir las funciones. Por ejemplo, la pantalla en la **figura 3.77** muestra una TI-84 Plus preparada para graficar $Y_1 = x - 3, Y_2 = 2x + 4$ y la suma de las funciones, $Y_3 = Y_1 + Y_2$. En la TI-84 Plus, para obtener $Y_3 = Y_1 + Y_2$, presione la tecla $\boxed{\text{VARS}}$. Luego mueva el cursor a Y-VARS y entonces seleccione 1:Function. Ahora presione $\boxed{1}$ para introducir Y_1. Luego presione $\boxed{+}$. Ahora presione $\boxed{\text{VARS}}$ y vaya a Y-VARS y seleccione 1:Function. Por último, presione $\boxed{2}$ para introducir Y_2. La **figura 3.78** muestra las gráficas de las dos funciones y la gráfica de la suma de las funciones.

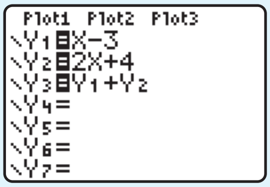


FIGURA 3.77

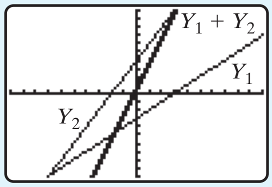


FIGURA 3.78

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.6

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Para todos los valores de x, ¿$f(x) + g(x) = (f + g)(x)$?

2. Para todos los valores de x, ¿$f(x) - g(x) = (f - g)(x)$?

3. ¿Qué restricciones se imponen a la propiedad $f(x)/g(x) = (f/g)(x)$? Explique.

4. Para todos los valores de x, ¿$(f + g)(x) = (g + f)(x)$? Explique y proporcione un ejemplo para apoyar su respuesta.

5. Para todos los valores de x, ¿$(f - g)(x) = (g - f)(x)$? Explique y proporcione un ejemplo para apoyar su respuesta.

6. Si $f(2) = 9$ y $g(2) = -3$, determine
   a) $(f + g)(2)$ **b)** $(f - g)(2)$
   c) $(f \cdot g)(2)$ **d)** $(f/g)(2)$

7. Si $f(-2) = -3$ y $g(-2) = 5$, determine
   a) $(f + g)(-2)$ **b)** $(f - g)(-2)$
   c) $(f \cdot g)(-2)$ **d)** $(f/g)(-2)$

8. Si $f(7) = 10$ y $g(7) = 0$, determine
   a) $(f + g)(7)$ **b)** $(f - g)(7)$
   c) $(f \cdot g)(7)$ **d)** $(f/g)(7)$

Práctica de habilidades

Para cada par de funciones, determine **a)** $(f + g)(x)$, **b)** $(f + g)(a)$ *y* **c)** $(f + g)(2)$.

9. $f(x) = x + 5, g(x) = x^2 + x$

10. $f(x) = x^2 - x - 8, g(x) = x^2 + 1$

11. $f(x) = -3x^2 + x - 4, g(x) = x^3 + 3x^2$

12. $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x - 1, g(x) = x^3 - x^2 + 2x + 6$

13. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - x, g(x) = 3x^2 + 4$

14. $f(x) = 3x^2 - x + 2, g(x) = 6 - 4x^2$

Sea $f(x) = x^2 - 4$ *y* $g(x) = -5x + 3$. *Determine lo siguiente.*

15. $f(2) + g(2)$

16. $f(5) + g(5)$

17. $f(4) - g(4)$

18. $f\left(\frac{1}{4}\right) - g\left(\frac{1}{4}\right)$

19. $f(3) \cdot g(3)$

20. $f(-1) \cdot g(-1)$

21. $\dfrac{f\left(\frac{3}{5}\right)}{g\left(\frac{3}{5}\right)}$

22. $f(-1)/g(-1)$

23. $g(-3) - f(-3)$

24. $g(6) \cdot f(6)$

25. $g(0)/f(0)$

26. $f(2)/g(2)$

Sea $f(x) = 2x^2 - x$ *y* $g(x) = x - 6$. *Determine lo siguiente.*

27. $(f + g)(x)$

28. $(f + g)(a)$

29. $(f + g)(2)$

30. $(f + g)(-3)$

31. $(f - g)(-2)$

32. $(f - g)(1)$

33. $(f \cdot g)(0)$

34. $(f \cdot g)(3)$

35. $(f/g)(-1)$

36. $(f/g)(6)$

37. $(g/f)(5)$

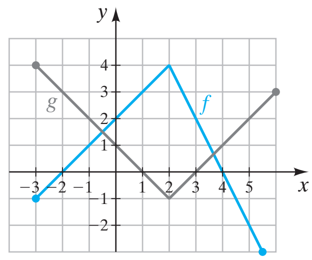
38. $(g - f)(4)$

39. $(g - f)(x)$

40. $(g - f)(r)$

Resolución de problemas

Utilizando la gráfica de la derecha, determine el valor de lo siguiente.



41. $(f + g)(0)$

42. $(f - g)(0)$

43. $(f \cdot g)(2)$

44. $(f/g)(1)$

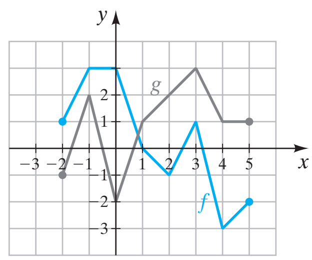
45. $(g - f)(-1)$

46. $(g + f)(-3)$

47. $(g/f)(4)$

48. $(g \cdot f)(-1)$

Utilizando la gráfica de la derecha, determine el valor de lo siguiente.



49. $(f + g)(-2)$

50. $(f - g)(-1)$

51. $(f \cdot g)(1)$

52. $(g - f)(3)$

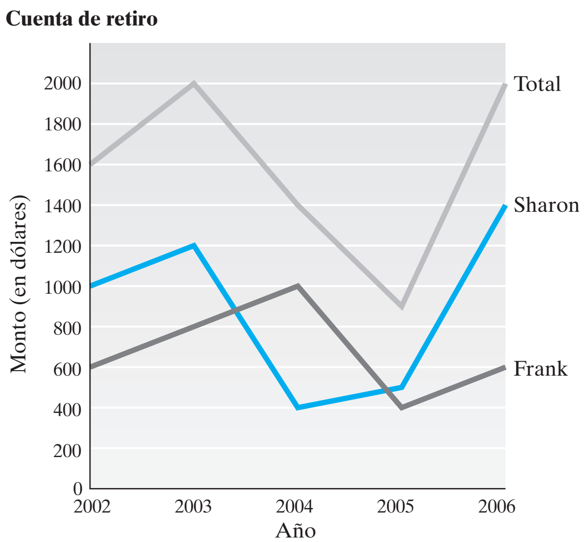
53. $(f/g)(4)$

54. $(g/f)(5)$

55. $(g/f)(2)$

56. $(g \cdot f)(0)$

57. Cuenta de retiro La gráfica siguiente muestra el monto que Sharon y Frank Dangman han reunido para una cuenta conjunta para el retiro, de 2002 a 2006.



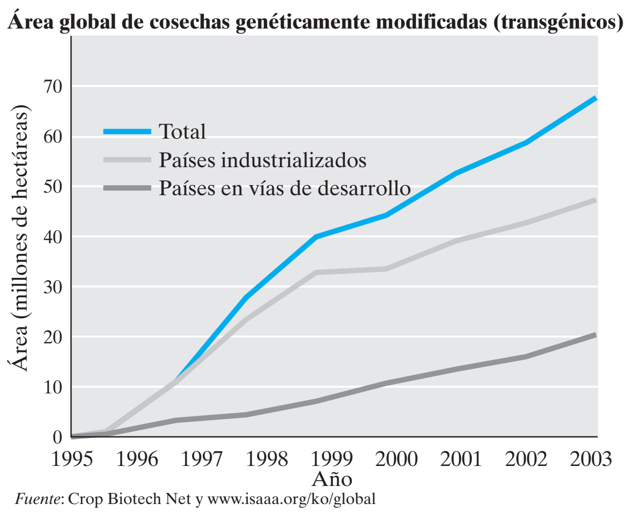
a) ¿En qué año Frank contribuyó con $1000?

b) En 2006, estime ¿cuánto más contribuyó Sharon que Frank a la cuenta del retiro?

c) Para este periodo de cinco años, estime el monto total que Sharon y Frank contribuyeron a la cuenta conjunta de retiro.

d) Estime $(F + S)(2005)$

58. Cosechas genéticamente modificadas La producción mundial de cosechas genéticamente modificadas (transgénicas), tanto en países en vías de desarrollo como en países industrializados, ha crecido rápidamente. La gráfica siguiente muestra el área de cultivo dedicada a transgénicos en naciones en vías de desarrollo, en países industrializados y a nivel mundial de 1995 a 2003. El total se determinó sumando las cantidades de los dos tipos de países. El área de cultivo se da en millones de hectáreas. Una hectárea es una unidad del sistema métrico que equivale aproximadamente a 2.471 acres.



Fuente: Crop Biotech Net y www.isaaa.org/ko/global

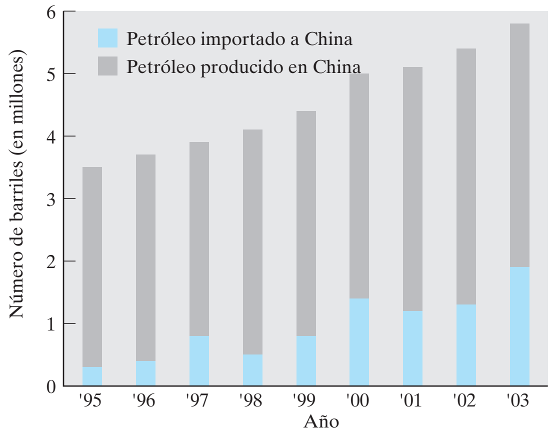
a) Estime, para 2002, el área que en países en vías de desarrollo está dedicada a cosechas genéticamente modificadas.

b) Estime, para 2002, el área que en países industrializados está dedicada a cosechas genéticamente modificadas.

c) ¿En qué años, de 1995 a 2003, el área dedicada a transgénicos fue menor a 23 millones de hectáreas?

d) ¿En qué años, de 1995 a 2003, el área dedicada a transgénicos fue mayor a 50 millones de hectáreas?

59. Consumo de petróleo de China La necesidad de China por petróleo crudo se ha incrementado en los últimos años. La gráfica de barras siguiente muestra el consumo total de China, C, en millones de barriles de petróleo crudo por día. Las barras en rojo representan el petróleo crudo que China importa diariamente, I. Las barras superiores (gris) representan el petróleo crudo producido diariamente en China para los años de 1995 a 2003.



Fuentes: Bloomberg Financial Markets: BP Statistical Review: Bloomberg News: Customs General Administration of China, *New York Times* (12/23/04)

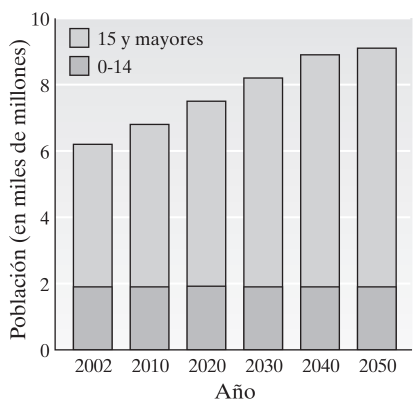
a) ¿En qué año fue mayor la importación de petróleo crudo a China? ¿Cuál fue la cantidad diaria de importación?

b) ¿En qué años la importación de petróleo crudo a China disminuyó, con respecto al año anterior?

c) Estime $I(2002)$.

d) Estime la cantidad de petróleo crudo producido diariamente en China en 2003.

60. Población global La gráfica siguiente muestra la población global proyectada y la población proyectada de niños de 0 a 14 años de edad de 2002 a 2004.



Fuente: U.S. Census Bureau, International Programs Center, International Data Base

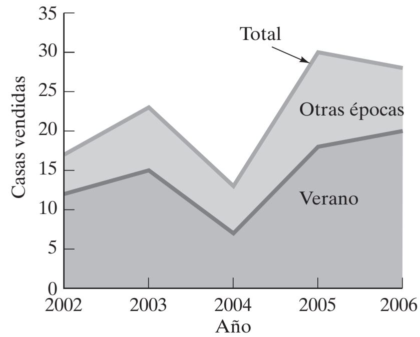
a) Estime la población global proyectada para 2050.

b) Estime el número proyectado de niños de 0 a 14 años de edad para 2050.

c) Estime el número proyectado de personas de 15 años y mayores para 2050.

d) Estime la diferencia proyectada en la población global total entre 2002 y 2050.

61. Bienes raíces En muchas regiones de Estados Unidos, las casas se venden mejor en verano que en otras épocas del año. La gráfica siguiente muestra el total de casas vendidas en el pueblo de Fuller de 2002 a 2006. Además, la gráfica muestra la venta de casas en el verano, S, y en otras épocas del año, Y.



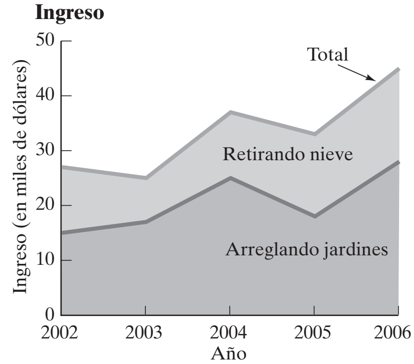
a) Estime el número de casas vendidas en el verano de 2006.

b) Estime el número de casas vendidas en otras épocas en 2006.

c) Estime $Y(2005)$.

d) Estime $(S + Y)(2003)$.

62. Ingreso Mark Whitaker es propietario de un negocio en el que en verano arregla jardines y en invierno retira la nieve. La gráfica siguiente muestra el ingreso total, T, de 2002 a 2006 dividido en el ingreso por arreglar jardines, L, y el ingreso por retirar la nieve, S.



a) Estime el ingreso total para 2006.

b) Estime $L(2002)$.

c) Estime $S(2005)$.

d) Estime $(L + S)(2003)$.

63. Ingreso La tabla siguiente muestra los ingresos del señor y la señora Abrams durante 2002 a 2006.

	2002	2003	2004	2005	2006
Señor Abrams	\$15,500	\$17,000	\$8,000	\$25,000	\$20,000
Señora Abrams	\$4,500	\$18,000	\$28,000	\$7,000	\$22,500

a) Dibuje una gráfica de líneas que ilustre el ingreso del señor Abrams, de la señora Abrams y el ingreso total de ellos de 2002 a 2006. Vea el ejemplo 3.

b) Dibuje una gráfica de barras que ilustre la información dada. Vea el ejemplo 4.

c) Dibuje una gráfica de líneas apiladas que ilustre la información dada. Vea el ejemplo 5.

64. Factura telefónica La tabla siguiente muestra las facturaciones por teléfono residencial y por teléfono celular (redondeadas a los $10 más cercanos) de 2002 a 2006.

	2002	2003	2004	2005	2006
Residencial	$40	$50	$60	$50	$0
Celular	$80	$50	$20	$50	$60

a) Dibuje una gráfica de líneas que ilustre las facturaciones de teléfono residencial, de teléfono celular y el total por ambos de 2002 a 2006.

b) Dibuje una gráfica de barras que ilustre la información dada.

c) Dibuje una gráfica de líneas apiladas que ilustre la información dada.

65. Impuestos María Cisneros paga impuestos a las percepciones, tanto federales como estatales. La tabla muestra el monto de impuestos a las percepciones que ella pagó al gobierno federal y al gobierno estatal (redondeado a los $100 más cercanos) de 2002 a 2006.

	2002	2003	2004	2005	2006
Federal	$4000	$5000	$3000	$6000	$6500
Estatal	$1600	$2000	$0	$1700	$1200

a) Dibuje una gráfica de líneas que ilustre el monto destinado al pago de impuesto federal, el monto del impuesto estatal y el monto total en estos dos tipos de impuestos de 2002 a 2006.

b) Dibuje una gráfica de barras que ilustre la información dada.

c) Dibuje una gráfica de líneas apiladas que ilustre la información dada.

66. Costo de colegiaturas La familia Olmert tiene hijos gemelos, Justin y Nelly, quienes asisten a diferentes colegios. Las colegiaturas de Justin y de Nelly de 2004 a 2007 (a los $1000 más cercanos) se muestran en la tabla siguiente.

	2004	2005	2006	2007
Justin	$12,000	$6000	$8000	$9000
Nelly	$2000	$8000	$8000	$5000

a) Dibuje una gráfica de líneas que ilustre la información dada, incluyendo la cantidad total en colegiaturas para ambos durante los años de 2004 a 2007.

b) Dibuje una gráfica de barras que ilustre la información dada.

c) Dibuje una gráfica de líneas apiladas que ilustre la información dada.

Para los ejercicios del 67 al 72, sean f y g dos funciones que se grafican en los mismos ejes.

67. Si, en a, $(f + g)(a) = 0$, ¿qué debe cumplirse con respecto a $f(a)$ y $g(a)$?

68. Si, en a, $(f \cdot g)(a) = 0$, ¿qué debe cumplirse con respecto a $f(a)$ y $g(a)$?

69. Si, en a, $(f - g)(a) = 0$, ¿qué debe cumplirse con respecto a $f(a)$ y $g(a)$?

70. Si, en a, $(f - g)(a) < 0$, ¿qué debe cumplirse con respecto a $f(a)$ y $g(a)$?

71. Si, en a, $(f/g)(a) < 0$, ¿qué debe cumplirse con respecto a $f(a)$ y $g(a)$?

72. Si, en a, $(f \cdot g)(a) < 0$, ¿qué debe cumplirse con respecto a $f(a)$ y $g(a)$?

Grafique las funciones siguientes en su calculadora graficadora.

73. $y_1 = 2x + 3$
$y_2 = -x + 4$
$y_3 = y_1 + y_2$

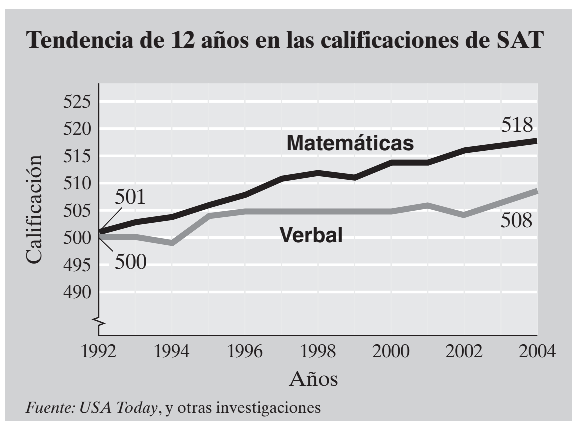
74. $y_1 = x - 3$
$y_2 = 2x$
$y_3 = y_1 - y_2$

75. $y_1 = x$
$y_2 = x + 5$
$y_3 = y_1 \cdot y_2$

76. $y_1 = 2x^2 - 4$
$y_2 = x$
$y_3 = y_1/y_2$

Actividad en grupo

77. Calificaciones en el SAT La gráfica siguiente muestra las calificaciones promedio en matemáticas y en habilidades verbales de estudiantes que aplicaron el examen SAT de ingreso al colegio para 1992 a 2004. Suponga que f representa las calificaciones en matemáticas, g las calificaciones en habilidades verbales, y que t representa el año. En equipo, dibujen una gráfica que represente $(f + g)(t)$.



Ejercicios de repaso acumulativo

[1.5] **78.** Evalúe $(-4)^{-3}$.

[1.6] **79.** Exprese 2,960,000 en notación científica.

[2.2] **80.** Despeje a h de $A = \frac{1}{2}bh$.

[2.3] **81. Lavadora** El costo de una lavadora, incluyendo 6% de impuesto a la venta, es \$477. Determine el costo antes del impuesto de la lavadora.

[3.1] **82.** Grafique $y = |x| - 2$.

[3.3] **83.** Grafique $3x - 4y = 12$.

3.7 Graficación de desigualdades lineales

1 Graficar desigualdades lineales con dos variables.

1 Graficar desigualdades lineales con dos variables

Una **desigualdad lineal** resulta cuando el signo de igual en una ecuación lineal se reemplaza con un signo de desigualdad.

Ejemplos de desigualdades lineales con dos variables

$$2x + 3y > 2 \qquad 3y < 4x - 9$$
$$-x - 2y \le 3 \qquad 5x \ge 2y - 7$$

Una recta divide un plano en tres regiones: la recta misma y los dos **semiplanos**, uno a cada lado de la recta. La recta se denomina la **frontera**. Considere la ecuación lineal $2x + 3y = 6$, la gráfica de esta recta, la recta frontera, divide al plano en el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad $2x + 3y < 6$ del conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad $2x + 3y > 6$. Una desigualdad puede o no incluir a la recta frontera. Como la desigualdad $2x + 3y \le 6$ significa $2x + 3y < 6$ o $2x + 3y = 6$, la desigualdad $2x + 3y \le 6$ contiene a la recta frontera. De manera análoga, la desigualdad $2x + 3y \ge 6$ contiene a la recta frontera. La gráfica de las desigualdades $2x + 3y < 6$ y $2x + 3y > 6$ no contiene a la recta frontera. Ahora analizamos cómo graficar desigualdades lineales.

Para graficar una desigualdad lineal con dos variables

1. Reemplace el símbolo de desigualdad con un signo de igual.
2. Trace la gráfica de la ecuación en el paso 1. Si la desigualdad original contiene un símbolo $\ge$ o $\le$ trace la gráfica utilizando una línea sólida. Si la desigualdad original contiene un símbolo $>$ o $<$, trace la gráfica utilizando una línea discontinua.
3. Seleccione un punto que no esté en la línea y determine si este punto es una solución de la desigualdad original. Si el punto seleccionado es una solución, sombree la región del lado de la línea que contiene este punto. Si el punto seleccionado no satisface la desigualdad, sombree la región del lado de la línea que no contiene al punto.

En el paso 3, estamos decidiendo cuál conjunto de puntos satisface la desigualdad dada.

EJEMPLO 1 Grafique la desigualdad $y < \frac{2}{3}x - 3$.

Solución Primero graficamos la ecuación $y = \frac{2}{3}x - 3$. Como la desigualdad original contiene un signo menor que, $<$, utilizamos una línea discontinua al trazar la gráfica (vea la **figura 3.79**). La línea discontinua indica que los puntos de esta línea no son soluciones de la desigualdad $y < \frac{2}{3}x - 3$. Seleccione un punto que no esté en la línea y determine si éste satisface la desigualdad. Con frecuencia, el punto más sencillo de utilizar es el origen $(0, 0)$.

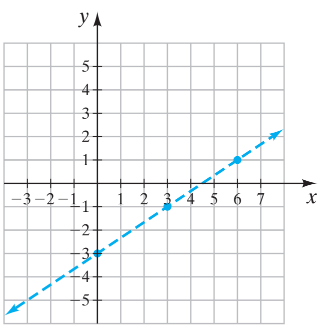


FIGURA 3.79

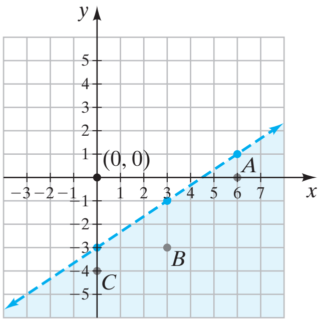


FIGURA 3.80

Punto de prueba (0, 0)

$$y < \frac{2}{3}x - 3$$

$$0 \overset{?}{<} \frac{2}{3}(0) - 3$$

$$0 \overset{?}{<} 0 - 3$$

$$0 < -3 \qquad \textit{Falso}$$

Como 0 no es menor que -3, el punto $(0, 0)$ no satisface la desigualdad. La solución serán todos los puntos del lado de la línea opuesto al punto $(0, 0)$. Sombree esta región (**figura 3.80**). Cada punto que esté en el área sombreada satisface la desigualdad dada. Comprobemos con algunos puntos A, B y C.

Punto *A*	**Punto *B***	**Punto *C***
$(6, 0)$	$(3, -3)$	$(0, -4)$
$y < \frac{2}{3}x - 3$	$y < \frac{2}{3}x - 3$	$y < \frac{2}{3}x - 3$
$0 \overset{?}{<} \frac{2}{3}(6) - 3$	$-3 \overset{?}{<} \frac{2}{3}(3) - 3$	$-4 \overset{?}{<} \frac{2}{3}(0) - 3$
$0 \overset{?}{<} 4 - 3$	$-3 \overset{?}{<} 2 - 3$	$-4 \overset{?}{<} 0 - 3$
$0 < 1$ *Verdadero*	$-3 < -1$ *Verdadero*	$-4 < -3$ *Verdadero*

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 15**

EJEMPLO 2 ▸ Grafique la desigualdad $y \geq -\frac{1}{2}x$.

Solución Primero, graficamos la ecuación $y = -\frac{1}{2}x$. Como la desigualdad es $\geq$, utilizamos una línea sólida para indicar que los puntos de la línea son soluciones de la desigualdad (**figura 3.81**). Como el punto $(0, 0)$ está sobre la línea, no podemos elegir ese punto para determinar la solución. De forma arbitraria, elegimos el punto $(3, 1)$.

Punto de prueba (3, 1)

$$y \geq -\frac{1}{2}x$$

$$1 \overset{?}{\geq} -\frac{1}{2}(3)$$

$$1 \geq -\frac{3}{2} \qquad \textit{Verdadero}$$

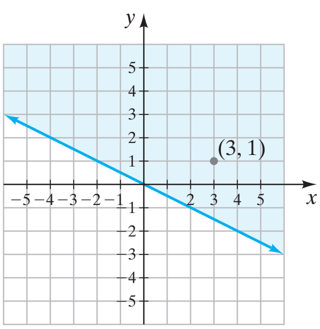


FIGURA 3.81

Como el punto $(3, 1)$ satisface la desigualdad, todo punto en el mismo lado de la línea $(3, 1)$ también satisfará la desigualdad $y \geq -\frac{1}{2}x$. Sombree esta región como se indica. Todo punto que se encuentre en la región sombreada, así como todo punto sobre la recta, satisface la desigualdad.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 9**

EJEMPLO 3 Grafique la desigualdad $3x - 2y < -6$.

Solución Primero, graficamos la ecuación $3x - 2y = -6$. Como la desigualdad es $<$, utilizamos una línea discontinua para dibujar la gráfica, **figura 3.82**. Al sustituir el punto de prueba (0, 0) en la desigualdad, obtenemos una proposición falsa.

Punto de prueba (0, 0)

$$3x - 2y < -6$$

$$3(0) - 2(0) \overset{?}{<} -6$$

$$0 < -6 \quad \textit{Falso}$$

Por lo tanto, la solución es la parte del plano que no contiene al origen.

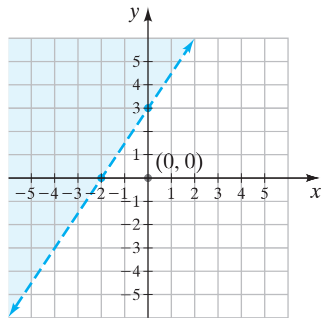


FIGURA 3.82

Ahora resuelva el ejercicio 23

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Una calculadora graficadora también puede mostrar gráficas de desigualdades. El procedimiento para mostrar las gráficas varía de calculadora a calculadora. En la **figura 3.83**, mostramos la gráfica de $y > 2x + 3$. Lea el manual de su calculadora graficadora y aprenda cómo mostrar gráficas de desigualdades.

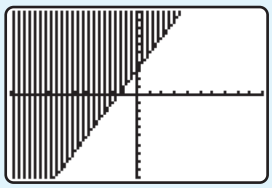


FIGURA 3.83

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.7

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Cuando grafica una desigualdad que tiene $>$ o $<$, ¿por qué los puntos de la línea no son soluciones de la desigualdad?
2. Cuando grafica una desigualdad que tiene $\geq$ o $\leq$, ¿por qué los puntos de la línea sí son soluciones de la desigualdad?
3. Cuando grafica una desigualdad lineal, ¿cuándo el punto (0, 0) no puede ser utilizado como un punto de prueba?
4. Cuando grafica una desigualdad lineal de la forma $y > ax + b$, en donde a y b son números reales, ¿la solución siempre estará por arriba de la recta? Explique.

Práctica de habilidades

Grafique cada desigualdad.

5. $x > 1$
6. $x \geq 4$
7. $y < -2$
8. $y < x$
9. $y \geq -\frac{1}{2}x$
10. $y < \frac{1}{2}x$
11. $y < 2x + 1$
12. $y \geq 3x - 1$
13. $y > 2x - 1$
14. $y \leq -x + 4$
15. $y \geq \frac{1}{2}x - 3$
16. $y < 3x + 2$
17. $2x + 3y > 6$
18. $2x - 3y \geq 12$
19. $y \leq -3x + 5$
20. $y \leq \frac{2}{3}x + 3$
21. $2x + y < 4$
22. $3x - 4y \leq 12$
23. $10 \geq 5x - 2y$
24. $-x - 2y > 4$

Resolución de problemas

25. Seguro de vida Las tarifas mensuales por un seguro de vida de \$100,000 para mujeres del grupo financiero general americano aumentan de forma casi lineal para las edades de 35 a 50. La tarifa para una mujer de 35 años de edad es de \$10.15 al mes y para una mujer de 50 años es de \$16.45 al mes.

a) Trace una gráfica que se ajuste a estos datos.

b) En la gráfica, marque la parte de la gráfica donde la tarifa es menor o igual a \$15 al mes.

c) Estime la edad a la cual la tarifa excede, por primera vez, \$15 al mes.

26. Índice de precios al consumidor El índice de precios al consumidor (IPC) es una medida de la inflación. Desde 1990, el IPC ha estado creciendo de manera casi lineal. El IPC en 1990 fue 130.7 y en 2005 el IPC fue 190.7.

Fuente: Oficina de censos de Estados Unidos.

a) Trace una gráfica que se ajuste a estos datos.

b) En la gráfica, marque la parte de la gráfica donde el IPC es mayor o igual a 171.

c) Estime el primer año en que el IPC fue mayor o igual a 171.

27. Disminución de fumadores El porcentaje de estadounidenses de 18 y mayores que fuman ha disminuido de una forma aproximadamente lineal desde 1997. En 1997, alrededor del 29.7% de los estadounidenses de 18 y mayores fumaban. En 2004, el porcentaje descendió a 20.9%.

Fuente: Centros para el Control y Prevención de Enfermedades.

a) Dibuje una gráfica que se ajuste a estos datos.

b) En la gráfica, marque la parte de la misma en la que el porcentaje de estadounidenses de 18 años y mayores que fumaban es menor o igual a 25%.

c) Estime el primer año en que el porcentaje de estadounidenses de 18 años y mayores que fuman será menor a 23%.

28. Viajes en China El número de viajeros chinos ha crecido de forma casi lineal desde 1993 a 2005. En 1993 hubo alrededor de 3.7 millones viajeros chinos. En 2005, hubo alrededor de 17.9 viajeros chinos.

Fuente: Asociación de la Industria de Viajes de Estados Unidos.

a) Dibuje una gráfica que se ajuste a estos datos.

b) En la gráfica, marque la parte de la misma en la que el número de viajeros chinos es mayor o igual a 10 millones.

c) Estime el primer año en el que el número de viajeros chinos sea mayor o igual a 12 millones.

29. a) Grafique $f(x) = 2x - 4$.

b) En la gráfica, sombree la región acotada por $f(x)$, $x = 2$, $x = 4$ y el eje x.

30. a) Grafique $g(x) = -x + 4$.

b) En la gráfica sombree la región acotada por $g(x)$, $x = 1$ y los ejes x y y.

Retos

Grafique cada desigualdad.

31. $y < |x|$ **32.** $y \geq x^2$ **33.** $y < x^2 - 4$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] **34.** Resuelva la ecuación $9 - \dfrac{5x}{3} = -6$.

[2.2] **35.** Si $C = \bar{x} + Z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, determine C cuando $\bar{x} = 80$, $Z = 1.96$, $\sigma = 3$ y $n = 25$.

[2.3] **36. Ofertas en tienda** La tienda Discos y Cosas de Olie está a punto de cerrar para siempre. La primera semana el precio de todos los artículos se ha reducido 10%. La segunda semana el precio de todos los artículos tiene un descuento adicional de \$2. Si durante la segunda semana Bob Frieble compra un CD por \$12.15, determine el precio original del CD.

[3.2] **37.** $f(x) = -x^2 + 5$; determine $f(-3)$.

[3.3] **38.** Escriba una ecuación de la recta que pasa por el punto $(8, -2)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $2x - y = 4$.

[3.4] **39.** Determine la pendiente de la recta que pasa por $(-2, 7)$ y $(2, -1)$.

Resumen del capítulo 3

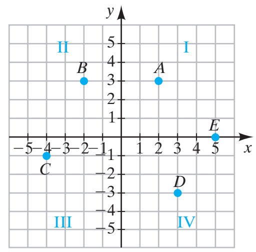
HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 3.1

El sistema de **coordenadas cartesianas (o rectangulares)** consiste en dos ejes dibujados de forma perpendicular entre ellos. El **eje *x*** es el eje horizontal. El **eje *y*** es el eje vertical. El **origen** es el punto de intersección de los dos ejes. Los dos ejes dan lugar a cuatro **cuadrantes** (I, II, III y IV). Un **par ordenado (o pareja ordenada) (*x*, *y*)** se utiliza para dar las dos coordenadas de un punto.

Trace los puntos siguientes en el mismo conjunto de ejes.

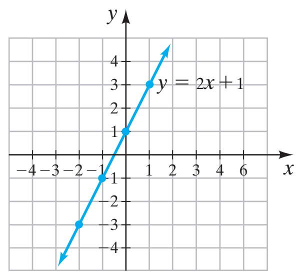
$$A(2, 3), B(-2, 3), C(-4, -1), D(3, -3), E(5, 0)$$



Una **gráfica** es una ilustración del conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Puntos que están en una línea recta, se dice que son **colineales**.

Una **ecuación lineal** es una ecuación cuya gráfica es una recta. Una ecuación lineal también se conoce como **ecuación de primer grado**.

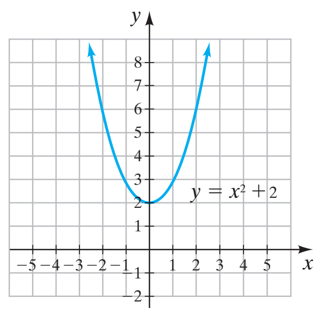
$y = 2x + 1$ es una ecuación lineal cuya gráfica se ilustra a continuación.



Los puntos $(1, 3)$, $(0, 1)$, $(-1, -1)$ y $(-2, -3)$ son colineales.

Una **ecuación no lineal** es una ecuación cuya gráfica no es una línea recta.

$y = x^2 + 2$ es una ecuación no lineal cuya gráfica se muestra enseguida.



Sección 3.2

Para una ecuación con las variables *x* y *y*, si el valor de *y* depende del valor de *x*, entonces *y* es la **variable dependiente** y *x* es la **variable independiente**.

En la ecuación $y = 2x^2 + 3x - 4$, *x* es la variable independiente y *y* es la variable dependiente.

Una **relación** es cualquier conjunto de parejas ordenadas.
Una **función** es una correspondencia entre un primer conjunto de elementos, el **dominio**, y un segundo conjunto de elementos, el **rango**, tal que a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un elemento del rango.

Definición alterna:

Una **función** es un conjunto de parejas ordenadas en las que ninguna primera coordenada se repite.

$\{(1,2), (2,3), 1, 4)\}$ es una relación, pero no es una función.

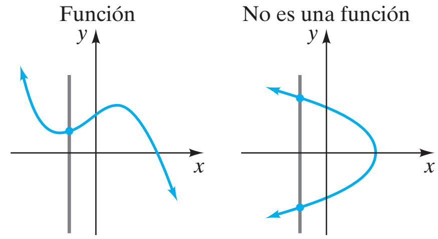
$\{(1, 6), (2, 7), (3, 10)\}$ es una relación. También es una función, ya que a cada elemento en el dominio le corresponde exactamente un elemento del rango.

Dominio: $\{1, 2, 3\}$, rango: $\{6, 7, 10\}$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES — EJEMPLOS

Sección 3.2 (continuación)

La **prueba** (o criterio) **de la recta vertical** puede utilizase para determinar si una gráfica representa una función.
Si, en cualquier parte de la gráfica, se puede dibujar una recta vertical que interseque en dos o más lugares a la misma, la gráfica no representa una función. Si no puede dibujarse una recta vertical que interseque a la gráfica en más de un punto, la gráfica representa a una función.



La **notación de función** puede utilizarse cuando y es una función de x. Para la notación de función, reemplace y con $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, etcétera.

$y = 7x - 9$ puede escribirse como $f(x) = 7x - 9$.

Dada $y = f(x)$, para determinar $f(a)$, reemplace cada x con a.

Sea $\quad f(x) = x^2 + 2x - 8.$

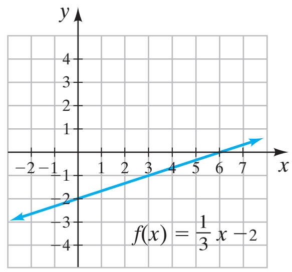
Entonces $\quad f(1) = 1^2 + 2(1) - 8 = -5$

$f(a) = a^2 + 2a - 8.$

Sección 3.3

Una **función lineal** es una función de la forma $f(x) = ax + b$. La gráfica de una función lineal es una línea recta.

Grafique $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$.



La **forma general de una ecuación lineal** es $ax + by = c$, donde a, b y c son números reales y a y b no pueden ser cero simultáneamente.

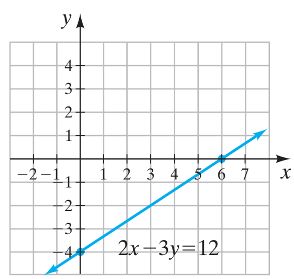
$$3x + 5y = 7, \qquad -2x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{8}$$

La **intercepción x (o intersección con el eje x)** es el punto donde la gráfica cruza el eje x.
Para determinar la intersección con el eje x, haga $y = 0$ y resuelva para x.

La **intercepción y (o intersección con el eje y)** es el punto donde la gráfica corta al eje y.
Para determinar la intercepción y, haga $x = 0$ y resuelva para y.

Grafique $2x - 3y = 12$ mediante las intersecciones con el eje x y con el eje y.
Para la intersección con el eje x, haga $y = 0$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 12 \\ 2x - 3(0) &= 12 \\ 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$



Por lo tanto, la intersección con el eje x es $(6, 0)$.
Para la intersección con el eje y, haga $x = 0$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 12 \\ 2(0) - 3y &= 12 \\ -3y &= 12 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

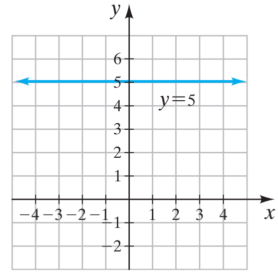
Así que la intersección con el eje y es $(0, -4)$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 3.3 (continuación)

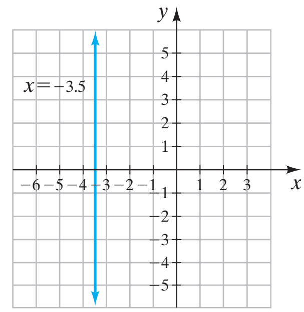
La gráfica de cualquier ecuación de la forma $y = b$ (o función de la forma $f(x) = b$) siempre será una recta horizontal para cualquier número real b. La función $f(x) = b$ se denomina **función constante**.

Grafique $y = 5$ (o $f(x) = 5$).



La gráfica de cualquier ecuación de la forma $x = a$ siempre será una recta vertical para cualquier número real a.

Grafique $x = -3.5$.



Sección 3.4

La **pendiente de una recta** es la razón del cambio vertical (o elevación) al cambio horizontal (o desplazamiento) entre dos puntos cualesquiera.

La pendiente de la recta que pasa por los puntos distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cambio en } y \text{ (cambio vertical)}}{\text{cambio en } x \text{ (cambio horizontal)}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

siempre que $x_1 \neq x_2$.

La pendiente de la recta que pasa por $(-1, 3)$ y $(7, 5)$ es

$$m = \frac{5 - 3}{7 - (-1)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

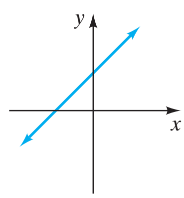
Una recta que sube de izquierda a derecha tiene **pendiente positiva**.

Una recta que baja de izquierda a derecha tiene **pendiente negativa**.

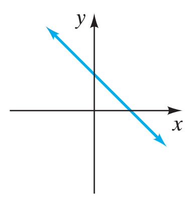
Una recta horizontal tiene **pendiente cero**.

La pendiente de una recta vertical es **indefinida**.

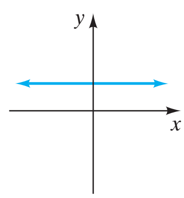
Pendiente positiva



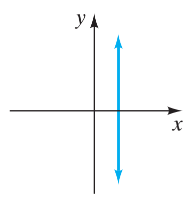
Pendiente negativa



Pendiente cero



Pendiente indefinida

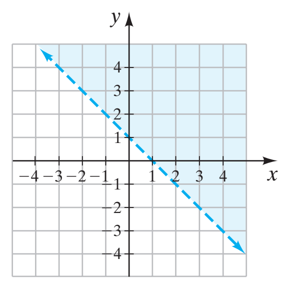


La **forma pendiente intersección de una ecuación lineal** es

$$y = mx + b$$

Donde m es la pendiente de la recta y $(0, b)$ es la intersección con y de la recta.

$$y = 7x - 1, \quad y = -3x + 10$$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 3.5	
La **forma punto pendiente de una ecuación lineal** es $y - y_1 = m(x - x_1)$ donde m es la pendiente de la recta y (x_1, y_1) es un punto de la recta.	Si $m = 9$ y (x_1, y_1) es $(5, 2)$ entonces $y - 2 = 9(x - 5)$
Dos rectas son **paralelas**, si tienen la misma pendiente.	Las gráficas de $y = 2x + 4$ y $y = 2x + 7$ son paralelas, ya que ambas gráficas tienen la misma pendiente de 2, pero diferentes intersecciones con y.
Dos rectas son **perpendiculares**, si sus pendientes son recíprocos negativos. Para cualquier número real $a \neq 0$, su recíproco negativo es $-\frac{1}{a}$.	Las gráficas de $y = 3x - 5$ y $y = -\frac{1}{3}x + 8$ son perpendiculares, ya que una gráfica tiene pendiente de 3 y la otra gráfica tiene una pendiente de $-\frac{1}{3}$. El número $-\frac{1}{3}$ es el recíproco negativo de 3.
Sección 3.6	
Operaciones con funciones	Si $f(x) = x^2 + 2x - 5$ y $g(x) = x - 3$, entonces
Suma de funciones: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + 2x - 5) + (x - 3)$ $= x^2 + 3x - 8$
Diferencia de funciones: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 2x - 5) - (x - 3)$ $= x^2 + x - 2$
Suma de funciones: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $= (x^2 + 2x - 5)(x - 3)$ $= x^3 - x^2 - 11x + 15$
Suma de funciones: $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$	$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 2x - 5}{x - 3},\quad x \neq 3$
Sección 3.7	
Una **desigualdad lineal** resulta cuando el signo de igual de una ecuación lineal se reemplaza con un signo de desigualdad.	$3x - 4y > 1, \quad 2x + 5y \leq -4$
Para graficar una desigualdad lineal con dos variables **1.** Reemplace el símbolo de desigualdad con un signo de igual. **2.** Dibuje la gráfica de la ecuación del paso 1. Si la desigualdad original es $\geq$ o $\leq$, dibuje una línea sólida. Si la desigualdad es $>$ o $<$ dibuje una línea discontinua. **3.** Seleccione cualquier punto que no esté en la recta. Si el punto seleccionado es una solución, sombree la región en el lado de la recta que contiene este punto. Si el punto seleccionado no satisface la desigualdad, sombree la región en el lado de la recta que no contiene este punto.	Grafique $y > -x + 1$. 

Ejercicios de repaso del capítulo 3

[3.1] **1.** Trace las parejas ordenadas en los mismos ejes.

a) $A(5, 3)$ **b)** $B(0, -3)$ **c)** $C\left(5, \frac{1}{2}\right)$ **d)** $D(-4, 2)$ **e)** $E(-6, -1)$ **f)** $F(-2, 0)$

Grafique cada ecuación.

2. $y = \frac{1}{2}x$ **3.** $y = -2x - 1$ **4.** $y = \frac{1}{2}x + 3$ **5.** $y = -\frac{3}{2}x + 1$ **6.** $y = x^2$

7. $y = x^2 - 1$ **8.** $y = |x|$ **9.** $y = |x| - 1$ **10.** $y = x^3$ **11.** $y = x^3 + 4$

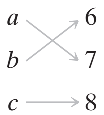
[3.2]

12. Defina lo que es una función.

13. ¿Toda relación es una función? ¿Toda función es una relación? Explique.

Determine si las relaciones siguientes son funciones, explique sus respuestas.

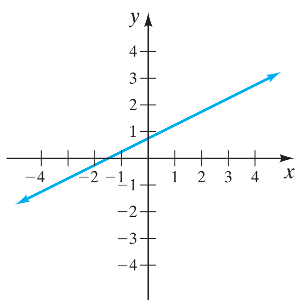
14.



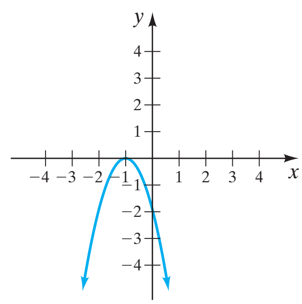
15. $\{(2, 5), (3, -4), (5, -9), (6, -1), (2, -2)\}$

Para los ejercicios del 16 al 19, **a)** *determine si las gráficas siguientes representan funciones;* **b)** *determine el dominio y el rango de cada una.*

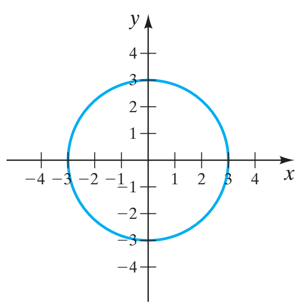
16.



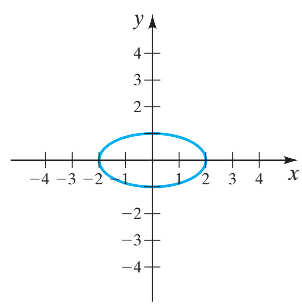
17.



18.



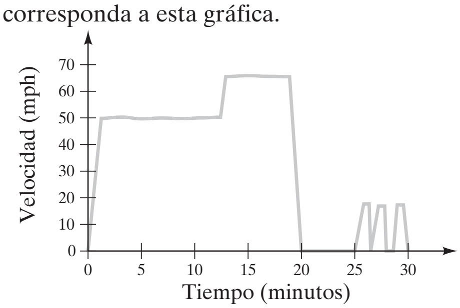
19.



20. Si $f(x) = -x^2 + 3x - 4$, determine
a) $f(2)$ y
b) $f(h)$.

21. Si $g(t) = 2t^3 - 3t^2 + 6$, determine
a) $g(-1)$ y
b) $g(a)$.

22. Velocidad de un automóvil Jane Covillion va por un camino en un automóvil. La gráfica siguiente muestra la velocidad del automóvil como una función del tiempo. Idee una historia que corresponda a esta gráfica.



23. Huerto de manzanos El número de canastas de manzanas, N, producidas por x árboles en un pequeño huerto ($x \leq 100$) está dado por la función $N(x) = 40x - 0.2x^2$. ¿Cuántas canastas de manzanas son producidas por

a) 30 árboles?

b) 50 árboles?

24. Pelota que cae Si una pelota se deja caer desde lo alto de un edificio de 196 pies, su altura con respecto al piso, h, en cualquier tiempo, t, puede encontrarse por medio de la función $h(t) = -16t^2 + 196, 0 \leq t \leq 3.5$. Determine la altura de la pelota en

a) 1 segundo.

b) 3 segundos.

[3.3] *Grafique cada ecuación usando las intersecciones con los ejes.*

25. $3x - 4y = 6$

26. $\frac{1}{3}x = \frac{1}{8}y + 10$

Grafique cada ecuación o función.

27. $f(x) = 4$

28. $x = -2$

29. Producción de rosquillas La utilidad al año, p, de una compañía que se dedica a producir rosquillas puede estimarse por medio de la función $p(x) = 0.1x - 5000$, donde x es el número de rosquillas que se vende al año.

a) Trace una gráfica de utilidades contra rosquillas vendidas hasta 250,000.

b) Estime el número de rosquillas que debe venderse para que la compañía esté en equilibrio.

c) Estime el número de rosquillas vendidas, si la compañía tiene una ganancia de $22,000.

30. Interés Trace una gráfica que ilustre el interés sobre un préstamo de $12,000 por un periodo de un año para diferentes tasas de interés hasta de 20%. Utilice interés = capital • tasa • tiempo.

[3.4] *Determine la pendiente y la intersección con el eje y de la gráfica representada por la ecuación dada.*

31. $y = \frac{1}{2}x - 5$

32. $f(x) = -2x + 3$

33. $3x + 5y = 13$

34. $3x + 4y = 10$

35. $x = -7$

36. $f(x) = 8$

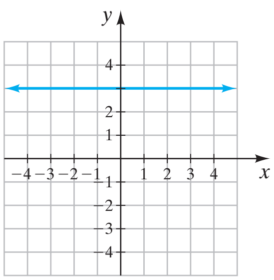
Determine la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos dados.

37. $(2, -5), (6, 7)$

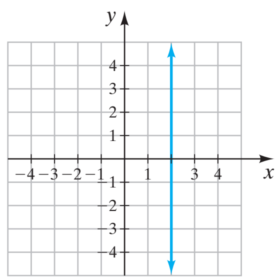
38. $(-2, 3)(4, 1)$

Determine la pendiente de cada recta. Si la pendiente no es definida, indíquelo. Luego escriba la ecuación de la recta.

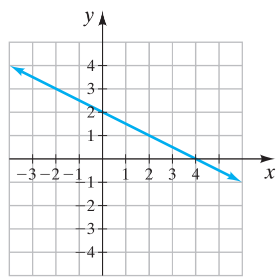
39.



40.



41.



42. Si la gráfica de $y = -2x + 5$ se traslada 4 unidades hacia abajo, determine

a) la pendiente de la gráfica trasladada.

b) la intersección con el eje y de la gráfica trasladada

c) la ecuación de la gráfica trasladada.

43. Si un punto en la gráfica es $(-6, -4)$ y la pendiente es $\frac{2}{3}$, determine la intersección con el eje y de la gráfica.

44. Fiebre tifoidea La tabla siguiente muestra el número de casos reportados de fiebre tifoidea en Estados Unidos para años seleccionados de 1970 a 2000.

a) Trace cada punto y dibuje segmentos de recta de punto a punto.

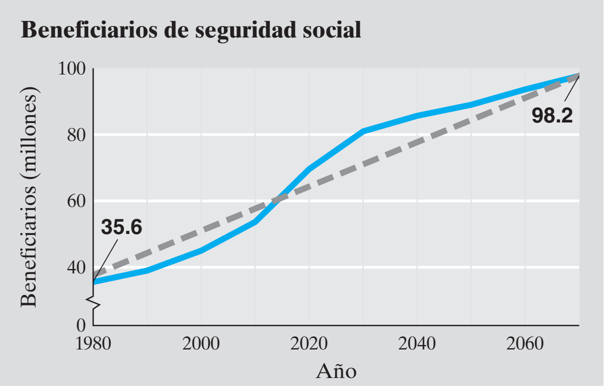
b) Calcule la pendiente de los segmentos de recta.

c) ¿Durante cuál periodo de diez años el número de casos reportados de fiebre tifoidea aumentó más?

Año	Número de casos de fiebre tifoidea reportados
1970	346
1980	510
1990	552
2000	317

Fuente: Departamento de Salud y Servicios de Estados Unidos.

45. **Seguridad social** La gráfica siguiente muestra el número de beneficiarios de seguridad social desde 1980 proyectados hasta 2070. Utilice la forma pendiente intercepción para determinar la función $n(t)$ (representada por la línea recta discontinua) que puede usarse para representar estos datos.



[3.5] *Determine si las dos rectas dadas son paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas.*

46. $2x - 3y = 10$

$y = \frac{2}{3}x - 5$

47. $2x - 3y = 7$

$-3x - 2y = 8$

48. $4x - 2y = 13$

$-2x + 4y = -9$

Determine la ecuación de la recta con las propiedades dadas. Escriba cada respuesta en la forma pendiente intercepción.

49. Pendiente $= \frac{1}{2}$, pasa por $(4, 9)$.

50. Pasa por $(-3, 1)$ y $(4, -6)$.

51. Pasa por $(0, 6)$ y es paralela a la gráfica de $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

52. Pasa por $(2, 8)$ y es paralela a la gráfica cuya ecuación es $5x - 2y = 7$.

53. Pasa por $(-3, 1)$ y es perpendicular a la gráfica cuya ecuación es $y = \frac{3}{5}x + 5$.

54. Pasa por $(4, 5)$ y es perpendicular a la gráfica cuya ecuación es $4x - 2y = 8$.

Se dan dos puntos en l_1 y dos puntos en l_2. Determine si l_1 es paralela a l_2, l_1 es perpendicular a l_2, o ninguna de éstas.

55. l_1: $(5, 3)$ y $(0, -3)$; l_2: $(1, -1)$ y $(2, -2)$

56. l_1: $(3, 2)$ y $(2, 3)$; l_2: $(4, 1)$ y $(1, 4)$

57. l_1: $(7, 3)$ y $(4, 6)$; l_2: $(5, 2)$ y $(6, 3)$

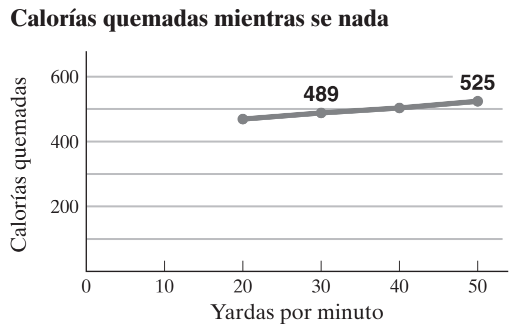
58. l_1: $(-3, 5)$ y $(2, 3)$; l_2: $(-4, -2)$ y $(-1, 2)$

59. **Tarifas de seguros** Las tarifas mensuales por un seguro de vida de \$100,000 del Grupo Financiero General para hombres aumenta de manera casi lineal, a partir de 35 hasta 50 años. La tarifa para un hombre de 35 años es \$10.76 al mes y la tarifa para un hombre de 50 años de edad es \$19.91 al mes. Sea r la tarifa y a la edad de un hombre entre 35 y 50 años de edad.

a) Determine una función lineal $r(a)$ que se ajuste a estos datos.

b) Utilizando la función en la parte **a)**, estime la tarifa mensual para un hombre de 40 años de edad.

60. **Quema de calorías** El número de calorías quemadas en una hora de natación, cuando se nada a una velocidad entre 20 y 50 yardas por minuto, es una función lineal de la velocidad del nadador. Una persona que nada a 30 yardas por minuto quemará alrededor de 489 calorías en una hora. Mientras que nadando a 50 yardas por minuto, una persona quemará alrededor de 525 calorías en una hora. Esta información se muestra en la gráfica siguiente.



Fuente: Health Magazine Web sitio en la web www.health.com

a) Determine una función lineal que pueda usarse para estimar el número de calorías, C, quemadas en una hora cuando una persona nada a r yardas por minuto.

b) Utilice la función determinada en la parte **a)**, para determinar el número de calorías quemadas en una hora, cuando una persona nada a 40 yardas por minuto.

c) Utilice la función determinada en la parte **a)**, para determinar la velocidad a la cual una persona necesita nadar para quemar 600 calorías en una hora.

[3.6] *Dadas $f(x) = x^2 - 3x + 4$ y $g(x) = 2x - 5$, determine lo siguiente.*

61. $(f + g)(x)$

62. $(f + g)(4)$

63. $(g - f)(x)$

64. $(g - f)(-1)$

65. $(f \cdot g)(-1)$

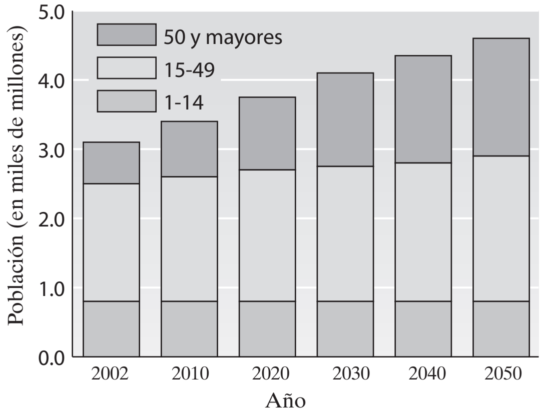
66. $(f \cdot g)(3)$

67. $(f/g)(1)$

68. $(f/g)(2)$

69. Población femenina De acuerdo con el censo de Estados Unidos, se espera que la población femenina crezca a nivel mundial. La gráfica siguiente muestra la población femenina mundial para años seleccionados de 2002 a 2050.

Población global femenina



Fuente: Oficina de censos de Estados Unidos, International Program Center, International Data Base

a) Estime la población mundial femenina proyectada para 2050.

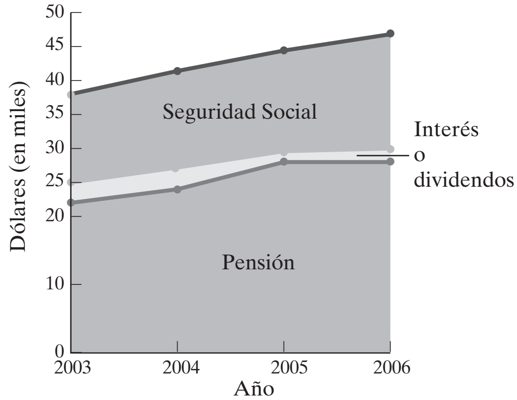
b) Estime el número proyectado de mujeres entre 15 y 49 años de edad en 2050.

c) Estime el número de mujeres que se proyecta que haya para 2010 en el grupo de 50 años y mayores.

d) Estime el porcentaje de aumento proyectado de 2002 a 2010, en el número de mujeres de 50 años y mayores.

70. Monto de jubilación Hace poco, Ginny Jennings se jubiló de su trabajo de tiempo completo. La gráfica siguiente muestra el monto de su jubilación para los años de 2003 a 2006.

Ingreso de retiro de Ginny



a) Estime el monto total de la jubilación de Ginny en 2006.

b) Estime el monto de la pensión de Ginny en 2005.

c) Estime el monto por interés y dividendos de Ginny en 2003.

[3.7] *Grafique cada desigualdad.*

71. $y \geq -5$

72. $x < 4$

73. $y \leq 4x - 3$

74. $y < \frac{1}{3}x - 2$

Examen de práctica del capítulo 3

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección donde se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en **el CD-Rom que acompaña a este libro**. *Revise el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. Grafique $y = -2x + 1$.

2. Grafique $y = \sqrt{x}$.

3. Grafique $y = x^2 - 4$.

4. Grafique $y = |x|$.

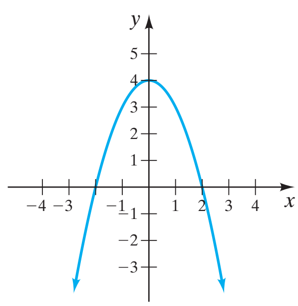
5. Defina *función*.

6. ¿El conjunto siguiente de parejas ordenadas es una función? Explique su respuesta.

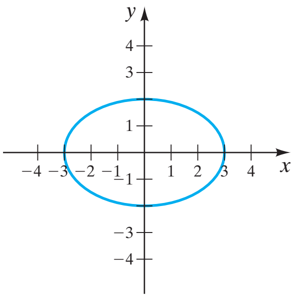
$$\{(3, 1), (-2, 6), (4, 6), (5, 2), (7, 3)\}$$

En los ejercicios 7 y 8, determine si las gráficas siguientes representan funciones. Proporcione el dominio y el rango de la relación o función.

7.



8.



9. Si $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$, determine $f(-2)$.

En los ejercicios 10 y 11, grafique la ecuación usando las intersecciones con los ejes x y y.

10. $-20x + 10y = 40$.

11. $\dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{4} = 1$.

12. Grafique $f(x) = -3$.

13. Grafique $x = 4$.

14. Gráfica de utilidad La utilidad anual, p, para la compañía editorial Zico en las ventas de un libro en particular, puede estimarse por medio de la función $p(x) = 10.2x - 50{,}000$, donde x es el número de libros producidos y vendidos.

a) Trace una gráfica de utilidad contra libros vendidos hasta 30,000 libros.

b) Utilice la función $p(x)$ para estimar el número de libros que debe venderse para que la compañía no gane ni pierda.

c) Utilice la función $p(x)$ para estimar el número de libros que la compañía debe vender para obtener $100,000 de ganancia.

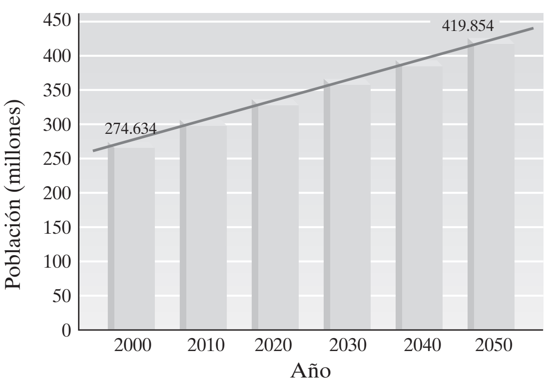
15. Determine la pendiente e intersección con el eje y de la gráfica de la ecuación $4x - 3y = 15$.

16. Escriba la ecuación, en la forma pendiente intercepción, de la recta que pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(4, 5)$.

17. Determine la ecuación, en la forma pendiente intercepción, de la recta que pasa por el punto $(6, -5)$ y es perpendicular a la gráfica de $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

18. Población de Estados Unidos Determine la función representada por la recta roja en la gráfica, que pueda utilizarse para estimar la población proyectada de Estados Unidos, p, de 2000 a 2050. Sea 2000 el año de referencia, de modo que 2000 está representado por $t = 0$.

Proyecciones de población en Estados Unidos para 2000-2050



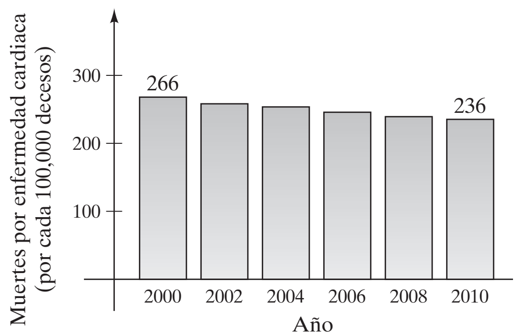
Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, Resumen estadístico de Estados Unidos 2004-2005

19. Determine si las gráficas de las dos ecuaciones son paralelas, perpendiculares o ninguna. Explique su respuesta.

$$2x - 3y = 12$$
$$4x + 10 = 6y$$

20. Enfermedad cardiaca Los decesos por enfermedades cardiacas ha disminuido de forma aproximadamente lineal. La gráfica de barras siguiente indica el número de muertes debidas a enfermedades cardiacas, por cada 100,000 decesos, en años seleccionados proyectados para 2006 a 2010.

Tasa de muertes por enfermedades cardiacas



Fuente: Departamento de Salud y Servicios Humanos de Estados Unidos

a) Sea r el número de muertes debidas a enfermedades cardiacas por cada 100,000 decesos y sea t los años desde 2000. Escriba una función lineal $r(t)$ que pueda utilizarse para aproximar los datos.

b) Por medio de la función de la parte **a)**, determine el índice de muertes debidas a enfermedades cardiacas en 2006.

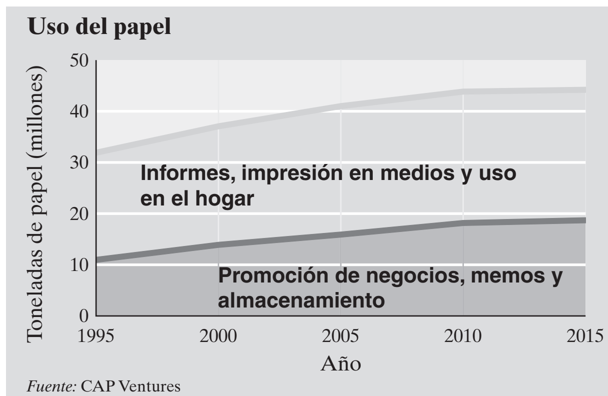
c) Suponiendo que esta tendencia continúe hasta 2020, estime la tasa de muertes debidas a enfermedades cardiacas en 2020.

En los ejercicios del 21 al 23, si $f(x) = 2x^2 - x$ y $g(x) = x - 6$, determine

21. $(f + g)(3)$ **22.** $(f/g)(-1)$

23. $f(a)$

24. Uso de papel La gráfica siguiente muestra el uso de papel en 1995 y el uso de papel proyectado de 1995 a 2015.



a) Estime el número total de toneladas de papel que se usarán en 2010.

b) Estime el número total de toneladas de papel que se usarán en negocios en 2010.

c) Estime el número total de toneladas de papel que se usarán en 2010 en informes, impresión en medios y en el hogar.

25. Grafique $y < 3x - 2$.

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen siguiente y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del texto. Revise las preguntas que haya respondido en forma incorrecta. La sección y objetivo donde se estudia el material está indicado después de la respuesta.

1. Para $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 14\}$, determine

a) $A \cap B$.

b) $A \cup B$.

2. Considere el conjunto $\{-6, -4, \frac{1}{3}, 0, \sqrt{3}, 4.67, \frac{37}{2}, -\sqrt{5}\}$. Liste los elementos del conjunto que están en

a) los números naturales.

b) los números reales.

3. Evalúe $10 - \{3[6 - 4(6^2 \div 4)]\}$.

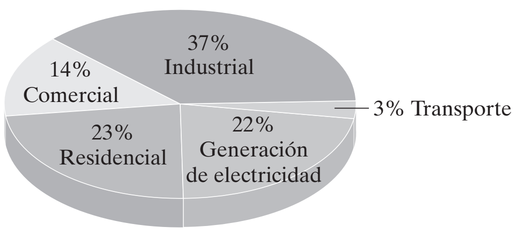
Simplifique.

4. $\left(\dfrac{5x^2}{y^{-3}}\right)^2$

5. $\left(\dfrac{3x^4y^{-2}}{6xy^3}\right)^3$

6. Consumo de gas natural El consumo total de gas natural en 2003 fue 21.8 billones de pies cúbicos (2.18×10^{13}). El diagrama de pastel siguiente muestra el desglose de consumo por sector.

Consumo de gas natural por sector
($2.18\ x\ 10^{13}$ pies cúbicos)



(El total es 99% debido a redondeos)

Fuente: Administración de Información Energética

Responda las preguntas siguientes utilizando la notación científica.

a) ¿Cuál fue la cantidad de consumo de gas natural por el sector comercial en 2003?

b) ¿Cuánto más gas natural consumió el sector industrial que el sector de transporte en 2003?

c) Si se espera que el consumo de gas natural crezca en 10% de 2003 a 2006, ¿cuál será la cantidad de consumo de gas natural en 2006?

En los ejercicios 7 y 8, resuelva las ecuaciones.

7. $2(x + 4) - 5 = -3[x - (2x + 1)]$

8. $\dfrac{4}{5} - \dfrac{x}{3} = 10$

9. Simplifique $7x - \{4 - [2(x - 4)] - 5\}$.

10. Despeje $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ de b_1.

11. Soluciones de peróxido de hidrógeno ¿Cuántos galones de solución de peróxido de hidrógeno al 15% deben mezclarse con 10 galones de una solución al 4% de peróxido de hidrógeno para obtener una solución al 10% de peróxido de hidrógeno?

12. Resuelva la desigualdad $4(x - 4) < 8(2x + 3)$.

13. Resuelva la desigualdad $-1 < 3x - 7 < 11$.

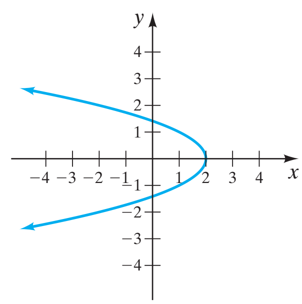
14. Determine el conjunto solución de $|3x + 5| = |2x - 10|$.

15. Determine el conjunto solución de $|2x - 1| \leq 3$.

16. Grafique $y = -\frac{3}{2}x - 4$.

17. a) Determine si la gráfica siguiente representa una función.

b) Determine el dominio y el rango de la gráfica.



18. Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-5, 3)$ y $(4, -1)$.

19. Determine si las gráficas de las dos ecuaciones dadas son paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas.

$$2x - 5y = 8$$
$$5x - 2y = 12$$

20. Si $f(x) = x^2 + 3x - 2$ y $g(x) = 4x - 9$, determine $(f + g)(x)$.

Sistemas de ecuaciones y desigualdades

4

OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En este capítulo resolvemos sistemas de ecuaciones lineales mediante los métodos siguientes: graficación, sustitución, método de la suma, usando matrices, determinantes y la regla de Cramer. También resolvemos sistemas de *desigualdades* lineales. A lo largo del capítulo, en especial en la sección 4.3, hay muchas aplicaciones del mundo real. El capítulo trata temas esenciales usados en negocios para considerar las relaciones entre variables implicadas en las operaciones diarias de una empresa.

CON FRECUENCIA LOS SISTEMAS DE ECUACIONES se utilizan para resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el ejemplo 6 de la página 255 utilizamos un sistema de ecuaciones para determinar cuánto de dos soluciones debe mezclar un químico para obtener una tercera solución con la composición química deseada.

4.1 Resolución de sistemas de ecuaciones con dos variables

1 Resolver gráficamente sistemas de ecuaciones lineales.

2 Resolver sistemas de ecuaciones lineales por sustitución.

3 Resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de la suma.

En ocasiones es necesario determinar una solución común a dos o más ecuaciones lineales. Nos referimos a estas ecuaciones como un **sistema de ecuaciones lineales** (también se les denomina ecuaciones lineales simultáneas). Por ejemplo,

$$\left.\begin{aligned}(1)\ y &= x + 5\\(2)\ y &= 2x + 4\end{aligned}\right\}\quad \textit{Sistema de ecuaciones lineales.}$$

Una **solución de un sistema de ecuaciones** es un par ordenado o pares ordenados que satisfacen todas las ecuaciones del sistema. La única solución del sistema anterior es $(1, 6)$.

Verificación en la ecuación (1)	Verificación en la ecuación (2)
$(1, 6)$	$(1, 6)$
$y = x + 5$	$y = 2x + 4$
$6 \stackrel{?}{=} 1 + 5$	$6 \stackrel{?}{=} 2(1) + 4$
$6 = 6$ *Verdadero*	$6 = 6$ *Verdadero*

El par ordenado $(1, 6)$ satisface *ambas* ecuaciones y es la solución del sistema de ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones puede tener más de dos ecuaciones. Si un sistema consta de tres ecuaciones con tres variables, como x, y y z, la solución será una **terna ordenada** de la forma (x, y, z). Si la terna ordenada (x, y, z) es una solución del sistema, debe satisfacer las tres ecuaciones del sistema. Los sistemas con tres ecuaciones y tres incógnitas se estudian en la sección 4.2. Los sistemas de ecuaciones pueden tener más de tres variables, pero no los analizaremos en este libro.

1 Resolver gráficamente sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver de manera gráfica un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, grafique ambas ecuaciones del sistema en los mismos ejes. La solución del sistema será el par o pares ordenados comunes a ambas rectas, o el punto de intersección de las rectas del sistema.

Cuando graficamos dos rectas, hay tres situaciones posibles, como se ilustra en la **figura 4.1** siguiente. En la **figura 4.1a**, las rectas 1 y 2 se intersecan exactamente en un punto. Este sistema de ecuaciones tiene *exactamente una solución*. Éste es un ejemplo de un sistema de ecuaciones *consistente*. Un **sistema consistente de ecuaciones** es un sistema de ecuaciones que tiene una solución.

Las rectas 1 y 2 de la **figura 4.1b** son diferentes pero paralelas. Las rectas no se intersecan, y este sistema de ecuaciones *no tiene solución*. Éste es un ejemplo de un sistema *inconsistente* de ecuaciones. Un **sistema inconsistente de ecuaciones** es un sistema de ecuaciones que no tiene solución.

En la **figura 4.1c**, las rectas 1 y 2 en realidad son la misma. En este caso, todo punto de la recta satisface ambas ecuaciones y es una solución del sistema de ecuaciones. Este sistema tiene *un número infinito de soluciones*. Éste es un ejemplo de un sistema *dependiente* de ecuaciones. En un sistema dependiente de ecuaciones lineales, ambas ecuaciones representan la misma recta. Un **sistema dependiente de ecuaciones** es un sistema de ecuaciones que tiene un número infinito de soluciones. *Observe que un sistema dependiente también es un sistema consistente*, *ya que tiene soluciones*.

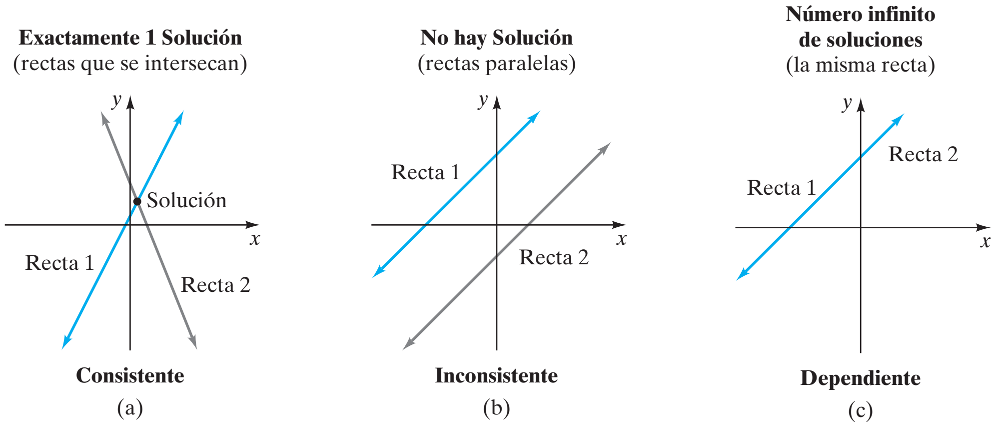


FIGURA 4.1

Podemos determinar si un sistema de ecuaciones lineales es consistente, inconsistente o dependiente, escribiendo cada ecuación en forma pendiente ordenada al origen y comparando las pendientes y las intersecciones con el eje y. Si las pendientes de las rectas son diferentes (**figura 4.1a**), el sistema es consistente. Si las pendientes son las mismas pero las ordenadas al origen y son diferentes (**figura 4.1b**), el sistema es inconsistente, y si las dos pendientes y las dos ordenadas al origen y son las mismas (**figura 4.1c**), el sistema es dependiente.

EJEMPLO 1 ▸ Sin graficar las ecuaciones, determine si el siguiente sistema de ecuaciones es consistente, inconsistente o dependiente.

$$3x - 4y = 8$$
$$-9x + 12y = -24$$

Solución Escriba cada ecuación en la forma pendiente intercepción.

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 8 \\ -4y &= -3x + 8 \\ y &= \frac{3}{4}x - 2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -9x + 12y &= -24 \\ 12y &= 9x - 24 \\ y &= \frac{3}{4}x - 2 \end{aligned}$$

Como ambas ecuaciones tienen la misma pendiente, $\frac{3}{4}$, y la misma ordenada al origen y $(0, -2)$, las ecuaciones representan a la misma recta. Por lo tanto, el sistema es dependiente y existe un número infinito de soluciones.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 19**

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva en forma gráfica el siguiente sistema de ecuaciones.

$$y = x + 2$$
$$y = -x + 4$$

Solución Grafique ambas ecuaciones en los mismos ejes (**figura 4.2**). La solución es el punto de intersección de las dos rectas (1, 3).

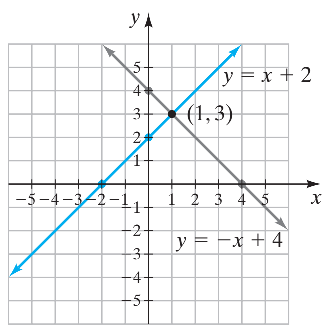


FIGURA 4.2

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 25**

El sistema de ecuaciones del ejemplo 2 podría presentarse en notación de funciones como

$$f(x) = x + 2$$
$$g(x) = -x + 4$$

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

En el recuadro Cómo utilizar su calculadora graficadora de la página 181, sección 3.3, analizamos el uso de una calculadora graficadora para determinar la intersección de dos gráficas. Ahora utilizamos la información de ese recuadro para resolver un sistema de ecuaciones.

Ejemplo Utilice su calculadora graficadora para resolver el sistema de ecuaciones. Redondee la solución al centésimo más cercano.

$$-2.6x - 5.2y = -15.3$$
$$-8.6x + 3.7y = -12.5$$

Solución Primero despeje a y de cada ecuación.

$$-2.6x - 5.2y = -15.3 \qquad\qquad -8.6x + 3.7y = -12.5$$
$$-2.6x = 5.2y - 15.3 \qquad\qquad 3.7y = 8.6x - 12.5$$
$$-2.6x + 15.3 = 5.2y \qquad\qquad y = \frac{8.6x - 12.5}{3.7}$$
$$\frac{-2.6x + 15.3}{5.2} = y$$

Ahora, haga $Y_1 = \dfrac{-2.6x + 15.3}{5.2}$ y $Y_2 = \dfrac{8.6x - 12.5}{3.7}$. Las gráficas de Y_1 y Y_2 se ilustran en la **figura 4.3**.

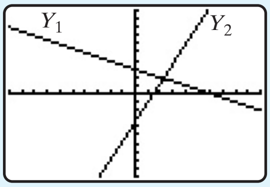


FIGURA 4.3

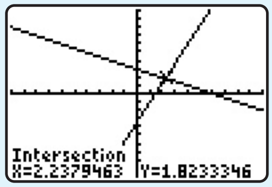


FIGURA 4.4

La **figura 4.4** muestra que la intersección de las dos gráficas ocurre en (2.24, 1.82), redondeado al centésimo más cercano.

EJERCICIOS

Utilice su calculadora graficadora para determinar la solución de cada sistema. Redondee sus respuestas al centésimo más cercano.

1. $2x + 3y = 8$
$-3x + 4y = -5$

2. $5x - 6y = 9$
$-3x + 5y = 8$

3. $3.4x - 5.6y = 10.2$
$5.8x + 1.4y = -33.6$

4. $-2.3x + 7.9y = 88.3$
$-5.3x - 2.7y = -16.5$

2 Resolver sistemas de ecuaciones lineales por sustitución

Con frecuencia es difícil determinar una solución exacta del sistema de ecuaciones a partir de su gráfica; una calculadora graficadora podría no dar una respuesta exacta. Cuando se requiere una respuesta exacta, el sistema debe resolverse de manera algebraica, ya sea por el método de sustitución o por el de suma (eliminación) de ecuaciones. Primero analizamos el **método de sustitución**.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por sustitución

1. Despeje una variable en cualquier ecuación. (Si es posible, despeje una variable con un coeficiente numérico igual a 1 para no trabajar con fracciones).
2. Sustituya la expresión hallada para la variable del paso 1 *en la otra ecuación*. Con esto obtendrá una ecuación con una sola variable.
3. Resuelva la ecuación obtenida en el paso 2 para determinar el valor de esta variable.
4. Sustituya el valor encontrado en el paso 3 en la ecuación del paso 1. Resuelva la ecuación para determinar la variable restante.
5. Compruebe su solución en todas las ecuaciones del sistema.

EJEMPLO 3 ▸ Resuelva el sistema de ecuaciones mediante sustitución.

$$y = 3x - 5$$
$$y = -4x + 9$$

Solución Como en ambas ya está despejada y, podemos sustituir $3x - 5$ por y en la segunda ecuación y después despejar la variable restante, x.

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= -4x + 9 \\ 7x - 5 &= 9 \\ 7x &= 14 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Ahora determinamos y sustituyendo $x = 2$ en cualquiera de las ecuaciones originales. Utilizaremos la primera ecuación.

$$\begin{aligned} y &= 3x - 5 \\ y &= 3(2) - 5 \\ y &= 6 - 5 = 1 \end{aligned}$$

Una verificación mostrará que la solución del sistema de ecuaciones es (2, 1).

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 39**

EJEMPLO 4 ▸ Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución.

$$2x + y = 11$$
$$x + 3y = 18$$

Solución Comience por despejar una de las variables en cualquiera de las ecuaciones. Puede despejar cualquiera de las variables; sin embargo, si despeja una variable con coeficiente numérico 1, puede evitar trabajar con fracciones. En este sistema, el término y en $2x + y = 11$ y el término x en $x + 3y = 18$ tienen coeficientes numéricos 1.

Despejamos y en $2x + y = 11$.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ y &= -2x + 11 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $-2x + 11$ en vez de y en la *otra ecuación*, $x + 3y = 18$, y despejamos la variable restante, x.

$$\begin{aligned} x + 3y &= 18 \\ x + 3(\overbrace{-2x + 11}) &= 18 \qquad \textit{Sustituya } -2x + 11 \textit{ por } y. \\ x - 6x + 33 &= 18 \\ -5x + 33 &= 18 \\ -5x &= -15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Por último, sustituimos $x = 3$ en la ecuación $y = -2x + 11$ y despejamos y.

$$\begin{aligned} y &= -2x + 11 \\ y &= -2(3) + 11 = 5 \end{aligned}$$

La solución es el par ordenado (3, 5). Compruebe esta solución.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 41**

Si, al resolver un sistema de ecuaciones ya sea por sustitución o por el método de suma, llega a una ecuación falsa, como $5 = 6$ o $0 = 3$, el sistema es inconsistente y no tiene solución. Si obtiene una ecuación que siempre es verdadera, como $6 = 6$ o $0 = 0$, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

Sugerencia útil

Es frecuente que los estudiantes obtengan bien el valor de una de las variables y se olviden de obtener el valor de la otra. Recuerde que una solución debe tener un valor numérico para cada variable del sistema.

3 Resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de la suma

Un tercer método, y con frecuencia el más sencillo, para resolver un sistema de ecuaciones es el **método de la suma** (o de eliminación). El objetivo de este proceso es obtener dos ecuaciones cuya suma sea una ecuación con una sola variable. Tenga presente que su meta inmediata es obtener una ecuación con una sola incógnita.

EJEMPLO 5 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones con el método de la suma.

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 3 \\ 3x - 5y &= 17 \end{aligned}$$

Solución Observe que una ecuación tiene $+5y$ y la otra tiene $-5y$. Sumando las ecuaciones podemos eliminar la variable y y obtener una ecuación con una sola incógnita, x.

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 3 \\ 3x - 5y &= 17 \\ \hline 5x \qquad &= 20 \end{aligned}$$

Ahora obtenemos el valor para la variable que queda, x.

$$\frac{5x}{5} = \frac{20}{5}$$
$$x = 4$$

Por último, despejamos y sustituyendo 2 en vez de x en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 3 \\ 2(4) + 5y &= 3 \\ 8 + 5y &= 3 \\ 5y &= -5 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Una comprobación mostrará que la solución es $(4, -1)$.

Ahora resuelva el ejercicio 53

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de la suma (o eliminación)

1. En caso necesario, reescriba cada ecuación en la forma general, es decir, de modo que los términos con variables queden del lado izquierdo del signo igual y la constante del lado derecho del signo igual.
2. Si es necesario, multiplique una o ambas ecuaciones por una constante (o constantes) para que al sumar las ecuaciones, la suma contenga sólo una variable.
3. Sume los lados respectivos de las ecuaciones. Con esto se obtiene una sola ecuación con una variable.
4. Despeje la variable en la ecuación obtenida en el paso 3.
5. Sustituya el valor determinado en el paso 4 en cualquiera de las ecuaciones originales. Resuelva esa ecuación para determinar el valor de la variable restante.
6. Compruebe su solución en todas las ecuaciones en el sistema.

En el paso 2 del procedimiento, indicamos que puede ser necesario multiplicar ambos lados de una ecuación por una constante. Para evitar confusión, numeraremos nuestras ecuaciones mediante paréntesis, como (*ec.* 1) o (*ec.* 2).

En el ejemplo 6, resolveremos el mismo sistema resuelto en el ejemplo 4, pero esta vez usaremos el método de la suma.

EJEMPLO 6 ▸ Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de la suma.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \quad (ec.\ 1) \\ x + 3y &= 18 \quad (ec.\ 2) \end{aligned}$$

Solución El objetivo del proceso de suma es obtener dos ecuaciones cuya suma sea una ecuación con una sola variable. Para eliminar la variable x, multiplicamos la (*ec.* 2) por -2 y sumamos las dos ecuaciones.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 && (ec.\ 1) \\ -2x - 6y &= -36 && (ec.\ 2)\ \text{Multiplicada por } -2 \end{aligned}$$

Ahora sumamos,

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ -2x - 6y &= -36 \\ \hline -5y &= -25 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Ahora despejamos x sustituyendo 5 en lugar de y en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ 2x + 5 &= 11 && \text{Sustituir 5 en lugar de } y. \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

La solución es (3, 5). Observe que podríamos haber eliminado la variable y multiplicando la (*ec.* 1) por -3 y después sumando.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 61**

A veces ambas ecuaciones deben multiplicarse por números diferentes para eliminar una de las variables. El ejemplo 7 ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 7 ▸ Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de la suma.

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 7 \quad (ec.\ 1) \\ 3x - 7y &= -3 \quad (ec.\ 2) \end{aligned}$$

Solución Podemos eliminar la variable x multiplicando la (*ec.* 1) por -3 y la (*ec.* 2) por 4.

$$\begin{aligned} -12x - 9y &= -21 && (ec.\ 1)\ \text{Multiplicada por } -3 \\ 12x - 28y &= -12 && (ec.\ 2)\ \text{Multiplicada por } 4 \\ \hline -37y &= -33 && \text{Suma de las ecuaciones.} \\ y &= \frac{33}{37} \end{aligned}$$

Ahora podemos determinar x sustituyendo $\frac{33}{37}$ en lugar de y en una de las ecuaciones originales y resolviendo para x. Si usted realiza esto, verá que, aunque puede hacerlo, resulta ser complicado. Un método más sencillo para obtener el valor de x es regresar a las ecuaciones originales y eliminar la variable y.

$$\begin{aligned} 28x + 21y &= 49 && (ec.\ 1)\ \text{Multiplicada por } 7 \\ 9x - 21y &= -9 && (ec.\ 2)\ \text{Multiplicada por } 3 \\ \hline 37x \qquad &= 40 && \text{Suma de las ecuaciones.} \\ x &= \frac{40}{37} \end{aligned}$$

La solución es $\left(\frac{40}{37}, \frac{33}{37}\right)$.

Ahora resuelva el ejercicio 67

En el ejemplo 7, podría obtenerse la misma solución multiplicando la (*ec.* 1) por 3 y la (*ec.* 2) por −4 y después sumando. Inténtelo ahora y verá.

EJEMPLO 8 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente utilizando el método de la suma.

$$2x + y = 11 \quad (ec.\ 1)$$
$$\frac{1}{18}x + \frac{1}{6}y = 1 \quad (ec.\ 2)$$

Solución Cuando un sistema de ecuaciones tiene fracciones o números decimales, por lo común es mejor *quitar*, o eliminar, las fracciones o decimales. En la (*ec.* 2), si multiplicamos ambos lados de la ecuación por 18 obtenemos

$$18\left(\frac{1}{18}x + \frac{1}{6}y\right) = 18(1)$$
$$18\left(\frac{1}{18}x\right) + 18\left(\frac{1}{6}y\right) = 18(1)$$
$$x + 3y = 18 \quad (ec.\ 3)$$

Ahora, el sistema de ecuaciones se ha simplificado a

$$2x + y = 11 \quad (ec.\ 1)$$
$$x + 3y = 18 \quad (ec.\ 3)$$

Éste es el mismo sistema de ecuaciones que resolvimos en el ejemplo 6. Así, la solución para este sistema es (3, 5), el mismo que se obtuvo en el ejemplo 6.

Ahora resuelva el ejercicio 51

EJEMPLO 9 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente mediante el método de la suma.

$$0.2x + 0.1y = 1.1 \quad (ec.\ 1)$$
$$x + 3y = 18 \quad (ec.\ 2)$$

Solución Cuando un sistema de ecuaciones tiene números decimales, por lo general es mejor *quitar* o eliminar los números decimales. En la (*ec.* 1), si multiplicamos ambos lados de la ecuación por 10 obtenemos

$$10(0.2x) + 10(0.1y) = 10(1.1)$$
$$2x + y = 11 \quad (ec.\ 3)$$

Ahora, el sistema de ecuaciones se ha simplificado a

$$2x + y = 11 \quad (ec.\ 3)$$
$$x + 3y = 18 \quad (ec.\ 2)$$

Éste es el mismo sistema de ecuaciones que resolvimos en el ejemplo 6. Así que la solución es (3, 5), el mismo que se obtuvo en el ejemplo 6.

Ahora resuelva el ejercicio 69

EJEMPLO 10 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por el método de la suma.

$$x - 3y = 4 \quad (ec.\ 1)$$
$$-2x + 6y = 1 \quad (ec.\ 2)$$

Solución Comenzamos multiplicando (*ec.* 1) por 2.

$$\begin{array}{rll} 2x - 6y = 8 & (ec.\ 1) & \text{Multiplicada por 2} \\ -2x + 6y = 1 & (ec.\ 2) & \\ \hline 0 = 9 & \text{Falso} & \end{array}$$

Como $0 = 9$ *es una proposición falsa, este sistema no tiene solución. El sistema es inconsistente y las gráficas de estas ecuaciones son rectas paralelas.*

Ahora resuelva el ejercicio 59

EJEMPLO 11 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente utilizando el método de la suma.

$$x - \frac{1}{2}y = 2$$
$$y = 2x - 4$$

Solución Primero alineamos los términos x y y del lado izquierdo de la ecuación.

$$\begin{array}{rl} x - \frac{1}{2}y = 2 & (ec.\ 1) \\ -2x + y = -4 & (ec.\ 2) \end{array}$$

Ahora procedemos como en los ejemplos anteriores.

$$\begin{array}{rll} 2x - y = 4 & (ec.\ 1) & \text{Multiplicada por 2} \\ -2x + y = -4 & (ec.\ 2) & \\ \hline 0 = 0 & \text{Verdadero} & \end{array}$$

Como $0 = 0$ *es verdadero, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones. Ambas ecuaciones representan la misma recta.* Observe que si multiplica ambos lados de la (*ec.* 1) por 2 obtendrá la (*ec.* 2).

Ahora resuelva el ejercicio 63

Hemos ilustrado tres métodos que pueden utilizarse para resolver un sistema de ecuaciones lineales; graficación, sustitución y el método de la suma. Cuando le den un sistema de ecuaciones, ¿cuál método debe utilizar para resolver el sistema? Cuando necesite una solución exacta no es conveniente que utilice la graficación. De los dos métodos algebraicos, el método de la suma puede ser el más sencillo de utilizar si no hay coeficientes numéricos 1 en el sistema. Si una o más de las variables tienen un coeficiente igual a 1, puede utilizar cualquier método. En la sección 4.4, presentaremos un cuarto método, con matrices; y un quinto método, con determinantes, en la sección 4.5.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una solución para un sistema de ecuaciones lineales?
2. ¿Cómo se llama a la solución para un sistema de ecuaciones lineales con tres variables?
3. ¿Qué es un sistema dependiente de ecuaciones?
4. ¿Qué es un sistema inconsistente de ecuaciones?
5. ¿Qué es un sistema consistente de ecuaciones?
6. Explique cómo determinar, de manera gráfica, la solución de un sistema de ecuaciones.
7. Explique cómo puede determinar, sin graficar o resolver, si el sistema de dos ecuaciones lineales es consistente, inconsistente o dependiente.
8. Cuando resuelve un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de la suma (o eliminación), ¿cuál es el objetivo del proceso?
9. Cuando resuelve un sistema lineal por suma, ¿cómo puede decidir si el sistema es dependiente?
10. Cuando resuelve un sistema lineal por suma, ¿cómo puede decidir si el sistema es inconsistente?

Práctica de habilidades

Determine cuáles, si los hay, de los pares ordenados o ternas ordenadas satisfacen el sistema de ecuaciones lineales.

11. $y = 2x + 4$
$y = 2x - 1$
a) $(0, 4)$
b) $(3, 10)$

12. $3x - 5y = 12$
$y = \frac{3}{4}x - 3$
a) $(4, 0)$ **b)** $(7, 2)$

13. $x + y = 25$
$0.25x + 0.45y = 7.50$
a) $(5, 20)$
b) $(18.75, 6.25)$

14. $y = \frac{x}{3} - \frac{7}{3}$
$5x - 35 = 15y$
a) $(1, -2)$
b) $(7, 0)$

15. $x + 2y - z = -5$
$2x - y + 2z = 8$
$3x + 3y + 4z = 5$
a) $(3, 1, -2)$
b) $(1, -2, 2)$

16. $4x + y - 3z = 1$
$2x - 2y + 6z = 11$
$-6x + 3y + 12z = -4$
a) $(2, -1, -2)$
b) $\left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$

Escriba cada ecuación en forma pendiente ordenada al origen. Sin graficar las ecuaciones, diga si el sistema de ecuaciones es consistente, inconsistente o dependiente. También indique si el sistema tiene exactamente una solución, no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

17. $-7x + 3y = 1$
$3y + 12 = -6x$

18. $x - \frac{1}{2}y = 4$
$2x - y = 7$

19. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
$4x + 3y = 12$

20. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
$2x - 3y = 12$

21. $3x - 3y = 9$
$2x - 2y = -4$

22. $2x = 3y + 4$
$6x - 9y = 12$

23. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
$3x - 2y = -\frac{5}{2}$

24. $x - y = 3$
$\frac{1}{4}x - 2y = -6$

Determine de forma gráfica la solución de cada sistema de ecuaciones. Si el sistema es inconsistente o dependiente, dígalo.

25. $y = x + 5$
$y = -x + 3$

26. $y = 2x + 8$
$y = -3x - 12$

27. $y = 4x - 1$
$3y = 12x + 9$

28. $x + y = 1$
$3x - y = -5$

29. $2x + 3y = 6$
$4x = -6y + 12$

30. $y = -2x - 1$
$x + 2y = 4$

31. $5x + 3y = 13$
$x = 2$

32. $2x - 5y = 10$
$y = \frac{2}{5}x - 2$

33. $y = -5x + 5$
$y = 2x - 2$

34. $4x - y = 9$
$x - 3y = 16$

35. $x - \frac{1}{2}y = -2$
$2y = 4x - 6$

36. $y = -\frac{1}{3}x - 1$
$3y = 4x - 18$

Determine la solución de cada sistema de ecuaciones por sustitución.

37. $x + 3y = -1$
$y = x + 1$

38. $3x - 2y = -7$
$y = 2x + 6$

39. $x = 2y + 3$
$y = x$

40. $y = 3x - 16$
$x = y$

41. $a + 3b = 5$
$2a - b = 3$

42. $m + 2n = 4$
$m + \frac{1}{2}n = 4$

43. $5x + 6y = 6.7$
$3x - 2y = 0.1$

44. $x = 0.5y + 1.7$
$10x - y = 1$

45. $a - \frac{1}{2}b = 2$
$b = 2a - 4$

46. $x + 3y = -2$
$y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

47. $5x - 2y = -7$
$y = \frac{5}{2}x + 1$

48. $y = \frac{2}{3}x - 1$
$2x - 3y = 5$

49. $5x - 4y = -7$
$x - \frac{3}{5}y = -2$

50. $6s + 3t = 4$
$s = \frac{1}{2}t$

51. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 2$
$\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y = 6$

52. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 3$
$\frac{1}{5}x + \frac{1}{8}y = 1$

Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando el método de la suma.

53. $x + y = 9$
$x - y = -3$

54. $-x + y = 4$
$x - 2y = 6$

55. $4x - 3y = 1$
$5x + 3y = -10$

56. $2x - 5y = 6$
$-4x + 10y = -1$

57. $10m - 2n = 6$
$-5m + n = -8$

58. $4r - 3s = 2$
$2r + s = 6$

59. $2c - 5d = 1$
$-4c + 10d = 6$

60. $2v - 3w = 8$
$3v - 6w = 1$

61. $7p - 3q = 4$
$2p + 5q = 7$

62. $5s - 3t = 7$
$t = s + 1$

63. $5a - 10b = 15$
$a = 2b + 3$

64. $2x - 7y = 3$
$-5x + 3y = 7$

65. $2x - y = 8$
$3x + y = 6$

66. $5x + 4y = 6$
$2x = -5y - 1$

67. $3x - 4y = 5$
$2x = 5y - 3$

68. $4x + 5y = 3$
$2x - 3y = 4$

69. $0.2x - 0.5y = -0.4$
$-0.3x + 0.4y = -0.1$

70. $0.15x - 0.40y = 0.65$
$0.60x + 0.25y = -1.1$

71. $2.1m - 0.6n = 8.4$
$-1.5m - 0.3n = -6.0$

72. $-0.25x + 0.10y = 1.05$
$-0.40x - 0.625y = -0.675$

73. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{9}y = \frac{2}{3}$

74. $\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 4$
$\frac{2}{3}x - y = \frac{8}{3}$

75. $\frac{1}{3}x = 4 - \frac{1}{4}y$
$3x = 4y$

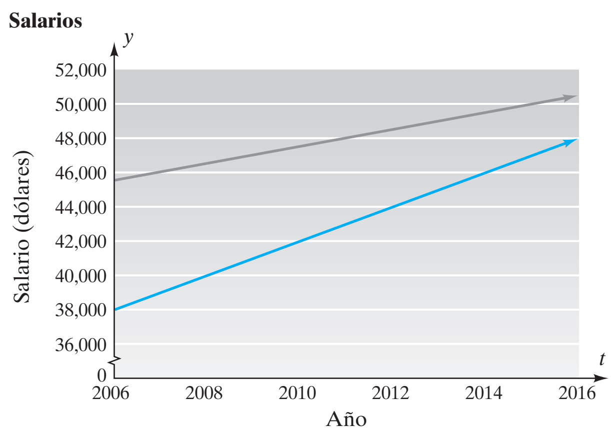
76. $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{1}{2}y$
$x - 3y = \frac{1}{3}$

Resolución de problemas

77. **a)** Escriba un sistema de ecuaciones que sería más fácil de resolver por sustitución.
b) Explique por qué la sustitución sería el método más fácil de usar.
c) Por sustitución resuelva el sistema.

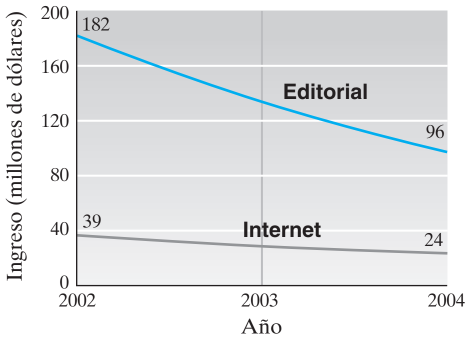
78. **a)** Escriba un sistema de ecuaciones que sería más fácil de resolver por el método de suma.
b) Explique por qué el método de la suma sería el método más fácil de usar.
c) Resuelva el sistema por el método de la suma.

79. **Salarios** En enero 2006, Mary Jones inició un trabajo nuevo con un salario anual de \$38,000. Su jefe aceptó incrementar su salario en \$1000 cada enero de los años por venir. Su salario está determinado mediante la ecuación $y = 1000t + 38{,}000$, donde t es el número de años desde 2006. (Vea la línea roja en la gráfica). También en enero de 2006, Wynn Nguyen inició un nuevo empleo con un salario anual de \$45,500. Su jefe convino en aumentar su salario en \$500 cada enero en los años siguientes. Su salario está determinado mediante la ecuación $y = 45{,}500 + 500t$, donde t es el número de años desde 2006. (Vea la línea gris en la gráfica). Resuelva el sistema de ecuaciones para determinar el año en que ambos salarios serán iguales. ¿Cuál será el salario en ese año?



80. **Ingresos de Martha Stewart** La gráfica de la parte superior de la página siguiente muestra el ingreso, en millones de dólares, de las ventas editoriales y de Internet en la compañía Martha Stewart Living Omnimedia para 2002 a 2004.

Ventas de Martha Stewart



Fuente: CSI, Martha Stewart Living Omnimedia Company, *USA Today (3/4/2005)*

La gráfica muestra que las ventas editoriales y las ventas por Internet han descendido aproximadamente en forma lineal. El ingreso, en millones de dólares por ventas editoriales (línea roja) puede aproximarse por $p(t) = -43t + 182$ y las ventas por Internet (línea gris) pueden aproximarse mediante la función $I(t) = -7.5t + 39$, donde t es el número de años desde 2002. Suponiendo que esta tendencia continúe, resuelva el sistema de ecuaciones para determinar el año en que el ingreso por ventas editoriales y ventas por Internet sean iguales. ¿Cuál será el ingreso en ese año?

81. Explique cómo puede decir por medio de observación que el sistema siguiente es dependiente.

$$2x + 3y = 1$$
$$4x + 6y = 2$$

82. Explique cómo puede decir por medio de observación que el sistema siguiente es inconsistente.

$$-x + 3y = 5$$
$$2x - 6y = -13$$

83. Las soluciones del sistema de ecuaciones lineales incluyen a $(-4, 3)$ y $(-6, 11)$.

a) ¿Cuántas soluciones más tiene el sistema? Explique.

b) Determine la pendiente de la recta que contiene a $(-4, 3)$ y $(-6, 11)$. Obtenga una ecuación de la recta que contenga estos puntos. Luego determine la intersección con el eje y.

c) ¿Esta recta representa una función?

84. Las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales incluyen a $(-5, 1)$ y $(-5, -4)$.

a) ¿Cuántas soluciones más tiene el sistema? Explique.

b) Determine la pendiente de la recta que contiene a $(-5, 1)$ y $(-5, -4)$. Obtenga una ecuación de la recta que contenga estos puntos. ¿Esta gráfica tiene una intersección con el eje y? Explique.

c) ¿Esta recta representa una función?

85. Construya un sistema de ecuaciones que sea dependiente. Explique cómo creó su sistema.

86. Construya un sistema de ecuaciones que sea inconsistente. Explique cómo creó su sistema.

En los ejercicios 87 y 88, **a)** *cree un sistema de ecuaciones lineales que tenga la solución indicada y* **b)** *explique cómo determinó su solución.*

87. $(2, 5)$

88. $(-3, 4)$

89. La solución para el siguiente sistema de ecuaciones es $(2, -3)$. Determine A y B.

$$Ax + 4y = -8$$
$$3x - By = 21$$

90. La solución para el siguiente sistema de ecuaciones es $(-5, 3)$. Determine A y B.

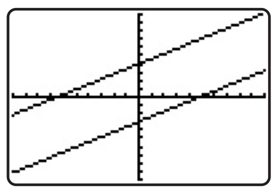
$$3x + Ay = -3$$
$$Bx - 2y = -16$$

91. Si $(2, 6)$ y $(-1, -6)$ son dos soluciones de $f(x) = mx + b$, determine m y b.

92. Si $(3, -5)$ y $(-2, 10)$ son dos soluciones de $f(x) = mx + b$, determine m y b.

93. Suponga que grafica un sistema de dos ecuaciones lineales en su calculadora graficadora, pero sólo una recta se ve en la ventana. ¿Cuáles son dos posibles explicaciones para esto?

94. Suponga que grafica un sistema de ecuaciones lineales en su calculadora graficadora y obtiene lo siguiente.



a) Observando la ventana, ¿puede asegurar que este sistema es inconsistente? Explique.

b) ¿Qué puede hacer en su calculadora graficadora para determinar si el sistema es inconsistente?

Retos

Resuelva cada sistema de ecuaciones.

95. $$\frac{x + 2}{2} - \frac{y + 4}{3} = 4$$
$$\frac{x + y}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x - y}{3}$$

96. $$\frac{5x}{2} + 3y = \frac{9}{2} + y$$
$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 6x + 12$$

Resuelva cada sistema de ecuaciones. (*Sugerencia:* $\frac{3}{a} = 3 \cdot \frac{1}{a} = 3x$ *si* $x = \frac{1}{a}$.)

97. $$\frac{3}{a} + \frac{4}{b} = -1$$
$$\frac{1}{a} + \frac{6}{b} = 2$$

98. $$\frac{6}{x} + \frac{1}{y} = -1$$
$$\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = -3$$

Resolviendo para x y y, determine la solución para cada sistema de ecuaciones. En todas las ecuaciones $a \neq 0$ y $b \neq 0$. La solución tendrá las literales a, b o ambas.

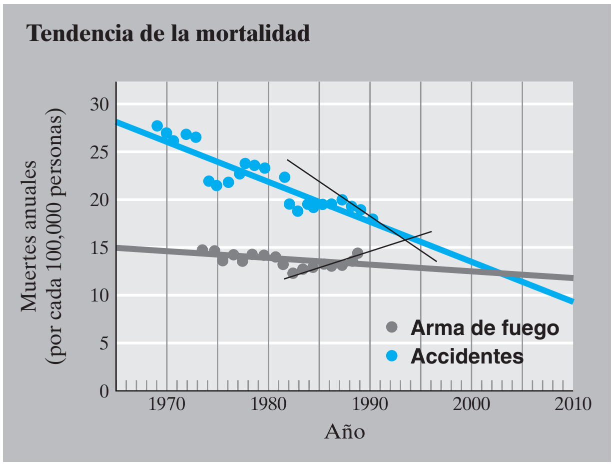
99. $4ax + 3y = 19$
$-ax + y = 4$

100. $ax = 2 - by$
$-ax + 2by - 1 = 0$

Actividad en grupo

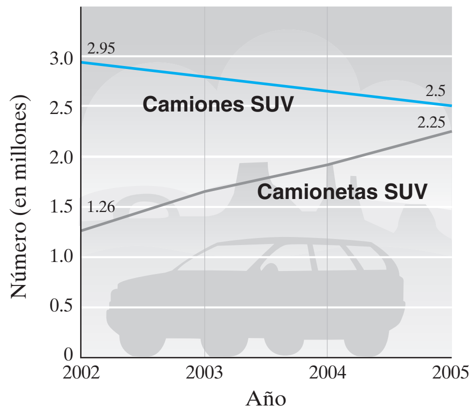
En grupo, analicen y respondan los ejercicios 101 y 102.

101. Tendencia La gráfica siguiente apareció en el *Journal of the American Medical Association* y en *Scientific American*. La línea gris indica la tendencia a largo plazo de las muertes por causa de armas de fuego y la línea en rojo indica la tendencia a largo plazo de las muertes por accidente automovilístico. Las líneas negras delgadas indican las tendencias a corto plazo de las muertes por armas de fuego y por accidentes automovilísticos.



a) Analice la tendencia a largo plazo de las muertes por accidentes automovilísticos.
b) Analice la tendencia a largo plazo de las muertes por causa de arma de fuego.
c) Analice la tendencia a corto plazo de las muertes ocasionadas por accidentes automovilísticos, comparada con la tendencia a largo plazo de las muertes por accidentes automovilísticos.
d) Analice la tendencia a corto plazo de las muertes por armas de fuego comparada con la tendencia a largo plazo en las muertes por armas de fuego.
e) Utilice las tendencias a largo plazo, y estime el momento en que el número de muertes por armas de fuego igualará al número de muertes por accidentes automovilísticos.
f) Repita la parte **e)** utilizando las tendencias a corto plazo.
g) Determine una función, $M(t)$, que puede usarse para estimar el número de muertes por cada 100,000 personas (a largo plazo) por accidentes automovilísticos de 1965 a 2010.
h) Determine una función, $F(t)$, que pueda usarse para estimar el número de muertes por cada 100,000 personas (a largo plazo) por armas de fuego de 1965 a 2010.
i) Resuelva el sistema de ecuaciones formado de las partes **g)** y **h)**. ¿La solución coincide con la solución de la parte **e)**? Si no, explique por qué.

102. Ventas de SUV Como lo muestra la gráfica, desde 2002 las ventas de camiones SUV han disminuido de forma casi lineal, mientras que las ventas de camionetas SUV se ha incrementado de forma casi lineal.



Fuente: Ford Motor Company

Utilizaremos la información del capítulo 3 para determinar las ecuaciones lineales que aproximen a ambas curvas de la gráfica.

a) Mediante los valores de 2002 y 2005, determine la ecuación de una línea recta que pueda utilizarse para aproximar las ventas de camiones SUV (curva roja). Utilice el formato de la ecuación $s(t) = mt + b$, donde s es las ventas, en millones, t es el año desde 2002, y b es la venta de 2002.
b) Con los valores de 2002 y 2005, determine la ecuación de la línea recta que pueda utilizarse para aproximar las ventas de camionetas SUV (curva en gris).
c) Resuelva el sistema de ecuaciones, utilizando las ecuaciones que obtuvo en las partes **a)** y **b)**. Redondee los valores al centésimo más cercano.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **103.** Explique la diferencia entre un número racional y uno irracional.

[1.2] **104.** **a)** ¿Todos los números racionales son números reales?
b) ¿Todos los números irracionales son números reales?

[2.1] **105.** Resuelva la ecuación $\frac{1}{2}(x - 7) = \frac{3}{4}(2x + 1)$.

[2.2] **106.** Encuentre todos los números tales que $|x - 6| = |6 - x|$.

[2.2] **107.** Evalúe $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, cuando $p = 500$, $r = 0.04$, $n = 2$ y $t = 1$.

[3.5] **108.** ¿La siguiente relación es una función? Explique su respuesta. $\{(-3, 4), (7, 2), (-4, 5), (5, 0), (-3, -1)\}$

[3.6] **109.** Sea $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2 - 9$. Determine $(f/g)(3)$.

4.2 Resolución de sistemas de ecuaciones con tres variables

1 Resolver sistemas de ecuaciones con tres variables.

2 Aprender la interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones con tres variables.

3 Reconocer sistemas inconsistentes y dependientes.

1 Resolver sistemas de ecuaciones con tres variables

La ecuación $2x - 3y + 4z = 8$ es un ejemplo de una ecuación lineal con tres variables. La solución para una ecuación lineal con tres variables es una *terna ordenada* de la forma (x, y, z). Una solución para la ecuación dada es $(1, 2, 3)$. Ahora verifique que $(1, 2, 3)$ es una solución para la ecuación.

Para resolver sistemas ecuaciones lineales con tres variables, podemos usar ya sea el método de sustitución o bien el método de la suma; ambos se analizaron en la sección 4.1.

EJEMPLO 1 ▸ Resuelva el siguiente sistema por sustitución.

$$\begin{aligned} x &= -3 \\ 3x + 4y &= 7 \\ -2x - 3y + 5z &= 19 \end{aligned}$$

Solución Como sabemos que $x = -3$, sustituimos -3 por x en la ecuación $3x + 4y = 7$ y despejamos a y.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 7 \\ 3(-3) + 4y &= 7 \\ -9 + 4y &= 7 \\ 4y &= 16 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $x = -3$ y $y = 4$ en la última ecuación y resolvemos para z.

$$\begin{aligned} -2x - 3y + 5z &= 19 \\ -2(-3) - 3(4) + 5z &= 19 \\ 6 - 12 + 5z &= 19 \\ -6 + 5z &= 19 \\ 5z &= 25 \\ z &= 5 \end{aligned}$$

Comprobación $x = -3, y = 4, z = 5$. La solución se debe verificar en *las tres* ecuaciones originales.

$x = -3$	$3x + 4y = 7$	$-2x - 3y + 5z = 19$
$-3 = -3$ *Verdadero*	$3(-3) + 4(4) \stackrel{?}{=} 7$	$-2(-3) - 3(4) + 5(5) \stackrel{?}{=} 19$
	$7 = 7$ *Verdadero*	$19 = 19$ *Verdadero*

La solución es la terna ordenada $(-3, 4, 5)$. Recuerde que la terna ordenada enlista primero el valor x, después el valor y y por último el valor z.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 3**

No todo sistema lineal con tres variables puede resolverse por sustitución, de forma tan directa como en el ejemplo 1. Cuando tal sistema no puede resolverse tan fácilmente por sustitución, podemos encontrar la solución por el método de la suma, como ilustra el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva el sistema de ecuaciones mediante el método de la suma.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \quad &(ec.\ 1) \\ 2x - 3y + 2z &= -7 \quad &(ec.\ 2) \\ x + 4y - z &= 10 \quad &(ec.\ 3) \end{aligned}$$

Solución Para resolver este sistema de ecuaciones, debemos obtener primero dos ecuaciones con las mismas dos variables. Hacemos esto eligiendo dos ecuaciones y utilizando el método de la suma para eliminar una de las variables. Por ejemplo, sumando la (*ec.* 1) y la (*ec.* 3) eliminamos la variable z. Después utilizamos un par diferente de ecuaciones [ya sea (*ec.* 1) y (*ec.* 2) o (*ec.* 2) y (*ec.* 3)] y utilizamos el método de la suma para eliminar la *misma* variable que fue eliminada con anterioridad. Si multiplicamos la (*ec.* 1) por -2 y la sumamos a la (*ec.* 2), la variable z será eliminada de nuevo. Entonces tendremos dos ecuaciones con sólo dos incógnitas. Comenzamos sumando la (*ec.* 1) y la (*ec.* 3).

$$\begin{array}{rl} 3x + 2y + z = 4 & (ec.\ 1) \\ x + 4y - z = 10 & (ec.\ 3) \\ \hline 4x + 6y \quad = 14 & \text{Suma de las ecuaciones } (ec.\ 4) \end{array}$$

Ahora utilizamos un conjunto diferente de ecuaciones y eliminamos de nuevo la variable z.

$$\begin{array}{rll} -6x - 4y - 2z = -8 & (ec.\ 1) & \text{Multiplicada por } -2 \\ 2x - 3y + 2z = -7 & (ec.\ 2) & \\ \hline -4x - 7y \quad = -15 & \text{Suma de las ecuaciones, } (ec.\ 5) & \end{array}$$

Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la (*ec.* 4) y la (*ec.* 5). Si sumamos estas dos ecuaciones, eliminaremos la variable x.

$$\begin{array}{rl} 4x + 6y = 14 & (ec.\ 4) \\ -4x - 7y = -15 & (ec.\ 5) \\ \hline -y = -1 & \text{Suma de las ecuaciones} \\ y = 1 & \end{array}$$

Luego sustituimos $y = 1$ en cualquiera de las dos ecuaciones con sólo dos variables [(*ec.* 4) o (*ec.* 5)] y despejamos x.

$$\begin{array}{rl} 4x + 6y = 14 & (ec.\ 4) \\ 4x + 6(1) = 14 & \text{Sustituya 1 por } y \text{ en la } (ec.\ 4). \\ 4x + 6 = 14 & \\ 4x = 8 & \\ x = 2 & \end{array}$$

Por último, sustituimos $x = 2$ y $y = 1$ en cualquiera de las ecuaciones originales y despejamos z.

$$\begin{array}{rl} 3x + 2y + z = 4 & (ec.\ 1) \\ 3(2) + 2(1) + z = 4 & \text{Sustituya 2 por } x \text{ y 1 por } y \text{ en la } (ec.\ 1). \\ 6 + 2 + z = 4 & \\ 8 + z = 4 & \\ z = -4 & \end{array}$$

La solución es la terna ordenada, $(2, 1, -4)$. Compruebe esta solución en *las tres* ecuaciones originales.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 15

En el ejemplo dos elegimos eliminar primero la variable z utilizando las ecuaciones (*ec.* 1) y (*ec.* 3) y después las ecuaciones (*ec.* 1) y (*ec.* 2). Podríamos haber optado por eliminar primero la variable x o la variable y. Por ejemplo, podríamos haber eliminado la variable x multiplicando la (*ec.* 3) por -2 y después sumándola a la (*ec.* 2). También podríamos eliminar la variable x multiplicando la (*ec.* 3) por -3 y después sumándola a la (*ec.* 1). Resuelva el sistema del ejemplo 2 eliminando primero la variable x.

EJEMPLO 3 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -1 \quad (ec.\ 1)\\ x + 2y \qquad &= 14 \quad (ec.\ 2)\\ x \qquad - 5z &= -11 \quad (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Solución La tercera ecuación no contiene a y. Por lo tanto, trabajaremos para obtener otra ecuación que no contenga a y. Para hacerlo, utilizaremos la (*ec.* 1) y la (*ec.* 2).

$$\begin{aligned} 4x - 6y + 4z &= -2 \quad (ec.\ 1) \quad \text{Multiplicada por 2}\\ 3x + 6y \qquad &= 42 \quad (ec.\ 2) \quad \text{Multiplicada por 3}\\ \hline 7x \qquad + 4z &= 40 \quad \text{Suma de las ecuaciones, (ec. 4)} \end{aligned}$$

Ahora tenemos dos ecuaciones con sólo las variables x y z.

$$\begin{aligned} 7x + 4z &= 40 \quad (ec.\ 4)\\ x - 5z &= -11 \quad (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Eliminemos la variable x.

$$\begin{aligned} 7x + 4z &= 40 \quad (ec.\ 4)\\ -7x + 35z &= 77 \quad (ec.\ 3) \quad \text{Multiplicada por } -7\\ \hline 39z &= 117 \quad \text{Suma de las ecuaciones}\\ z &= 3 \end{aligned}$$

Ahora resolvemos para x, utilizando una de las ecuaciones que tienen sólo las variables x y z. Sustituimos 3 por z en la (*ec.* 3).

$$\begin{aligned} x - 5z &= -11 \quad (ec.\ 3)\\ x - 5(3) &= -11 \quad \text{Sustituya 3 por z en la (ec. 3).}\\ x - 15 &= -11\\ x &= 4 \end{aligned}$$

Por último, despejamos y utilizando cualquiera de las ecuaciones originales que tienen a y.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 14 \quad (ec.\ 2)\\ 4 + 2y &= 14 \quad \text{Sustituya 4 por x en la (ec. 2)}\\ 2y &= 10\\ y &= 5 \end{aligned}$$

La solución es la terna ordenada (4, 5, 3).

Comprobación

(ec. 1)

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -1\\ 2(4) - 3(5) + 2(3) &\stackrel{?}{=} -1\\ 8 - 15 + 6 &\stackrel{?}{=} -1\\ -1 &= -1 \end{aligned}$$

Verdadero

(ec. 2)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 14\\ 4 + 2(5) &\stackrel{?}{=} 14\\ 4 + 10 &\stackrel{?}{=} 14\\ 14 &= 14 \end{aligned}$$

Verdadero

(ec. 3)

$$\begin{aligned} x - 5z &= -11\\ 4 - 5(3) &\stackrel{?}{=} -11\\ 4 - 15 &\stackrel{?}{=} -11\\ -11 &= -11 \end{aligned}$$

Verdadero

Ahora resuelva el ejercicio 11

Sugerencia útil

Si una ecuación de un sistema contiene fracciones, elimine las fracciones multiplicando cada término de la ecuación por el mínimo común denominador. Después continúe resolviendo el sistema. Por ejemplo, si una ecuación del sistema es $\frac{3}{4}x - \frac{5}{8}y + z = \frac{1}{2}$, multiplique ambos lados de la ecuación por 8 para obtener la ecuación equivalente $6x - 5y + 8z = 4$.

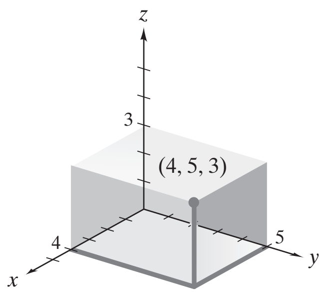


FIGURA 4.5

2 Aprender la interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones con tres variables

Cuando tenemos un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, podemos determinar su solución de manera gráfica utilizando el sistema de coordenadas cartesianas. Una ecuación lineal con tres variables, x, y y z, puede graficarse en un sistema de coordenadas con tres ejes perpendiculares entre sí (vea la **figura 4.5**).

Un punto trazado en este sistema de tres dimensiones aparecería como un punto en el espacio. Si graficásemos una ecuación como $x + 2y + 3z = 4$, encontraríamos que su gráfica sería un plano, y no una recta. En el ejemplo 3 indicamos que la solución era la terna ordenada (4, 5, 3). Esto significa que los tres planos, uno por cada una de las ecuaciones dadas, se intersecan en el punto (4, 5, 3). En general, la terna ordenada que es la solución para un sistema de ecuaciones con tres variables es el punto en el que los tres planos se intersecan. La **figura 4.5** muestra la localización de este punto de intersección de los tres planos. El dibujo del ejercicio 39 ilustra tres planos que se intersecan en un punto.

3 Reconocer sistemas inconsistentes y dependientes

En la sección 4.1 analizamos los sistemas de ecuaciones inconsistentes y dependientes. Los sistemas de ecuaciones lineales con tres variables también pueden ser inconsistentes o dependientes. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales con tres variables, si se obtiene una proposición falsa como $3 = 0$, el sistema es inconsistente y no tiene solución. Esto significa que al menos dos de los planos son paralelos, de modo que los tres planos no se pueden intersecar.* (Vea los ejercicios 37 y 38).

Al resolver un sistema lineal con tres variables, si obtiene una proposición verdadera, $0 = 0$, indica que el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones. Esto puede suceder cuando las tres ecuaciones representan al mismo plano o cuando la intersección de los planos es una recta, como en el dibujo del ejercicio 40. Los ejemplos 4 y 5 ilustran un sistema inconsistente y uno dependiente, respectivamente.

EJEMPLO 4 Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} -3x + 5y + z &= -3 && (ec.\ 1)\\ 6x - 10y - 2z &= 1 && (ec.\ 2)\\ 7x - 4y + 11z &= -6 && (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Solución Comenzaremos por eliminar la variable x de la (*ec.* 1) y de la (*ec.* 2).

$$\begin{aligned} -6x + 10y + 2z &= -6 && (ec.\ 1)\ \text{Multiplicada por 2}\\ 6x - 10y - 2z &= 1 && (ec.\ 2)\\ \hline 0 &= -5 && \text{Falso} \end{aligned}$$

Como hemos obtenido la proposición falsa $0 = -5$, este sistema es inconsistente y no tiene solución.

Ahora resuelva el ejercicio 31

EJEMPLO 5 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 && (ec.\ 1)\\ x + 2y - z &= 1 && (ec.\ 2)\\ x - 4y + 3z &= 1 && (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Solución Comenzaremos eliminando la variable x de la (*ec.* 1) y de la (*ec.* 2) y después de la (*ec.* 1) y de la (*ec.* 3).

$$\begin{aligned} -x + y - z &= -1 && (ec.\ 1)\ \text{Multiplicada por } -1\\ x + 2y - z &= 1 && (ec.\ 2)\\ \hline 3y - 2z &= 0 && \text{Suma de las ecuaciones, } (ec.\ 4) \end{aligned}$$

* Esto significa que los planos no *son concurrentes* es decir, no existe punto en que coincidan los tres planos, por lo que éstos no se pueden intersecar. (N. del traductor.)

$$\begin{array}{rrrrl} x - & y + & z = & 1 & (ec.\ 1) \\ -x + & 4y - & 3z = & -1 & (ec.\ 3) \quad \textit{Multiplicada por } -1 \\ \hline & 3y - & 2z = & 0 & \textit{Suma de las ecuaciones (ec. 5)} \end{array}$$

Ahora eliminamos la variable y utilizando la (ec. 4) y la (ec. 5).

$$\begin{array}{rl} -3y + 2z = 0 & (ec.\ 4) \quad \textit{Multiplicada por } -1 \\ 3y - 2z = 0 & (ec.\ 5) \\ \hline 0 = 0 & \textit{Verdadero} \end{array}$$

Como obtuvimos la proposición verdadera $0 = 0$, este sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

De la sección 4.1, recuerde que los sistemas de ecuaciones que son dependientes también son consistentes, ya que tienen una solución.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 33**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cuál será la gráfica de una ecuación tal como $3x - 4y + 2z = 1$?

2. Suponga que la solución para un sistema de ecuaciones lineales con tres variables es $(1, 3, 5)$. Geométricamente, ¿qué significa esto?

Práctica de habilidades

Resuelva por sustitución.

3. $x = 1$
$2x - y = 4$
$-3x + 2y - 2z = 1$

4. $-x + 3y - 5z = -7$
$2y - z = -1$
$z = 3$

5. $5x - 6z = -17$
$3x - 4y + 5z = -1$
$2z = -6$

6. $2x - 5y = 12$
$-3y = -9$
$2x - 3y + 4z = 8$

7. $x + 2y = 6$
$3y = 9$
$x + 2z = 12$

8. $x - y + 5z = -4$
$3x - 2z = 6$
$4z = 2$

Resuelva utilizando el método de la suma.

9. $x - 2y = -3$
$3x + 2y = 7$
$2x - 4y + z = -6$

10. $x - y + 2z = 1$
$y - 4z = 2$
$-2x + 2y - 5z = 2$

11. $2y + 4z = 2$
$x + y + 2z = -2$
$2x + y + z = 2$

12. $2x + y - 8 = 0$
$3x - 4z = -3$
$2x - 3z = 1$

13. $3p + 2q = 11$
$4q - r = 6$
$6p + 7r = 4$

14. $3s + 5t = -12$
$2t - 2u = 2$
$-s + 6u = -2$

15. $p + q + r = 4$
$p - 2q - r = 1$
$2p - q - 2r = -1$

16. $x - 2y + 3z = -7$
$2x - y - z = 7$
$-4x + 3y + 2z = -14$

17. $2x - 2y + 3z = 5$
$2x + y - 2z = -1$
$4x - y - 3z = 0$

18. $2x - y - 2z = 3$
$x - 3y - 4z = 2$
$x + y + 2z = -1$

19. $r - 2s + t = 2$
$2r + 3s - t = -3$
$2r - s - 2t = 1$

20. $3a - 3b + 4c = -1$
$a - 2b + 2c = 2$
$2a - 2b - c = 3$

21. $2a + 2b - c = 2$
$3a + 4b + c = -4$
$5a - 2b - 3c = 5$

22. $x - 2y + 2z = 3$
$2x - 3y + 2z = 5$
$x + y + 6z = -2$

23. $-x + 3y + z = 0$
$-2x + 4y - z = 0$
$3x - y + 2z = 0$

24. $x + y + z = 0$
$-x - y + z = 0$
$-x + y + z = 0$

25. $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -2$
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z = 2$
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 1$

26. $\frac{2}{3}x + y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}x + y + z = \frac{5}{2}$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = \frac{3}{2}$

27. $x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = -2$
$\frac{2}{3}x + y - \frac{2}{3}z = \frac{1}{3}$
$-\frac{1}{4}x + y - \frac{1}{4}z = \frac{3}{4}$

28. $\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y + z = 2$
$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + z = \frac{17}{6}$
$-\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}z = -\frac{5}{6}$

29. $0.2x + 0.3y + 0.3z = 1.1$
$0.4x - 0.2y + 0.1z = 0.4$
$-0.1x - 0.1y + 0.3z = 0.4$

30. $0.6x - 0.4y + 0.2z = 2.2$
$-0.1x - 0.2y + 0.3z = 0.9$
$-0.2x - 0.1y - 0.3z = -1.2$

Determine si los siguientes sistemas son inconsistentes, dependientes o ninguno de éstos.

31. $2x + y + 2z = 1$
$x - 2y - z = 0$
$3x - y + z = 2$

32. $2p - 4q + 6r = 8$
$-p + 2q - 3r = 6$
$3p + 4q + 5r = 8$

33. $x - 4y - 3z = -1$
$-3x + 12y + 9z = 3$
$2x - 10y - 7z = 5$

34. $5a - 4b + 2c = 5$
$-10a + 8b - 4c = -10$
$-7a - 4b + c = 7$

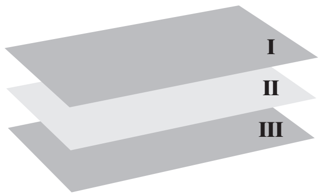
35. $x + 3y + 2z = 6$
$x - 2y - z = 8$
$-3x - 9y - 6z = -7$

36. $2x - 2y + 4z = 2$
$-3x + y = -9$
$2x - y + z = 5$

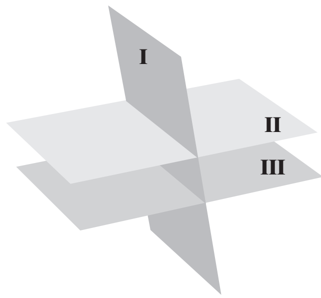
Resolución de problemas

Una ecuación de tres variables, x, y y z, representa un plano. Considere un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones con tres variables. Responda las preguntas siguientes.

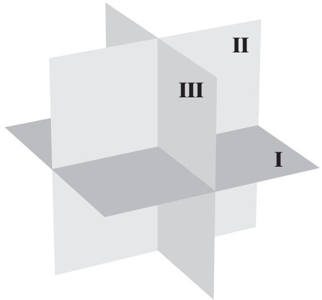
37. Si los tres planos son paralelos entre sí, como lo ilustra la figura, ¿cuántos puntos tendrán en común los tres planos? ¿El sistema es consistente o inconsistente? Explique su respuesta.



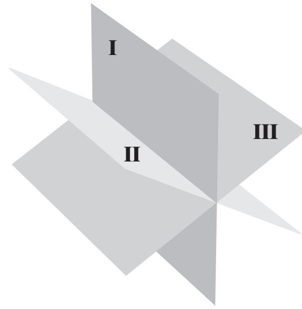
38. Si dos de los planos son paralelos entre sí y el tercer plano interseca cada uno de los otros dos planos, ¿cuántos puntos tendrán en común los tres planos? ¿El sistema es consistente o inconsistente? Explique su respuesta.



39. Si los tres planos son como ilustra la figura, ¿cuántos puntos tendrán en común los tres planos? ¿El sistema es consistente o inconsistente? Explique su respuesta.



40. Si los tres planos son como ilustra la figura, ¿cuántos puntos tendrán en común los tres planos? ¿El sistema es dependiente? Explique su respuesta.



41. ¿Es posible para un sistema de ecuaciones lineales con tres variables tener exactamente

a) cero soluciones,

b) una solución,

c) dos soluciones? Explique su respuesta.

42. En un sistema de ecuaciones lineales con tres variables, si las gráficas de dos ecuaciones son planos paralelos, es posible que el sistema sea

a) consistente,

b) dependiente,

c) inconsistente? Explique su respuesta.

43. Tres soluciones para la ecuación $Ax + By + Cz = 1$ son $(-1, 2, -1)$, $(-1, 1, 2)$ y $(1, -2, 2)$. Determine los valores de A, B y C y escriba la ecuación usando los valores numéricos encontrados.

44. Tres soluciones para la ecuación $Ax + By + Cz = 14$ son $(3, -1, 2)$, $(2, -2, 1)$ y $(-5, 3, -24)$. Determine los valores de A, B y C y escriba la ecuación usando los valores numéricos encontrados.

En los ejercicios 45 y 46, escriba un sistema de ecuaciones lineales con tres variables que tenga la solución dada. Explique cómo determinó su respuesta.

45. $(3, 1, 6)$

46. $(-2, 5, 3)$

47. a) Determine los valores de a, b y c tales que los puntos $(1, -1)$, $(-1, -5)$ y $(3, 11)$ pertenezcan a la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$.

b) Determine la ecuación cuadrática cuya gráfica pasa por los tres puntos indicados. Explique cómo determinó su respuesta.

48. a) Determine los valores de a, b y c tales que los puntos $(1, 7)$, $(-2, -5)$ y $(3, 5)$ pertenezcan a la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$.

b) Determine la ecuación cuadrática cuya gráfica pasa a través de los tres puntos indicados. Explique cómo determinó su respuesta.

Retos

Determine la solución para los sistemas de ecuaciones siguientes.

49.
$$\begin{aligned} 3p + 4q &= 11 \\ 2p + r + s &= 9 \\ q - s &= -2 \\ p + 2q - r &= 2 \end{aligned}$$

50.
$$\begin{aligned} 3a + 2b - c &= 0 \\ 2a + 2c + d &= 5 \\ a + 2b - d &= -2 \\ 2a - b + c + d &= 2 \end{aligned}$$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **51. Esquí a campo traviesa** Margie Steiner empieza a esquiar por un camino a tres millas por hora. Diez minutos después $\left(\frac{1}{6}\text{horas}\right)$, su esposo, David, comienza a esquiar por el mismo camino a cinco millas por hora.

a) ¿Cuánto tiempo después de que David comienza a esquiar alcanzará a Margie?

b) ¿A qué distancia desde el punto inicial se encontrarán?

[2.6] *Determine cada conjunto solución.*

52. $\left|4 - \frac{2x}{3}\right| > 5$

53. $\left|\frac{3x - 4}{2}\right| + 1 < 7$

54. $\left|3x + \frac{1}{5}\right| = -5$

4.3 Sistemas de ecuaciones lineales: aplicaciones y resolución de problemas

1 Utilizar sistemas de ecuaciones para resolver problemas de aplicación.

2 Utilizar sistemas con tres variables para resolver aplicaciones.

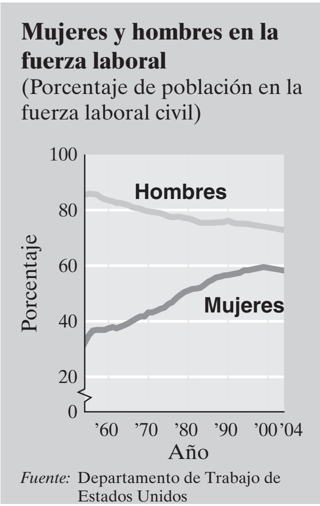


FIGURA 4.6

1 Utilizar sistemas de ecuaciones para resolver problemas de aplicación

Muchas de las aplicaciones que se resolvieron en capítulos anteriores usando una sola variable pueden resolverse ahora usando dos variables. A continuación se presentan algunos ejemplos que muestran cómo pueden describirse las aplicaciones mediante sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 1 ▸ **Cambio en la fuerza laboral** La gráfica en la **figura 4.6**, indica que el porcentaje de hombres en la fuerza laboral está disminuyendo de manera constante mientras que el porcentaje de mujeres está aumentando. La función $m(t) = -0.25t + 85.4$, donde t = años desde 1955, puede usarse para estimar el porcentaje de hombres en la fuerza laboral, y la función $w(t) = 0.52t + 35.7$ puede usarse para estimar el porcentaje de mujeres en la fuerza laboral. Si esta tendencia continúa, determine cuándo el porcentaje de mujeres en la fuerza laboral será igual al porcentaje de hombres.

Solución **Entienda el problema y traduzca** Considere las dos funciones dadas anteriormente como el sistema de ecuaciones. Para determinar cuándo el porcentaje de mujeres será igual al porcentaje de hombres, podemos establecer las dos funciones iguales una a la otra y resolver para el tiempo, t.

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} \text{porcentaje de mujeres} &= \text{porcentaje de hombres} \\ 0.52t + 35.7 &= -0.25t + 85.4 \\ 0.77t &= 49.7 \\ t &\approx 64.5 \end{aligned}$$

Responda Si esta tendencia continúa, el porcentaje de mujeres en la fuerza laboral será igual al porcentaje de hombres aproximadamente 64.5 años a partir de 1955. Como $1955 + 64.5 = 2019.5$, los porcentajes serán iguales en 2019.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 39

EJEMPLO 2 ▸ **Área territorial** El área territorial combinada de Grenada y Guam es de 890 kilómetros cuadrados. El área de Guam es 200 km^2 mayor que el área de Grenada. Determine el área territorial de Guam y la de Grenada.

Solución **Entienda el problema** Necesitamos determinar el área territorial de Guam y la de Grenada.

Traduzca Sea a = área territorial de Guam
b = área territorial de Grenada.

Como el área total de Grenada y Guam es de 890 km^2, la primera ecuación es

$$a + b = 890$$

Como el área de Guam es 200 km^2 mayor que el área de Grenada, la segunda ecuación es

$$a = b + 200$$

El sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} a + b &= 890 \qquad (ec.\ 1) \\ a &= b + 200 \qquad (ec.\ 2) \end{aligned}$$

Realice los cálculos Utilizaremos el método de sustitución, analizado en la sección 4.1, para resolver el sistema de ecuaciones.

Uruano Beach, Guam

Mediante la (*ec.* 2), sustituimos $b + 200$ en lugar de a en la primera ecuación para obtener

$$\begin{aligned} a + b &= 890 && \text{Primera ecuación} \\ (b + 200) + b &= 890 && \text{Sustituya } b + 200 \text{ en lugar de } a. \\ 2b + 200 &= 890 && \text{Simplifique.} \\ 2b &= 690 && \text{Reste 200 de ambos lados.} \\ b &= 345 && \text{Divida ambos lados entre 2.} \end{aligned}$$

Así, $b = 345$. Para determinar el valor de a, sustituya 345 por b en la (*ec.* 2).

$$\begin{aligned} a &= b + 200 \\ a &= 345 + 200 \\ &= 545 \end{aligned}$$

Responda El área territorial de Guam es de 545 km^2 y el área territorial de Grenada es de 345 km^2.

Ahora resuelva el ejercicio 1

EJEMPLO 3 **Velocidad de una canoa** Los Burnhams viajan en canoa en el río Suwannee. Viajan a una velocidad promedio de 4.75 millas por hora cuando reman con la corriente y 2.25 millas por hora cuando reman en contra de la corriente. Determine la velocidad de la canoa en aguas tranquilas y la velocidad de la corriente.

Solución **Entienda el problema** Cuando viajan a favor de la corriente, la velocidad de la canoa es la velocidad de la canoa en aguas tranquilas *más* la velocidad de la corriente. Cuando viajan en contra de la corriente, la velocidad de la canoa es la velocidad de la canoa en aguas tranquilas *menos* la velocidad de la corriente.

Traduzca Sea s = velocidad de la canoa en aguas tranquilas.
c = velocidad de la corriente.

El sistema de ecuaciones es:

velocidad de la canoa viajando con la corriente: $s + c = 4.75$
velocidad de la canoa viajando en contra de la corriente: $s - c = 2.25$

Realice los cálculos Usaremos el método de suma, como se analizó en la sección 4.1, para resolver este sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} s + c &= 4.75 \\ s - c &= 2.25 \\ \hline 2s \quad &= 7.00 \\ s &= 3.5 \end{aligned}$$

La velocidad de la canoa en aguas tranquilas es 3.5 millas por hora. Ahora determinamos la velocidad de la corriente.

$$\begin{aligned} s + c &= 4.75 \\ 3.5 + c &= 4.75 \\ c &= 1.25 \end{aligned}$$

Responda La velocidad de la corriente es de 1.25 millas por hora y la velocidad de la canoa en aguas tranquilas es de 3.5 millas por hora.

Ahora resuelva el ejercicio 13

EJEMPLO 4 **Salario** Yamil Bermudez, un vendedor de aparatos Hancock, recibe un salario semanal más una comisión, que es un porcentaje de sus ventas. Una semana, por ventas de \$3000, su paga total fue de \$850. La semana siguiente, por ventas de \$4000, su pago total fue de \$1000. Determine su salario semanal y su porcentaje de comisión.

Solución **Entienda el problema** El sueldo de Yamil consiste en su salario semanal más la comisión. Se nos da información acerca de dos semanas específicas que podemos usar para determinar su salario semanal y su porcentaje de comisión.

Traduzca Sea s = su salario semanal
r = su porcentaje de comisión.

En la semana uno, su comisión sobre \$3000 es $3000r$ y en la semana 2 su comisión sobre \$4000 es $4000r$. Por lo tanto el sistema de ecuaciones es

$$\text{salario} + \text{comisión} = \text{sueldo}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Primera semana} & s + 3000r = 850 \\ \textit{Segunda semana} & s + 4000r = 1000 \end{array}\right\} \textit{Sistema de ecuaciones}$$

Realice los cálculos

$$\begin{array}{rll} -s - 3000r &= -850 & \textit{Primera semana multiplicada por } -1 \\ s + 4000r &= 1000 & \textit{Segunda semana} \\ \hline 1000r &= 150 & \textit{Suma de ecuaciones} \end{array}$$

$$r = \frac{150}{1000}$$
$$r = 0.15$$

La comisión de Yamil es 15% de sus ventas. Ahora determinaremos su salario semanal, sustituyendo **0.15** por ***r*** en cualquier ecuación.

$$s + 3000r = 850$$
$$s + 3000(0.15) = 850 \quad \textit{Sustituya 0.15 por r en la ecuación de la primera semana.}$$
$$s + 450 = 850$$
$$s = 400$$

Responda El sueldo semanal de Yamil de \$400 y su porcentaje de comisión es de 15%.

Ahora resuelva el ejercicio 15

EJEMPLO 5 **Paseo a caballo** Ben Campbell sale de su rancho montando su caballo a 5 millas por hora. Media hora más tarde, Joe Campbell sale del mismo rancho y se dirige por la misma ruta en su caballo a ocho millas por hora.

a) ¿Cuánto tiempo tardará, desde que sale Joe, en alcanzar a Ben?
b) Cuando Joe alcanza a Ben, ¿a qué distancia del rancho estarán?

Solución **a)** **Entienda el problema** Cuando Joe alcanza a Ben, ambos habrán recorrido la misma distancia. Joe habrá cubierto la distancia en $\frac{1}{2}$ hora menos, ya que él partió $\frac{1}{2}$ hora después que Ben. Para resolver este problema, usaremos la fórmula distancia = velocidad · tiempo.

Traduzca Sea b = tiempo recorrido por Ben
j = tiempo recorrido por Joe

Construiremos una tabla para organizar la información dada.

	Velocidad	Tiempo	Distancia
Ben	5	b	$5b$
Joe	8	j	$8j$

Tanto Ben como Joe cubren la misma distancia, escribimos

$$\text{distancia de Ben} = \text{distancia de Joe}$$
$$5b = 8j$$

Nuestra segunda ecuación proviene del hecho que Joe está viajando $\frac{1}{2}$ hora menos que Ben. Por lo tanto, $j = b - \frac{1}{2}$. Así, nuestro sistema de ecuaciones es:

$$5b = 8j$$
$$j = b - \frac{1}{2}$$

Realice los cálculos Resolveremos este sistema de ecuaciones usando sustitución. Como $j = b - \frac{1}{2}$, sustituimos $b - \frac{1}{2}$ por j en la primera ecuación y resolvemos para b.

$$\begin{aligned} 5b &= 8j \\ 5b &= 8\left(b - \frac{1}{2}\right) \\ 5b &= 8b - 4 \\ -3b &= -4 \\ b &= \frac{-4}{-3} = 1\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por consiguiente, el tiempo que Ben ha estado viajando es $1\frac{1}{3}$ horas. Para obtener el tiempo que Joe ha viajado, restaremos $\frac{1}{2}$ hora del tiempo de Ben.

$$\begin{aligned} j &= b - \frac{1}{2} \\ j &= 1\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ j &= \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{8}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Responda Joe alcanzará a Ben $\frac{5}{6}$ de una hora (o 50 minutos) después de que Joe salga del rancho.

b) Puede utilizar ya sea la distancia de Ben o la de Joe para determinar la distancia recorrida desde el rancho. Utilizaremos la distancia de Joe.

$$d = 8j = 8\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\cancelto{4}{8}}{1} \cdot \frac{5}{\cancelto{3}{6}} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

Así, Joe alcanzará a Ben cuando estén a $6\frac{2}{3}$ millas del rancho.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 33

EJEMPLO 6 ▸ Mezcla de soluciones Chung Song, un químico de Johnson and Johnson, desea crear un nuevo limpiador doméstico que contenga 30% de fosfato trisódico (TSP). Chung necesita mezclar una solución al 16% de TSP con una solución al 72% de TSP para obtener 6 litros de una solución al 30% de TSP. ¿Cuántos litros de la solución al 16% y de la solución al 72% necesita mezclar?

Solución **Entienda el problema** Para resolver este problema usamos el hecho de que la cantidad de TSP en una solución se determina multiplicando el porcentaje de concentración de la solución por el número de litros (el volumen) de la solución. Chung necesita mezclar una solución al 16% con una solución al 72% para obtener 6 litros de una solución cuya concentración, 30%, esté entre las concentraciones de las dos soluciones que serán mezcladas.

Traduzca Sea x = número de litros de la solución al 16%
y = número de litros de la solución al 72%

Dibujaremos un diagrama (**figura 4.7** de la página 256) y después haremos una tabla que nos ayude a analizar el problema.

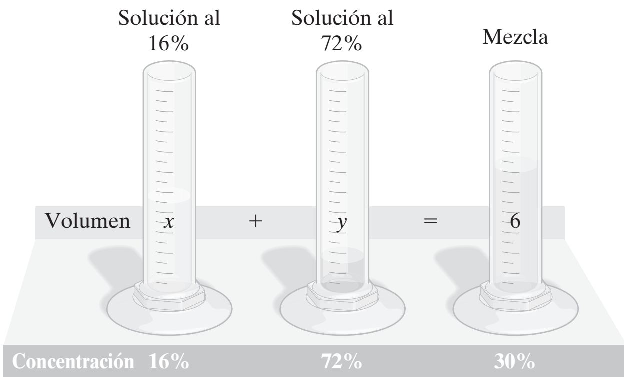


FIGURA 4.7

Solución	Concentración de la solución	Número de litros	Cantidad de TSP
solución al 16%	0.16	x	$0.16x$
solución al 72%	0.72	y	$0.72y$
Mezcla	0.30	6	0.30(6)

Como la suma de los volúmenes de la solución al 16% y la solución al 72% es de 6 litros, nuestra primera ecuación es

$$x + y = 6$$

La segunda ecuación viene del hecho de que se mezclan las soluciones.

$$\begin{pmatrix}\text{cantidad de TSP en la}\\ \text{solución al 16\%}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{cantidad de TSP en la}\\ \text{solución al 72\%}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{cantidad de TSP}\\ \text{en la mezcla}\end{pmatrix}$$

$$0.16x \qquad + \qquad 0.72y \qquad = \qquad 0.30(6)$$

Por lo que, el sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 0.16x + 0.72y &= 0.30(6) \end{aligned}$$

Realice los cálculos Al despejar y en $x + y = 6$, obtenemos $\mathbf{y = -x + 6}$. Al sustituir $-x + 6$ en vez de y en la segunda ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} 0.16x + 0.72y &= 0.30(6) \\ 0.16x + 0.72(-x + 6) &= 0.30(6) \\ 0.16x - 0.72x + 4.32 &= 1.8 \\ -0.56x + 4.32 &= 1.8 \\ -0.56x &= -2.52 \\ x &= \frac{-2.52}{-0.56} = 4.5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, Chung debe utilizar 4.5 litros de la solución al 16%. Como las dos soluciones deben sumar 6 litros, debe utilizar $6 - 4.5$ o 1.5 litros de solución al 72%.

Ahora resuelva el ejercicio 17

En el ejemplo 6, la ecuación $0.16x + 0.72y = 0.30(6)$ podría simplificarse multiplicando ambos lados de la ecuación por 100. Esto daría la ecuación $16x + 72y = 30(6)$ o $16x + 72y = 180$. Entonces el sistema de ecuaciones sería $x + y = 6$ y $16x + 72y = 180$. Si resuelve este sistema, debe obtener la misma solución. Inténtelo y verá.

2 Utilizar sistemas con tres variables para resolver aplicaciones

Ahora veamos algunas aplicaciones que implican el uso de ecuaciones con tres variables.

EJEMPLO 7 ▸ **Préstamos bancarios** Tiny Tots Toys debe pedir prestados \$25,000 para costear una ampliación. No puede obtener todo el dinero prestado de un único banco, así que pide tres préstamos a tres bancos diferentes. El primero cobra el 8% de interés. En el segundo banco pide prestados \$2000 más que la mitad de la cantidad solicitada al primer banco. La tasa de interés del segundo banco es del 10%. El resto de los \$25,000 lo presta un tercer banco, donde Tiny Tots paga 9% de interés. El interés anual total que paga Tiny Tots Toys por el préstamo de los tres bancos es de \$2220. ¿Cuánto dinero pidió prestado a cada tasa?

Solución **Entienda el problema** Nos piden determinar cuánto se pide prestado a cada una de las tres tasas diferentes. Por lo que este problema tendrá tres variables, una para cada monto que se pidió prestado. Como el problema tendrá tres variables, necesitaremos determinar tres ecuaciones para usar en nuestro sistema de ecuaciones.

Traduzca Sea x = cantidad prestada por el primer banco
y = cantidad prestada por el segundo banco
z = cantidad prestada por el tercer banco

Como la cantidad total prestada es de \$25,000, sabemos que

$$x + y + z = 25{,}000 \quad \text{La cantidad total prestada es \$25,000}$$

En el segundo banco, Tiny Tots Toys pidió prestado \$2000 más que la mitad del dinero solicitado al primer banco. Por lo tanto, la segunda ecuación es

$$y = \frac{1}{2}x + 2000 \quad \text{El segundo, } y\text{, es \$2000 más que } \frac{1}{2} \text{ del primero, } x.$$

Nuestra última ecuación proviene del hecho de que el interés anual total cobrado por los tres bancos es de \$2220. El interés por cada banco se determina multiplicando la tasa de interés por la cantidad prestada.

$$0.08x + 0.10y + 0.09z = 2220 \quad \text{El interés total es \$2220.}$$

Así, nuestro sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} x + y + z &= 25{,}000 && (1) \\ y &= \frac{1}{2}x + 2000 && (2) \\ 0.08x + 0.10y + 0.09z &= 2220 && (3) \end{aligned}$$

Ambos lados de la ecuación (2) pueden multiplicarse por 2 para eliminar las fracciones.

$$\begin{aligned} 2(y) &= 2\left(\frac{1}{2}x + 2000\right) && \\ 2y &= x + 4000 && \text{Propiedad distributiva} \\ -x + 2y &= 4000 && \text{Restar x de ambos lados.} \end{aligned}$$

Podemos eliminar los decimales de la ecuación (3) multiplicando ambos lados de la ecuación por 100 para obtener

$$8x + 10y + 9z = 222{,}000$$

Así que, nuestro sistema de ecuaciones simplificado es

$$\begin{aligned} x + y + z &= 25{,}000 && (ec.\ 1) \\ -x + 2y &= 4000 && (ec.\ 2) \\ 8x + 10y + 9z &= 222{,}000 && (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Realice los cálculos Existen varias formas de resolver este sistema. Utilizamos la (*ec.* 1) y la (*ec.* 3) para eliminar la variable z.

$$\begin{array}{rcl} -9x - 9y - 9z &=& -225{,}000 \quad (ec.\ 1) \quad \textit{Multiplicada por } -9 \\ 8x + 10y + 9z &=& 222{,}000 \quad (ec.\ 3) \\ \hline -x + y &=& -3{,}000 \quad \textit{Suma de las ecuaciones } (ec.\ 4) \end{array}$$

Ahora usamos la (*ec.* 2) y la (*ec.* 4) para eliminar la variable x y despejar y.

$$\begin{array}{rcl} x - 2y &=& -4000 \quad (ec.\ 2) \quad \textit{Multiplicada por } -1 \\ -x + y &=& -3000 \quad (ec.\ 4) \\ \hline -y &=& -7000 \quad \textit{Suma de las ecuaciones} \\ y &=& 7000 \end{array}$$

Ahora que sabemos el valor de y, podemos obtener el valor para x.

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 4000 && (ec.\ 2) \\ -x + 2(7000) &= 4000 && \textit{Sustituya 7000 por y en la } (ec.\ 2). \\ -x + 14{,}000 &= 4000 \\ -x &= -10{,}000 \\ x &= 10{,}000 \end{aligned}$$

Por último, despejamos z.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 25{,}000 && (ec.\ 1) \\ 10{,}000 + 7000 + z &= 25{,}000 \\ 17{,}000 + z &= 25{,}000 \\ z &= 8000 \end{aligned}$$

Responda Tiny Tots Toys pidió prestados \$10,000 al 8%, \$7000 al 10% y \$8000 al 9% de interés.

Ahora resuelva el ejercicio 55

EJEMPLO 8 **Botes inflables** Hobson, Inc., tiene una pequeña planta que fabrica tres tipos de botes inflables: para una, dos y cuatro personas. Cada bote requiere el servicio de tres departamentos: corte, ensamblaje y empaque. Los departamentos de corte, ensamblaje y empaque pueden utilizar un total de 380, 330 y 120 horas-persona por semana, respectivamente. El tiempo requerido para cada bote y departamento aparece en la tabla siguiente. Determine cuántos botes de cada tipo deben producirse cada semana para que la planta opere a toda su capacidad.

	Tiempo (hora-persona) por bote		
Departamento	**Bote para una persona**	**Bote para dos personas**	**Bote para tres personas**
Corte	0.6	1.0	1.5
Ensamblaje	0.6	0.9	1.2
Empaque	0.2	0.3	0.5

Solución **Entienda el problema** Nos dicen que se producen tres tipos diferentes de botes y nos piden determinar el número de cada uno de los tipos producidos. Como este problema incluye tres cantidades por determinar, el sistema tendrá tres ecuaciones con tres variables.

Traduzca Usaremos la información dada en la tabla.

Sea x = el número de botes para una persona
y = número de botes para dos personas
z = número de botes para cuatro personas

El número total de horas de corte para los tres tipos de botes debe ser igual a 380 horas-persona.

$$0.6x + 1.0y + 1.5z = 380$$

El número total de horas de ensamblaje debe ser igual a 330 horas-persona.

$$0.6x + 0.9y + 1.2z = 330$$

El número total de horas de empaque debe ser igual a 120 horas-persona.

$$0.2x + 0.3y + 0.5z = 120$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} 0.6x + 1.0y + 1.5z &= 380 \\ 0.6x + 0.9y + 1.2z &= 330 \\ 0.2x + 0.3y + 0.5z &= 120 \end{aligned}$$

Al multiplicar cada ecuación del sistema por 10 se eliminarán los números decimales y tenemos un sistema simplificado de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 6x + 10y + 15z &= 3800 && (ec. 1) \\ 6x + 9y + 12z &= 3300 && (ec. 2) \\ 2x + 3y + 5z &= 1200 && (ec. 3) \end{aligned}$$

Realice los cálculos Primero eliminamos la variable x utilizando las ecuaciones (ec. 1) y (ec. 2) y después las ecuaciones (ec. 1) y (ec. 3).

$$\begin{aligned} 6x + 10y + 15z &= 3800 && (ec. 1) \\ -6x - 9y - 12z &= -3300 && (ec. 2) \quad \text{Multiplicada por } -1 \\ \hline y + 3z &= 500 && \text{Suma de las ecuaciones } (ec. 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x + 10y + 15z &= 3800 && (ec. 1) \\ -6x - 9y - 15z &= -3600 && (ec. 3) \quad \text{No aplicada por } -3 \\ \hline y &= 200 && \text{Suma de las ecuaciones } (ec. 5) \end{aligned}$$

Observe que al sumar las dos últimas ecuaciones, las variables x y z se eliminaron al mismo tiempo. Ahora despejamos z.

$$\begin{aligned} y + 3z &= 500 && (ec. 4) \\ 200 + 3z &= 500 && \text{Sustituya 200 por } y. \\ 3z &= 300 \\ z &= 100 \end{aligned}$$

Por último, determinamos x.

$$\begin{aligned} 6x + 10y + 15z &= 3800 && (ec. 1) \\ 6x + 10(200) + 15(100) &= 3800 \\ 6x + 2000 + 1500 &= 3800 \\ 6x + 3500 &= 3800 \\ 6x &= 300 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Responda Hobson debe producir 50 botes para una persona, 200 botes para dos personas y 100 botes para cuatro personas por semana.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 59

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.3

MathXL® MyMathLab

Práctica de habilidades/Resolución de problemas

1. **Área territorial** El área territorial combinada de los países Georgia y de Irlanda es de 39,973 km^2. Irlanda es 573 km^2 mayor. Determine el área territorial de cada país.

Acantilados de Moher, Irlanda

2. **Triunfos en Daytona** Al escribir estas líneas, Richard Petty había ganado la carrera de 500 millas de Daytona el mayor número de veces y Dale Yarborough era el segundo mayor ganador de esa carrera. El número de triunfos de Petry es uno menos que el doble del número de triunfos de Yarborough. El número total de triunfos de los dos pilotos es 11. Determine el número de triunfos de cada uno de ellos.

3. **Contenido de grasa** Un nutriólogo determinó que una orden grande de papas fritas en McDonald's tiene más grasa que su hamburguesa de un cuarto de libra (quarter-pound). Las papas fritas tienen cuatro gramos más que tres veces la cantidad de grasa en la hamburguesa. La diferencia de la grasa que contienen las papas fritas y la hamburguesa es de 46 gramos. Determine el contenido de grasa de la hamburguesa y de las papas fritas.

4. **Parques temáticos** Los dos parques temáticos más visitados en Estados Unidos en 2004 fueron el Reino Mágico de Walt Disney en Florida y Disneylandia en California. El número total de visitantes a estos parques fue de 28.4 millones de personas. El número de personas que visitaron el Reino Mágico fue 1.8 millones más que el número de personas que visitaron Disneylandia. ¿Cuántas personas visitaron cada uno de estos parques en 2001? *Fuente:* www.coastergrotto.com

5. **Puesto de hot dogs** En el puesto de hot dogs del Gran Al, 2 hot dogs y 3 refrescos cuestan \$7. El costo de 4 hot dogs y 2 refrescos es de \$10. Determine el costo de un hot dog y el costo de un refresco.

6. **Agua y pretzel** En un juego de fútbol profesional, el costo de dos botellas de agua y 3 pretzels es \$16.50. El costo de 4 botellas de agua y de pretzel es \$15.50. Determine el costo de una botella de agua y el costo de un pretzel.

7. **Cámaras digitales** Ashley Dawn acaba de comprar una nueva cámara digital, una tarjeta de memoria de 128 megabytes (MB) y una tarjeta de memoria de 512 MB. La tarjeta de 512 MB puede almacenar cuatro veces más fotos que la tarjeta de 128 MB. Juntas las dos tarjetas de memoria pueden almacenar 360 fotos (de óptima calidad). Determine cuántas fotos puede almacenar cada una de las cámaras.

8. **Impresoras de fotografías** En la revista del *Consumidor* de julio de 2005, apareció un reportaje sobre impresoras de fotografías que comparaban el costo de imprimirlas en cada una de las impresoras. La más cara de las impresoras de fotos de 4×6 fue la Olympus P-5100. La menos cara fue la Epson Picture Mate. La impresión de una foto en ambas impresoras costaría \$0.80. El costo de imprimir una foto en la Olympus es \$0.20 más que el doble del costo de imprimir una foto en la Epson. Determine el costo de imprimir una foto en cada impresora.

9. **Ángulos complementarios** Dos ángulos son **ángulos complementarios,** si la suma de sus medidas es 90°. (Vea la sección 2.3). Si la medida del más grande de los dos ángulos complementarios es 15° más que dos veces la medida del ángulo más pequeño, determine las medidas de los dos ángulos.

10. **Ángulos complementarios** La diferencia entre las medidas de dos ángulos complementarios es 46°. Determine las medidas de los dos ángulos.

11. **Ángulos suplementarios** Dos ángulos son **ángulos suplementarios**, si la suma de sus medidas es 180°. (Vea la sección 2.3). Determine las medidas de dos ángulos suplementarios, si la medida de un ángulo es 28° menos que tres veces la medida del otro.

12. **Ángulos suplementarios** Determine las medidas de dos ángulos suplementarios, si la medida de un ángulo es tres veces y media mayor que la medida del otro ángulo.

13. **Velocidad al remar** El equipo de remo Heart O'Texas, mientras practica en Austin, Texas remó a un promedio de 15.6 millas por hora a favor de la corriente y 8.8 millas por hora en contra de la corriente. Determine la velocidad de remo del equipo en aguas tranquilas y la velocidad de la corriente.

14. **Velocidad de vuelo** Jung Lee, en su aeroplano Piper Cub, voló a un promedio de 121 millas por hora a favor del viento y a 87 millas por hora en contra del viento. Determine la velocidad del aeroplano sin viento y la velocidad del viento.

15. **Salario más comisión** Don Lavigne, un representante de rentas de equipo para oficina, gana un salario semanal más una comisión sobre sus ventas. Una semana su sueldo total por ventas de \$4000 fue \$660. La siguiente semana su sueldo total sobre ventas de \$6000 fue \$740. Determine el salario semanal de Don y su porcentaje sobre las ventas.

16. **Renta de un camión** Una agencia de renta de camiones cobra una cuota diaria más un costo por millaje. A Hugo le cobraron \$85 por dos días y 100 millas y a Cristina le cobraron \$165 por tres días y 400 millas. ¿Cuál es el cobro diario de la agencia y cuál es el costo por cada milla?

17. **Aceite de lavanda** Pola Sommers, una masajista, necesita tres onzas de una solución de aceite de lavanda al 20%. Pero sólo tiene disponibles soluciones de aceite de lavanda al 5% y al 30%, ¿cuántas onzas de cada una debe mezclar para tener la solución deseada?

18. **Soluciones de fertilizantes** Frank Ditlman necesita aplicar una solución líquida de nitrógeno al 10% a su jardín de rosas, pero sólo tiene disponible una solución líquida de nitrógeno al 4% y una al 20%. ¿Cuánta solución al 4% y cuánta al 20% debe mezclar Frank para obtener 10 galones de solución al 10%?

19. **Eliminador de maleza** Un líquido para eliminar la maleza consta de 18% de ingrediente activo glifosfato (y 82% de ingredientes inactivos). La concentración se mezclará con agua y la mezcla se aplica a malezas. Si la mezcla final contendrá 0.9% de ingrediente activo, ¿cuánto concentrado y cuánta agua deben mezclarse para producir 200 galones de la mezcla final?

20. **Fertilizante para césped** El fertilizante para césped Winterizer de Scott tiene 22% de nitrógeno. El fertilizante para césped de Schultz tiene 4% de nitrógeno. William Weaver, propietario de un vivero, desea mezclar estos dos fertilizantes para producir 400 libras de una mezcla especial con 10% de nitrógeno para abonar el césped en media temporada. ¿Cuánto de cada fertilizante debe mezclar?

21. **Alpiste** El alpiste cuesta \$0.59 por libra y la semilla de girasol cuesta \$0.89 por libra. La tienda de mascotas de Ángela Leinenbachs desea producir 40 libras de una mezcla de alpiste y semillas de girasol que se venda en \$0.76 por libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de semilla debe usar?

22. **Café** Franco Manuel tiene una tienda. Desea mezclar 30 libras de café que tengan un costo total de \$170. Para obtener tal mezcla, combinará café que vende en \$5.20 por libra con café que vende a \$6.30 por libra. ¿Cuántas libras de cada café debe utilizar?

23. **Tarifa de trenes** Un grupo visitará Nueva York, y Ann Marie Whittle está cotizando las tarifas en trenes. Tres adultos y cuatro niños costaría un total de \$159. Dos adultos y tres niños costaría un total de \$112. Determine el precio de un boleto para adulto y el de un boleto para un niño.

24. **Alones enchilados** La Casa del Alón vende órdenes tamaño regular y tamaño gigante de alones enchilados de pollo. Tres órdenes regulares y cinco grandes de alones cuestan \$67. Cuatro órdenes regulares y cuatro grandes de alones cuestan \$64. Determine el costo de una orden regular y el costo de una orden grande.

25. **Cuentas de ahorro** El señor y la señora Gamton invierten un total de \$10,000 en dos cuentas de ahorro. Una cuenta paga 5% de interés y la otra 6%. Determine el monto colocado en cada cuenta, si por las dos cuentas se recibe un total de \$540 en intereses después de un año. Utilice interés = capital · tasa · tiempo.

26. **Inversiones** Luis Okonkwo invirtió \$30,000, parte a 9% y parte a 5%. Si hubiese invertido el monto total al 6.5%, su interés total sería el mismo que la suma de los intereses recibidos por las otras dos cuentas. ¿Cuánto invirtió en cada tasa de interés?

27. **Leche** Becky Slaats es ingeniera en la planta de la compañía Velda Farms. Quiere mezclar leche entera, que tiene 3.25% de grasa, y leche descremada, que no tiene grasa, para obtener 260 galones de una mezcla de leche que contenga 2% de grasa. ¿Cuántos galones de leche entera y cuántos galones de leche descremada debe mezclar Becky para obtener la mezcla deseada?

28. Panes quichés La receta de Lambert Marx para unos panes quichés, requiere 2 tazas (16 onzas) de crema ligera que tiene 20% de grasa de leche. Suele ser difícil encontrar crema ligera con 20% de grasa de leche en el supermercado. Lo que se encuentra por lo regular es crema pesada, que tiene 36% de grasa de leche, y media crema que tiene 10.5% de grasa de leche. ¿Cuánto de la crema pesada y cuánto de la media crema debe mezclar Lambert para obtener la mezcla necesaria para su receta?

29. Alpiste Al ordenar directamente a través de *www.alpiste.com*, los Carters pueden comprar alpiste Selección de la Temporada por $1.79 la libra y Mezcla de Jardín por $1.19 la libra. Si desean comprar 20 libras y gastar $28 en alpiste, ¿cuántas libras de cada tipo deben comprar?

30. Jugo La compañía de jugos Healthy Favorities vende jugo de manzana a 8.3 centavos la onza y jugo de frambuesa a 9.3 centavos la onza. La compañía desea comerciar y vender botes de ocho onzas de jugo de manzana-frambuesa en 8.7 centavos la onza. ¿Cuántas onzas de cada uno debe mezclarse?

31. Recorrido en automóvil Dos automóviles inician desde el mismo punto en Alejandría, Virginia y viajan en direcciones opuestas. Un automóvil viaja 5 millas por hora más rápido que el otro automóvil. Después de cuatro horas, los dos automóviles están separados una distancia de 420 millas. Determine la velocidad de cada automóvil.

32. Camino en construcción Kip Ortiz conduce de Atlanta a Louisville, una distancia de 430 millas. Debido a la construcción de un camino y al tráfico pesado, durante la primera parte de su viaje, Kip conduce a una velocidad promedio de 50 millas por hora. Durante el resto de su viaje conduce a una velocidad promedio de 70 millas por hora. Si su viaje le tomó en total siete horas, ¿cuántas horas condujo a cada velocidad?

33. Conferencia de Avon Cabrina Wilson y Dabney Jefferson son representantes de Avon y asisten a una conferencia en Seattle. Después de la conferencia, Cabrina conduce a casa en Boise a una velocidad promedio de 65 millas por hora, y Dabney conduce a casa en Portland a una velocidad promedio de 50 millas por hora. Si la suma de sus tiempos de conducción es 11.4 horas y si la suma de las distancias conducidas es 690 millas, determine el tiempo que cada representante utilizó en su viaje a casa.

34. Ejercicio Para su rutina de ejercicios, Cynthia Harrison conduce una bicicleta durante hora y media y luego patina durante hora y media. Cynthia conduce la bicicleta a una velocidad que es dos veces la velocidad a la cual patina. Si la distancia total cubierta por Cynthia es de 12 millas, determine las velocidades a las cuales conduce la bicicleta y patina.

35. Dieta de animales Animales en un experimento están a una dieta estricta. Cada animal recibe, entre otros nutrientes, 20 gramos de proteína y 6 gramos de carbohidratos. El científico sólo tiene dos mezclas de alimentos disponibles con las composiciones que aparecen en la tabla siguiente. ¿Cuántos gramos de cada mezcla deben usarse para obtener la dieta correcta para un solo animal?

Mezcla	Proteína (%)	Carbohidratos (%)
Mezcla *A*	10	6
Mezcla *B*	20	2

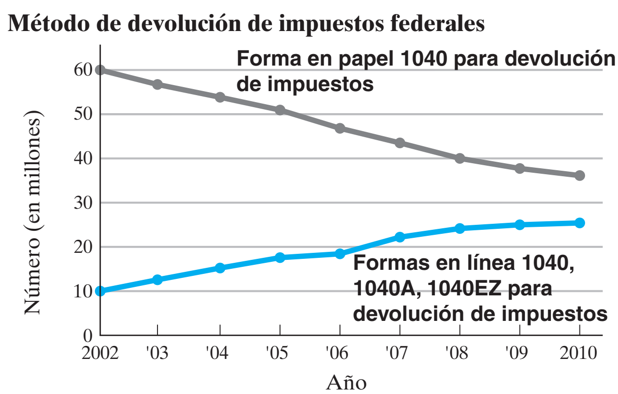
36. Fabricación de sillas Una compañía fabrica dos modelos de sillas. La información acerca de la construcción de las sillas está dada en la tabla siguiente. En un día particular la compañía asignó 46.4 personas-horas para ensamblaje y 8.8 personas-horas a la pintura. ¿Cuántas sillas de cada tipo pueden fabricarse?

Modelo	Tiempo de ensamblaje	Tiempo de pintura
Modelo *A*	1 hr	0.5 hr
Modelo *B*	3.2 hr	0.4 hr

37. Aleación de latón En peso, una aleación de latón es 70% de cobre y 30% de zinc. Otra aleación de latón es 40% de cobre y 60% de zinc. ¿Cuántos gramos de cada una de estas aleaciones se necesitan mezclar y combinar para obtener 300 gramos de una aleación de latón que tenga 60% de cobre y 40% de zinc?

38. Aleación de plata La plata Sterling tiene 92.5% de plata pura. ¿Cuántos gramos de plata pura (100%) y cuántos gramos de plata Sterling deben mezclarse para obtener 250 gramos de una aleación de plata al 94%?

39. Devolución de impuestos La gráfica siguiente muestra el número de Formas 1040, en papel, para devolución de impuestos y el número de Formas, en línea, 1040, 1040A y 1040EZ de devolución de impuestos solicitados al Servicio Interno de Ingresos (SII) durante los años de 2002 a 2005, y proyectados a 2010. Si t representa el número de años desde 2002, el número de formas 1040 de devolución, en millones, presentadas a la SII puede estimarse mediante la función $P(t) = -2.73t + 58.37$ y el número de formas en línea 1040, 1040A y 1040EZ, en millones, presentadas ante la SII, puede estimarse mediante la función $o(t) = 1.95t + 10.58$. Suponiendo que esta tendencia continúe, resuelva el sistema de ecuaciones para determinar el año en que el número de Formas 1040 en papel para devolución de impuestos será el mismo que las formas en línea 1040, 1040A y 1040EZ para la devolución de impuestos.



Fuente: Servicio de Ingresos Internos

40. Caminar y correr Cuong Tham realiza ejercicio todos los días. Camina a 3 millas por hora y luego corre a 5 millas por hora. Si tarda 0.9 horas en recorrer un total de 3.5 millas, ¿cuánto tiempo corre?

41. Conducción por Texas Tom Johnson y Melissa Acino empiezan a manejar al mismo tiempo en diferentes automóviles, desde la ciudad de Oakland. Ambos viajan al sur por la carretera 35. Cuando Melissa llegó al área de Dallas/Ft. Worth, a una distancia de 150 millas, Tom sólo había llegado a Denton, Texas, a una distancia de 120 millas. Si Melissa promedió 15 millas por hora más rápido que Tom, determine la velocidad promedio de cada automóvil.

42. Costo de fotocopias En un centro local de copiado están disponibles dos planes.

Plan 1: $0.10 por copia.

Plan 2: una cuota anual de $120 más 4 centavos por copia.

a) Represente esta información como un sistema de ecuaciones.

b) Grafique el sistema de ecuaciones hasta 4000 copias.

c) Con base en la gráfica, estime el número de las copias que una persona tendría que tener en un año para que los dos planes tengan el mismo costo total.

d) Resuelva el sistema de manera algebraica.

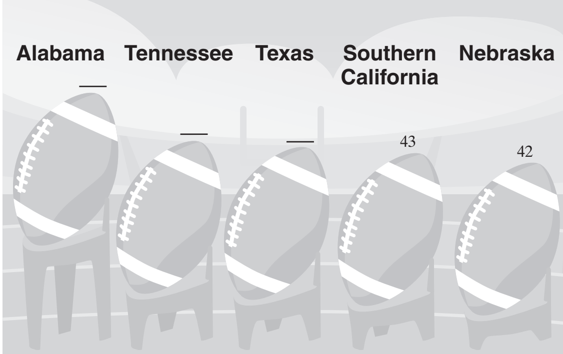
En los ejercicios del 43 al 62 resuelva cada problema mediante un sistema de tres ecuaciones con tres variables.

43. Volumen de correo La familia promedio de Estados Unidos recibe 24 piezas de correo cada semana. El número de estados de cuenta es dos menos que el doble del número de piezas de correo personal. El número de anuncios es dos más que cinco veces el número de piezas de correo personal. ¿Cuántas piezas de correo personal, estados de cuenta y anuncios recibe cada semana la familia promedio? *Fuente:* Arthur D. Little, Inc.

44. Personal de submarino El estándar de una tripulación es de 141 hombres en un submarino de Los Ángeles. El número de contramaestres (enlistados) es cuatro veces más que el número de oficiales comisionados. El número del resto de la tripulación es tres menos que ocho veces el número de oficiales comisionados. Determine el número de oficiales comisionados, contramaestres y del resto de la tripulación en el submarino.

45. Juegos en Tazones Colegiales Hasta 2004, las universidades de Alabama, Tenessee y Texas habían tenido el mayor número de apariciones en juegos de Tazones Colegiales de fútbol americano. Estas tres escuelas habían tenido un total de 141 apariciones en tazones, Alabama había tenido 8 apariciones más que Texas, juntas, el número de apariciones de Tennessee y Texas es 37 más que el número de apariciones de Alabama. Determine el número de apariciones en tazones de cada escuela y complete el diagrama siguiente.

Escuelas con mayor número de apariciones en un juego de Tazón Colegial de Fútbol Americano (incluye la temporada 2004)



Fuente: NCAA, USA Today (12/22/04)

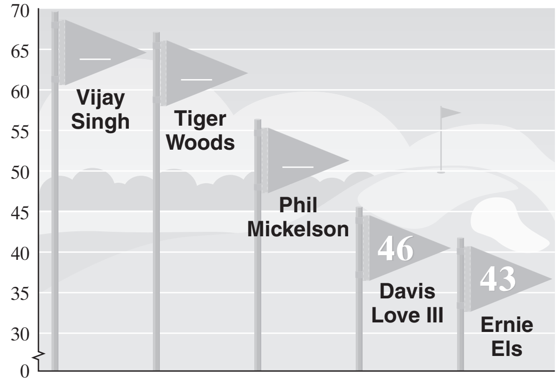
46. Olimpiadas de verano de 2004 En los Juegos Olímpicos de 2004 en Grecia, los países que ganaron la mayor cantidad de medallas de oro fueron Estados Unidos, China y Rusia. Juntos, estos tres países ganaron un total de 94 medallas de oro. Estados Unidos ganó 3 medallas de oro más que China. Reunidas las medallas de oro ganadas por Estados Unidos y Rusia es 2 menos que el doble del número de medallas de oro ganadas por China. Determine el número de medallas de oro ganadas por cada país y complete la tabla siguiente.

Juegos Olímpicos 2004

Clasificación por medallas de oro	País	Número de medallas de oro
1	Estados Unidos	
2	China	
3	Rusia	
4	Australia	17
5	Japón	16
6	Alemania	14

47. 10 mejores en la gira de la PGA En los cinco años de 2000 a 2004, los tres golfista con la mayor cantidad de veces en quedar entre los mejores 10 en la gira de la PGA (Asociación de golfistas profesionales), fueron Vijay Singh, Tiger Wood y Phil Mickelson. Juntos, durante estos años los tres golfistas tuvieron un total de 191 veces que terminaron entre los diez mejores. Tiger Woods tuvo 8 más que Phil Mickelson. Vijay Singh tuvo 12 más que Phil Mickelson. Determine el número de veces que cada uno de los golfistas terminó entre los mejores 10 y complete el diagrama siguiente.

Golfistas en el top 10



Fuente: PGA Tour, USA Today (1/12/05)

48. Carrera de la Nascar La copa Nascar Nextel consiste en 36 carreras; inician con Daytona 500 en febrero y termina con la Ford 400 en Miami en noviembre. En 2005, los tres pilotos con mayor puntaje fueron, en orden, Tony Stewart, Greg Biffle y Carl Edwards. Estos tres corredores tuvieron un total de 15 triunfos en la serie Nextel. Stewart tuvo un triunfo más que Edwards y Biffle tuvo dos triunfos más que Edwards. Determine el número de triunfos que tuvo cada piloto.

49. Tormenta de nieve en Nueva Inglaterra Durante la última semana de enero de 2005, Nueva Inglaterra tuvo un récord de tormenta de nieve. Las regiones costeras fueron fuertemente azotadas, algunas ciudades recibieron más de 3 pies de nieve. En Massachusetts, las ciudades de Haverhill, Plymouth y Salem tuvieron la mayor cantidad de nieve. El total de nieve que cayó en estas tres ciudades sumó 112.5 pulgadas. Salem y Plymouth tuvieron la misma cantidad de nieve. Ambas tuvieron 1.5 pulgadas más que Haverhill. Determine las cantidades de nieve que cayeron en cada una de estas ciudades.

50. Fútbol americano En la temporada regular de 2004 de la NFL (Liga Nacional de Fútbol americano), 19 jugadores anotaron 100 o más puntos. Los tres jugadores con la mayor cantidad de puntos fueron Adam Vinatieri (Nueva Inglaterra) Jason Elam (Denver) y Jeff Reed (Pittsburgh). Estos tres jugadores anotaron un total de 304 puntos. Vinatieri anotó 17 puntos más que Reed. Juntos, Vinatieri y Reed anotaron 7 puntos más que el doble de puntos que anotó Elam. Determine el número de puntos que anotaron Vinatieri, Elam y Reed. *Fuente:* eee.nfl.com/stats/leaders

Jeff Reed de los Acereros de Pittsburgh

51. Súper Tazones El Súper Tazón XXXIX se celebró el 6 de febrero de 2005, en Jacksonville, Florida. A lo largo de los años, los estados de Florida, California y Louisiana, en este orden, han sido anfitriones de la mayor cantidad de Súper Tazones. Estos tres estados han sido anfitriones del Súper Tazón un total de 32 veces. Florida ha tenido 3 Súper Tazones más que Louisiana. Juntos, Florida y Louisiana han tenido un Súper Tazón menos que el doble del número que ha tenido California. Determine el número de Súper Tazones que ha albergado cada uno de estos estados. *Fuente:* NFL, *USA Today* (1/2/05).

52. Boletos de concierto Para un concierto de Soggy Bottom Boys están disponibles tres clases de boletos: al frente, piso principal y palco. Los boletos más caros, del frente, son dos veces más caros que los boletos de palco. Los boletos de palco cuestan $10 menos que los boletos del piso principal y $30 menos que los boletos del frente. Determine el precio de cada clase de boleto.

53. Triángulo La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°. El ángulo más pequeño del triángulo tiene una medida de $\frac{2}{3}$ la medida del segundo ángulo más pequeño. El ángulo más grande tiene una medida que es 30° menos que tres veces la medida del segundo ángulo. Determine la medida de cada ángulo.

54. Triángulo El ángulo más grande de un triángulo tiene una medida que es 10° menos que tres veces la medida del segundo ángulo más pequeño. La medida del ángulo más pequeño es igual a la diferencia entre la medida del ángulo más grande y el doble de la medida del segundo ángulo. Determine las medidas de los tres ángulos del triángulo.

55. Inversiones Tam Phan recibió un cheque por $10,000. Ella decidió dividir el dinero (no equitativamente) en tres inversiones diferentes. Colocó parte de su dinero en una cuenta de ahorros que paga 3% de interés. La segunda cantidad, que fue el doble del primer monto, se colocó en un certificado de depósito que paga 5% de interés. El resto lo invirtió en un fondo del mercado de valores que paga 6% de interés. Si el interés total de Tam en un periodo de un año fue de $525.00, ¿cuánto invirtió en cada cuenta?

56. Bonos Nick Pfaff, un abogado, dividió su bono de Navidad en tres inversiones diferentes. Con parte del dinero compró un bono municipal que paga 5.5% de interés simple. Invirtió el doble del monto del dinero que pagó por el bono municipal en un certificado de depósito que paga 4.5% de interés simple. Nick colocó el resto del dinero en una cuenta del mercado de valores que paga 3.75% de interés simple. Si el interés total de Nick por un año fue $692.50, ¿cuánto invirtió en cada cuenta?

57. Peróxido de hidrógeno Una solución al 10%, otra al 12% y una más al 20% de peróxido de hidrógeno, se mezclarán para obtener ocho litros de una solución al 13%. ¿Cuántos litros de cada una deben mezclarse, si el volumen de la solución al 20% debe ser dos litros menos que el volumen de la solución al 10%?

58. Ácido sulfúrico Una solución al 8%, otra al 10% y una más al 20% de solución de ácido sulfúrico se mezclan para obtener 100 ml de una solución al 12%. Si el *volumen de ácido* de la solución al 8% es igual a la mitad del *volumen de ácido* proveniente de las otras dos soluciones, ¿cuánto de cada solución se necesitó?

59. Fabricación de muebles La compañía de muebles Donaldson produce tres tipos de mecedora: el modelo para niños, el modelo estándar y el modelo ejecutivo. Cada mecedora se fabrica en tres etapas: corte, construcción y acabado. El tiempo necesario para cada etapa de cada mecedora está dado en la tabla siguiente. Durante una semana específica la compañía tiene disponible un máximo de 154 horas para corte, 94 horas para construcción y 76 horas para acabado. Determine cuántas mecedoras de cada tipo debe fabricar la compañía para operar a su máxima capacidad.

Etapa	Para niños	Estándar	Ejecutiva
Corte	5 hr	4 hr	7 hr
Construcción	3 hr	2 hr	5 hr
Acabado	2 hr	2 hr	4 hr

60. Fabricación de bicicletas La compañía de bicicletas Jamis produce tres modelos de bicicletas: Dakar, Komodo y Aragon. Cada bicicleta se fabrica en tres etapas: soldadura, pintura y ensamblaje. El tiempo necesario para cada etapa de cada bicicleta está dado en la tabla de la página 265. Durante una semana específica, la compañía tiene disponible un máximo de 133 horas para soldadura, 78 horas para pintura y 96 horas para ensamblaje. Determine cuántas bicicletas de cada tipo debe producir la compañía para operar a su máxima capacidad.

Etapa	Dakar	Komodo	Aragon
Soldadura	2	3	4
Pintura	1	2	2.5
Ensamblaje	1.5	2	3

61. Flujo de corriente En electrónica es necesario analizar el flujo de corriente a través de redes (o trayectorias) en un circuito. En tres trayectorias (A, B y C) de un circuito, las relaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} I_A + I_B + I_C &= 0 \\ -8I_B + 10I_C &= 0 \\ 4I_A - 8I_B &= 6 \end{aligned}$$

donde I_A, I_B e I_C representan la corriente en las trayectorias A, B y C, respectivamente. Determine la corriente en cada trayectoria del circuito.

62. Fuerzas en una viga En física se suelen estudiar las fuerzas que actúan sobre un objeto. Para tres fuerzas, F_1, F_2 y F_3, que actúan sobre una viga, se obtuvieron las ecuaciones siguientes.

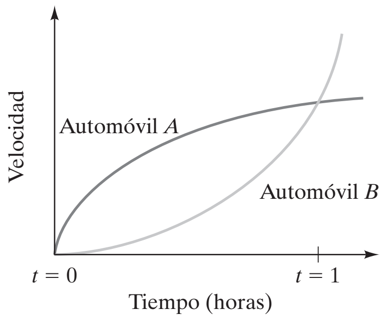
$$\begin{aligned} 3F_1 + F_2 - F_3 &= 2 \\ F_1 - 2F_2 + F_3 &= 0 \\ 4F_1 - F_2 + F_3 &= 3 \end{aligned}$$

Determine las tres fuerzas.

Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan el ejercicio 63.

63. Dos automóviles Un *sistema no lineal de ecuaciones* es un sistema de ecuaciones que contiene al menos una ecuación que no es lineal. (Los sistemas no lineales de ecuaciones se estudiarán en el capítulo 10). La gráfica muestra un sistema no lineal de ecuaciones. Las curvas representan velocidad contra tiempo para dos automóviles.



a) ¿Las dos curvas son funciones? Explique.

b) Analice el significado de esta gráfica.

c) En el instante $t = 0.5$ h, ¿cuál automóvil está viajando a una velocidad mayor? Explique su respuesta.

d) Suponga que los dos automóviles inician en la misma posición y viajan en la misma dirección. ¿Cuál automóvil, A o B, viaja más lejos en una hora? Explique su respuesta.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **64.** Evalúe $\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}xy + \frac{1}{8}y$ cuando $x = -2$, $y = 5$.

[2.1] **65.** Resuelva $4 - 2[(x - 5) + 2x] = -(x + 6)$.

[3.2] **66.** Explique cómo determinar si una gráfica representa a una función.

[3.5] **67.** Escriba una ecuación para la recta que pasa por los puntos $(6, -4)$ y $(2, -8)$.

Examen de mitad de capítulo: 4.1-4.3

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas y la sección donde se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

1. Para el sistema de ecuaciones siguiente:

a) Escriba cada ecuación en la forma pendiente intercepción.

b) Sin graficar las ecuaciones, indique si el sistema es consistente, inconsistente o dependiente.

c) Indique si el sistema tiene exactamente una solución, no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

$$\begin{aligned} 7x - y &= 13 \\ 2x + 3y &= 9 \end{aligned}$$

Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando el método gráfico.

2. $y = 2x$
$y = -x + 3$

3. $x + y = -4$
$3x - 2y = 3$

Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando el método de sustitución.

4. $2x + 5y = -3$
$x - 2y = -6$

5. $4x - 3y = 8$
$2x + y = -1$

Resuelva cada sistema de ecuaciones por el método de la suma.

6. $x = 4y - 19$

$7x + 5y = -1$

7. $3x + 4y = 3$

$9x + 5y = \frac{11}{2}$

Resuelva cada sistema de ecuaciones por cualquier método. Si el sistema es inconsistente o dependiente, indíquelo.

8. $\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b = -1$

$\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}b = 5$

9. $3m - 2n = 1$

$n = \frac{3}{2}m - 7$

10. $8x - 16y = 24$

$x = 2y + 3$

Resuelva cada sistema de ecuaciones.

11. $x + y + z = 2$

$2x - y + 2z = -2$

$3x + 2y + 6z = 1$

12. $2x - y - z = 1$

$3x + 5y + 2z = 12$

$-6x - 4y + 5z = 3$

13. Cuando se le pidió resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ -x + 2y + 2z &= 5 \\ 7x + 5y - z &= -2 \end{aligned}$$

Frank Dumont aseguró que la solución sólo era $x = 1$.

Esto es incorrecto. ¿Por qué es incorrecto? Explique su respuesta.

Luego resuelva completamente el sistema.

14. Anacardos y pacanas Una tienda de nueces vende anacardos a \$12 la libra y pacanas a \$6 por libra. ¿Cuántas libras de cada tipo debe comprar William Pritchard para tener una mezcla de 15 libras que se venda en \$10 la libra?

15. Suma de números La suma de tres números es 32. El número mayor es cuatro veces el número más pequeño. La suma de los dos números más pequeños es 8 menos que el número mayor. Determine los tres números.

4.4 Resolución de sistemas de ecuaciones por medio de matrices

1 Escribir una matriz aumentada.

2 Resolver sistemas de ecuaciones lineales.

3 Resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres variables.

4 Reconocer sistemas inconsistentes y sistemas dependientes.

1 Escribir una matriz aumentada

Una **matriz** es un arreglo rectangular de números dentro de corchetes. Ejemplos de matrices son

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Los números dentro de los corchetes son los **elementos** de la matriz.

La matriz de la izquierda tiene 2 renglones y 2 columnas y se llama matriz de 2 por 2 (2×2). La matriz de la derecha contiene 2 renglones y 3 columnas y es una matriz de 2 por 3 (2×3). El número de renglones es la primera dimensión que se da, y el número de columnas es la segunda dimensión que se da. Una **matriz cuadrada** tiene el mismo número de renglones que de columnas. Así, la matriz de la izquierda es una matriz cuadrada.

En esta sección utilizaremos matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El primer paso en la resolución de un sistema con dos ecuaciones lineales mediante matrices es escribir cada ecuación en la forma $ax + by = c$. El siguiente paso es escribir la **matriz aumentada**, que está formada por dos matrices pequeñas separadas por una línea vertical. Los números a la izquierda de la línea vertical son los coeficientes de las variables del sistema de ecuaciones y los números de la derecha son las constantes. Para el sistema de ecuaciones

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

la matriz aumentada se escribe

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right]$$

A continuación tenemos un sistema de ecuaciones y su matriz aumentada.

Sistema de ecuaciones

$$-x + \frac{1}{6}y = 4$$
$$-3x - 5y = -\frac{1}{2}$$

Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & \frac{1}{6} & 4 \\ -3 & -5 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Observe que la barra en la matriz aumentada separa los coeficientes numéricos de las constantes. Como la matriz es sólo una forma abreviada de escribir el sistema de ecuaciones, podemos resolver un sistema lineal utilizando matrices de una manera similar a como resolvemos un sistema de ecuaciones utilizando el método de la suma.

2 Resolver sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales mediante matrices, rescribimos la matriz aumentada en **forma triangular**,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & p \\ 0 & 1 & q \end{array}\right]$$

donde la a, p y q son constantes. A partir de este tipo de matriz aumentada podemos escribir un sistema de ecuaciones equivalentes. Esta matriz representa el sistema lineal

$$\begin{aligned} 1x + ay &= p \\ 0x + 1y &= q \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x + ay &= p \\ y &= q \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \quad \text{representa} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Observe que el sistema anterior, en el lado derecho, puede resolverse fácilmente por sustitución. Su solución es $(-6, 5)$.

Utilizamos **transformaciones de renglón** para reescribir la matriz aumentada en forma triangular. Utilizaremos tres procedimientos de transformación de renglones.

Procedimientos para la transformación de renglones

1. Todos los números de un renglón pueden multiplicarse por (o dividirse entre) cualquier número real distinto de cero. (Esto es lo mismo que multiplicar ambos lados de una ecuación por un número real distinto de cero).
2. Todos los números de un renglón pueden multiplicarse por cualquier número real distinto de cero. Estos productos pueden entonces sumarse a los números correspondientes en cualquier otro renglón. (Esto es equivalente a eliminar una variable del sistema de ecuaciones utilizando el método de la suma).
3. Dos renglones de una matriz pueden intercambiarse. (Esto es lo mismo que intercambiar dos ecuaciones en el sistema de ecuaciones).

Por lo general, al cambiar un elemento de la matriz aumentada por un 1 utilizamos el procedimiento 1 de las transformaciones de renglón, y al cambiar un elemento por un 0 utilizamos el procedimiento 2 de las transformaciones de renglón. *Se trabaja por columnas, comenzando por la izquierda*. Inicie con la primera columna, primer renglón.

EJEMPLO 1 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando matrices.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 10 \\ 4x + 5y &= 9 \end{aligned}$$

Solución Primero escriba la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 10 \\ 4 & 5 & 9 \end{array}\right]$$

Nuestro objetivo es obtener una matriz de la forma $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & p \\ 0 & 1 & q \end{array}\right]$ Comenzamos utilizando el procedimiento 1 de las transformaciones de renglón para cambiar el 2 en la primera columna y primer renglón por un 1. Para hacerlo, multiplicamos el primer renglón de números por $\frac{1}{2}$. (Abreviamos esta multiplicación como $\frac{1}{2}R_1$ y lo colocamos a la derecha de la matriz en el mismo renglón en que se realizó la operación. Esto puede ayudarle a seguir el proceso con mayor claridad).

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2\left(\frac{1}{2}\right) & -3\left(\frac{1}{2}\right) & 10\left(\frac{1}{2}\right) \\ 4 & 5 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{2}R_1 \\ \\ \end{array}$$

Con esto se obtiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{array}\right]$$

El paso siguiente es obtener 0 en la primera columna, segundo renglón. Donde por el momento se encuentra un 4. Lo hacemos multiplicando los números del primer renglón por -4, y sumamos los productos a los números del segundo renglón. (Esto se abrevia $-4R_1 + R_2$).

Los números del primer renglón multiplicados por -4 son

$$1(-4) \quad -\frac{3}{2}(-4) \quad 5(-4)$$

Ahora sumamos estos productos a sus números respectivos del segundo renglón. Con esto obtenemos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ 4 + 1(-4) & 5 + \left(-\frac{3}{2}\right)(-4) & 9 + 5(-4) \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -4R_1 + R_2 \end{array}$$

Ahora tenemos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ 0 & 11 & -11 \end{array}\right]$$

Para obtener 1 en la segunda columna, segundo renglón, multiplicamos el segundo renglón de números por $\frac{1}{11}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ 0\left(\frac{1}{11}\right) & 11\left(\frac{1}{11}\right) & -11\left(\frac{1}{11}\right) \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \frac{1}{11}R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Ahora la matriz se encuentra en la forma que buscamos. El sistema de ecuaciones triangular equivalente es

$$\begin{aligned} x - \frac{3}{2}y &= 5 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Ahora podemos obtener el valor de x utilizando sustitución.

$$\begin{aligned} x - \frac{3}{2}y &= 5 \\ x - \frac{3}{2}(-1) &= 5 \\ x + \frac{3}{2} &= 5 \\ x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Una verificación mostrará que la solución del sistema es $\left(\frac{7}{2}, -1\right)$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 19**

3 Resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres variables

Ahora utilizaremos las matrices para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables. Utilizamos el mismo procedimiento de transformaciones de renglón que se empleó para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales. Nuestro objetivo es obtener una matriz aumentada en la forma triangular

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & p \\ 0 & 1 & c & q \\ 0 & 0 & 1 & r \end{array}\right]$$

donde a, b, c y p, q y r son constantes. Esta matriz representa el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 1x + ay + bz &= p \\ 0x + 1y + cz &= q \\ 0x + 0y + 1z &= r \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} x + ay + bz &= p \\ y + cz &= q \\ z &= r \end{aligned}$$

Al construir una matriz aumentada, *trabaje por columnas, desde la columna del extremo izquierdo hasta la columna del extremo derecho. Siempre termine una columna antes de pasar a la siguiente. En cada columna, obtenga primero el 1 en la posición indicada, y después obtenga los ceros*. El ejemplo 2 ilustra este procedimiento.

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

Al usar matrices tenga cuidado de mantener todos los números alineados de forma adecuada en renglones y columnas. Un pequeño error al copiar números de una matriz a otra conducirá a un intento incorrecto, y con frecuencia frustrante, de resolver un sistema de ecuaciones.

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones, $\begin{aligned} x - 3y + z &= 3 \\ 4x + 2y - 5z &= 20 \\ -5x - y - 4z &= 13 \end{aligned}$, cuando se representa de manera correcta con la matriz aumentada, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 & 20 \\ -5 & -1 & -4 & 13 \end{array}\right]$, lleva a la solución $(1, -2, -4)$.

Sin embargo, una matriz que parece muy similar, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & 20 \\ -5 & 2 & -4 & 13 \end{array}\right]$, conduce a la terna ordenada incorrecta $\left(-\frac{25}{53}, -\frac{130}{53}, -\frac{206}{53}\right)$.

EJEMPLO 2 ▸ Utilice matrices para resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -7 \\ 2x - y - z &= 7 \\ -x + 3y + 2z &= -8 \end{aligned}$$

Solución Primero escriba la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & -8 \end{array}\right]$$

Nuestro primer paso es utilizar las transformaciones para cambiar la primera columna a $\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}$. Como el número de la primera columna, primer renglón ya es 1, trabajaremos con el 2 de la primera columna y segundo renglón. Multiplicamos los números del primer renglón por -2 y sumamos los productos a los números respectivos del segundo renglón, con lo que cambiará el 2 por 0. Ahora la matriz es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -7 & 21 \\ -1 & 3 & 2 & -8 \end{array}\right] -2R_1 + R_2$$

Continuamos hacia abajo en la primera columna y cambiamos el -1 del tercer renglón por un 0. Multiplicamos los números del primer renglón por 1 y sumamos los productos al tercer renglón para obtener

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -7 & 21 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \end{array}\right] 1R_1 + R_3$$

Ahora trabajamos con la segunda columna. Queremos cambiar los números de la segunda columna a la forma $\begin{matrix}a\\1\\0\end{matrix}$ donde a representa un número. Como hay un 1 en el tercer renglón y segunda columna, y queremos un 1 en el segundo renglón, segunda columna, intercambiamos los renglones dos y tres de la matriz. Esto da

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 3 & -7 & 21 \end{array}\right] \text{Intercambiar } R_2 \text{ y } R_3.$$

Continuamos hacia abajo con la segunda columna; ahora cambiamos el 3 del tercer renglón por un 0, multiplicando los números del segundo renglón por -3 y sumando los productos al tercer renglón. Esto produce

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & -22 & 66 \end{array}\right] -3R_2 + R_3$$

Ahora trabajamos con la tercera columna. Deseamos cambiar los números de la tercera columna a la forma $\begin{matrix}b\\c\\1\end{matrix}$ donde b y c representan números. Debemos cambiar el -22 del tercer renglón por un 1. Podemos lograr esto multiplicando los números del tercer renglón por $-\frac{1}{22}$. Esto da como resultado lo siguiente.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] -\tfrac{1}{22}R_3$$

Ahora esta matriz tiene la forma deseada. De esta matriz obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -7 \\ y + 5z &= -15 \\ z &= -3 \end{aligned}$$

La tercera ecuación nos da el valor de z en la solución. Ahora podemos obtener el valor para y, sustituyendo -3 por z en la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} y + 5z &= -15 \\ y + 5(-3) &= -15 \\ y - 15 &= -15 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Ahora obtenemos el valor para x, sustituyendo 0 por y y -3 por z en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -7 \\ x - 2(0) + 3(-3) &= -7 \\ x - 0 - 9 &= -7 \\ x - 9 &= -7 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solución es $(2, 0, -3)$. Ahora, verifique esto mediante la sustitución de los valores apropiados en cada una de las ecuaciones originales.

Ahora resuelva el ejercicio 33

4 Reconocer sistemas inconsistentes y sistemas dependientes

Al resolver un sistema de dos ecuaciones, si obtiene una matriz aumentada en la que todo un renglón de números de un lado de la recta vertical contiene ceros, pero no aparece un cero en el mismo renglón del otro lado de la recta vertical, el sistema es inconsistente y no tiene solución. Por ejemplo, un sistema de ecuaciones con el que se obtiene la siguiente matriz aumentada es un sistema inconsistente.

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema inconsistente}$$

El segundo renglón de la matriz representa la ecuación

$$0x + 0y = 3$$

la cual nunca es verdadera.

Si obtiene una matriz en la cual aparecen ceros en todo el renglón, el sistema de ecuaciones es dependiente. Por ejemplo, un sistema de ecuaciones que produce la siguiente matriz aumentada es un sistema dependiente.

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema dependiente}$$

El segundo renglón de la matriz representa la ecuación

$$0x + 0y = 0$$

la cual siempre es verdadera.

Se cumplen reglas similares para los sistemas de ecuaciones con tres ecuaciones.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema inconsistente}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & -4 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema dependiente}$$

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Muchas calculadoras graficadoras tienen la capacidad para trabajar con matrices. Tales calculadoras tienen capacidad para realizar operaciones de renglón sobre matrices. Por consiguiente, estas calculadoras graficadoras pueden utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones mediante matrices.

Lea el manual de instrucciones que viene con su calculadora graficadora para ver si puede manipular matrices. Si es así, aprenda cómo utilizar su calculadora graficadora para resolver sistemas de ecuaciones mediante matrices.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una matriz cuadrada?

2. Explique cómo construir una matriz aumentada.

3. Si obtiene la matriz aumentada siguiente cuando resuelve un sistema de ecuaciones, ¿cuál sería el paso siguiente para completar el proceso? Explique.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 14 \end{array}\right]$$

4. Si obtuvo la matriz aumentada siguiente al resolver un sistema de ecuaciones, ¿cuál sería el paso siguiente para completar el proceso? Explique su respuesta.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & -8 \end{array}\right]$$

5. Si obtuvo la matriz aumentada siguiente al resolver un sistema de ecuaciones, ¿cuál sería el paso siguiente para completar el proceso? Explique su respuesta.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \end{array}\right]$$

6. Si obtuvo la matriz aumentada siguiente al resolver un sistema de ecuaciones, ¿cuál sería el paso siguiente para completar el proceso? Explique su respuesta.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right]$$

7. Al resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices, si dos renglones son idénticos, ¿el sistema será consistente, dependiente o inconsistente?

8. Cuando resuelva un sistema de ecuaciones mediante matrices, ¿cómo sabrá si el sistema es

a) dependiente,

b) inconsistente?

Práctica de habilidades

Realice cada una de las transformaciones de renglón indicada y escriba la matriz nueva.

9. $\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -10 & -25 \\ 3 & -7 & -4 \end{array}\right]$ Multiplique los números del primer renglón por $\frac{1}{5}$.

10. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{array}\right]$ Multiplique los números del segundo renglón por $\frac{1}{4}$.

11. $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & -8 \end{array}\right]$ Intercambie los renglones 1 y 3.

12. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right]$ Intercambie el renglón 2 y el renglón 3.

13. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 12 \\ -4 & 11 & -6 \end{array}\right]$ Multiplique los números del primer renglón por 4 y sume los productos al segundo renglón.

14. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ \frac{1}{2} & 10 & -4 \end{array}\right]$ Multiplique los números del primer renglón por $-\frac{1}{2}$ y sume los productos al segundo renglón.

15. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & \frac{1}{4} \\ 5 & 2 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]$ Multiplique los números del primer renglón por -5 y sume los productos al segundo renglón.

16. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right]$ Multiplique los números del tercer renglón por $\frac{1}{3}$.

Resuelva cada sistema utilizando matrices.

17. $x + 3y = 3$; $-x + y = -3$

18. $x + 2y = 10$; $3x - y = 9$

19. $x + 3y = -2$; $-2x - 7y = 3$

20. $3x + 6y = 0$; $2x - y = 10$

21. $5a - 10b = -10$; $2a + b = 1$

22. $3s - 2t = 1$; $-2s + 4t = -6$

23. $2x - 5y = -6$; $-4x + 10y = 12$

24. $-2m - 4n = 7$; $3m + 6n = -8$

25. $12x + 2y = 2$; $6x - 3y = -11$

26. $4r + 2s = -10$; $-2r + s = -7$

27. $-3x + 6y = 5$; $2x - 4y = 7$

28. $8x = 4y + 12$; $-2x + y = -3$

29. $12x - 8y = 6$; $-3x + 4y = -1$

30. $2x - 3y = 3$; $-5x + 9y = -7$

31. $10m = 8n + 15$; $16n = -15m - 2$

32. $8x = 9y + 4$; $16x - 27y = 11$

Resuelva cada sistema utilizando matrices.

33. $x - 3y + 2z = 5$; $2x + 5y - 4z = -3$; $-3x + y - 2z = -11$

34. $a - 3b + 4c = 7$; $4a + b + c = -2$; $-2a - 3b + 5c = 12$

35. $x + 2y = 5$; $y - z = -1$; $2x - 3z = 0$

36. $3a - 5c = 3$; $a + 2b = -6$; $7b - 4c = 5$

37. $x - 2y + 4z = 5$; $-3x + 4y - 2z = -8$; $4x + 5y - 4z = -3$

38. $3x + 5y + 2z = 3$; $-x - y - z = -2$; $2x - 2y + 5z = 11$

39. $2x - 5y + z = 1$; $3x - 5y + z = 3$; $-4x + 10y - 2z = -2$

40. $x + 2y + 3z = 1$; $4x + 5y + 6z = -3$; $7x + 8y + 9z = 0$

41. $4p - q + r = 4$; $-6p + 3q - 2r = -5$; $2p + 5q - r = 7$

42. $-4r + 3s - 6t = 14$; $4r + 2s - 2t = -3$; $2r - 5s - 8t = -23$

43. $2x - 4y + 3z = -12$; $3x - y + 2z = -3$; $-4x + 8y - 6z = 10$

44. $3x - 2y + 4z = -1$; $5x + 2y - 4z = 9$; $-6x + 4y - 8z = 2$

45. $5x - 3y + 4z = 22$; $-x - 15y + 10z = -15$; $-3x + 9y - 12z = -6$

46. $9x - 4y + 5z = -2$; $-9x + 5y - 10z = -1$; $9x + 3y + 10z = 1$

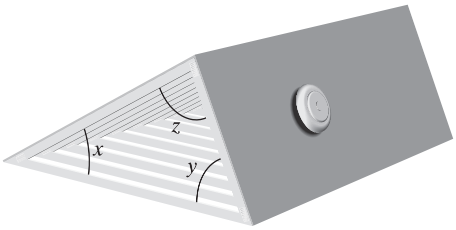
Resolución de problemas

47. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante matrices, si dos renglones de la matriz se intercambian, ¿cambiará la solución del sistema? Explique.

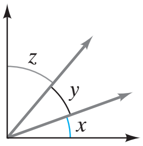
48. Puede decir si un sistema de dos ecuaciones con dos variables es consistente, dependiente o inconsistente, comparando las pendientes e intersecciones con y de las gráficas de las ecuaciones. Sin resolver, ¿puede decir si un sistema de tres ecuaciones con tres variables es consistente, dependiente o inconsistente? Explique.

Resuelva utilizando matrices.

49. Ángulos de un tejado En un tejado de sección transversal triangular, el ángulo más grande es 55° mayor que el ángulo más pequeño. El ángulo más grande es 20° mayor que el tercer ángulo. Determine la medida de cada ángulo.

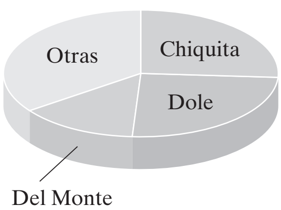


50. Ángulo recto Un ángulo recto se divide en tres ángulos más pequeños. El más grande de los tres ángulos es el doble del más pequeño. El tercer ángulo es 10° mayor que el ángulo más pequeño. Determine la medida de cada ángulo.



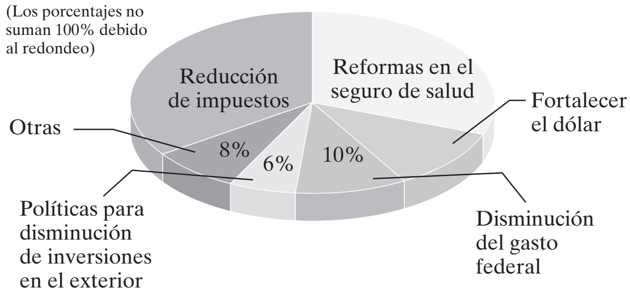
51. Plátanos Sesenta y cinco por ciento de los plátanos del mundo son controlados por Chiquita, Dole, o Del Monte (todas compañías de Estados Unidos). Chiquita, la más grande, controla 12% más plátanos que Del Monte. Dole, la segunda en tamaño, controla 3% menos que el doble del porcentaje que controla Del Monte. Determine los porcentajes que se deberán colocar en cada sector del círculo de la gráfica que se muestra.

Plátanos en el mundo



52. Impacto en los negocios A una muestra de directores generales en una encuesta de TEC International se le pidió listar los cambios más importantes que podrían hacerse de 2004 a 2006 para fortalecer sus compañías. Las tres respuestas principales fueron, en orden: reducir impuestos, reformar los seguros de salud, y fortalecer el dólar. Setenta y siete por ciento de todos los directores generales seleccionaron uno de estos tres puntos como su opción principal. Cuatro por ciento más de directores generales seleccionó la reducción de impuestos en vez de reformar los seguros de salud. La reducción de impuestos fue dos por ciento mayor que tres veces el porcentaje de quienes seleccionaron fortalecer el dólar. Determine el porcentaje de directores generales que seleccionaron la reducción de impuestos, reformar el seguro de salud y fortalecer el dólar. Luego complete la gráfica siguiente.

¿Qué tendría mayor impacto en su empresa?



Fuente: Encuesta de TEC International realizada a 2,300 directores generales.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **53.** $A = \{1, 2, 4, 6, 9\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 10\}$. Determine

a) $A \cup B$;

b) $A \cap B$.

[2.5] **54.** Indique la desigualdad $-1 < x \leq 4$

a) en una recta numérica,

b) como un conjunto solución y

c) en notación de intervalo.

[3.2] **55.** ¿Qué representa una gráfica?

[3.4] **56.** Si $f(x) = -2x^2 + 3x - 6$, determine $f(-5)$.

4.5 Resolución de sistemas de ecuaciones por medio de determinantes y la regla de Cramer

1. Evaluar un determinante de una matriz de 2 × 2.
2. Utilizar la regla de Cramer.
3. Evaluar un determinante de una matriz de 3 × 3.
4. Utilizar la regla de Cramer con sistemas de tres variables.

1 Evaluar un determinante de una matriz de 2 × 2

Hemos estudiado varias formas de resolver un sistema de ecuaciones lineales, incluyendo: graficación, sustitución, el método de la suma (o eliminación) y matrices. Un sistema de ecuaciones lineales también puede resolverse mediante determinantes.

Asociado con cada matriz cuadrada está un número denominado su **determinante**. Para una matriz de 2 × 2, su determinante se define como sigue.

Determinante

El **determinante** de una matriz de 2 × 2 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ se denota por $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ y se evalúa como

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

EJEMPLO 1 Evalúe cada determinante.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

Solución

a) $a_1 = 2, a_2 = 3, b_1 = -1, b_2 = -5$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - (3)(-1) = -10 + 3 = -7$$

b) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (-1)(3) = 8 + 3 = 11$$

Ahora resuelva el ejercicio 7

2 Utilizar la regla de Cramer

Si comenzamos con las ecuaciones

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

podemos utilizar el método de la suma para mostrar que

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{y} \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

(vea el problema 65 de Retos en la página 281). Observe que los *denominadores* de x y y son ambos $a_1b_2 - a_2b_1$. A continuación está el determinante que produce este denominador. Hemos etiquetado este denominador como D.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Los *numeradores* de x y y son diferentes. A continuación se encuentran dos determinantes, etiquetados con D_x y D_y con los que se obtienen los numeradores de x y y.

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Utilizamos los determinantes D, D_x y D_y en la regla de Cramer. La **regla de Cramer** puede utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Regla de Cramer para sistemas de ecuaciones lineales

Para un sistema de ecuaciones de la forma

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D} \quad \text{y} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}, \quad D \neq 0$$

Sugerencia útil

Los elementos del determinante D son los coeficientes numéricos de los términos x y y en las dos ecuaciones dadas, listados en el mismo orden en que aparecen dentro de las ecuaciones. Para obtener el determinante D_x, a partir del determinante D, reemplace los coeficientes de los términos de x (los valores de la primera columna) con las constantes de las dos ecuaciones dadas. Para obtener el determinante D_y, a partir del determinante D, reemplace los coeficientes de los términos de y (los valores de la segunda columna) con las constantes de las dos ecuaciones dadas.

EJEMPLO 2 Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema siguiente.

$$3x + 5y = 7$$
$$4x - y = -6$$

Solución Ambas ecuaciones están en la forma deseada, $ax + by = c$. Cuando etiquetamos las constantes, a, b y c nos referimos a $3x + 5y = 7$ como la ecuación 1 y $4x - y = -6$ como la ecuación 2 (en los subíndices).

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & & b_1 & & c_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 3x & + & 5y & = & 7 \\ 4x & - & 1y & = & -6 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ a_2 & & b_2 & & c_2 \end{array}$$

Ahora determinamos D, D_x y D_y.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 4(5) = -3 - 20 = -23$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = 7(-1) - (-6)(5) = -7 + 30 = 23$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 3(-6) - 4(7) = -18 - 28 = -46$$

Ahora encontramos el valor de x y de y.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{23}{-23} = -1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-46}{-23} = 2$$

Así, la solución es $x = -1$, $y = 2$ o el par ordenado $(-1, 2)$. Una comprobación mostrará que este par ordenado satisface ambas ecuaciones.

Ahora resuelva el ejercicio 15

Cuando el determinante $D = 0$, la regla de Cramer no se puede aplicar ya que no está definida la división entre cero. Entonces debe utilizar un método diferente para resolver el sistema. O bien, puede evaluar D_x y D_y para determinar si el sistema es dependiente e inconsistente.

Cuando $D = 0$

Si $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$, entonces el sistema es dependiente.

Si $D = 0$, y ocurre que $D_x \neq 0$ o $D_y \neq 0$, entonces el sistema es inconsistente.

3 Evaluar un determinante de una matriz 3×3

Para el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

el **determinante menor** (o simplemente el menor) de a_1, se encuentra tachando los elementos del mismo renglón y la misma columna donde aparece el elemento a_1. Los demás elementos forman el determinante menor de a_1. El determinante menor de los otros elementos se encuentra de manera similar.

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} & \cancel{c_1} \\ \cancel{a_2} & b_2 & c_2 \\ \cancel{a_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \textit{Determinante menor de } a_1$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & b_1 & c_1 \\ \cancel{a_2} & \cancel{b_2} & \cancel{c_2} \\ \cancel{a_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \textit{Determinante menor de } a_2$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & b_1 & c_1 \\ \cancel{a_2} & b_2 & c_2 \\ \cancel{a_3} & \cancel{b_3} & \cancel{c_3} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \textit{Determinante menor de } a_3$$

Para evaluar los determinantes de una matriz de 3×3, utilizamos los determinantes menores. El siguiente cuadro muestra cómo podemos evaluar **por el desarrollo de menores de la primera columna** tal determinante.

Desarrollo de los determinantes mediante los menores de la primera columna

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \overset{\substack{\textit{Determinante} \\ \textit{menor} \\ \textit{de } a_1 \\ \downarrow}}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} - a_2 \overset{\substack{\textit{Determinante} \\ \textit{menor} \\ \textit{de } a_2 \\ \downarrow}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} + a_3 \overset{\substack{\textit{Determinante} \\ \textit{menor} \\ \textit{de } a_3 \\ \downarrow}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

EJEMPLO 3 Evalúe $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ utilizando el desarrollo del determinante mediante los menores de la primera columna.

Solución Seguiremos el procedimiento dado en el recuadro.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} &= 4\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 4[5(-1) - (-3)0] - 3[(-2)(-1) - (-3)6] + 1[(-2)0 - 5(6)] \\
&= 4(-5 + 0) - 3(2 + 18) + 1(0 - 30) \\
&= 4(-5) - 3(20) + 1(-30) \\
&= -20 - 60 - 30 \\
&= -110
\end{aligned}$$

El determinante tiene un valor de -110.

Ahora resuelva el ejercicio 13

4 Utilizar la regla de Cramer con sistemas de tres variables

La regla de Cramer puede ampliarse a los sistemas de ecuaciones con tres variables como sigue.

Regla de Cramer para un sistema de ecuaciones con tres variables

Para resolver el sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

entonces

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}, \quad D \neq 0$$

Observe que todos los denominadores de las expresiones para x, y y z son el mismo determinante, D. Observe que en D_x las constantes d reemplazan a las a, los coeficientes numéricos de los términos x. En D_y las d reemplazan a las b, los coeficientes numéricos de los términos y. En D_z las d reemplazan a las c, los coeficientes numéricos de los términos z.

EJEMPLO 4 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando determinantes.

$$\begin{aligned} 3x - 2y - z &= -6 \\ 2x + 3y - 2z &= 1 \\ x - 4y + z &= -3 \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{array}{llll} a_1 = 3 & b_1 = -2 & c_1 = -1 & d_1 = -6 \\ a_2 = 2 & b_2 = 3 & c_2 = -2 & d_2 = 1 \\ a_3 = 1 & b_3 = -4 & c_3 = 1 & d_3 = -3 \end{array}$$

Utilizaremos el desarrollo de los determinantes menores del primer renglón para evaluar D, D_x, D_y y D_z.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-5) - 2(-6) + 1(7)$$
$$= -15 + 12 + 7 = 4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -6 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -6(-5) - 1(-6) - 3(7)$$
$$= 30 + 6 - 21 = 15$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-5) - 2(-9) + 1(13)$$
$$= -15 + 18 + 13 = 16$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-5) - 2(-18) + 1(16)$$

$$= -15 + 36 + 16 = 37$$

Encontramos que $D = 4$, $D_x = 15$, $D_y = 16$ y $D_z = 37$. Por lo tanto,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{15}{4} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{16}{4} = 4 \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{37}{4}$$

La solución del sistema es $\left(\frac{15}{4}, 4, \frac{37}{4}\right)$. Observe que la terna ordenada muestra a x, y y z en este orden.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 33

Cuando tenemos un sistema de ecuaciones con tres variables, en el cual una o más ecuaciones no tienen una variable, insertamos la variable con el coeficiente 0. Así,

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -1 \\ x + 2y &= 14 \\ x - 3z &= -5 \end{aligned} \quad \text{se escribe} \quad \begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -1 \\ x + 2y + 0z &= 14 \\ x + 0y - 3z &= -5 \end{aligned}$$

Sugerencia útil

Al evaluar los determinantes, si dos renglones (o columnas) son idénticos, o idénticos excepto por signos opuestos, el determinante tiene un valor de 0. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -5 & 3 & -4 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Como en el caso de los determinantes de una matriz de 2×2, cuando el determinante $D = 0$ no se puede utilizar la regla de Cramer, ya que no está definida la división entre 0. Entonces, hay que utilizar un método distinto para resolver el sistema. O bien, si evalúa D_x, D_y y D_z para determinar si el sistema es dependiente o inconsistente.

Cuando $D = 0$

Si $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$ y $D_z = 0$, entonces el sistema es dependiente.

Si $D = 0$, y se cumple que $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$ o $D_z \neq 0$, entonces el sistema es inconsistente.

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

En la sección 4.4 mencionamos que algunas calculadoras graficadoras pueden manejar matrices. Las calculadoras graficadoras con capacidades de matrices también pueden evaluar determinantes de matrices cuadradas. Lea el manual de su calculadora graficadora para aprender si su calculadora puede evaluar determinantes. Si es así, aprenda cómo hacerlo en su calculadora.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.5

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique cómo evaluar un determinante de 2×2.
2. Explique cómo evaluar un determinante de 3×3, mediante el desarrollo de menores de la primera columna.
3. Explique cómo puede determinar si un sistema de tres ecuaciones lineales es inconsistente usando determinantes.
4. Explique cómo puede determinar si un sistema de tres ecuaciones lineales es dependiente usando determinantes.
5. Al resolver un sistema de dos ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer, obtuvo que $D = 4$, $D_x = 12$ y $D_y = -2$. ¿Cuál es la solución para este sistema?
6. Al resolver un sistema de tres ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer, obtuvo que $D = -8$, $D_x = 6$, $D_y = 14$ y $D_z = -2$. ¿Cuál es la solución para este sistema?

Práctica de habilidades

Evalúe cada determinante.

7. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 13 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 5 & -8 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando determinantes.

15. $x + 3y = 1$
$-2x - 3y = 4$

16. $2x + 4y = -2$
$-5x - 2y = 13$

17. $-x - 2y = 2$
$x + 3y = -6$

18. $2r + 3s = -9$
$3r + 5s = -16$

19. $6x = 4y + 7$
$8x - 1 = -3y$

20. $6x + 3y = -4$
$9x + 5y = -6$

21. $5p - 7q = -21$
$-4p + 3q = 22$

22. $4x = -5y - 2$
$-2x = y + 4$

23. $x + 5y = 3$
$2x - 6 = -10y$

24. $9x + 6y = -3$
$6x + 4y = -2$

25. $3r = -4s - 6$
$3s = -5r + 1$

26. $x = y - 1$
$3y = 2x + 9$

27. $5x - 5y = 3$
$-x + y = -4$

28. $2x - 5y = -3$
$-4x + 10y = 7$

29. $6.3x - 4.5y = -9.9$
$-9.1x + 3.2y = -2.2$

30. $-1.1x + 8.3y = 36.5$
$3.5x + 1.6y = -4.1$

Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando determinantes.

31. $x + y + z = 3$
$-3y + 4z = 15$
$-3x + 4y - 2z = -13$

32. $2x + 3y = 4$
$3x + 7y - 4z = -3$
$x - y + 2z = 9$

33. $3x - 5y - 4z = -4$
$4x + 2y = 1$
$6y - 4z = -11$

34. $2x + 5y + 3z = 2$
$6x - 9y = 5$
$3y + 2z = 1$

35. $x + 4y - 3z = -6$
$2x - 8y + 5z = 12$
$3x + 4y - 2z = -3$

36. $2x + y - 2z = 4$
$2x + 2y - 4z = 1$
$-6x + 8y - 4z = 1$

37. $a - b + 2c = 3$
$a - b + c = 1$
$2a + b + 2c = 2$

38. $-2x + y + 8 = -2$
$3x + 2y + z = 3$
$x - 3y - 5z = 5$

39. $a + 2b + c = 1$
$a - b + 3c = 2$
$2a + b + 4c = 3$

40. $4x - 2y + 6z = 2$
$-6x + 3y - 9z = -3$
$2x - 7y + 11z = -5$

41. $1.1x + 2.3y - 4.0z = -9.2$
$-2.3x + 4.6z = 6.9$
$-8.2y - 7.5z = -6.8$

42. $4.6y - 2.1z = 24.3$
$-5.6x + 1.8y = -5.8$
$2.8x - 4.7y - 3.1z = 7.0$

43. $-6x + 3y - 12z = -13$
$5x + 2y - 3z = 1$
$2x - y + 4z = -5$

44. $x - 2y + z = 2$
$4x - 6y + 2z = 3$
$2x - 3y + z = 0$

45. $2x + \frac{1}{2}y - 3z = 5$
$-3x + 2y + 2z = 1$
$4x - \frac{1}{4}y - 7z = 4$

46. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + 3z = -3$
$2x - 3y + 2z = -1$
$\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 1$

47. $0.3x - 0.1y - 0.3z = -0.2$
$0.2x - 0.1y + 0.1z = -0.9$
$0.1x + 0.2y - 0.4z = 1.7$

48. $0.6u - 0.4v + 0.5w = 3.1$
$0.5u + 0.2v + 0.2w = 1.3$
$0.1u + 0.1v + 0.1w = 0.2$

Resolución de problemas

49. Dado un determinante de la forma $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, ¿cómo cambiará el valor del determinante, si se intercambian las a y las b entre sí $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$? Explique su respuesta.

50. Dado un determinante de la forma $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, ¿cómo cambiará el valor del determinante, si las a se intercambian con las b $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$? Explique su respuesta.

51. En un determinante de 2×2, si los renglones son iguales, ¿cuál es el valor del determinante?

52. Si todos los elementos de un renglón o una columna de un determinante de 2×2 son 0, ¿cuál es el valor del determinante?

53. Si todos los elementos de un renglón o una columna de un determinante 3×3 son 0, ¿cuál es el valor del determinante?

54. Dado un determinante de 3×3, si todos los elementos de un renglón se multiplican por -1, ¿cambiará el valor del determinante? Explique.

55. Dado un determinante de 3×3, si el primero y segundo renglones se intercambian, ¿cambiará el valor del determinante? Explique.

56. En un determinante de 3×3, si dos renglones son iguales, ¿puede hacer una generalización acerca del valor del determinante?

57. En un determinante de 3×3, si los números del primer renglón se multiplican por -1 y los números del segundo renglón se multiplican por -1, ¿el valor del nuevo determinante cambiará? Explique.

58. En un determinante de 3×3, si los números en el segundo renglón se multiplican por -1 y los números en el tercer renglón se multiplican por -1, ¿cambiará el valor del nuevo determinante? Explique.

59. En un determinante de 3×3, si los números en el segundo renglón se multiplican por 2, ¿cambiará el valor del nuevo determinante? Explique.

60. En un determinante de 3×3, si los números en el primer renglón se multiplican por 3 y los números del tercer renglón se multiplican por 4, ¿ cambiará el valor del nuevo determinante? Explique.

Determine el valor de la letra dada.

61. $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & y \end{vmatrix} = 32$

62. $\begin{vmatrix} b-3 & -4 \\ b+2 & -6 \end{vmatrix} = 14$

63. $\begin{vmatrix} 4 & 7 & y \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -35$

64. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -6 \\ -1 & x & -7 \end{vmatrix} = -31$

Retos

65. Utilice el método de la suma para resolver el sistema siguiente para **a)** x, **b)** y.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] **66.** Resuelva la desigualdad $3(x - 2) < \frac{4}{5}(x - 4)$ e indique la solución en notación de intervalo.

Grafique $3x + 4y = 8$, *mediante el método indicado.*

[3.2] **67.** Por medio del trazo de puntos.

68. Utilizando las intersecciones con x y con y.

[3.3] **69.** Utilizando la pendiente e intersección con y.

4.6 Resolución de sistemas de desigualdades

1 Resolver sistemas de desigualdades lineales.

2 Resolver problemas de programación lineal.

3 Resolver sistemas de desigualdades lineales que tienen valor absoluto.

1 Resolver sistemas de desigualdades lineales

En la sección 3.7 mostramos cómo graficar desigualdades lineales con dos variables. En la sección 4.1 aprendimos a resolver de manera gráfica sistemas de ecuaciones. En esta sección mostramos cómo resolver **sistemas de desigualdades lineales** de manera gráfica.

Para resolver un sistema de desigualdades lineales

Grafique cada desigualdad en los mismos ejes. La solución es el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen todas las desigualdades del sistema.

EJEMPLO 1 Determine la solución del sistema de desigualdades.

$$y < -\frac{1}{2}x + 2$$
$$x - y \leq 4$$

Solución Primero grafique la desigualdad $y < -\frac{1}{2}x + 2$ (vea la **figura 4.8**). Ahora, en los mismos ejes, grafique la desigualdad $x - y \leq 4$ (**figura 4.9**). La solución es el conjunto de puntos comunes a las gráficas de ambas desigualdades. Ésta es la parte de la gráfica que tiene ambos sombreados. La línea discontinua no es parte de la solución, pero la parte de la línea sólida que satisface ambas desigualdades sí lo es.

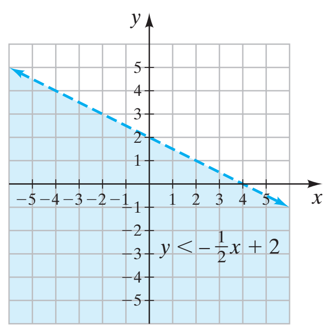


FIGURA 4.8

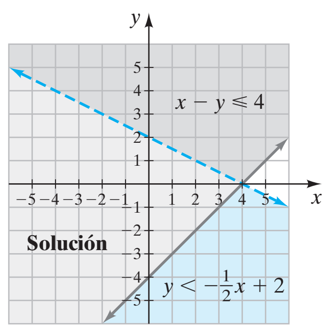


FIGURA 4.9

Ahora resuelva el ejercicio 5

EJEMPLO 2 Determine la solución del sistema de desigualdades.

$$3x - y < 6$$
$$2x + 2y \geq 5$$

Solución Grafique $3x - y < 6$ (vea la **figura 4.10**). Grafique $2x + 2y \geq 5$ en el mismo conjunto de ejes (**figura 4.11**). La solución es la parte de la gráfica con los dos sombreados y la parte de la línea sólida que satisface ambas desigualdades.

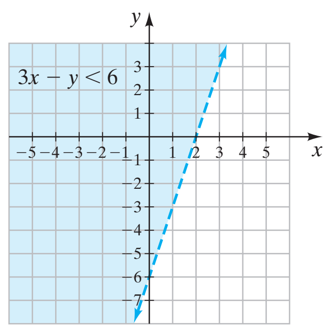


FIGURA 4.10

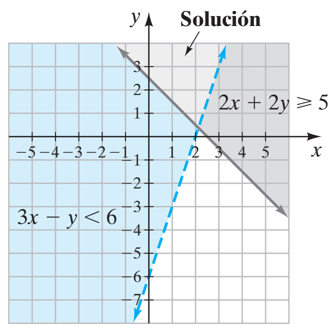


FIGURA 4.11

Ahora resuelva el ejercicio 7

EJEMPLO 3 ▸ Determine la solución del sistema de desigualdades.

$$y > -1$$
$$x \leq 4$$

Solución La **figura 4.12** ilustra la solución.

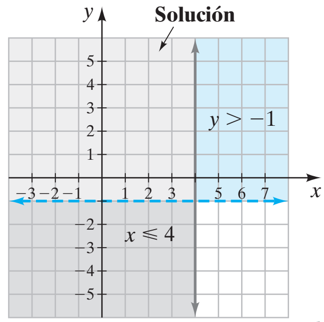


FIGURA 4.12

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 15**

2 Resolver problemas de programación lineal

Existe un proceso matemático llamado **programación lineal**, donde con frecuencia hay que graficar más de dos desigualdades lineales en los mismos ejes. Estas desigualdades se llaman **restricciones**. Los dos ejemplos siguientes ilustran la forma de determinar la solución de un sistema de más de dos desigualdades.

EJEMPLO 4 ▸ Determine la solución del siguiente sistema de desigualdades.

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$2x + 3y \leq 12$$
$$2x + y \leq 8$$

Solución Las primeras dos desigualdades, $x \geq 0$ y $y \geq 0$, indican que la solución debe estar en el primer cuadrante, ya que es el único cuadrante donde ambas x y y son positivas. La **figura 4.13** ilustra las gráficas de las cuatro desigualdades.

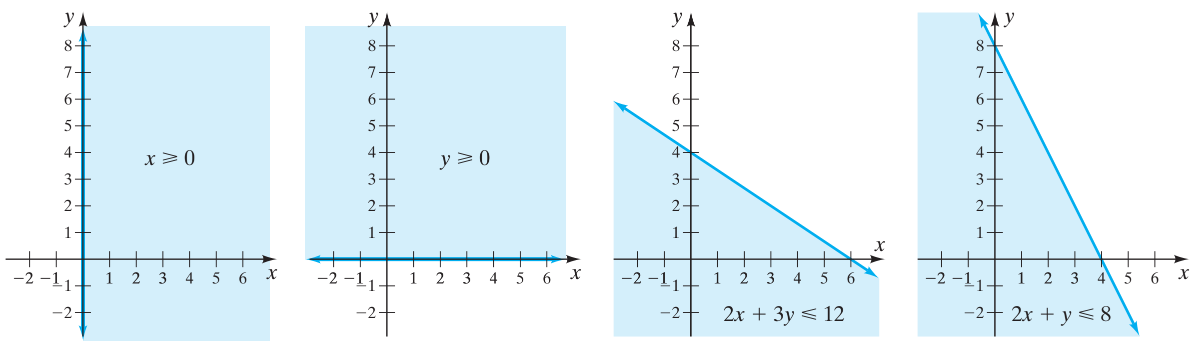


FIGURA 4.13

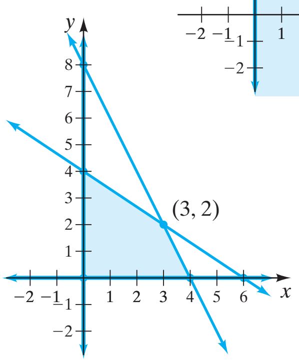


FIGURA 4.14

La **figura 4.14** ilustra las gráficas en los mismos ejes y la solución del sistema de desigualdades. Observe que todos los puntos que están en el área sombreada y todos los puntos sobre las rectas que forman la región poligonal forman parte de la respuesta.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 23**

EJEMPLO 5 ▸ Determine la solución del siguiente sistema de desigualdades.

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ x &\leq 15 \\ 8x + 8y &\leq 160 \\ 4x + 12y &\leq 180 \end{aligned}$$

Solución Las primeras dos desigualdades indican que la solución debe estar en el primer cuadrante. La tercera desigualdad indica que x debe ser un valor menor o igual a 15. La **figura 4.15a** indica las gráficas de las ecuaciones correspondientes y muestra la región que satisface todas las desigualdades del sistema. La **figura 4.15b** indica la solución del sistema de desigualdades.

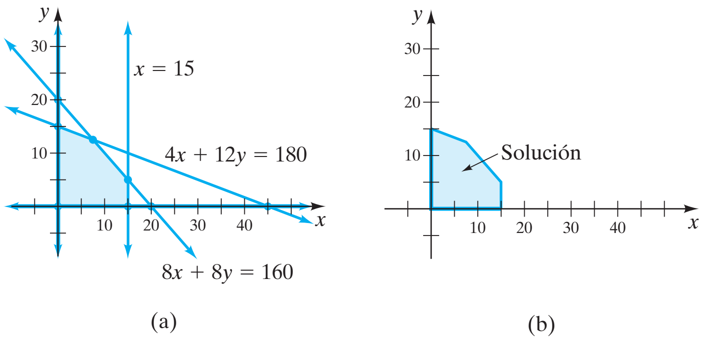


FIGURA 4.15

▸ Ahora resuelva el ejercicio 29

3 Resolver sistemas de desigualdades lineales que tienen valor absoluto

Ahora graficaremos, en el sistema de coordenadas cartesianas, *sistemas de desigualdades lineales que tienen valor absoluto*. Antes de hacer algunos ejemplos, recordemos las reglas para las desigualdades con valor absoluto que aprendimos en la sección 2.6. Recuerde lo siguiente:

Resolución de desigualdades con valor absoluto

Si $|x| < a$ y $a > 0$, entonces $-a < x < a$.
Si $|x| > a$ y $a > 0$, entonces $x < -a$ o $x > a$.

EJEMPLO 6 ▸ Grafique $|x| < 3$ en el sistema de coordenadas cartesianas.

Solución Con base en las reglas dadas, sabemos que $|x| < 3$ significa $-3 < x < 3$. Trazamos rectas verticales discontinuas por -3 y 3 y sombreamos el área entre las dos (**figura 4.16**).

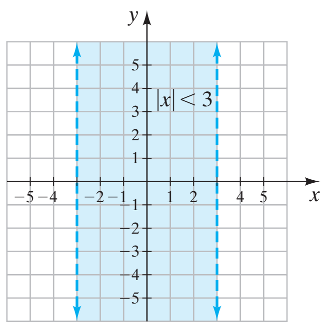


FIGURA 4.16

▸ Ahora resuelva el ejercicio 33

EJEMPLO 7 Grafique $|y + 1| > 3$ en el sistema de coordenadas cartesianas.

Solución A partir de las reglas dadas anteriormente, sabemos que $|y + 1| > 3$ significa que $y + 1 < -3$ o $y + 1 > 3$. Resolvemos cada desigualdad.

$$\begin{aligned} y + 1 &< -3 \qquad \text{o} \qquad & y + 1 &> 3 \\ y &< -4 & y &> 2 \end{aligned}$$

Ahora graficamos ambas desigualdades y consideramos la *unión* de las dos gráficas. La solución es el área sombreada de la **figura 4.17**.

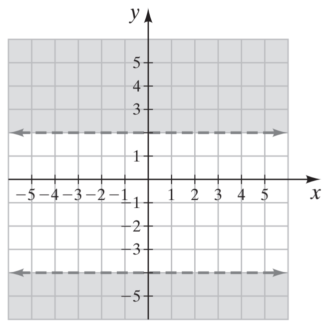


FIGURA 4.17

Ahora resuelva el ejercicio 35

EJEMPLO 8 Grafique el sistema de desigualdades.

$$|x| < 3$$
$$|y + 1| > 3$$

Solución Graficamos ambas desigualdades en los mismos ejes. Por lo tanto, combinamos la gráfica del ejemplo 6 con la del ejemplo 7 (vea la **figura 4.18**). Los puntos comunes a ambas desigualdades forman la solución del sistema.

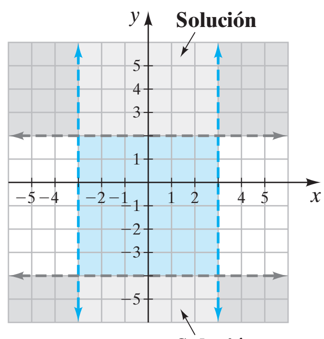


FIGURA 4.18

Ahora resuelva el ejercicio 41

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.6

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique cómo determinar, de manera gráfica, la solución para un sistema de desigualdades lineales.
2. Si en un sistema de dos desigualdades, una desigualdad tiene $<$ y la otra desigualdad tiene $\geq$, ¿el punto de intersección, de las dos rectas frontera de las desigualdades, está en el conjunto solución? Explique.
3. Si en un sistema de dos desigualdades, una desigualdad tiene $\leq$ y la otra desigualdad tiene $\geq$, ¿el punto de intersección, de las dos rectas frontera de las desigualdades, está en el conjunto solución? Explique.
4. Si en un sistema de dos desigualdades, una desigualdad tiene $<$ y la otra desigualdad tiene $>$, ¿el punto de intersección, de las dos rectas frontera de las desigualdades, está en el conjunto solución? Explique.

Práctica de habilidades

Determine la solución de cada sistema de desigualdades.

5. $2x - y < 4$, $y \geq -x + 2$

6. $y \leq -2x + 1$, $y > -3x$

7. $y < 3x - 2$, $y \leq -2x + 3$

8. $y \geq 2x - 5$, $y > -3x + 5$

9. $y < x$, $y \geq 3x + 2$

10. $-3x + 2y \geq -5$, $y \leq -4x + 7$

11. $-2x + 3y < -5$, $3x - 8y > 4$

12. $-4x + 3y \geq -4$, $y > -3x + 3$

13. $-4x + 5y < 20$, $x \geq -3$

14. $y \geq -\frac{2}{3}x + 1$, $y > -4$

15. $x \leq 4$, $y \geq -2$

16. $x \geq 0$, $x - 3y < 6$

17. $5x + 2y > 10$, $3x - y > 3$

18. $3x + 2y > 8$, $x - 5y < 5$

19. $-2x > y + 4$, $-x < \frac{1}{2}y - 1$

20. $y \leq 3x - 2$, $\frac{1}{3}y < x + 1$

21. $y < 3x - 4$, $6x \geq 2y + 8$

22. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \geq 2$, $2x - 3y \leq -6$

Determine la solución de cada sistema de desigualdades. Utilice el método analizado en los ejemplos 4 y 5.

23. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y \leq 6$, $4x + y \leq 4$

24. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6$, $7x + 4y \leq 28$

25. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y \leq 8$, $4x + 2y \leq 8$

26. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 2y \leq 18$, $2x + 4y \leq 20$

27. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + y \leq 9$, $2x + 5y \leq 10$

28. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $5x + 4y \leq 16$, $x + 6y \leq 18$

29. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 4$, $x + y \leq 6$, $x + 2y \leq 8$

30. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 4$, $2x + 3y \leq 18$, $4x + 2y \leq 20$

31. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 15$, $30x + 25y \leq 750$, $10x + 40y \leq 800$

32. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 15$, $40x + 25y \leq 1000$, $5x + 30y \leq 900$

Determine la solución de cada desigualdad.

33. $|x| < 2$

34. $|x| > 1$

35. $|y - 2| \leq 4$

36. $|y| \geq 2$

Determine la solución de cada sistema de desigualdades.

37. $|y| > 2$, $y \leq x + 3$

38. $|x| > 1$, $y \leq 3x + 2$

39. $|y| < 4$, $y \geq -2x + 2$

40. $|x - 2| \leq 3$, $x - y > 2$

41. $|x + 2| < 3$, $|y| > 4$

42. $|x - 2| > 1$, $y > -2$

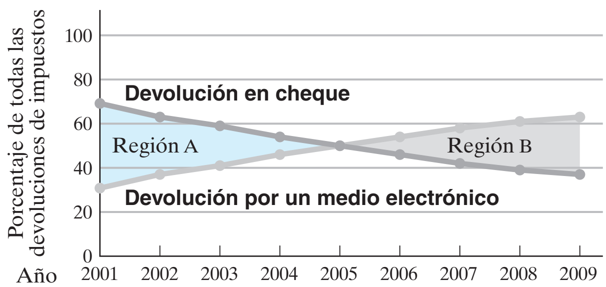
43. $|x - 3| \leq 4$, $|y + 2| \leq 1$

44. $|x + 1| \leq 2$, $|y - 3| \leq 1$

Resolución de problemas

45. Devolución de impuestos La gráfica siguiente muestra el porcentaje de impuestos federales devueltos de manera electrónica y por medio de cheque durante los años de 2001 a 2005 y la proyección hasta el año 2009. La información para la gráfica se obtuvo del sitio web del IRS.

Método de devolución de impuestos federales



Fuente: Servicio Interno de Ingresos: www.irs.gov>pubs

Sea $P(t)$ las devoluciones mediante cheque (línea color negro) y sea $E(t)$ la devolución por medios electrónicos (línea en color rojo). Las regiones entre las dos curvas se identifican como Región A, sombreada en color rosa o región B sombreada en color gris.

a) ¿Cuál región, A o B, es una solución para el sistema de desigualdades?

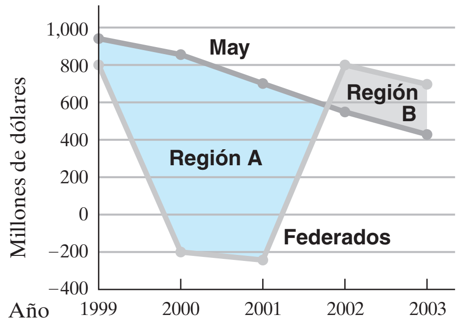
$$y \leq P(t)$$
$$y \geq E(t)$$

b) ¿Cuál región, A o B, es una solución para el sistema de desigualdades?

$$y \geq P(t)$$
$$y \leq E(t)$$

46. Ingreso de Almacenes departamentales La gráfica siguiente muestra el ingreso neto anual, en millones de dólares, durante 1999-2003 de los Almacenes Departamentales Federados (Macy's, Bloomingdale's, Burdines) y los Almacenes Departamentales May (Hecht's, Lord & Taylor, Filene's).

Ingreso neto anual para Almacenes Departamentales Federados y Almacenes Departamentales May



Fuente: Thomson Financial, las compañías, *The Washington Post* (21/1/05)

Sea $P(t)$ el ingreso para los Almacenes Departamentales May (línea en negro) y sea $Q(t)$ el ingreso para los Almacenes Departamentales Federados (línea en rojo). Las regiones entre las dos curvas están identificadas como Región A, sombreada en rosa, o Región B, sombreada en gris.

a) ¿Cuál región, A o B, es una solución para el sistema de desigualdades?

$$y \geq P(t)$$
$$y \leq Q(t)$$

b) ¿Cuál región, A o B, es una solución para el sistema de desigualdades?

$$y \leq P(t)$$
$$y \geq Q(t)$$

47. Para un sistema de desigualdades lineales, ¿es posible no tener solución? Explique. Construya un ejemplo para apoyar su respuesta.

48. Para un sistema de dos desigualdades lineales, ¿es posible tener exactamente una solución? Explique. Si su respuesta es sí, construya un ejemplo para apoyar su respuesta.

Sin graficar, determine el número de soluciones en cada sistema de desigualdades que se indica. Explique sus respuestas.

49. $3x - y \leq 4$
$3x - y > 4$

50. $2x + y < 6$
$2x + y > 6$

51. $5x - 2y \leq 3$
$5x - 2y \geq 3$

52. $5x - 3y > 5$
$5x - 3y > -1$

53. $2x - y < 7$
$3x - y < -2$

54. $x + y \leq 0$
$x - y \geq 0$

Retos

Determine la solución para cada sistema de desigualdades.

55. $y \geq x^2$
$y \leq 4$

56. $y < 4 - x^2$
$y > -5$

57. $y < |x|$
$y < 4$

58. $y \geq |x - 2|$
$y \leq -|x - 2|$

Ejercicios de repaso acumulativo

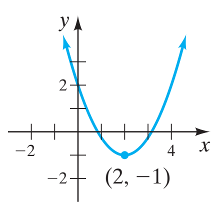
[2.2] **59.** Una fórmula para palancas en física es $f_1d_1 + f_2d_2 = f_3d_3$. De esta fórmula despeje a f_2.

[3.2] *Establezca el dominio y rango de cada función.*

60. $\{(4, 3), (5, -2), (-1, 2), (0, -5)\}$

61. $f(x) = \dfrac{2}{3}x - 4$

62.



Resumen del capítulo 4

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 4.1

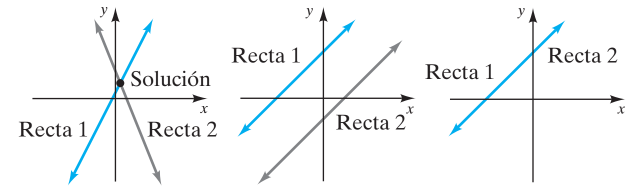
Un **sistema de ecuaciones lineales** es un sistema que tiene dos o más ecuaciones lineales.
Una **solución** para un sistema de ecuaciones lineales es la pareja ordenada o parejas ordenadas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

Sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = \dfrac{1}{2}x + 6 \end{cases}$

La solución del sistema de ecuaciones anterior es $(2, 7)$.

Un **sistema consistente de ecuaciones** es un sistema de ecuaciones que tiene una solución
Un **sistema inconsistente de ecuaciones** es un sistema que no tiene solución.
Un **sistema dependiente de ecuaciones** es un sistema de ecuaciones que tiene un número infinito de soluciones.

Exactamente 1 solución (rectas que se intersecan) | **No hay solución** (rectas paralelas) | **Número infinito de soluciones** (la misma recta)



Consistente (a) | **Inconsistente** (b) | **Dependiente** (c)

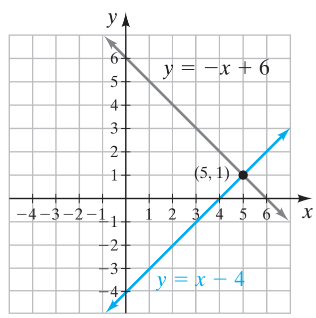
Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones lineales

1. Grafique ambas rectas.
2. Determine el (los) punto(s) de intersección, si existe(n).
3. Compruebe su solución en todas las ecuaciones del sistema.

Resuelva gráficamente el sistema de ecuaciones

$$y = x - 4$$
$$y = -x + 6$$

Grafique ambas rectas en el mismo conjunto de ejes



Una comprobación muestra que $(5, 1)$ es una solución para el sistema de ecuaciones.

Para resolver por sustitución un sistema lineal de ecuaciones

1. Despeje una variable de alguna ecuación.
2. Sustituya la expresión que encontró para la variable en el paso 1 en la otra ecuación.
3. Resuelva la ecuación que obtuvo en el paso 2 para determinar el valor de esta variable.
4. Sustituya el valor, que encontró en el paso 3, en la ecuación del paso 1. Resuelva la ecuación para determinar la variable restante.
5. Compruebe su solución en todas las ecuaciones del sistema.

Resuelva, por sustitución, el sistema de ecuaciones.

$$y = -2x - 1$$
$$5x + 6y = 8$$

Sustituya $y = -2x - 1$ en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 8 \\ 5x + 6(-2x - 1) &= 8 \\ 5x - 12x - 6 &= 8 \\ -7x - 6 &= 8 \\ -7x &= 14 \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Sustituya $x = -2$ en $y = -2x - 1$ para obtener

$$\begin{aligned} y &= -2x - 1 \\ y &= -2(-2) - 1 = 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

Una comprobación muestra que $(-2, 3)$ es una solución para el sistema de ecuaciones.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 4.1 (continuación)

Para resolver, por el método de la suma (o eliminación), un sistema lineal de ecuaciones

1. Si es necesario, reescriba cada ecuación en la forma general.
2. Si es necesario, multiplique una o ambas ecuaciones por una constante(s) para que cuando las ecuaciones se sumen, la suma tenga una sola variable.
3. Sume los lados respectivos de las ecuaciones.
4. Resuelva para la variable de la ecuación que obtuvo en el paso 3.
5. Sustituya el valor que encontró en el paso 4 en cualquiera de las ecuaciones originales. Resuelva esa ecuación para determinar los valores de la variable restante.
6. Compruebe su solución en todas las ecuaciones del sistema.

Resuelva el sistema de ecuaciones mediante el método de sustitución.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \quad &(ec.\ 1)\\ x - 2y &= 2 \quad &(ec.\ 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 8 \quad &(ec.\ 1)\ \text{Multiplicada por 2}\\ x - 2y &= 2 &\\ \hline 5x \qquad &= 10 \quad &\text{Suma de las ecuaciones}\\ x &= 2 & \end{aligned}$$

Ahora despeje a y mediante la (*ec.* 1).

$$\begin{aligned} 2(2) + y &= 4\\ y &= 0 \end{aligned}$$

La solución es $(2, 0)$.

Sección 4.2

Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales, utilice el método de sustitución o el método de la suma.

Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= -1 \quad &(ec.\ 1)\\ 4y - 7z &= 2 \quad &(ec.\ 2)\\ z &= 2 \quad &(ec.\ 3) \end{aligned}$$

Sustituya 2 por z en (*ec.* 2) para obtener el valor de y.

$$\begin{aligned} 4y - 7z &= 2\\ 4y - 7(2) &= 2\\ 4y &= 16\\ y &= 4. \end{aligned}$$

Sustituya 4 por y y 2 por z en la (*ec.* 1) para obtener el valor para x.

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= -1\\ x - 4 + 3(2) &= -1\\ x &= -3. \end{aligned}$$

Una verificación muestra que $(-3, 4, 2)$ es una solución para el sistema de ecuaciones.

Sección 4.3

Aplicaciones:
Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

La suma de las áreas de dos círculos es 180 metros cuadrados. La diferencia de sus áreas es 20 metros cuadrados. Determine el área de cada círculo.

Solución
Sea x el área del círculo mayor y y el área del círculo menor.
Las dos ecuaciones para este sistema son

$$\begin{aligned} x + y &= 180 \leftarrow \text{Suma de áreas}\\ x - y &= 20 \leftarrow \text{Diferencia de áreas}\\ \hline 2x \qquad &= 200\\ x &= 100 \end{aligned}$$

Sustituya 100 por x en la primera ecuación para obtener

$$\begin{aligned} x + y &= 180\\ 100 + y &= 180\\ y &= 80 \end{aligned}$$

El área del círculo mayor es $100\ m^2$ y el área del círculo más pequeño es $80\ m^2$.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 4.4

Una **matriz** es un arreglo rectangular de números entre corchetes, Los números dentro de los corchetes se denominan **elementos**.

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 8 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$$

Una **matriz cuadrada** tiene el mismo número de renglones y columnas

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 5 & 2 \\ 9 & 10 & -7 \end{bmatrix}$$

Una **matriz aumentada** es una matriz separada por una línea vertical. Para un sistema de ecuaciones, en la matriz aumentada, los coeficientes de las variables se colocan del lado izquierdo de la línea vertical y las constantes del lado derecho.

La **forma triangular** de una matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & p \\ 0 & 1 & q \end{array}\right]$$

SISTEMA

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 8 \\ 5x + 7y &= -4 \end{aligned}$$

MATRIZ AUMENTADA

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 8 \\ 5 & 7 & -4 \end{array}\right]$$

forma triangular $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$

Las **transformaciones de renglones** pueden utilizarse para reescribir una matriz en la forma triangular.

Procedimiento para transformaciones de renglones

1. Todos los números en un renglón pueden multiplicarse (o dividirse) por cualquier número real distinto de cero.
2. Todos los números de un renglón pueden multiplicarse por cualquier número real distinto de cero. Luego, estos productos pueden sumarse a los números correspondientes de cualquier otro renglón.
3. El orden de los renglones puede intercambiarse.

Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 4y &= -7 \\ 6x - 5y &= 16 \end{aligned}$$

La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -7 \\ 6 & -5 & 16 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -29 & 58 \end{array}\right] \; -6R_1 + R_2$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \; -\frac{1}{29}R_2$$

El sistema equivalente de ecuaciones es

$$\begin{aligned} x + 4y &= -7 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Sustituya -2 por y en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x + 4(-2) &= -7 \\ x - 8 &= -7 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

La solución es $(1, -2)$.

Un sistema de ecuaciones es **inconsistente** y **no tiene solución** si usted obtiene una matriz aumentada en la que un renglón de números tiene únicamente ceros del lado izquierdo de la línea vertical y un número distinto de cero en el lado derecho de la línea vertical.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 7 & 6 & 9 \end{array}\right]$$

El segundo renglón muestra que este sistema es inconsistente y no tiene solución.

Un sistema de ecuaciones es **dependiente** y tiene un **número infinito de soluciones** si obtiene una matriz aumentada en la que aparece un renglón con únicamente ceros.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & -12 \end{array}\right]$$

El segundo renglón muestra que este sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 4.5	

El **determinante** de una matriz de 2×2 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ se denota con $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ y se evalúa como

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (5)(-2) = 3 + 10 = 13$$

Regla de Cramer para sistemas de ecuaciones lineales

Para un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D} \quad \text{y} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}, \quad D \neq 0$$

Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$2x + y = 6$$
$$4x - 3y = -13$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -13 & -3 \end{vmatrix} = -5 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -13 \end{vmatrix} = -50$$

Entonces

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-50}{-10} = 5$$

La solución es $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$.

Para el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

El **determinante menor** (o sólo menor) **de a_1** se determina eliminando los elementos del mismo renglón y la misma columna que tienen al elemento a_1.

Para $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix}$, el determinante menor de a_1 es $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$.

Desarrollo del determinante por los menores de la primera columna

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\underbrace{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante menor de } a_1} - a_2\underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante menor de } a_2} + a_3\underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante menor de } a_3}$$

Evalúe $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix}$ mediante el desarrollo de menores de la primera columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 3 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(8) + 1(-18) + 3(15)$$
$$= 16 - 18 + 45$$
$$= 43$$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 4.5 (continuación)

Regla de Cramer para un sistema de ecuaciones con tres variables

Para resolver el sistema

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

entonces

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}, \quad D \neq 0$$

Resuelva el sistema de ecuaciones,

$$2x + y + z = 0$$
$$4x - y + 3z = -9$$
$$6x + 2y + 5z = -8$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -10 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -9 & -1 & 3 \\ -8 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -9 & 3 \\ 6 & -8 & 5 \end{vmatrix} = -20 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -9 \\ 6 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 30$$

Entonces

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-20}{-10} = 2 \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{30}{-10} = -3$$

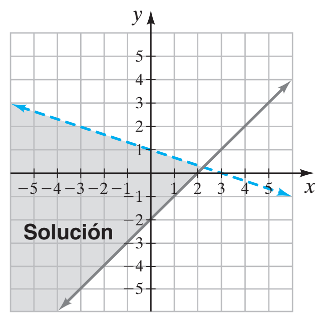
La solución es $\left(\frac{1}{2}, 2, -3\right)$.

Sección 4.6

Para resolver un sistema de desigualdades lineales, grafique cada desigualdad en los mismos ejes. La solución es el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen todas las desigualdades del sistema.

Determine la solución para el sistema de desigualdades.

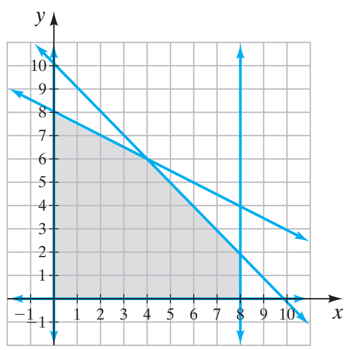
$$y < -\frac{1}{3}x + 1$$
$$x - y \leq 2$$

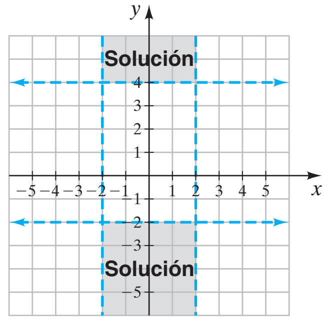


La **programación lineal** es un proceso en donde dos o más desigualdades lineales se grafican en los mismos ejes.

Determine la solución para el sistema de desigualdades.

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$x \leq 8$$
$$x + y \leq 10$$
$$x + 2y \leq 16$$



HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 4.6 (continuación)	
Para sistemas de desigualdades lineales, que incluyan valores absolutos: Si $\lvert x\rvert < a$ y $a > 0$, entonces $-a < x < a$. Si $\lvert x\rvert > a$ y $a > 0$, entonces $x < -a$ o $x > a$	Determine la solución para el sistema de desigualdades. $\lvert x\rvert < 2$ $\lvert y - 1\rvert > 3$ 

Ejercicios de repaso del capítulo 4

[4.1] *Escriba cada ecuación en la forma pendiente ordenada al origen. Sin graficar ni resolver el sistema de ecuaciones, establezca si el sistema de ecuaciones lineales es consistente, inconsistente o dependiente. También indique si el sistema tiene exactamente una solución, ninguna solución o un número infinito de soluciones.*

1. $2x - 3y = -1$; $-4x + 6y = 1$

2. $4x - 5y = 8$; $3x + 4y = 9$

3. $y = \frac{1}{3}x + 4$; $x + 2y = 8$

4. $6x = 5y - 8$; $4x = 6y + 10$

Determine la solución de cada sistema de ecuaciones de manera gráfica. Si el sistema es inconsistente o dependiente, indíquelo.

5. $y = x + 3$; $y = 2x + 5$

6. $x = -5$; $y = 3$

7. $3x + 3y = 12$; $2x - y = -4$

8. $3y - 3x = -9$; $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}$

Determine la solución de cada sistema de ecuaciones mediante sustitución.

9. $y = -4x + 2$; $y = 3x - 12$

10. $4x - 3y = -1$; $y = 2x + 1$

11. $a = 2b - 8$; $2b - 5a = 0$

12. $2x + y = 12$; $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 1$

Determine la solución de cada sistema de ecuaciones utilizando el método de la suma.

13. $x - 2y = 5$; $2x + 2y = 4$

14. $-2x - y = 5$; $2x + 2y = 6$

15. $2a + 3b = 7$; $a - 2b = -7$

16. $0.4x - 0.3y = 1.8$; $-0.7x + 0.5y = -3.1$

17. $4r - 3s = 8$; $2r + 5s = 8$

18. $-2m + 3n = 15$; $3m + 3n = 10$

19. $x + \frac{3}{5}y = \frac{11}{5}$; $x - \frac{3}{2}y = -2$

20. $4x + 4y = 16$; $y = 4x - 3$

21. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$; $x + \frac{5}{4}y = \frac{7}{2}$

22. $2x - 5y = 12$; $x - \frac{4}{3}y = -2$

23. $2x + y = 4$; $3x + \frac{3}{2}y = 6$

24. $2x = 4y + 5$; $2y = x - 7$

[4.2] *Determine la solución de cada sistema de ecuaciones utilizando el método de sustitución o el de la suma.*

25. $x - 2y - 4z = 13$; $3y + 2z = -2$; $5z = -20$

26. $2a + b - 2c = 5$; $3b + 4c = 1$; $3c = -6$

27. $x + 2y + 3z = 3$; $-2x - 3y - z = 5$; $3x + 3y + 7z = 2$

28. $-x - 4y + 2z = 1$; $2x + 2y + z = 0$; $-3x - 2y - 5z = 5$

29. $3y - 2z = -4$
$3x - 5z = -7$
$2x + y = 6$

30. $a + 2b - 5c = 19$
$2a - 3b + 3c = -15$
$5a - 4b - 2c = -2$

31. $x - y + 3z = 1$
$-x + 2y - 2z = 1$
$x - 3y + z = 2$

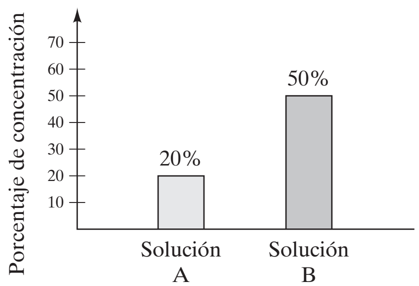
32. $-2x + 2y - 3z = 6$
$4x - y + 2z = -2$
$2x + y - z = 4$

[4.3] *Exprese cada problema como un sistema de ecuaciones lineales y utilice el método de su elección para determinar la solución del problema.*

33. Edades Luan Baker es 10 años mayor que su sobrina Jennifer Miesen. Si la suma de sus edades es 66, determine la edad de Luan y la edad de Jennifer.

34. Velocidad del viento Un avión puede viajar a 560 millas por hora con el viento a favor y a 480 millas por hora con el viento en contra. Determine la velocidad del viento y la velocidad del avión con viento en calma.

35. Mezcla de soluciones Sally Dove tiene dos soluciones ácidas como se muestra. ¿Qué cantidad de cada una debe mezclar para obtener 6 litros de una solución de ácido al 40%?



36. Hockey sobre hielo La admisión a un juego de hockey sobre hielo es de \$15 por adulto y \$11 por niño. Se vendieron un total de 650 boletos, determine cuántos boletos para niños y cuántos boletos para adultos se vendieron, si se recolectó un total de \$8790.

37. Regresó al espacio John Glenn fue el primer astronauta americano en estar en órbita alrededor de la Tierra. Muchos años después regresó al espacio. La segunda vez que regresó al espacio, tenía cinco años menos que el doble de su edad cuando estuvo en el espacio por primera vez. La suma de sus edades de ambas veces que estuvo en el espacio es 118. Determine su edad cada vez que estuvo en el espacio.

38. Cuenta de ahorros Jorge Minez tiene un total de \$40,000 invertidos en tres cuentas de ahorro diferentes. Tiene algo de dinero invertido en una cuenta que otorga el 7% de interés. En la segunda cuenta tiene \$5,000 menos que en la primera, y recibe el 5% de interés. La tercera cuenta da el 3% de interés. Si el interés total anual que recibe Jorge es de \$2300, determine la cantidad en cada cuenta.

[4.4] *Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando matrices.*

39. $x + 5y = 1$
$-2x - 8y = -6$

40. $2x - 5y = 1$
$2x + 4y = 10$

41. $3y = 6x - 12$
$4x = 2y + 8$

42. $2x - y - z = 5$
$x + 2y + 3z = -2$
$3x - 2y + z = 2$

43. $3a - b + c = 2$
$2a - 3b + 4c = 4$
$a + 2b - 3c = -6$

44. $x + y + z = 3$
$3x + 4y = -1$
$y - 3z = -10$

[4.5] *Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando determinantes.*

45. $7x - 8y = -10$
$-5x + 4y = 2$

46. $x + 4y = 5$
$5x + 3y = -9$

47. $9m + 4n = -1$
$7m - 2n = -11$

48. $p + q + r = 5$
$2p + q - r = -5$
$3p + 2q - 3r = -12$

49. $-2a + 3b - 4c = -7$
$2a + b + c = 5$
$-2a - 3b + 4c = 3$

50. $y + 3z = 4$
$-x - y + 2z = 0$
$x + 2y + z = 1$

[4.6] *Grafique la solución de cada sistema de desigualdades.*

51. $-x + 3y > 6$
$2x - y \le 2$

52. $5x - 2y \le 10$
$3x + 2y > 6$

53. $y > 2x + 3$
$y < -x + 4$

54. $x > -2y + 4$
$y < -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Determine la solución de cada sistema de desigualdades.

55. $x \ge 0$
$y \ge 0$
$x + y \le 6$
$4x + y \le 8$

56. $x \ge 0$
$y \ge 0$
$2x + y \le 6$
$4x + 5y \le 20$

57. $|x| \le 3$
$|y| > 2$

58. $|x| > 4$
$|y - 2| \le 3$

Examen de práctica del capítulo 4

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección en donde se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en **el CD-Rom que acompaña a este libro.** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. Defina **a)** un sistema consistente de ecuaciones, **b)** un sistema dependiente de ecuaciones y **c)** un sistema inconsistente de ecuaciones.

Determine, sin resolver el sistema, si el sistema de ecuaciones es consistente, inconsistente o dependiente. Establezca si el sistema tiene exactamente una solución, ninguna solución, o un número infinito de soluciones.

2. $5x + 2y = 4$
$6x = 3y - 7$

3. $5x + 3y = 9$
$2y = -\frac{10}{3}x + 6$

4. $5x - 4y = 6$
$-10x + 8y = -10$

Resuelva cada sistema de ecuaciones mediante el método indicado.

5. $y = 3x - 2$
$y = -2x + 8$
gráficamente

6. $y = -x + 6$
$y = 2x + 3$
gráficamente

7. $y = 4x - 3$
$y = 5x - 4$
por sustitución

8. $4a + 7b = 2$
$5a + b = -13$
por sustitución

9. $8x + 3y = 8$
$6x + y = 1$
por suma

10. $0.3x = 0.2y + 0.4$
$-1.2x + 0.8y = -1.6$
por suma

11. $\frac{3}{2}a + b = 6$
$a - \frac{5}{2}b = -4$
por suma

12. $x + y + z = 2$
$-2x - y + z = 1$
$x - 2y - z = 1$
por suma

13. Escriba la matriz aumentada para el sistema de ecuaciones siguiente.
$-2x + 3y + 7z = 5$
$3x - 2y + z = -2$
$x - 6y + 9z = -13$

14. Considere la matriz aumentada siguiente.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 6 & -2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

Muestre los resultados obtenidos al multiplicar los elementos del tercer renglón por -2 y sumando los productos a sus elementos correspondientes en el segundo renglón.

Resuelva cada sistema de ecuaciones mediante matrices.

15. $2x + 7y = 1$
$3x + 5y = 7$

16. $x - 2y + z = 7$
$-2x - y - z = -7$
$4x + 5y - 2z = 3$

Evalúe cada determinante.

17. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Resuelva cada sistema de ecuaciones mediante determinantes y la regla de Cramer.

19. $4x + 3y = -6$
$-2x + 5y = 16$

20. $2r - 4s + 3t = -1$
$-3r + 5s - 4t = 0$
$-2r + s - 3t = -2$

Utilice el método de su elección para determinar la solución a cada problema.

21. Mezcla de semillas de girasol Agway Gardens tiene semillas de girasol, en un barril, que vende a $0.49 la libra y una mezcla especial para aves que vende a $0.89 la libra. ¿Cuánto debe mezclar de cada una para obtener 20 libras de una mezcla que venda a $0.73 la libra?

22. Mezcla de soluciones Tyesha Blackwell, una química, tiene soluciones al 6% y 15% de ácido sulfúrico. ¿Cuánto de cada solución debe mezclar para obtener 10 litros de una solución al 9%?

23. Suma de números La suma de tres números es 29. El mayor número es cuatro veces el menor de los números. El tercer número es uno más que el doble del número más pequeño. Determine los tres números.

Determine la solución para cada sistema de desigualdades.

24. $3x + 2y < 9$
$-2x + 5y \leq 10$

25. $|x| > 3$
$|y| \leq 1$

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen siguiente y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revise las preguntas que haya respondido en forma incorrecta. La sección y objetivo donde se estudia el material están indicados después de la respuesta.

1. Evalúe $48 \div \left\{4\left[3 + \left(\dfrac{5+10}{5}\right)^2\right] - 32\right\}$.

2. Considere el conjunto de números siguiente.

$$\left\{\frac{1}{2}, -4, 9, 0, \sqrt{3}, -4.63, 1\right\}$$

Indique los elementos del conjunto que sean

a) números naturales;

b) números racionales,

c) números reales.

3. Escriba los números siguientes de menor a mayor.

$$-1, |-4|, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, -|-8|, |-12|$$

Resuelva.

4. $-[3 - 2(x - 4)] = 3(x - 6)$

5. $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{6} = 2$

6. $|2x - 3| - 5 = 4$

7. Despeje x de la fórmula $M = \dfrac{1}{2}(a + x)$.

8. Determine el conjunto solución de la desigualdad.

$$0 < \frac{3x - 2}{4} \leq 8$$

9. Simplifique $\left(\dfrac{3x^2y^{-2}}{y^3}\right)^{-2}$.

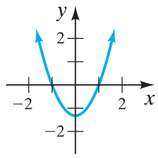
10. Grafique $2y = 3x - 8$.

11. Escriba en forma pendiente intercepción la ecuación de la recta paralela a la recta $2x - 3y = 8$ y que pasa por el punto $(2, 3)$.

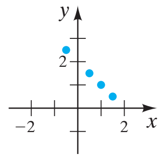
12. Grafique la desigualdad $6x - 3y < 12$.

13. Determine cuáles de las gráficas siguientes representan funciones. Explique.

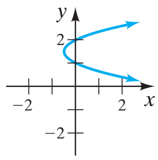
a)



b)



c)



14. Si $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$, determine

a) $f(-4)$ **b)** $f(h)$ **c)** $f(3)$.

Resuelva cada sistema de ecuaciones.

15. $3x + y = 6$
$y = 4x - 1$

16. $2p + 3q = 11$
$-3p - 5q = -16$

17. $x - 2y = 0$
$2x + z = 7$
$y - 2z = -5$

18. **Ángulos de un triángulo** Si el ángulo mayor de un triángulo es nueve veces la medida del ángulo menor, y el ángulo mediano es 70° mayor que la medida del menor, determine la medida de los tres ángulos.

19. **Caminar y trotar** Mark Simmons camina con una velocidad de 4 millas por hora y Judy Bolin trota a 6 millas por hora. Mark comienza a caminar $\frac{1}{2}$ hora antes de que Judy comience a trotar. Si Judy trota en la misma ruta que Mark, ¿cuánto tiempo después de que Judy comienza a trotar alcanzará a Mark?

20. **Concierto de rock** En un concierto de rock hay dos precios diferentes de asientos. Los asientos más caros se venden a \$20 y los baratos se venden a \$16. Si se vende un total de 1000 boletos y el importe total es de \$18,400, ¿cuántos asientos de cada tipo se vendieron?

5 Polinomios y funciones polinomiales

OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En la primera parte de este capítulo estudiaremos los polinomios y las funciones polinomiales. Después enfocaremos nuestra atención en la factorización. *Para resolver los problemas de muchos de los capítulos siguientes, será necesario que haya comprendido bien el tema de factorización*. Ponga particular atención en cómo utilizar la factorización para determinar las intersecciones con el eje *x* de una función cuadrática. Más adelante volveremos a hablar de este tema.

CUANDO UN OBJETO SE lanza directamente hacia arriba o se deja caer, en cualquier instante su altura respecto del piso puede representarse mediante una función polinomial. En el ejercicio 91 de la página 305 determinamos la altura de un objeto, respecto del piso, seis segundos después de que se deja caer desde lo alto del edificio Empire State.

5.1 Suma y resta de polinomios

1 Determinar el grado de un polinomio.
2 Evaluar funciones polinomiales.
3 Entender las gráficas de funciones polinomiales.
4 Sumar y restar polinomios.

1 Determinar el grado de un polinomio

Recuerde que, según se explicó en el capítulo 2, las partes que se suman o restan en una expresión matemática se denominan **términos**. El **grado de un término** con exponentes enteros no negativos es la suma de los exponentes de las variables, si las hay. Las constantes distintas de cero tienen grado 0, y al término 0 no se le asigna grado.

Un **polinomio** es una suma finita de términos en la que todas las variables tienen exponentes enteros no negativos, y donde los denominadores no incluyen variables. La expresión $3x^2 + 2x + 6$ es un ejemplo de un *polinomio con una variable, x*. La expresión $x^2y - 2x + 3$ es un ejemplo de un *polinomio con dos variables, x* y *y*. Las expresiones $x^{1/2}$ y $\frac{1}{x}$ (o x^{-1}) *no* son polinomiales, ya que los exponentes de las variables no son enteros no negativos. La expresión $\frac{1}{x-1}$ *no* es un polinomio, ya que el denominador incluye una variable.

El **término principal** de un polinomio es el término de grado más alto. El **coeficiente principal** es el coeficiente del término principal.

EJEMPLO 1 Indique el número de términos, el grado, el término principal y el coeficiente principal de cada polinomio.

a) $2x^5 - 3x^2 + 6x - 9$ **b)** $8x^2y^4 - 6xy^3 + 3xy^2z^4$

Solución Organizaremos las respuestas en una tabla.

Polinomio	Número de términos	Grado del polinomio	Término principal	Coeficiente principal
a) $2x^5 - 3x^2 + 6x - 9$	4	5 (de $2x^5$)	$2x^5$	2
b) $8x^2y^4 - 6xy^3 + 3xy^2z^4$	3	7 (de $3xy^2z^4$)	$3xy^2z^4$	3

Ahora resuelva el ejercicio 29

Los polinomios se clasifican de acuerdo con el número de términos de que constan, tal como se indica en la tabla siguiente.

Tipo de polinomio	Descripción	Ejemplos
Monomio	Un polinomio con un término	$4x^2,\ 6x^2y,\ 3,\ -2xyz^5,\ 7$
Binomio	Un polinomio con dos términos	$x^2 + 1,\ 2x^2 - y,\ 6x^3 - 5y^2$
Trinomio	Un polinomio con tres términos	$x^3 + 6x - 8,\ x^2y - 9x + y^2$

A los polinomios que constan de más de tres términos no se les da un nombre específico, ya que el prefijo *poli* significa *muchos*. Un polinomio se denomina **lineal** si es de grado 0 o 1. A un polinomio con una variable se le denomina **cuadrático** si es de grado 2, y **cúbico** si es de grado 3.

Tipo de polinomio	Ejemplos
Lineal	$2x - 4,\quad 5$
Cuadrático	$3x^2 + x - 6,\quad 4x^2 - 8$
Cúbico	$-4x^3 + 3x^2 + 5,\quad 2x^3 + 7x$

Los polinomios $2x^3 + 4x^2 - 6x + 3$ y $4x^2 - 3xy + 5y^2$ son ejemplos de polinomios en **orden descendente** de la variable *x*, ya que los exponentes de la variable *x* descienden (o van decreciendo) al recorrer los términos de izquierda a derecha. Por lo general, los polinomios se escriben en orden descendente respecto de alguna variable.

EJEMPLO 2 Escriba cada uno de los siguientes polinomios en orden descendente de la variable x.

a) $5x + 4x^2 - 6$ **b)** $xy - 6x^2 + 8y^2$

Solución

a) $5x + 4x^2 - 6 = 4x^2 + 5x - 6$

b) $xy - 6x^2 + 8y^2 = -6x^2 + xy + 8y^2$

Ahora resuelva el ejercicio 25

2 Evaluar funciones polinomiales

La expresión $2x^3 + 6x^2 + 3$ es un polinomio, y si escribimos $P(x) = 2x^3 + 6x^2 + 3$, tenemos una **función polinomial**. En una **función polinomial**, la expresión utilizada para describir la función es un polinomio. Para evaluar una función polinomial se utiliza la sustitución, tal como se hizo para evaluar otras funciones en el capítulo 3.

EJEMPLO 3 Para la función polinomial $P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 7$, determine

a) $P(0)$ **b)** $P(3)$ **c)** $P(-2)$

Solución

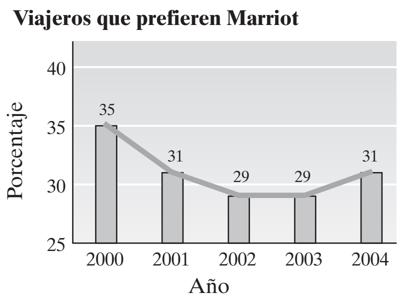
a)
$$\begin{aligned} P(x) &= 4x^3 - 6x^2 - 2x + 7 \\ P(0) &= 4(0)^3 - 6(0)^2 - 2(0) + 7 \\ &= 0 - 0 - 0 + 7 = 7 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(3) &= 4(3)^3 - 6(3)^2 - 2(3) + 7 \\ &= 4(27) - 6(9) - 6 + 7 = 55 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} P(-2) &= 4(-2)^3 - 6(-2)^2 - 2(-2) + 7 \\ &= 4(-8) - 6(4) + 4 + 7 = -45 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 35

Con frecuencia las empresas, los gobiernos y otras organizaciones necesitan llevar registros y hacer proyecciones de ventas, utilidades, cambios en la población, efectividad de nuevas drogas, etcétera. Para realizar estas tareas, muchas veces se utilizan gráficas y funciones. El ejemplo 4 ilustra uno de esos casos.



Fuente: *The Washington Post (3/14/2005)*

FIGURA 5.1

EJEMPLO 4 **Viajeros que se hospedan en un Marriot** La gráfica de barras de la **figura 5.1** muestra el porcentaje de viajeros que consideran Marriot como primera opción entre los principales hoteles, de 2000 a 2004. La función polinomial que puede usarse para aproximar el porcentaje de viajeros que consideran el Marriot como primera opción es

$$M(t) = t^2 - 5t + 35$$

donde t es el número de años a partir de 2000 y $0 \le t \le 4$.

a) Por medio de esta función, estime el porcentaje de viajeros que consideraron el Marriot como primera opción en 2004.

b) Compare su respuesta de la parte **a)** con la gráfica de barras. ¿La gráfica de barras apoya su respuesta?

c) Si esta tendencia continúa después de 2004, estime el porcentaje de viajeros que considerarán el Marriot como su primera opción en 2008.

Solución **a)** Entienda el problema Necesitamos determinar el valor de t para sustituir en esta función. Como t es el número de años a partir de 2000, 2004 corresponde a $t = 4$. Así, para estimar el porcentaje de viajeros que consideraron el Marriot como su primera opción, evaluamos $M(4)$.

Traduzca y realice los cálculos

$$\begin{aligned} M(t) &= t^2 - 5t + 35 \\ M(4) &= 4^2 - 5 \cdot 4 + 35 \\ &= 16 - 20 + 35 \\ &= 31 \end{aligned}$$

Compruebe y responda El porcentaje de viajeros que consideraron al Marriot como su primera opción en 2004 fue alrededor de 31%.

b) De la parte **a)**, vemos que alrededor de 31% de los viajeros, en 2004, consideraron el Marriot como su primera opción. En la gráfica de barras anterior, la barra para el año 2004 tiene una altura de 31, lo cual significa que casi 31% de los viajeros consideraron el Marriot como su primera opción. Como ambos valores son iguales, concluimos que la gráfica de barras apoya los resultados de la parte **a)**.

c) Entienda el problema Para estimar el porcentaje de viajeros que considerarán el Marriot como su primera opción en 2008, observe que 2008 es 8 años a partir de 2000. Así, $t = 8$ y sustituimos 8 por t en la función polinomial.

Traduzca y realice los cálculos

$$\begin{aligned} M(t) &= t^2 - 5t + 35 \\ M(8) &= 8^2 - 5 \cdot 8 + 35 = 64 - 40 + 35 = 59 \end{aligned}$$

Compruebe y responda Si esta tendencia continúa, en 2008 alrededor de 59% de los viajeros considerarían el Marriot como su primera opción entre los hoteles comerciales.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 103

3 Entender las gráficas de funciones polinomiales

Las gráficas de todas las funciones polinomiales son curvas suaves y continuas (es decir, sin interrupciones en su trazo). En la **figura 5.2** se muestra la gráfica de una función polinomial cuadrática. Las gráficas de todas las funciones polinomiales cuadráticas con un *coeficiente principal positivo*, tendrán la forma de la gráfica en la **figura 5.2**.

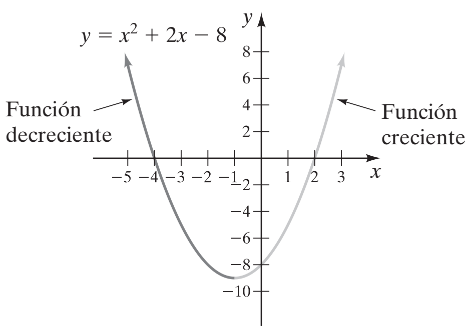


FIGURA 5.2

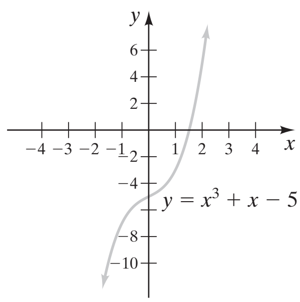


FIGURA 5.3

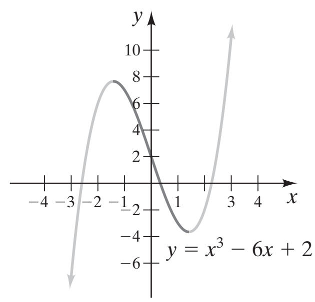


FIGURA 5.4

La gráfica de una función polinomial cúbica con un *coeficiente principal positivo*, puede tener la forma de las gráficas que se ilustran en la **figura 5.3** o la **figura 5.4**. Observe que *siempre que su coeficiente principal sea positivo, la función polinomial crecerá* (*o se moverá hacia arriba conforme aumente el valor de x, tal como muestra la parte en color negro de la curva*) *hacia la derecha para algún valor de x*. Por ejemplo, en la **figura 5.2** la gráfica continúa creciendo hacia la derecha de $x = -1$. En la **figura 5.3** la gráfica crece de manera continua, y en la **figura 5.4** lo hace hacia la derecha a partir del punto $x = 1.4$.

La **figura 5.5** muestra una función polinomial cuadrática con un coeficiente principal negativo, y funciones polinomiales cúbicas con coeficientes principales negativos se muestran en la **figura 5.6** y la **figura 5.7**. En la **figura 5.5**, la función cuadrática es decreciente a la derecha de $x = 2$. En la **figura 5.6** la función cúbica decrece de forma continua, y en la **figura 5.7** la función cúbica es decreciente a la derecha de $x = 1.2$.

Las funciones polinomiales con un coeficiente principal negativo decrecerán (*o se moverán hacia abajo conforme el valor de x aumente, tal como muestra la parte en color rojo de la curva*) *hacia la derecha de algún valor de x*.

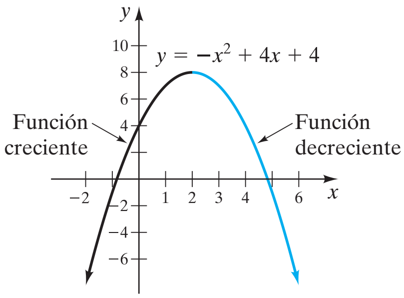


FIGURA 5.5

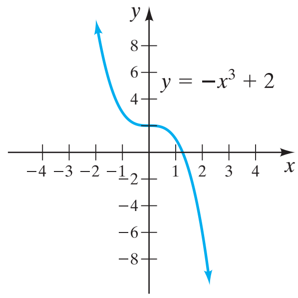


FIGURA 5.6

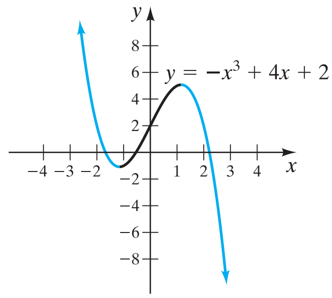


FIGURA 5.7

¿Por qué el coeficiente principal determina si una función polinomial crecerá o decrecerá hacia la derecha de algún valor de x? El coeficiente principal es el coeficiente del término con el exponente de la variable con el valor más alto. Conforme el valor de x aumenta, este término terminará por dominar a todos los demás de la función. Por lo tanto, si el coeficiente de este término es positivo, *en algún momento* la función comenzará a crecer a medida que el valor de x aumente. Si el coeficiente principal es negativo, *en algún momento* la función comenzará a decrecer a medida que el valor de x disminuya. Esta información, junto con la verificación de la intersección con el eje y de la gráfica, puede ser útil para determinar si una gráfica es correcta o si está completa. Lea el siguiente recuadro Cómo utilizar su calculadora graficadora, incluso si no emplea una. Además, resuelva los ejercicios 99 a 102 en las páginas 305 y 306.

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Siempre que grafique una función polinomial en su calculadora graficadora, asegúrese de que su pantalla muestre todos los cambios de dirección en su gráfica. Por ejemplo, suponga que grafica $y = 0.1x^3 - 2x^2 + 5x - 8$ en su calculadora graficadora. Si emplea la ventana estándar, obtendrá la gráfica que se muestra en la **figura 5.8**.

Sin embargo, a partir de lo que acabamos de analizar debe darse cuenta de que, como el coeficiente principal, 0.1 es positivo, la gráfica debe crecer hacia la derecha de algún valor de x. Esto no resulta claro en la gráfica de la **figura 5.8**. Si ajusta su ventana para que aparezca como en la **figura 5.9**, obtendrá la gráfica que se muestra allí. Ahora puede ver cómo crece ligeramente la gráfica hacia la derecha a partir de $x = 12$. Al graficar, muchas veces es útil determinar la intersección con el eje y para establecer qué valores se deben usar en un rango. Recuerde que para determinar la intersección con el eje y, establecemos $x = 0$ y despejamos y. Por ejemplo, si se grafica $y = 4x^3 + 6x^2 + x - 180$ la intersección con el eje y estará en -180, es decir, en el punto $(0, -180)$.

$y = 0.1x^3 - 2x^2 + 5x - 8$

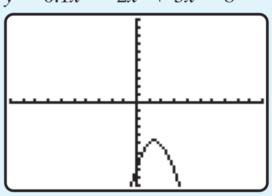
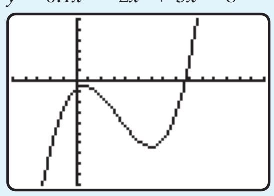


FIGURA 5.8

$y = 0.1x^3 - 2x^2 + 5x - 8$



$[-10, 30, 2, -100, 60, 10]$

FIGURA 5.9

EJERCICIOS

Utilice su calculadora para graficar cada polinomio. Asegúrese que su ventana muestre todos los cambios de dirección de la gráfica.

1. $y = 0.2x^3 + 5.1x^2 - 6.2x + 9.3$

2. $y = 4.1x^3 - 19.6x^2 + 5.4x - 60.2$

4 Sumar y restar polinomios

En la sección 3.6, cuando determinamos sumas y diferencias de funciones, agregamos y sustraemos polinomios, aunque en ese momento no los llamábamos así. Para *sumar o restar polinomios*, primero quitamos los paréntesis (si los hay), y después reducimos los términos semejantes.

EJEMPLO 5 Simplifique $(4x^2 - 6x + 3) + (2x^2 + 5x - 1)$.

Solución

$$\begin{aligned} &(4x^2 - 6x + 3) + (2x^2 + 5x - 1) \\ &= 4x^2 - 6x + 3 + 2x^2 + 5x - 1 && \text{Eliminar paréntesis.} \\ &= \underbrace{4x^2 + 2x^2}\ \underbrace{- 6x + 5x}\ \underbrace{+ 3 - 1} && \text{Reacomodar términos.} \\ &= \quad 6x^2 \qquad -x \qquad +2 && \text{Reducir términos semejantes.} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 45

EJEMPLO 6 Simplifique $(3x^2y - 4xy + y) + (x^2y + 2xy + 8y - 2)$.

Solución

$$\begin{aligned} &(3x^2y - 4xy + y) + (x^2y + 2xy + 8y - 2) \\ &= 3x^2y - 4xy + y + x^2y + 2xy + 8y - 2 && \text{Eliminar paréntesis.} \\ &= \underbrace{3x^2y + x^2y}\ \underbrace{- 4xy + 2xy}\ \underbrace{+ y + 8y} - 2 && \text{Reacomodar términos.} \\ &= \quad 4x^2y \qquad -2xy \qquad +9y \quad - 2 && \text{Reducir términos semejantes.} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 51

Sugerencia útil

Recuerde que $-x$ significa $-1 \cdot x$. Así $-(2x^2 - 4x + 6)$ significa $-1(2x^2 - 4x + 6)$ y se aplica la propiedad distributiva. Cuando resta un polinomio de otro, los *signos de cada término* del polinomio que se resta deben cambiarse. Por ejemplo

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 3 - (2x^2 - 4x + 6) &= x^2 - 6x + 3 - 1(2x^2 - 4x + 6) \\ &= x^2 - 6x + 3 - 2x^2 + 4x - 6 \\ &= -x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Reste $(-x^2 - 2x + 11)$ de $(x^3 + 4x + 6)$.

Solución

$$\begin{aligned} &(x^3 + 4x + 6) - (-x^2 - 2x + 11) \\ &= (x^3 + 4x + 6) - 1(-x^2 - 2x + 11) && \text{Insertar 1.} \\ &= x^3 + 4x + 6 + x^2 + 2x - 11 && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= x^3 + x^2 + 4x + 2x + 6 - 11 && \text{Reacomodar los términos.} \\ &= x^3 + x^2 + 6x - 5 && \text{Reducir términos semejantes.} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 67

EJEMPLO 8 Simplifique $x^2y - 4xy^2 + 5 - (2x^2y - 3y^2 + 11)$.

Solución

$$\begin{aligned} &x^2y - 4xy^2 + 5 - 1(2x^2y - 3y^2 + 11) && \text{Insertar 1.} \\ &= x^2y - 4xy^2 + 5 - 2x^2y + 3y^2 - 11 && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= x^2y - 2x^2y - 4xy^2 + 3y^2 + 5 - 11 && \text{Reacomodar los términos.} \\ &= -x^2y - 4xy^2 + 3y^2 - 6 && \text{Reducir términos semejantes.} \end{aligned}$$

Observe que $-x^2y$ y $-4xy^2$ no son términos semejantes, ya que las variables tienen exponentes diferentes. Tampoco $-4xy^2$ y $3y^2$ son términos semejantes, ya que $3y^2$ no incluye la variable x.

Ahora resuelva el ejercicio 55

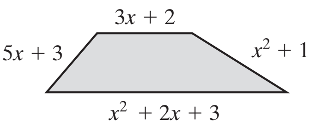


FIGURA 5.10

EJEMPLO 9 ▸ **Perímetro** Determine una expresión para el perímetro del cuadrilátero de la **figura 5.10**.

Solución El perímetro es la suma de las longitudes de los lados de la figura. En el caso de un cuadrilátero, el perímetro es la suma de las longitudes de sus cuatro lados.

$$
\begin{aligned}
\text{Perímetro} &= (x^2 + 2x + 3) + (x^2 + 1) + (5x + 3) + (3x + 2) && \textit{Suma de los lados.}\\
&= x^2 + 2x + 3 + x^2 + 1 + 5x + 3 + 3x + 2 && \textit{Eliminar los paréntesis.}\\
&= x^2 + x^2 + 2x + 5x + 3x + 3 + 1 + 3 + 2 && \textit{Reacomodar términos.}\\
&= 2x^2 + 10x + 9 && \textit{Reducir términos semejantes.}
\end{aligned}
$$

El perímetro del cuadrilátero es $2x^2 + 10x + 9$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 79**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.1

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué son los términos de una expresión matemática?
2. ¿Cuál es el grado de una constante diferente de cero?
3. ¿Qué es un polinomio?
4. ¿Qué es el término principal de un polinomio?
5. ¿Qué es el coeficiente principal de un polinomio?
6. **a)** ¿Cómo se determina el grado de un término?
   b) ¿Cuál es el grado de $6x^4y^3z$?
7. **a)** ¿Cómo se determina el grado de un polinomio?
   b) ¿Cuál es el grado de $-4x^4 + 6x^3y^4 + z^5$?
8. ¿Qué significa que un polinomio esté en orden descendente en la variable x?
9. **a)** ¿Cuándo es lineal un polinomio?
   b) Proporcione un ejemplo de un polinomio lineal.
10. **a)** ¿Cuándo es cuadrático un polinomio?
    b) Proporcione un ejemplo de un polinomio cuadrático.
11. **a)** ¿Cuándo es cúbico un polinomio?
    b) Proporcione un ejemplo de un polinomio cúbico.
12. Cuando se resta un polinomio de otro, ¿qué le sucede a los signos de todos los términos del polinomio que será restado?
13. Escriba un trinomio en x de grado cinco, en orden descendente de x que carezca de términos de cuarto, tercero y segundo grados.
14. Escriba un polinomio en y de grado siete en orden descendente de y que carezca de términos de quinto, tercero y segundo grados.

Práctica de habilidades

Determine si cada expresión es un polinomio. Si el polinomio tiene un nombre específico, por ejemplo, "monomio" o "binomio", indíquelo. Si la expresión no es un polinomio, explique por qué.

15. -6 **16.** $4x^{-1}$ **17.** $7z$

18. $5x^2 - 6x + 9$ **19.** $5z^{-3}$ **20.** $8x^2 - 2x + 9y^2$

21. $3x^{1/2} + 2xy$ **22.** $2xy + 5y^2$

Escriba cada polinomio en orden descendente de la variable x. Si el polinomio ya está en orden descendente, indíquelo. Proporcione el grado de cada polinomio.

23. $-5 + 2x - x^2$ **24.** $-3x - 9 + 8x^2$

25. $9y^2 + 3xy + 10x^2$ **26.** $-2 + x - 8x^2 + 4x^3$

27. $-2x^4 + 5x^2 - 4$ **28.** $5xy^2 + 3x^2y - 9 - 2x^3$

Indique **a)** *el grado de cada polinomio y* **b)** *su coeficiente principal.*

29. $x^4 + 3x^6 - 2x - 13$ **30.** $17x^4 + 13x^5 - x^7 + 4x^3$

31. $4x^2y^3 + 6xy^4 + 9xy^5$ **32.** $-a^4b^3c^2 + 9a^8b^9c^4 - 5a^7c^{20}$

33. $-\frac{1}{3}m^4n^5p^8 + \frac{3}{5}m^3p^6 - \frac{5}{9}n^4p^6q$ **34.** $-0.6x^2y^3z^2 + 2.9xyz^9 - 1.3x^8y^4$

Evalúe cada función polinomial en el valor dado.

35. Determine $P(2)$, si $P(x) = x^2 - 6x + 1$.

36. Determine $P(-1)$, si $P(x) = 4x^2 + 6x + 12$.

37. Determine $P\left(\frac{1}{2}\right)$ si $P(x) = 2x^2 - 3x - 6$.

38. Determine $P\left(\frac{1}{3}\right)$ si $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 6$.

39. Determine $P(0.4)$, si $P(x) = 0.2x^3 + 1.6x^2 - 2.3$.

40. Determine $P(-1.2)$, si $P(x) = -1.6x^3 - 4.6x^2 - 0.1x$.

En los ejercicios del 41 al 62, simplifique.

41. $(x^2 + 3x - 1) + (6x - 5)$

42. $(5b^2 - 8b + 7) - (2b^2 - 3b - 5)$

43. $(x^2 - 8x + 11) - (5x + 9)$

44. $(2x - 13) - (3x^2 - 4x + 16)$

45. $(4y^2 + 9y - 1) - (2y^2 + 10)$

46. $(5n^2 - 7) + (9n^2 + 3n + 12)$

47. $\left(-\frac{5}{9}a + 6\right) + \left(-\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{4}a - 1\right)$

48. $(6y^2 - 9y + 4) - (-2y^2 - y - 8)$

49. $(1.4x^2 + 1.6x - 8.3) - (4.9x^2 + 3.7x + 11.3)$

50. $(-12.4x^2y - 6.2xy + 9.3y^2) - (-5.3x^2y + 1.6xy - 10.4y^2)$

51. $\left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2y + 8xy^2\right) + \left(-x^3 - \frac{1}{2}x^2y + xy^2\right)$

52. $\left(-\frac{3}{5}xy^2 + \frac{5}{8}\right) - \left(-\frac{1}{2}xy^2 + \frac{3}{5}\right)$

53. $(3a - 6b + 5c) - (-2a + 4b - 8c)$

54. $(9r + 7s - t) + (-2r - 2s - 3t)$

55. $(3a^2b - 6ab + 5b^2) - (4ab - 6b^2 - 5a^2b)$

56. $(3x^2 - 5y^2 - 2xy) - (4x^2 + 8y^2 - 9xy)$

57. $(8r^2 - 5t^2 + 2rt) + (-6rt + 2t^2 - r^2)$

58. $(a^2 - b^2 + 5ab) + (-3b^2 - 2ab + a^2)$

59. $6x^2 - 5x - [3x - (4x^2 - 9)]$

60. $3xy^2 - 2x - [-(4xy^2 + 3x) - 6xy]$

61. $5w - 6w^2 - [(3w - 2w^2) - (4w + w^2)]$

62. $-[-(5r^2 - 3r) - (2r - 3r^2) - 2r^2]$

63. Reste $(4x - 11)$ de $(7x + 8)$.

64. Reste $(-x^2 + 3x + 5)$ de $(4x^2 - 6x + 2)$.

65. Sume $-2x^2 + 4x - 12$ y $-x^2 - 2x$.

66. Reste $(5x^2 - 6)$ de $(2x^2 - 9x + 8)$.

67. Reste $0.2a^2 - 3.9a + 26.4$ de $-5.2a^2 - 9.6a$.

68. Sume $6x^2 + 12xy$ y $-2x^2 + 4xy + 3y$.

69. Reste $\left(5x^2y + \frac{5}{9}\right)$ de $\left(-\frac{1}{2}x^2y + xy^2 + \frac{3}{5}\right)$.

70. Reste $(6x^2y + 7xy)$ de $(2x^2y + 12xy)$.

Simplifique. Suponga que todos los exponentes representan números naturales.

71. $(3x^{2r} - 7x^r + 1) + (2x^{2r} - 3x^r + 2)$

72. $(8x^{2r} - 5x^r + 4) + (6x^{2r} + x^r + 3)$

73. $(x^{2s} - 8x^s + 6) - (2x^{2s} - 4x^s - 13)$

74. $(5a^{2m} - 6a^m + 4) - (2a^{2m} + 7)$

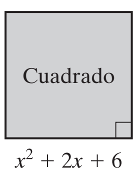
75. $(7b^{4n} - 5b^{2n} + 1) - (3b^{3n} - b^{2n})$

76. $(-3r^{3a} + r^a - 6) - (-2r^{3a} - 8r^{2a} + 6)$

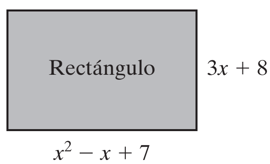
Resolución de problemas

Perímetro *En los ejercicios 77 a 82, determine una expresión para el perímetro de cada figura. Vea el ejemplo 9.*

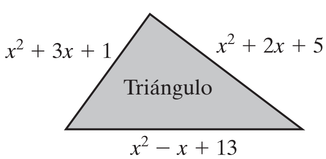
77.



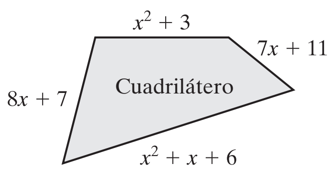
78.



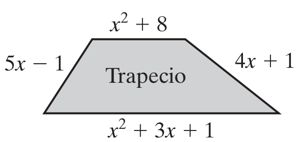
79.



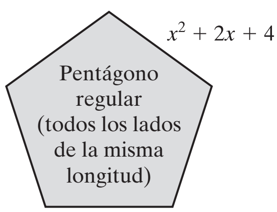
80.



81.



82.



83. ¿La suma de dos trinomios siempre da por resultado un trinomio? Explique y proporcione un ejemplo que sustente su respuesta.

84. ¿La suma de dos binomios siempre da por resultado un binomio? Explique y proporcione un ejemplo que sustente su respuesta.

85. ¿La suma de dos polinomios cuadráticos siempre da por resultado un polinomio cuadrático? Explique y proporcione un ejemplo que sustente su respuesta.

86. ¿La diferencia de dos polinomios cúbicos siempre da por resultado un polinomio cúbico? Explique y proporcione un ejemplo que sustente su respuesta.

87. Área El área de un cuadrado es una función de su lado, donde $A(s) = s^2$. Determine el área de un cuadrado, si su lado mide 12 metros.

88. Volumen El volumen de un cubo es una función de su lado, s, donde $V(s) = s^3$. Determine el volumen de un cubo, si su lado es de 7 centímetros.

89. Área El área de un círculo es una función de su radio, donde $A(r) = \pi r^2$. Determine el área de un círculo, si su radio es de 6 pulgadas. Utilice la tecla $\boxed{\pi}$ de su calculadora.

90. Volumen El volumen de una esfera es una función de su radio, en donde $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Un globo circular se está inflando. Determine su volumen cuando su radio es de 4 pulgadas.

91. Altura Cuando un objeto se deja caer desde el edificio Empire State (altura = 1250 pies), la altura del objeto, h, en pies, respecto del piso en el instante t, en segundos, después de que se ha soltado, puede determinarse mediante

$$h = P(t) = -16t^2 + 1250$$

Determine a qué distancia del piso se encuentra un objeto 6 segundos después de que se ha dejado caer.

92. Concurso de ortografía El número de maneras en que puede seleccionarse a los ganadores del primero, segundo y tercer lugares en un concurso de ortografía entre n participantes, está dado por $P(n) = n^3 - 3n^2 + 2n$. Si hay seis participantes, ¿de cuántas maneras pueden seleccionarse el primero, segundo y tercer lugares?

93. Comités El número de comités diferentes de 2 estudiantes, en los que los dos estudiantes se seleccionan de un grupo con n estudiantes está dado por $c(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n)$. Si una clase de biología tiene 15 estudiantes, ¿cuántos comités diferentes con 2 estudiantes se pueden seleccionar?

94. Comités El número de comités diferentes de 3 estudiantes, en donde los tres estudiantes se seleccionan de un grupo con n estudiantes está dado por $c(n) = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$. Si una clase de artes tiene 10 estudiantes, ¿cuántos comités diferentes con 3 estudiantes se pueden seleccionar?

95. Cuenta de ahorros El 2 de enero de 2006, Jorge Sánchez depositó \$650 en una cuenta de ahorros que paga interés simple a una tasa de \$24 cada año. El monto en la cuenta es una función del tiempo dada por $A(t) = 650 + 24t$, donde t es el número de años a partir de 2006. Determine el monto en la cuenta en **a)** 2007, **b)** 2021.

96. Financiamiento Frank Gunther acaba de comprar un automóvil nuevo. Después de hacer el pago inicial, el monto que se financiará es \$23,250. Utilizando un préstamo al 0% (o sin interés) sobre el automóvil, el pago mensual es \$387.50. El monto del automóvil que se debe es una función del tiempo dada por $A(t) = \$23{,}250 - \$387.50t$, donde t es el número de meses a partir de que Frank compró el automóvil. ¿Cuál es la deuda **a)** a los 2 meses, **b)** a los 15 meses que Frank compró el automóvil?

Utilidad *La utilidad de una compañía se determina restando sus costos de sus ingresos. En los ejercicios 97 y 98, $R(x)$ representa el ingreso de la compañía cuando se venden x artículos, y $C(x)$ representa el costo de la compañía cuando se producen x artículos.* **a)** *Determine la función utilidad $P(x)$.* **b)** *Evalúe $P(x)$, cuando $x = 100$.*

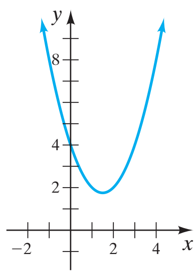
97. $R(x) = 2x^2 - 60x$,
$C(x) = 8050 - 420x$

98. $R(x) = 5.5x^2 - 80.3x$
$C(x) = 1.2x^2 + 16.3x + 12{,}040.6$

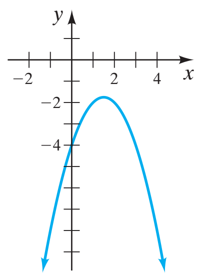
En los ejercicios 99 a 102, determine cuál de las gráficas **a), b)** *o* **c)** *corresponde a la gráfica de la ecuación dada. Explique cómo determinó su respuesta.*

99. $y = x^2 + 3x - 4$

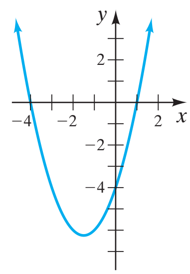
a)



b)

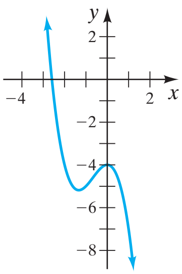


c)

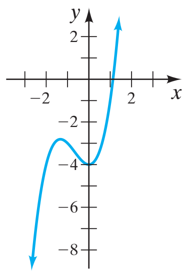


100. $y = x^3 + 2x^2 - 4$

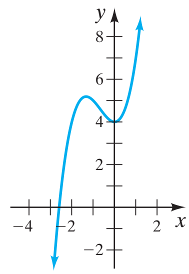
a)



b)

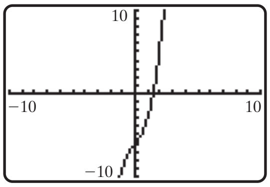


c)

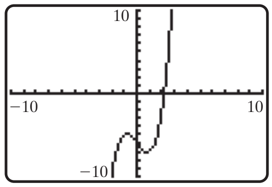


101. $y = -x^3 + 2x - 6$

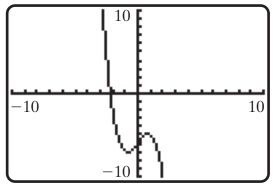
a)



b)

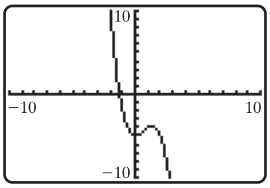


c)

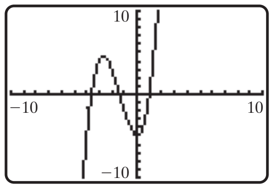


102. $y = x^3 + 4x^2 - 5$

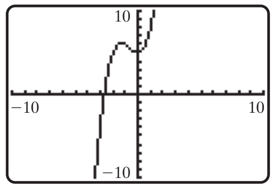
a)



b)



c)



103. Gasto de capital La gráfica que muestra el gasto de las compañías petroleras en nuevos proyectos petroleros y de gas natural de 2001 a 2004. El gasto, $E(t)$, en miles de millones de dólares puede aproximarse mediante la función

$$E(t) = 7t^2 - 7.8t + 81.2$$

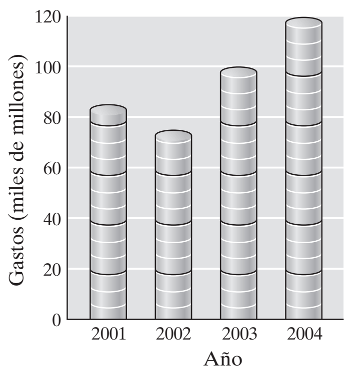
donde t es el número de años desde 2001.

a) Utilice esta función para estimar el gasto de las compañías petroleras en 2004.

b) Compare su respuesta de la parte **a)** con la gráfica de barras. ¿La gráfica sustenta su respuesta?

c) Si esta tendencia continúa, estime el gasto de las compañías petroleras en nuevos proyectos petroleros y de gas natural en 2007.

Gastos de compañías petroleras



Fuente: John S. Herald, Inc., *The Washington Post* (3/14/2005)

104. Plano inclinado Una bola rueda hacia abajo por un plano inclinado. La distancia, $d(t)$, en pies, que la bola ha recorrido está dada por la función

$$d(t) = 2.36t^2$$

donde t es el tiempo en segundos, $0 \leq t \leq 5$.

Determine la distancia que la bola ha recorrido hacia abajo por el plano inclinado en

a) 1 segundo,

b) 3 segundos,

c) 5 segundos.

105. Inflación La inflación afecta el poder de compra. A consecuencia de la inflación, pagaremos más por los mismos bienes en el futuro que lo que pagamos por ellos ahora. La función $C(t) = 0.31t^2 + 0.59t + 9.61$, donde t es años desde 1997, aproxima el costo, en miles de dólares, por compras en el futuro que se harían con \$10,000 en 1997. Esta función está basada en una tasa de inflación anual de 6% y $0 \leq t \leq 25$. Calcule el costo que tendrán en 2012 los bienes que en 1997 costaban \$10,000.

106. Escuelas sin drogas La función $f(a) = -2.32a^2 + 76.85a - 559.87$ puede utilizarse para estimar el porcentaje de estudiantes que afirman que su escuela no está libre de drogas. En esta función, a representa la edad del estudiante, donde $12 \leq a \leq 17$. Utilice esta función para estimar el porcentaje de estudiantes de 13 años que afirman que sus escuelas no están libres de drogas.

Si cuenta con una calculadora graficadora, responda los ejercicios 107 y 108 con su ayuda. Si no tiene calculadora graficadora, dibuje la gráfica de la parte **a)** *por medio del trazo de puntos. Luego responda las partes de* **b)** *a* **e)**.

107. **a)** Grafique

$$y_1 = x^3$$
$$y_2 = x^3 - 3x^2 - 3$$

b) En ambas gráficas, para valores de $x > 3$, ¿la función crece o decrece conforme aumenta el valor de x?

c) Cuando el término principal de una función polinomial es x^3, el polinomio debe aumentar para $x > a$, en donde a es algún número real mayor que 0. Explique por qué.

d) En ambas gráficas, para valores de $x < -3$, ¿la función crece o decrece cuando disminuye el valor de x?

e) Cuando el término principal de una función polinomial es x^3, el polinomio debe disminuir para $x < a$, en donde a es algún número real menor que 0. Explique por qué.

108. **a)** Grafique

$$y_1 = x^4$$
$$y_2 = x^4 - 6x^2$$

b) En ambas gráficas, para valores de $x > 3$, ¿la función crece o decrece cuando aumenta el valor de x?

c) Cuando el término principal de una función polinomial es x^4, el polinomio debe aumentar para $x > a$, en donde a es algún número real mayor que 0. Explique por qué.

d) En ambas gráficas, para valores de $x < -3$, ¿la función crece o decrece cuando disminuye el valor de x?

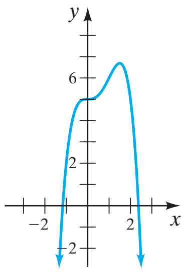
e) Cuando el término principal de una función polinomial es x^4, el polinomio debe disminuir para $x < a$, en donde a es algún número real menor que 0. Explique por qué.

Retos

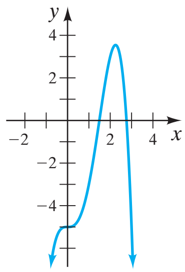
Determine cuál de las gráficas, **a), b)** *o* **c)***, corresponde a la ecuación dada. Explique cómo determinó su respuesta.*

109. $y = -x^4 + 3x^3 - 5$

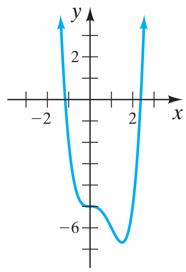
a)



b)

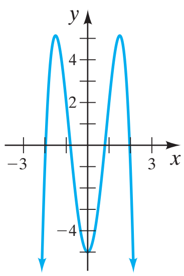


c)

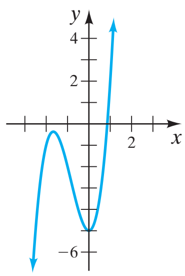


110. $y = 2x^4 + 9x^2 - 5$

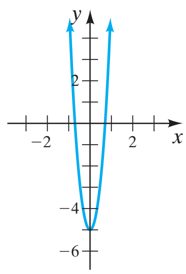
a)



b)



c)

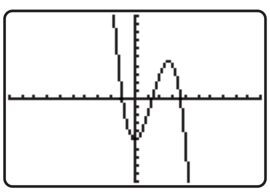


Actividad en equipo

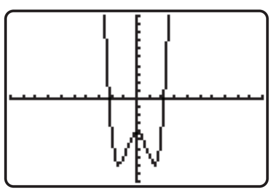
Analicen y respondan en equipo los ejercicios 111 y 112.

111. Si el término principal de una función polinomial es $3x^3$, ¿cuál de las siguientes podría ser la gráfica del polinomio? Expliquen. Consideren lo que sucede cuando x tiene valores positivos grandes, y cuando x tiene valores negativos con valor absoluto grande.

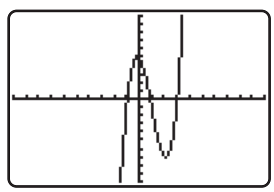
a)



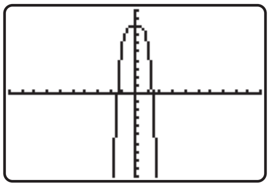
b)

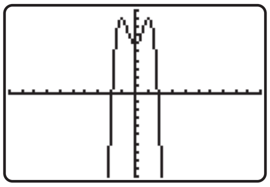


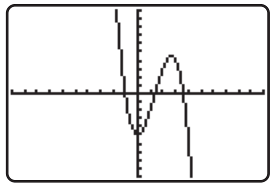
c)



112. Si el término principal de un polinomio es $-2x^4$, ¿cuál de las siguientes podría ser la gráfica del polinomio? Explique.

a) 

b) 

c) 

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **113.** Evalúe $\sqrt[4]{81}$.

[2.1] **114.** Resuelva $1 = \frac{8}{5}x - \frac{1}{2}$.

[2.4] **115.** **Máquinas de modelado** Una vieja máquina de modelado puede producir 40 cubetas de plástico en una hora. Una máquina más nueva puede fabricar 50 cubetas en una hora. ¿Cuánto tiempo les tomará a las dos máquinas producir un total de 540 cubetas?

[3.4] **116.** Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos (10, −4) y (−1, −2).

[4.2] **117.** Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$-4s + 3t = 16$$
$$4t - 2u = 2$$
$$-s + 6u = -2$$

5.2 Multiplicación de polinomios

1. Multiplicar un monomio por un polinomio.
2. Multiplicar un binomio por un binomio.
3. Multiplicar un polinomio por un polinomio.
4. Determinar el cuadrado de un binomio.
5. Determinar el producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos (producto de binomios conjugados).
6. Determinar el producto de funciones polinomiales.

1 Multiplicar un monomio por un polinomio

En la sección 3.6 sumamos y restamos funciones, pero no multiplicamos funciones polinomiales. Después de estudiar esta sección, usted será capaz de determinar el producto de funciones, esto es, $(f \cdot g)(x)$.

Para multiplicar polinomios, debe tener presente que *cada término de un polinomio debe multiplicarse por cada término del otro*. En otras palabras, se está multiplicando un monomio por otro. Para multiplicar monomios se utilizan las reglas de los exponentes que se analizaron en la sección 1.5.

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

En este capítulo trabajaremos con exponentes. Las reglas de los exponentes se estudiaron en la sección 1.5. Para su conveniencia, las reglas de los exponentes que necesitará para resolver los problemas de este capítulo se presentan de nueva cuenta, junto con ejemplos, antes de donde las necesitará usar. A continuación presentamos la regla del producto para exponentes, y en la sección 5.3 presentamos la regla del cociente para exponentes y la regla del exponente cero. Si después de leer los ejemplos desearía tener ejemplos adicionales del uso de estas reglas, revise la sección 1.5.

Regla del producto para exponentes

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

En el ejemplo 1, revisamos cómo multiplicar monomios utilizando la regla del producto para exponentes. También, en el ejemplo 1, utilizamos la palabra *factores*. Recuerde que cualesquiera expresiones que se *multipliquen* se denominan *factores*.

Multiplicar un monomio por un monomio

EJEMPLO 1 Multiplique.

a) $(4x^2)(5x^3)$ **b)** $(3x^2y)(4x^5y^3)$ **c)** $(-2a^4b^7)(-3a^8bc^5)$

Solución Utilizamos la regla del producto para exponentes para multiplicar los factores.

a) $(4x^2)(5x^3) = 4 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot x^3$ *Eliminar paréntesis y reacomodar términos.*

$= 20x^{2+3}$ *Regla del producto, $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3}$.*

$= 20x^5$

b) $(3x^2y)(4x^5y^3) = 3 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot x^5 \cdot y \cdot y^3$ — *Eliminar paréntesis y reacomodar términos*

$= 12x^{2+5}y^{1+3}$ — *Regla del producto.*

$= 12x^7y^4$

c) $(-2a^4b^7)(-3a^8b^3c^5) = (-2)(-3)a^4 \cdot a^8 \cdot b^7 \cdot b^3 \cdot c^5$ — *Eliminar paréntesis y reacomodar términos.*

$= 6a^{4+8}b^{7+3}c^5$ — *Regla del producto.*

$= 6a^{12}b^{10}c^5$

Ahora resuelva el ejercicio 9

En el ejemplo 1**a)**, $4x^2$ y $5x^3$ son *factores* del producto $20x^5$. En el ejemplo 1**b)**, $3x^2y$ y $4x^5y^3$ son *factores* del producto $12x^7y^4$.

Multiplicar un monomio por un polinomio

Al multiplicar un monomio por un binomio, podemos utilizar la propiedad distributiva. Al multiplicar un monomio por un polinomio (que tiene más de dos términos), podemos usar la **forma desarrollada de la propiedad distributiva**.

Propiedad distributiva. Forma desarrollada

$$a(b + c + d + \cdots + n) = ab + ac + ad + \cdots + an$$

En el ejemplo 2**a)** multiplicamos un monomio por un binomio y en el ejemplo 2**b)** y 2**c)**, multiplicamos un monomio por un trinomio.

EJEMPLO 2 Multiplique.

a) $3x^2\left(\frac{1}{6}x^3 - 5x^2\right)$ **b)** $2xy(3x^2y + 6xy^2 + 9)$ **c)** $0.4x(0.3x^3 + 0.7xy^2 - 0.2y^4)$

Solución

a) $3x^2\left(\frac{1}{6}x^3 - 5x^2\right) = 3x^2\left(\frac{1}{6}x^3\right) - 3x^2(5x^2) = \frac{1}{2}x^5 - 15x^4$

b) $2xy(3x^2y + 6xy^2 + 9) = (2xy)(3x^2y) + (2xy)(6xy^2) + (2xy)(9)$

$= 6x^3y^2 + 12x^2y^3 + 18xy$

c) $0.4x(0.3x^3 + 0.7xy^2 - 0.2y^4)$

$= (0.4x)(0.3x^3) + (0.4x)(0.7xy^2) - (0.4x)(0.2y^4)$

$= 0.12x^4 + 0.28x^2y^2 - 0.08xy^4$

Ahora resuelva el ejercicio 13

2 Multiplicar un binomio por un binomio

En la multiplicación $(a + b)(c + d)$ consideramos $(a + b)$ como un solo término y utilizamos la propiedad distributiva, para obtener

$$\begin{aligned}(a + b)(c + d) &= (a + b)c + (a + b)d \\ &= ac + bc + ad + bd\end{aligned}$$

Al multiplicar un binomio por un binomio, cada término del primer binomio debe multiplicarse por cada término del segundo binomio, para después sumar todos los términos semejantes.

Los binomios pueden multiplicarse tanto vertical como horizontalmente.

EJEMPLO 3 Multiplique $(3x + 2)(x - 5)$.

Solución Multiplicaremos de manera vertical. Escriba los binomios de acuerdo con sus variables en orden descendente, uno debajo del otro. No importa cuál de ellos se coloque en la parte superior. Después multiplique cada término del binomio de la parte superior por cada término del binomio de abajo, como se muestra. Recuerde alinear los términos semejantes para poder sumarlos.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & & 3x & + & 2 & \\
 & & x & - & 5 & \\
\hline
-5(3x+2) \longrightarrow & & -15x & - & 10 & \text{Multiplicar el binomio superior por } -5. \\
x(3x+2) \longrightarrow & 3x^2 & + 2x & & & \text{Multiplicar el binomio superior por } x. \\
\hline
 & 3x^2 & - 13x & - & 10 & \text{Sumar los términos semejantes en columnas.}
\end{array}
$$

En el ejemplo 3, los binomios $3x + 2$ y $x - 5$ son *factores* del trinomio $3x^2 - 13x - 10$.

Ahora resuelva el ejercicio 21

El método PIES

Un método sencillo para multiplicar dos binomios es el denominado **método PIES**. Para multiplicar dos binomios mediante este método, liste los binomios uno a continuación del otro. La palabra PIES indica que usted multiplica los Primeros términos, los términos Internos, los términos Externos y los Segundos términos de los dos binomios. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 4, donde multiplicamos los dos binomios del ejemplo 3.

EJEMPLO 4 Multiplique $(3x + 2)(x - 5)$ utilizando el método PIES.

Solución

S

P

$$(3x + 2)(x - 5)$$

I

E

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \text{P} & & \text{I} & & \text{E} & & \text{S} & \\
 & (3x)(x) & + & (2)(x) & + & (3x)(-5) & + & (2)(-5) & \\
= & 3x^2 & + & 2x & - & 15x & - & 10 & = 3x^2 - 13x - 10
\end{array}
$$

Ahora resuelva el ejercicio 25

Realizamos la multiplicación siguiendo el orden PIES. Sin embargo, es posible hacerlo siguiendo cualquier orden, siempre que cada término de un binomio se multiplique por cada término del otro. Utilizamos PIES en lugar de EISP o de cualquier otro orden de letras, ya que éste es fácil de recordar.

3 Multiplicar un polinomio por un polinomio

Al multiplicar un trinomio por un binomio o un trinomio por un trinomio, cada término del primer polinomio debe ser multiplicado por cada término del segundo. Es útil alinear los términos colocando cada polinomio en orden descendente, si no están dados de esa manera.

EJEMPLO 5 Multiplique $x^2 + 1 - 4x$ por $2x^2 - 3$.

Solución Ya que el trinomio no está en orden descendente, reescríbalo como $x^2 - 4x + 1$.

Antes de multiplicar, coloque el polinomio más largo en la parte superior. Al hacer la multiplicación asegúrese de alinear los términos semejantes, de modo que pueda sumarlos con más facilidad.

$$\begin{array}{rrrrl}
 & & x^2 - 4x & + 1 & \text{Trinomio escrito en orden descendente.} \\
 & & 2x^2 & - 3 & \\
\hline
-3(x^2 - 4x + 1) \longrightarrow & & - 3x^2 + 12x & - 3 & \text{Multiplique la expresión superior por } -3. \\
2x^2(x^2 - 4x + 1) \longrightarrow & 2x^4 - 8x^3 & + 2x^2 & & \text{Multiplique la expresión superior por } 2x^2. \\
\hline
 & 2x^4 - 8x^3 & - x^2 + 12x & - 3 & \text{Sume los términos semejantes en columnas.}
\end{array}$$

Ahora resuelva el ejercicio 35

EJEMPLO 6 Multiplique $3x^2 + 6xy - 5y^2$ por $x + 4y$.

Solución

$$\begin{array}{rrl}
 & 3x^2 + 6xy - 5y^2 & \\
 & x + 4y & \\
\hline
4y(3x^2 + 6xy - 5y^2) \longrightarrow & 12x^2y + 24xy^2 - 20y^3 & \text{Multiplique la expresión superior por } 4y. \\
x(3x^2 + 6xy - 5y^2) \longrightarrow & 3x^3 + 6x^2y - 5xy^2 \qquad\qquad & \text{Multiplique la expresión superior por } x. \\
\hline
 & 3x^3 + 18x^2y + 19xy^2 - 20y^3 & \text{Sume los términos semejantes en columnas.}
\end{array}$$

Ahora resuelva el ejercicio 31

4 Determinar el cuadrado de un binomio

Ahora estudiaremos algunas fórmulas especiales. Con frecuencia necesitamos calcular el *cuadrado de un binomio*, así que contamos con fórmulas especiales para hacerlo.

Cuadrado de un binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Si olvida las fórmulas, puede deducirlas fácilmente multiplicando $(a + b)(a + b)$ y $(a - b)(a - b)$.

Los ejemplos 7 y 8 ilustran el uso de la fórmula para el cuadrado de un binomio.

EJEMPLO 7 Desarrolle. **a)** $(3x + 7)^2$ **b)** $(4x^2 - 3y)^2$

Solución

a) $(3x + 7)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(7) + (7)^2$
$= 9x^2 + 42x + 49$

b) $(4x^2 - 3y)^2 = (4x^2)^2 - 2(4x^2)(3y) + (3y)^2$
$= 16x^4 - 24x^2y + 9y^2$

Ahora resuelva el ejercicio 45

El cuadrado de los binomios, como en el ejemplo 7, también se puede calcular mediante el método PIES.

Cómo evitar errores comunes

Recuerde el término de en medio al calcular el cuadrado de un binomio.

CORRECTO	INCORRECTO
$(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$ $= x^2 + 4x + 4$	$\cancel{(x + 2)^2 = x^2 + 4}$
$(x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$ $= x^2 - 6x + 9$	$\cancel{(x - 3)^2 = x^2 + 9}$

EJEMPLO 8 Desarrolle $[x + (y - 1)]^2$.

Solución Este problema parece más complicado que los ejemplos anteriores, pero se resuelve de la misma forma que los otros cuadrados de binomios. Considere a x como el primer término y a $(y - 1)$ como el segundo. Utilice dos veces la fórmula.

$$\begin{aligned}[x + (y - 1)]^2 &= (x)^2 + 2(x)(y - 1) + (y - 1)^2 \\ &= x^2 + (2x)(y - 1) + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 + 2xy - 2x + y^2 - 2y + 1\end{aligned}$$

Ninguno de los seis términos son términos semejantes, por lo que no se pueden reducir. Observe que $(y - 1)^2$ también es el cuadrado de un binomio, y fue desarrollado como tal.

Ahora resuelva el ejercicio 51

5 Determinar el producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos (producto de binomios conjugados)

A continuación multiplicaremos $(x + 6)(x - 6)$ utilizando el método PIES.

$$(x + 6)(x - 6) = x^2 - 6x + 6x - (6)(6) = x^2 - 6^2$$

Observe que los productos externos e internos suman cero. Al examinar este ejemplo, vemos que el producto de la suma y la diferencia de los mismos dos términos es la diferencia de los cuadrados de los dos términos.

Producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos (binomios conjugados)
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

En otras palabras, para multiplicar dos binomios que sólo difieren en el signo entre sus dos términos, reste el cuadrado del segundo término del cuadrado del primero. Observe que $a^2 - b^2$ representa una **diferencia de dos cuadrados**.

EJEMPLO 9 Multiplique.

a) $\left(3x + \frac{4}{5}\right)\left(3x - \frac{4}{5}\right)$ **b)** $(0.2x + 0.3z^2)(0.2x - 0.3z^2)$

Solución Cada uno es un producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos, es decir, son binomios conjugados. Por lo tanto,

a) $\left(3x + \frac{4}{5}\right)\left(3x - \frac{4}{5}\right) = (3x)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 9x^2 - \frac{16}{25}$

b) $$\begin{aligned}(0.2x + 0.3z^2)(0.2x - 0.3z^2) &= (0.2x)^2 - (0.3z^2)^2 \\ &= 0.04x^2 - 0.09z^4\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 27

EJEMPLO 10 Multiplique $(5x + y^4)(5x - y^4)$.

Solución $(5x + y^4)(5x - y^4) = (5x)^2 - (y^4)^2 = 25x^2 - y^8$

Ahora resuelva el ejercicio 49

EJEMPLO 11 Multiplique $[4x + (3y + 2)][4x - (3y + 2)]$.

Solución Tratamos a $4x$ como el primer término y a $3y + 2$ como el segundo. En consecuencia, obtenemos la suma y la diferencia de los mismos dos términos.

$$\begin{aligned}[4x + (3y + 2)][4x - (3y + 2)] &= (4x)^2 - (3y + 2)^2 \\ &= 16x^2 - (9y^2 + 12y + 4) \\ &= 16x^2 - 9y^2 - 12y - 4\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 55

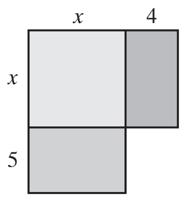


FIGURA 5.11

EJEMPLO 12 ▸ Área
La **figura 5.11** consta de un cuadrado y dos rectángulos. Determine una expresión polinomial para calcular el área total de la figura.

Solución Para determinar el área total, encuentre las áreas de las tres regiones y luego súmelas.

$$\text{Área del cuadrado} = x \cdot x = x^2$$
$$\text{Área del rectángulo de la derecha} = x \cdot 4 = 4x$$
$$\text{Área del rectángulo inferior} = x \cdot 5 = 5x$$

El área total es la suma de estas tres cantidades.

Área total $= x^2 + 4x + 5x = x^2 + 9x$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 85**

6 Determinar el producto de funciones polinomiales

Anteriormente se mencionó que para funciones $f(x)$ y $g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Ahora resolveremos un ejemplo que incluye multiplicación de funciones polinomiales.

EJEMPLO 13 ▸ Sea $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x - 2$. Determine

a) $f(3) \cdot g(3)$ **b)** $(f \cdot g)(x)$ **c)** $(f \cdot g)(3)$

Solución

a) $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales, ya que las expresiones a la derecha de los signos de igual son polinomios.

$$f(x) = x + 4 \qquad g(x) = x - 2$$
$$f(3) = 3 + 4 = 7 \qquad g(3) = 3 - 2 = 1$$
$$f(3) \cdot g(3) = 7 \cdot 1 = 7$$

b) De la sección 3.6, sabemos que

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\ &= (x + 4)(x - 2)\\ &= x^2 - 2x + 4x - 8\\ &= x^2 + 2x - 8\end{aligned}$$

c) Para evaluar $(f \cdot g)(3)$, sustituimos cada x por 3 en $(f \cdot g)(x)$.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= x^2 + 2x - 8\\ (f \cdot g)(3) &= 3^2 + 2(3) - 8\\ &= 9 + 6 - 8 = 7\end{aligned}$$

Observe que en la parte **c)** encontramos $(f \cdot g)(3) = 7$ y en la parte **a)** $f(3) \cdot g(3) = 7$. Por lo tanto, $(f \cdot g)(3) = f(3) \cdot g(3)$, justo lo que esperábamos con base en lo analizado en la sección 3.6.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 79**

En el ejemplo 13, encontramos que si $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x - 2$, entonces $(f \cdot g)(x) = x^2 + 2x - 8$. Las gráficas de $y = f(x) = x + 4$, $y = g(x) = x - 2$ y $y = (f \cdot g)(x) = x^2 + 2x - 8$ se muestran en la **figura 5.12**. A partir de las gráficas vemos que $f(3) = 7$, $g(3) = 1$ y $(f \cdot g)(3) = 7$, tal como supusimos con base en el ejemplo 13. Todos los puntos de $y = x^2 + 2x - 8$ pueden determinarse de la misma manera. Por ejemplo, $f(-4) = 0$ y $g(-4) = -6$. Como $0(-6) = 0$, $(f \cdot g)(-4) = 0$. También $f(2) = 6$ y $g(2) = 0$; por lo tanto, $(f \cdot g)(2) = 6 \cdot 0 = 0$. Observe en la **figura 5.12** que al multiplicar dos funciones lineales, el producto es una función cuadrática.

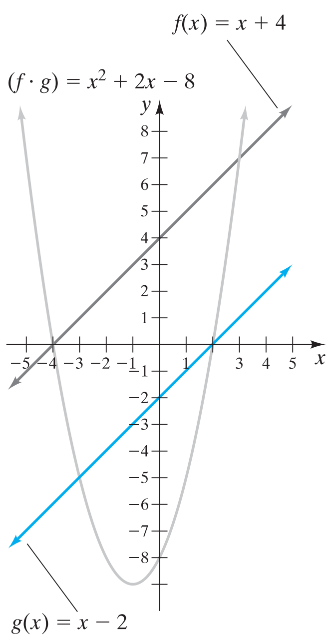


FIGURA 5.12

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) Explique cómo multiplicar dos binomios utilizando el método PIES.
   b) Construya dos binomios y multiplíquelos utilizando el método PIES.
   c) Multiplique los mismos dos binomios utilizando el orden SIEP (segundos, internos, externos, primeros).
   d) Compare los resultados de las partes **b)** y **c)**. Si son diferentes, explique por qué.
2. a) Explique cómo multiplicar un monomio por un polinomio.
   b) Multiplique $3x(4x^2 - 6x - 7)$ mediante su procedimiento de la parte **a)**.
3. a) Explique cómo multiplicar un polinomio por un polinomio.
   b) Utilizando su procedimiento de la parte **a)**, multiplique $4 + x$ por $x^2 - 6x + 3$.
4. a) Explique cómo desarrollar $(2x - 3)^2$ mediante la fórmula para el cuadrado de un binomio.
   b) Mediante su procedimiento de la parte **a)**, desarrolle $(2x - 3)^2$.
5. a) ¿Qué se entiende por el producto de la suma y la diferencia de los mismos dos términos (producto de binomios conjugados)?
   b) Proporcione un ejemplo de un problema que sea producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos (binomios conjugados).
   c) ¿Cómo se multiplica el producto de la suma y la diferencia de los mismos dos términos (binomios conjugados)?
   d) Multiplique el ejemplo que dio en la parte **b)** mediante el procedimiento de la parte **c)**.
6. ¿El producto de dos binomios siempre da por resultado un
   a) binomio?
   b) trinomio? Explique.
7. ¿El producto de dos polinomios de primer grado siempre será un polinomio de segundo grado?
8. a) Dadas $f(x)$ y $g(x)$, explique cómo determinaría $(f \cdot g)(x)$.
   b) Si $f(x) = x - 8$ y $g(x) = x + 8$, determine $(f \cdot g)(x)$.

Práctica de habilidades

Multiplique.

9. $(4xy)(6xy^4)$
10. $(-2xy^4)(9x^4y^6)$
11. $\left(\frac{5}{9}x^2y^5\right)\left(\frac{1}{5}x^5y^3z^2\right)$
12. $2y^3(3y^2 + 2y - 8)$
13. $-3x^2y(-2x^4y^2 + 5xy^3 + 4)$
14. $3x^4(2xy^2 + 5x^7 - 9y)$
15. $\frac{2}{3}yz(3x + 4y - 12y^2)$
16. $\frac{1}{2}x^2y(4x^5y^2 + 3x - 7y^2)$
17. $0.3(2x^2 - 5x + 11y)$
18. $0.8(0.2a + 0.9b - 1.3c)$
19. $0.3a^5b^4(9.5a^6b - 4.6a^4b^3 + 1.2ab^5)$
20. $4.6m^2n(1.3m^4n^2 - 2.6m^3n^3 + 5.9n^4)$

Multiplique los binomios siguientes.

21. $(4x - 6)(3x - 5)$
22. $(2x - 1)(7x + 5)$
23. $(4 - x)(3 + 2x^2)$
24. $(5x + y)(6x - y)$
25. $\left(\frac{1}{2}x + 2y\right)\left(2x - \frac{1}{3}y\right)$
26. $\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b\right)\left(\frac{1}{2}a - b\right)$
27. $(0.3a + 0.5b)(0.3a - 0.5b)$
28. $(4.6r - 5.8s)(0.2r - 2.3s)$

Multiplique los polinomios siguientes.

29. $(x^2 + 3x + 1)(x - 4)$
30. $(x + 3)(2x^2 - x - 8)$
31. $(a - 3b)(2a^2 - ab + 2b^2)$
32. $(7p - 3)(-2p^2 - 4p + 1)$
33. $(x^3 - x^2 + 3x + 7)(x + 1)$
34. $(2x - 1)(x^3 + 3x^2 - 5x + 6)$
35. $(5x^3 + 4x^2 - 6x + 2)(x + 5)$
36. $(a^3 - 2a^2 + 5a - 6)(2a^2 - 5a - 3)$
37. $(3m^2 - 2m + 4)(m^2 - 3m - 5)$
38. $(2a^2 - 6a + 3)(3a^2 - 5a - 2)$
39. $(2x - 1)^3$
40. $(3x + y)^3$
41. $(5r^2 - rs + 2s^2)(2r^2 - s^2)$
42. $(4x^2 - 5xy + y^2)(x^2 - 2y^2)$

Multiplique mediante la fórmula para el cuadrado de un binomio o bien utilizando la del producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos (producto de binomios conjugados).

43. $(x + 2)(x + 2)$
44. $(y - 5)(y - 5)$
45. $(2x - 7)(2x - 7)$
46. $(3z + 4)(3z + 4)$
47. $(4x - 3y)^2$
48. $(2a + 5b)^2$

49. $(5m^2 + 2n)(5m^2 - 2n)$
50. $(5p^2 + 6q^2)(5p^2 - 6q^2)$
51. $[y + (4 - 2x)]^2$
52. $[(a + b) + 9]^2$
53. $[5x + (2y + 1)]^2$
54. $[4 - (p - 3q)]^2$
55. $[a + (b + 4)][a - (b + 4)]$
56. $[2x + (y + 5)][2x - (y + 5)]$

Multiplique.

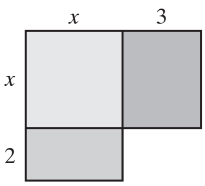
57. $2xy(x^2 + xy + 12y^2)$
58. $3a^2b^2\left(\frac{1}{3}ab - \frac{1}{9}b^6\right)$
59. $\frac{1}{2}xy^2(4x^2 + 3xy - 7y^4)$
60. $-\frac{3}{5}x^2y\left(-\frac{2}{3}xy^4 + \frac{1}{9}xy^2 + 4\right)$
61. $-\frac{3}{5}xy^3z^2\left(-xy^2z^5 - 5xy + \frac{1}{9}xz^7\right)$
62. $\frac{2}{3}x^2y^4\left(\frac{3}{5}xy^3 - \frac{1}{8}x^4y + 2xy^3z^5\right)$
63. $(3a + 4)(7a - 6)$
64. $(5p - 9q)(4p - 11q)$
65. $\left(8x + \frac{1}{5}\right)\left(8x - \frac{1}{5}\right)$
66. $\left(5a - \frac{1}{7}\right)\left(5a + \frac{1}{7}\right)$
67. $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^3$
68. $\left(\frac{1}{2}m - n\right)^3$
69. $(x + 3)(2x^2 + 4x - 3)$
70. $(5a + 4)(a^2 - a + 3)$
71. $(2p - 3q)(3p^2 + 4pq - 2q^2)$
72. $(2m + n)(3m^2 - mn + 2n^2)$
73. $[(3x + 2) + y][(3x + 2) - y]$
74. $[a + (3b + 5)][a - (3b + 5)]$
75. $(a + b)(a - b)(a^2 - b^2)$
76. $(2a + 3)(2a - 3)(4a^2 + 9)$
77. $(x - 4)(6 + x)(2x - 8)$
78. $(3x - 5)(5 - 2x)(3x + 8)$

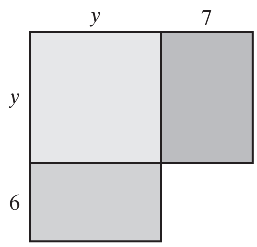
Para las funciones dadas, determine **a)** $(f \cdot g)(x)$ *y* **b)** $(f \cdot g)(4)$.

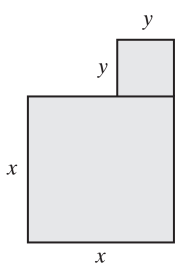
79. $f(x) = x - 5, g(x) = x + 6$
80. $f(x) = 2x - 3, g(x) = x - 1$
81. $f(x) = 2x^2 + 6x - 4, g(x) = 5x + 3$
82. $f(x) = 4x^2 + 7, g(x) = 2 - x$
83. $f(x) = -x^2 + 3x, g(x) = x^2 + 2$
84. $f(x) = -x^2 + 2x + 7, g(x) = x^2 - 1$

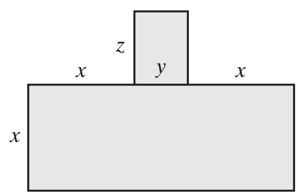
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 85 a 88, determine una expresión polinomial para calcular el área total de cada figura.*

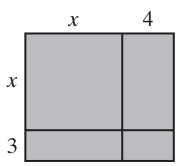
85.


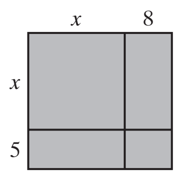
86.


87.


88.


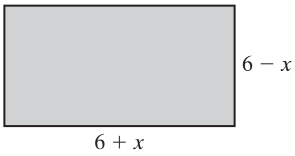
Área *En los ejercicios 89 y 90,* **a)** *determine el área del rectángulo estableciendo el área de las cuatro secciones y sumando los resultados, y* **b)** *multiplique los dos lados y compare el producto con su respuesta a la parte* **a)**.

89.


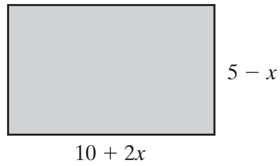
90.


Área *Escriba una expresión polinomial para calcular el área de cada figura. Todos los ángulos son rectos.*

91.

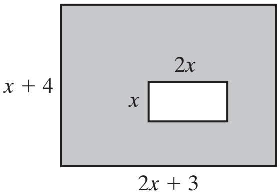


92.

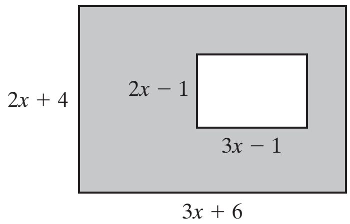


Área *En los ejercicios 93 y 94,* **a)** *escriba una expresión polinomial para calcular el área de la parte sombreada de la figura.* **b)** *El área de la parte sombreada se indica arriba de cada figura. Determine el área de los rectángulos pequeño y grande.*

93. Área de la región sombreada = 67 pulgadas cuadradas



94. Área de la región sombreada = 139 pulgadas cuadradas



95. Escriba dos binomios cuyo producto sea $x^2 - 49$. Explique cómo determinó su respuesta.

96. Escriba dos binomios cuyo producto sea $4x^2 - 9$. Explique cómo determinó su respuesta.

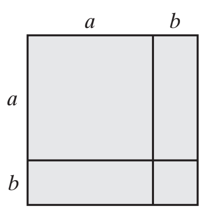
97. Escriba dos binomios cuyo producto sea $x^2 + 12x + 36$. Explique cómo determinó su respuesta.

98. Escriba dos binomios cuyo producto sea $16y^2 - 8y + 1$. Explique cómo determinó su respuesta.

99. Considere la expresión $a(x - n)^3$. Escriba esta expresión como un producto de factores.

100. Considere la expresión $P(1 - r)^4$. Escriba esta expresión como producto de factores.

101. Área La expresión $(a + b)^2$ puede representarse con la siguiente figura.



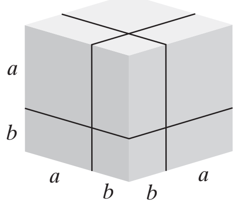
a) Explique por qué esta figura representa $(a + b)^2$.

b) Con ayuda de la figura, determine $(a + b)^2$ estableciendo el área de cada una de sus cuatro partes, y luego sumándolas.

c) Simplifique $(a + b)^2$ multiplicando $(a + b)(a + b)$.

d) Compare las respuestas de las partes **b)** y **c)**, ¿cómo son? Si no son iguales, explique por qué.

102. Volumen La expresión $(a + b)^3$ puede representarse con la siguiente figura.



a) Explique por qué esta figura representa $(a + b)^3$.

b) Determine $(a + b)^3$ sumando el volumen de cada una de las ocho partes de la figura.

c) Simplifique $(a + b)^3$ multiplicando.

d) Compare las respuestas de las partes **b)** y **c)**, ¿cómo son? Si no son iguales, explique por qué.

103. Interés compuesto La fórmula para calcular el interés compuesto es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde A es el monto, P es el capital invertido, r es la tasa de interés anual, n es el número de veces que el interés se paga cada año y t es el tiempo en años.

a) Simplifique esta fórmula para $n = 1$.

b) Determine el valor de A, si $P = \$1000$, $n = 1$, $r = 6\%$ y $t = 2$ años.

104. Interés compuesto Utilice la fórmula dada en el ejercicio 103 para determinar A, si $P = \$4000$, $n = 2$, $r = 8\%$ y $t = 2$ años.

105. Formación El número en que un maestro puede otorgar premios diferentes a 2 estudiantes en un grupo que tiene n estudiantes, está dado por la fórmula $P(n) = n(n - 1)$.

a) Utilice esta fórmula para determinar el número de maneras en que un maestro puede otorgar premios diferentes a 2 estudiantes en un grupo que tiene 11 estudiantes.

b) Reescriba la fórmula multiplicando los factores.

c) Utilice el resultado de la parte **b)** para determinar el número de maneras en que un maestro puede otorgar premios diferentes a dos estudiantes en un grupo con 11 estudiantes.

d) ¿Los resultados de las partes **a)** y **b)** son iguales?

106. Carrera de caballos El número de maneras en que pueden terminar caballos en primero, segundo y tercer lugar, en una carrera en donde participan n caballos, está dado por la fórmula

$$P(n) = n(n - 1)(n - 2)$$

a) Utilice esta fórmula para determinar el número de maneras en que los caballos pueden quedar en primero, segundo y tercer lugar, en una carrera en la que participaron 7 caballos.

b) Reescriba la fórmula multiplicando los factores.

c) Utilice el resultado de la parte **b)** para determinar el número de maneras en que los caballos pueden terminar en primero, segundo y tercero, en una carrera de 7 caballos.

d) ¿Los resultados de las partes **a)** y **b)** son iguales? Explique.

107. Si $f(x) = x^2 - 3x + 5$, determine $f(a + b)$ sustituyendo cada x de la función por $(a + b)$.

108. Si $f(x) = 2x^2 - x + 3$, determine $f(a + b)$.

En los ejercicios 109 a 114, simplifique. Suponga que todas las variables representan números naturales.

109. $3x^t(5x^{2t-1} + 6x^{3t})$

110. $5k^{r+2}(4k^{r+2} - 3k^r - k)$

111. $(6x^m - 5)(2x^{2m} - 3)$

112. $(x^{3n} - y^{2n})(x^{2n} + 2y^{4n})$

113. $(y^{a-b})^{a+b}$

114. $(a^{m+n})^{m+n}$

En los ejercicios 115 y 116, realice la multiplicación polinomial.

115. $(x - 3y)^4$

116. $(2a - 4b)^4$

117. **a)** Explique cómo puede verificarse por medio de una calculadora graficadora una multiplicación en una variable, tal como $(x^2 + 2x + 3)(x + 2) = x^3 + 4x^2 + 7x + 6$.
b) Compruebe la multiplicación indicada en la parte **a)** con ayuda de su calculadora graficadora.

118. **a)** Con ayuda de su calculadora graficadora, muestre que la multiplicación $(x^2 - 4x - 5)(x - 1) \neq x^3 + 6x^2 - 5x + 5$.
b) Multiplique $(x^2 - 4x - 5)(x - 1)$.
c) Compruebe en su calculadora graficadora la respuesta que dio en la parte **b)**.

Retos

Multiplique.

119. $[(y + 1) - (x + 2)]^2$

120. $[(a - 2) - (a + 1)]^2$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] **121.** Evalúe $\frac{4}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$.

[1.5] **122.** Simplifique $\left(\frac{2r^4s^5}{r^2}\right)^3$.

[2.5] **123.** Resuelva la desigualdad $-12 < 3x - 5 \leq -1$, e indique la solución en notación de intervalo.

[3.2] **124.** Si $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, determine $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

5.3 División de polinomios y división sintética

1. Dividir un polinomio entre un monomio.
2. Dividir un polinomio entre un binomio.
3. Dividir polinomios mediante la división sintética.
4. Utilizar el teorema del residuo.

1 Dividir un polinomio entre un monomio

En la división de polinomios, la división entre 0 no está permitida. Cuando se nos da un problema de división con una variable en el denominador, *siempre supondremos que el denominador es diferente de 0*.

Para dividir un polinomio entre un monomio, partimos del hecho de que

$$\frac{A + B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

Si el polinomio tiene más de dos términos, ampliamos este procedimiento.

Para dividir un polinomio entre un monomio

Divida cada término del polinomio entre el monomio.

Para dividir un polinomio entre un monomio, necesitamos utilizar dos de las reglas de los exponentes que se presentaron en la sección 1.5, la regla del cociente para exponentes y la regla del exponente cero. A continuación se indican ambas reglas, y luego se proporcionan ejemplos para revisarlas.

Regla del cociente para exponentes: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$

Regla del exponente cero: $a^0 = 1, \quad a \neq 0$

EJEMPLO 1 Divida. **a)** $\dfrac{x^{10}}{x^4}$ **b)** $\dfrac{5x^3y^5}{2xy^2}$

Solución Utilizaremos la regla del cociente para dividir.

a)
$$\frac{x^{10}}{x^4} = x^{10-4} \quad \text{Regla del cociente}$$
$$= x^6$$

b)
$$\frac{5x^3y^5}{2xy^2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{x^3}{x}\cdot\frac{y^5}{y^2}$$
$$= \frac{5}{2}x^{3-1}y^{5-2} \quad \text{Regla del cociente}$$
$$= \frac{5x^2y^3}{2}$$

Ahora resuelva el ejercicio 11

EJEMPLO 2 Divida. **a)** $\dfrac{p^4}{p^4}$ **b)** $\dfrac{8r^6s^7}{3rs^7}$

Solución Utilizaremos la regla del cociente y la regla del exponente cero para dividir.

a)
$$\frac{p^4}{p^4} = p^{4-4} \quad \text{Regla del cociente}$$
$$= p^0$$
$$= 1 \quad \text{Regla del exponente cero}$$

b)
$$\frac{8r^6s^7}{3rs^7} = \frac{8}{3}\cdot\frac{r^6}{r}\cdot\frac{s^7}{s^7}$$
$$= \frac{8}{3}r^{6-1}s^{7-7} \quad \text{Regla del cociente}$$
$$= \frac{8}{3}r^5s^0$$
$$= \frac{8}{3}r^5(1) \quad \text{Regla del exponente cero}$$
$$= \frac{8}{3}r^5 \quad \text{o} \quad \frac{8r^5}{3}$$

Ahora resuelva el ejercicio 17

En el ejemplo 2, tanto $\dfrac{8}{3}r^5$ como $\dfrac{8r^5}{3}$ son respuestas aceptables. Ahora estamos preparados para dividir un polinomio entre un monomio.

EJEMPLO 3 Divida $\dfrac{4x^2 - 8x - 7}{2x}$.

Solución
$$\frac{4x^2 - 8x - 7}{2x} = \frac{4x^2}{2x} - \frac{8x}{2x} - \frac{7}{2x}$$
$$= 2x - 4 - \frac{7}{2x}$$

Ahora resuelva el ejercicio 25

EJEMPLO 4 Divida $\dfrac{4y - 6x^4y^3 - 3x^5y^2 + 5x}{2xy^2}$.

Solución

$$\frac{4y - 6x^4y^3 - 3x^5y^2 + 5x}{2xy^2} = \frac{4y}{2xy^2} - \frac{6x^4y^3}{2xy^2} - \frac{3x^5y^2}{2xy^2} + \frac{5x}{2xy^2}$$

$$= \frac{2}{xy} - 3x^3y - \frac{3x^4}{2} + \frac{5}{2y^2}$$

Ahora resuelva el ejercicio 31

2 Dividir un polinomio entre un binomio

Para dividir un polinomio entre un binomio se sigue un procedimiento muy semejante al que se usa para realizar una división larga. En un problema de división la expresión que vamos a dividir se denomina *dividendo*, y la expresión que divide se llama *divisor*.

EJEMPLO 5 Divida $\dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 2}$.

Solución Reescriba el problema de división como

$$x + 2\overline{\big)x^2 + 7x + 10}$$

Divida x^2 (el primer término del dividendo $x^2 + 7x + 10$) entre x (el primer término del divisor $x + 2$).

$$\frac{x^2}{x} = x$$

Coloque el cociente, x, arriba del término del dividendo que incluye x.

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2\overline{\big)x^2 + 7x + 10} \end{array}$$

Ahora multiplique x por $x + 2$, tal como lo haría en una división larga, y coloque el producto debajo del dividendo, alineando los términos semejantes.

$$\begin{array}{rl} \textbf{Por} & \boxed{x} \\ \boxed{x + 2}\overline{\big)x^2 + 7x + 10} & \\ \textbf{Igual a}\quad \underline{\boxed{x^2 + 2x}} & \longleftarrow x(x+2) \end{array}$$

Ahora reste $x^2 + 2x$ de $x^2 + 7x$.

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2\overline{\big)x^2 + 7x \;\; + 10} \\ \underline{-(x^2 + 2x)} \\ 5x \end{array}$$

Baje el término siguiente, $+10$.

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2\overline{\big)x^2 + 7x + 10} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ 5x + 10 \end{array}$$

Divida $5x$ entre x.

$$\frac{5x}{x} = +5$$

Coloque $+5$ arriba de la constante del dividendo, y multiplique 5 por $x + 2$. Por último, reste.

Por

$$
\begin{array}{rl}
 & \;\; x + 5 \\
x + 2 & \overline{)\, x^2 + 7x + 10} \\
 & \underline{\;\; x^2 + 2x \;\;\;\;\;\;} \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\; 5x + 10 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\; \underline{5x + 10} \longleftarrow 5(x+2) \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; 0 \longleftarrow \text{Residuo}
\end{array}
$$

Igual a

Por lo tanto, $\dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} = x + 5$. No hay residuo.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 35**

En el ejemplo 5 no hubo residuo. Así que $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$. Observe que $x + 2$ y $x + 5$ son *factores* de $x^2 + 7x + 10$. En un problema de división, si no hay residuo, el divisor y el cociente son factores del dividendo.

Cuando la respuesta de un problema de división tenga residuo, escriba el residuo sobre el divisor y sume esta expresión al cociente. Por ejemplo, suponga que en el ejemplo 5 tuviéramos un residuo de 4; la respuesta se escribiría $x + 5 + \dfrac{4}{x + 2}$. Si el residuo fuera -7, la respuesta se escribiría $x + 5 + \dfrac{-7}{x + 2}$, que puede reescribirse como $x + 5 - \dfrac{7}{x + 2}$.

EJEMPLO 6 ▸ Divida $\dfrac{6x^2 - 7x + 3}{2x + 1}$.

Solución En este ejemplo restaremos mentalmente y no mostraremos el cambio de signo en las restas.

$$
\begin{array}{rl}
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\; 3x - 5 \\
2x + 1 & \overline{)\,6x^2 - 7x + 3} \\
 & \underline{\;6x^2 + 3x\;\;\;\;\;} \longleftarrow 3x(2x + 1) \\
 & \;\;\;\;\;\; -10x + 3 \\
 & \;\;\;\;\;\; \underline{-10x - 5} \longleftarrow -5(2x + 1) \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; 8 \longleftarrow \text{Residuo}
\end{array}
$$

Por lo tanto, $\dfrac{6x^2 - 7x + 3}{2x + 1} = 3x - 5 + \dfrac{8}{2x + 1}$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 45**

Al dividir un polinomio entre un binomio, la respuesta puede *verificarse* multiplicando el divisor por el cociente, y luego sumando el residuo. El resultado debe ser el polinomio con el que se empezó. Para comprobar el ejemplo 6, hacemos lo siguiente:

$$(2x + 1)(3x - 5) + 8 = 6x^2 - 10x + 3x - 5 + 8 = 6x^2 - 7x + 3$$

Como obtuvimos el polinomio con el que empezamos, nuestra división es correcta.

Al dividir un polinomio entre un binomio, debe listarse primero el polinomio y luego el binomio, en orden descendente. Si un término de cualquier grado no aparece, suele ser útil incluir ese término con un coeficiente numérico de 0. Por ejemplo, cuando tenemos $(6x^2 + x^3 - 4) \div (x - 2)$, reescribimos el problema como $(x^3 + 6x^2 + 0x - 4) \div (x - 2)$ antes de iniciar la división.

EJEMPLO 7 Divida $(4x^2 - 12x + 3x^5 - 17)$ entre $(-2 + x^2)$.

Solución Escriba el dividendo y el divisor en potencias descendentes de la variable x. Esto da $(3x^5 + 4x^2 - 12x - 17) \div (x^2 - 2)$. Si una potencia de x no aparece, sume esa potencia de x con un coeficiente de 0; luego divida.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 \qquad\quad + \ 6x + \ 4 \\
\hline
x^2 + 0x - 2 & 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 12x - 17 \\
 & \underline{3x^5 + 0x^4 - 6x^3} \longleftarrow 3x^3(x^2 + 0x - 2) \\
 & \qquad\qquad 6x^3 + 4x^2 - 12x \\
 & \qquad\qquad \underline{6x^3 + 0x^2 - 12x} \longleftarrow 6x(x^2 + 0x - 2) \\
 & \qquad\qquad\qquad 4x^2 + 0x - 17 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{4x^2 + 0x - \ 8} \longleftarrow 4(x^2 + 0x - 2) \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \ 9 \longleftarrow \text{Residuo}
\end{array}
$$

Para obtener la respuesta, realizamos las divisiones

$$\frac{3x^5}{x^2} = 3x^3 \qquad \frac{6x^3}{x^2} = 6x \qquad \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

Los cocientes $3x^3$, $6x$ y 4 fueron colocados arriba de sus términos semejantes en el dividendo. La respuesta es $3x^3 + 6x + 4 - \dfrac{9}{x^2 - 2}$. Verifique la respuesta usted mismo, multiplicando el divisor por el cociente y sumando el residuo.

Ahora resuelva el ejercicio 55

3 Dividir polinomios mediante la división sintética

Cuando se divide un polinomio entre un binomio de la forma $x - a$, el procedimiento se puede reducir mucho gracias a un método llamado **división sintética**. Considere los siguientes ejemplos. En el de la derecha sólo utilizamos los coeficientes numéricos.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad 2x^2 + 5x - 4 \\
\hline
x - 3 & 2x^3 - x^2 - 19x + 18 \\
 & \underline{2x^3 - 6x^2} \\
 & \qquad 5x^2 - 19x \\
 & \qquad \underline{5x^2 - 15x} \\
 & \qquad\qquad -4x + 18 \\
 & \qquad\qquad \underline{-4x + 12} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 6
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2 + 5 - 4 \\
\hline
1 - 3 & 2 - 1 - 19 + 18 \\
 & \underline{2 - 6} \\
 & \quad 5 - 19 \\
 & \quad \underline{5 - 15} \\
 & \qquad -4 + 18 \\
 & \qquad \underline{-4 + 12} \\
 & \qquad\qquad\quad 6
\end{array}
$$

Observe que las variables no desempeñan un papel en la determinación de los coeficientes numéricos del cociente. Este problema de división puede realizarse con mayor rapidez y facilidad mediante la división sintética.

A continuación se explica cómo utilizar la división sintética. Nuevamente analicemos la división

$$\frac{2x^3 - x^2 - 19x + 18}{x - 3}$$

1. Escriba el dividendo en potencias descendentes de x. Luego liste los coeficientes numéricos de cada término en el dividendo. Si falta el término de cualquier grado, sustitúyalo con 0 en la posición apropiada. En el problema anterior, los coeficientes numéricos del dividendo son

$$2 \quad -1 \quad -19 \quad 18$$

2. Al dividir entre un binomio con la forma $x - a$, coloque a a la izquierda de la fila de números que se obtuvo en el paso 1. En este problema, dividimos entre $x - 3$; por lo tanto, $a = 3$, así que escribimos

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & -19 & 18 \end{array}$$

3. Deje un espacio debajo de la fila de los coeficientes; luego trace una recta horizontal. Copie debajo de ésta el primer coeficiente de la izquierda, como sigue:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & -19 & 18 \\ & & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

4. Multiplique 3 por el número que colocó debajo de la línea, 2, para obtener 6. Escriba el 6 debajo del siguiente coeficiente, -1. Luego sume $-1 + 6$ para obtener 5.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & -19 & 18 \\ & & 6 & & \\ \hline & 2 & 5 & & \end{array}$$

5. Multiplique 3 por el resultado de la suma anterior, 5, para obtener 15. Escriba 15 debajo de -19. Luego sume ambos números para obtener -4. Repita este procedimiento como se ilustra.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & -19 & 18 \\ & & 6 & 15 & -12 \\ \hline & 2 & 5 & -4 & 6 \end{array}$$

Los tres primeros números de la última fila son los coeficientes numéricos del cociente, como se mostró en la división larga. El último número, 6, es el residuo que se obtiene en la división larga. El cociente debe ser de un grado una unidad menor al del dividendo, ya que estamos dividiendo entre $x - 3$. El dividendo original era un polinomio de tercer grado; por lo tanto, el cociente debe ser un polinomio de segundo grado. Utilice los primeros tres números de la última fila como coeficientes de un polinomio de segundo grado de x. Esto da por resultado $2x^2 + 5x - 4$, que es el cociente. El último número, 6, es el residuo. Por lo tanto,

$$\frac{2x^3 - x^2 - 19x + 18}{x - 3} = 2x^2 + 5x - 4 + \frac{6}{x - 3}$$

EJEMPLO 8 Utilice la división sintética para dividir.

$$(5 - x^2 + x^3) \div (x + 2)$$

Solución Primero liste los términos del dividendo en orden descendente de x.

$$(x^3 - x^2 + 5) \div (x + 2)$$

Como no hay término de primer grado, ocupe su lugar con un 0 cuando liste los coeficientes numéricos. Ya que $x + 2 = x - (-2)$, $a = -2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ & & -2 & 6 & -12 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -7 \end{array} \quad \leftarrow \text{Residuo}$$

Como el dividendo es un polinomio de tercer grado, el cociente debe ser un polinomio de segundo grado. La respuesta es $x^2 - 3x + 6 - \dfrac{7}{x + 2}$.

Ahora resuelva el ejercicio 61

EJEMPLO 9 Utilice división sintética para dividir.

$$(3x^4 + 11x^3 - 20x^2 + 7x + 35) \div (x + 5)$$

Solución

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 3 & 11 & -20 & 7 & 35 \\ & & -15 & 20 & 0 & -35 \\ \hline & 3 & -4 & 0 & 7 & 0 \end{array} \quad \leftarrow \text{Residuo}$$

Como el dividendo es de cuarto grado, el cociente debe ser de tercer grado. El cociente es $3x^3 - 4x^2 + 0x + 7$, sin residuo. Esto puede simplificarse como $3x^3 - 4x^2 + 7$.

Ahora resuelva el ejercicio 71

Ya que no hubo residuo en el ejemplo 9, $x + 5$ y $3x^3 - 4x + 7$ son *factores* de $3x^4 + 11x^3 - 20x^2 + 7x + 35$. Además, como ambos son factores,

$$(x + 5)(3x^3 - 4x^2 + 7) = 3x^4 + 11x^3 - 20x^2 + 7x + 35$$

4 Utilizar el teorema del residuo

En el ejemplo 8, cuando dividimos $x^3 - x^2 + 5$ entre $x + 2$, encontramos que el residuo fue -7. Si escribimos $x + 2$ como $x - (-2)$ y evaluamos la función polinomial $P(x) = x^3 - x^2 + 5$ en -2, obtenemos -7.

$$P(x) = x^3 - x^2 + 5$$
$$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + 5 = -8 - 4 + 5 = -7$$

¿Es una simple coincidencia que $P(-2)$, el valor de la función en -2, sea igual al residuo cuando la función $P(x)$ se divide entre $x - (-2)$? La respuesta es no. Puede demostrarse que para cualquier función polinomial $P(x)$, el valor de la función en a, $P(a)$, tiene el mismo valor que el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - a$.

Para obtener el residuo cuando un polinomio $P(x)$ se divide entre un polinomio con la forma $x - a$, podemos usar el **teorema del residuo**.

Teorema del residuo

Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x - a$, el residuo es igual a $P(a)$.

EJEMPLO 10 Utilice el teorema del residuo para determinar el residuo cuando $3x^4 + 6x^3 - 2x + 4$ se divide entre $x + 4$.

Solución Primero escribimos el divisor $x + 4$ en la forma $x - a$. Como $x + 4 = x - (-4)$, evaluamos $P(-4)$.

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^4 + 6x^3 - 2x + 4 \\ P(-4) &= 3(-4)^4 + 6(-4)^3 - 2(-4) + 4 \\ &= 3(256) + 6(-64) + 8 + 4 \\ &= 768 - 384 + 8 + 4 = 396 \end{aligned}$$

Así, cuando $3x^4 + 6x^3 - 2x + 4$ se divide entre $x + 4$, el residuo es 396.

Ahora resuelva el ejercicio 87

Mediante la división sintética, mostraremos que la respuesta del ejemplo 10 en realidad es 396.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -4 & 3 & 6 & 0 & -2 & 4 \\ & & -12 & 24 & -96 & 392 \\ \hline & 3 & -6 & 24 & -98 & 396 \end{array} \quad \leftarrow \text{Residuo}$$

Si graficásemos el polinomio $P(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2x + 4$, el valor de $P(x)$, o y, en $x = -4$ sería 396.

EJEMPLO 11 Utilice el teorema del residuo para determinar si $x - 5$ es un factor de $6x^2 - 25x - 25$.

Solución Sea $P(x) = 6x^2 - 25x - 25$. Si $P(5) = 0$, entonces el residuo de $(6x^2 - 25x - 25)/(x - 5)$ es 0, y $x - 5$ es un factor del polinomio. Si $P(5) \neq 0$, entonces hay un residuo y $x - 5$ no es un factor.

$$\begin{aligned} P(x) &= 6x^2 - 25x - 25 \\ P(5) &= 6(5)^2 - 25(5) - 25 \\ &= 6(25) - 25(5) - 25 \\ &= 150 - 125 - 25 = 0 \end{aligned}$$

Como $P(5) = 0$, $x - 5$ es un factor de $6x^2 - 25x - 25$. Observe que $6x^2 - 25x - 25 = (x - 5)(6x + 5)$.

Ahora resuelva el ejercicio 89

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.3

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) Explique cómo dividir un polinomio entre un monomio.
b) Utilizando el procedimiento que explicó en la parte **a)**, divida $\dfrac{5x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 12x + 1}{3x}$.

2. a) Explique cómo dividir un trinomio en x entre un binomio en x.
b) Mediante el procedimiento que explicó en la parte **a)**, divida $2x^2 - 12 + 5x$ entre $x + 4$.

3. Un trinomio dividido entre un binomio tiene un residuo de 0. ¿El cociente es un factor del trinomio? Explique.

4. a) Explique cómo puede verificarse la respuesta cuando se divide un polinomio entre un binomio.
b) Utilice la explicación que dio en la parte **a)** para comprobar si la siguiente división es correcta.

$$\frac{8x^2 + 2x - 15}{4x - 5} = 2x + 3$$

c) Verifique si la siguiente división es correcta.

$$\frac{6x^2 - 23x + 13}{3x - 4} = 2x - 5 - \frac{8}{3x - 4}$$

5. Cuando se divide un polinomio entre un polinomio, ¿qué hay que hacerle a los polinomios antes de comenzar?

6. Explique por qué $\dfrac{x - 1}{x}$ no es un polinomio.

7. a) Describa cómo se divide un polinomio entre $(x - a)$ mediante la división sintética.
b) Utilizando el procedimiento que indicó en la parte **a)**, divida $x^2 + 3x - 4$ entre $x - 5$.

8. a) Establezca el teorema del residuo.
b) Mediante el procedimiento que indicó en la parte **a)**, determine cuál es el residuo cuando $x^2 - 6x - 4$ se divide entre $x - 1$.

9. En el problema de división $\dfrac{x^2 + 11x + 21}{x + 2} = x + 9 + \dfrac{3}{x + 2}$, ¿$x + 9$ es un factor de $x^2 + 11x + 21$? Explique.

10. En el problema de división $\dfrac{x^2 - 3x - 28}{x + 4} = x - 7$, ¿$x - 7$ es un factor de $x^2 - 3x - 28$? Explique.

Práctica de habilidades

Divida.

11. $\dfrac{x^9}{x^7}$ **12.** $\dfrac{m^{13}}{m^3}$ **13.** $\dfrac{a^{11}}{a^7}$ **14.** $\dfrac{b^8}{b^3}$ **15.** $\dfrac{z^{16}}{z^8}$

16. $\dfrac{q^6}{q^6}$ **17.** $\dfrac{12r^7s^{10}}{3rs^8}$ **18.** $\dfrac{7y^{14}z^7}{4y^{11}z}$ **19.** $\dfrac{15x^{18}y^{19}}{3x^{10}y^8}$ **20.** $\dfrac{21a^8b^{17}}{9a^7b^{10}}$

Divida.

21. $\dfrac{4x + 18}{2}$ **22.** $\dfrac{9x + 8}{3}$ **23.** $\dfrac{4x^2 + 2x}{2x}$

24. $\dfrac{12x^2 - 8x - 24}{4}$ **25.** $\dfrac{5y^3 + 6y^2 - 12y}{3y}$ **26.** $\dfrac{21y^5 + 14y^2}{7y^4}$

27. $\dfrac{4x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2}{4x^2}$ **28.** $\dfrac{15x^3y - 25xy^3}{5xy}$ **29.** $\dfrac{8x^2y^2 - 10xy^3 - 5y}{2y^2}$

30. $\dfrac{4x^{13} + 12x^9 - 11x^7}{4x^6}$

31. $\dfrac{9x^2y - 12x^3y^2 + 15y^3}{2xy^2}$

32. $\dfrac{a^2b^2c - 6abc^2 + 5a^3b^5}{2abc^2}$

33. $\dfrac{3xyz + 6xyz^2 - 9x^3y^5z^7}{6xy}$

34. $\dfrac{6abc^3 - 5a^2b^3c^4 + 13ab^5c}{3ab^2c^3}$

Divida utilizando la división larga.

35. $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$

36. $\dfrac{x^2 + x - 20}{x + 5}$

37. $\dfrac{6x^2 + 16x + 8}{3x + 2}$

38. $\dfrac{2x^2 + 13x + 20}{x + 4}$

39. $\dfrac{6x^2 + x - 2}{2x - 1}$

40. $\dfrac{12x^2 - 17x - 7}{3x + 1}$

41. $\dfrac{x^2 + 6x + 3}{x + 1}$

42. $\dfrac{a^2 - a - 17}{a + 3}$

43. $\dfrac{2b^2 + b - 8}{b - 2}$

44. $\dfrac{2c^2 + c + 1}{2c + 5}$

45. $\dfrac{8x^2 + 6x - 25}{2x - 3}$

46. $\dfrac{8z^2 - 18z - 7}{4z + 1}$

47. $\dfrac{4x^2 - 36}{2x - 6}$

48. $\dfrac{16p^2 - 9}{4p + 3}$

49. $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 5x + 4}{x + 1}$

50. $\dfrac{-a^3 - 6a^2 + 2a - 4}{a - 1}$

51. $\dfrac{4y^3 + 12y^2 + 7y - 9}{2y + 3}$

52. $\dfrac{9b^3 - 3b^2 - 3b + 4}{3b + 2}$

53. $(4a^3 - 5a) \div (2a - 1)$

54. $(2x^3 + 6x + 33) \div (x + 4)$

55. $\dfrac{3x^5 + 2x^2 - 12x - 4}{x^2 - 2}$

56. $\dfrac{4b^5 - 18b^3 + 14b^2 + 18b - 21}{2b^2 - 3}$

57. $\dfrac{3x^4 + 4x^3 - 32x^2 - 5x - 20}{3x^3 - 8x^2 - 5}$

58. $\dfrac{3a^4 - 9a^3 + 13a^2 - 11a + 4}{a^2 - 2a + 1}$

59. $\dfrac{2c^4 - 8c^3 + 19c^2 - 33c + 15}{c^2 - c + 5}$

60. $\dfrac{2y^5 + 2y^4 - 3y^3 - 15y^2 + 18}{2y^2 - 3}$

Divida usando la división sintética.

61. $(x^2 + 7x + 6) \div (x + 1)$

62. $(x^2 - 7x + 6) \div (x - 1)$

63. $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$

64. $(x^2 - 5x + 6) \div (x - 2)$

65. $(x^2 - 11x + 28) \div (x - 4)$

66. $(x^2 + 17x + 72) \div (x + 9)$

67. $(x^2 + 5x - 14) \div (x - 3)$

68. $(x^2 - 2x - 39) \div (x + 5)$

69. $(3x^2 - 7x - 10) \div (x - 4)$

70. $(2b^2 - 9b + 1) \div (b - 6)$

71. $(4x^3 - 3x^2 + 2x) \div (x - 1)$

72. $(z^3 - 7z^2 - 13z + 25) \div (z - 2)$

73. $(3c^3 + 7c^2 - 4c + 16) \div (c + 3)$

74. $(3y^4 - 25y^2 - 29) \div (y - 3)$

75. $(y^4 - 1) \div (y - 1)$

76. $(a^4 - 16) \div (a - 2)$

77. $\dfrac{x^4 + 16}{x + 4}$

78. $\dfrac{z^4 + 81}{z + 3}$

79. $\dfrac{x^5 + x^4 - 9}{x + 1}$

80. $\dfrac{a^7 - 2a^6 + 13}{a - 2}$

81. $\dfrac{b^5 + 4b^4 - 14}{b + 1}$

82. $\dfrac{z^5 - 3z^3 - 7z}{z - 2}$

83. $(3x^3 + 2x^2 - 4x + 1) \div \left(x - \dfrac{1}{3}\right)$

84. $(8x^3 - 6x^2 - 5x + 3) \div \left(x + \dfrac{3}{4}\right)$

85. $(2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 7) \div \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

86. $(9y^3 + 9y^2 - y + 2) \div \left(y + \dfrac{2}{3}\right)$

Determine el residuo de las siguientes divisiones mediante el teorema del residuo. Si el divisor es un factor del dividendo, indíquelo.

87. $(4x^2 - 5x + 6) \div (x - 2)$

88. $(-2x^2 + 3x - 2) \div (x + 3)$

89. $(x^3 - 2x^2 + 4x - 8) \div (x - 2)$

90. $(x^4 + 3x^3 + x^2 + 22x + 8) \div (x + 4)$

91. $(-2x^3 - 6x^2 + 2x - 4) \div \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

92. $(-5x^3 - 6) \div \left(x - \dfrac{1}{5}\right)$

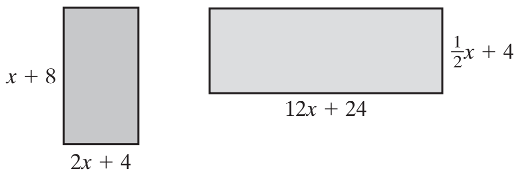
Resolución de problemas

93. **Área** El área de un rectángulo es $6x^2 - 8x - 8$. Si su longitud es $2x - 4$, determine su ancho.

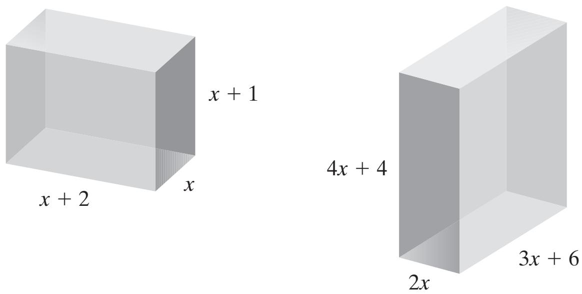
94. **Área** El área de un rectángulo es $15x^2 - 29x - 14$. Si su ancho es $5x + 2$, determine su longitud.

Área y volumen *En los ejercicios 95 y 96, ¿cuántas veces es mayor el área o volumen de la figura de la derecha que el de la figura de la izquierda? Explique cómo determinó su respuesta.*

95.



96.



97. ¿Es posible dividir un binomio entre un monomio y obtener un monomio como cociente? Explique.

98. **a)** ¿La suma, diferencia y producto de dos polinomios es siempre un polinomio?

b) ¿El cociente de dos polinomios es siempre un polinomio? Explique.

99. Explique cómo puede determinarse, mediante la división sintética, si una expresión con la forma $x - a$ es un factor de un polinomio en x.

100. Dados $P(x) = ax^2 + bx + c$ y un valor d tal que $P(d) = 0$, explique por qué d es una solución de la ecuación
$ax^2 + bx + c = 0$.

101. Si $\dfrac{P(x)}{x - 4} = x + 2$, determine $P(x)$.

102. Si $\dfrac{P(x)}{2x + 4} = 2x - 3$, determine $P(x)$.

103. Si $\dfrac{P(x)}{x + 4} = x + 5 + \dfrac{6}{x + 4}$, determine $P(x)$.

104. Si $\dfrac{P(x)}{2x - 3} = 2x - 1 - \dfrac{8}{2x - 3}$, determine $P(x)$.

En los ejercicios 105 y 106, divida.

105. $\dfrac{2x^3 - x^2y - 7xy^2 + 2y^3}{x - 2y}$

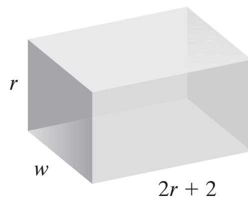
106. $\dfrac{x^3 + y^3}{x + y}$

En los ejercicios 107 y 108, divida. Las respuestas contienen fracciones.

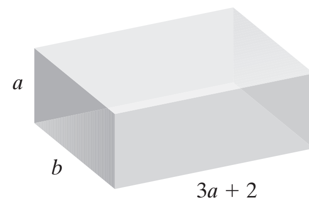
107. $\dfrac{2x^2 + 2x - 2}{2x - 3}$

108. $\dfrac{3x^3 - 7}{3x - 2}$

109. **Volumen** El volumen de la siguiente caja es $2r^3 + 4r^2 + 2r$. Determine w en términos de r.



110. **Volumen** El volumen de la siguiente caja es $6a^3 + a^2 - 2a$. Determine b en términos de a.



111. Cuando un polinomio se divide entre $x - 3$, el cociente es $x^2 - 3x + 4 + \dfrac{5}{x - 3}$. ¿Cuál es el polinomio? Explique cómo determinó su respuesta.

112. Cuando un polinomio se divide entre $2x - 3$, el cociente es $2x^2 + 6x - 5 + \dfrac{5}{2x - 3}$. ¿Cuál es el polinomio? Explique cómo determinó su respuesta.

En los ejercicios 113 y 114, divida. Suponga que todas las variables de los exponentes son números naturales.

113. $\dfrac{4x^{n+1} + 2x^n - 3x^{n-1} - x^{n-2}}{2x^n}$

114. $\dfrac{3x^n + 6x^{n-1} - 2x^{n-2}}{2x^{n-1}}$

115. ¿Es $x - 1$ factor de $x^{100} + x^{99} + \cdots + x^1 + 1$? Explique.

116. ¿Es $x + 1$ factor de $x^{100} + x^{99} + \cdots + x^1 + 1$? Explique.

117. ¿Es $x + 1$ factor de $x^{99} + x^{98} + \cdots + x^1 + 1$? Explique.

118. Divida $0.2x^3 - 4x^2 + 0.32x - 0.64$ entre $x - 0.4$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.6] **119.** Divida $\dfrac{8.45 \times 10^{23}}{4.225 \times 10^{13}}$ y exprese la respuesta en notación científica.

[2.3] **120.** **Triángulo** Determine los tres ángulos de un triángulo, si uno de ellos mide el doble del ángulo más pequeño, y el tercero mide 60° más que el ángulo más pequeño.

[2.6] **121.** Determine el conjunto solución para
$$\left|\frac{5x - 3}{2}\right| + 4 = 8.$$

[3.6] **122.** Sea $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = -5x + 3$. Determine $f(6) \cdot g(6)$.

[5.1] **123.** Sume $(6r + 5s - t) + (-3r - 2s - 7t)$.

5.4 Cómo factorizar un monomio de un polinomio y factorización por agrupación

1 Determinar el máximo factor común.
2 Factorizar un monomio de un polinomio.
3 Factorizar un factor binomial común.
4 Factorizar por agrupación.

La factorización es la operación opuesta a la multiplicación. Factorizar una expresión significa escribirla como un producto de otras expresiones. Por ejemplo, en la sección 5.2 aprendimos a realizar las multiplicaciones siguientes:

$$3x^2(6x + 3y + 4x^3) = 18x^3 + 9x^2y + 12x^5$$

y

$$(6x + 3y)(2x - 5y) = 12x^2 - 24xy - 15y^2$$

En esta sección aprenderemos a determinar los *factores* de una expresión dada. Por ejemplo, aprenderemos cómo realizar cada una de las factorizaciones siguientes.

$$18x^3 + 9x^2y + 12x^5 = 3x^2(6x + 3y + 4x^3)$$

y

$$12x^2 - 24xy - 15y^2 = (6x + 3y)(2x - 5y)$$

1 Determinar el máximo factor común

Para factorizar un monomio de un polinomio, factorizamos al **máximo factor común** (MFC) de cada término del polinomio. El MFC es el producto de los factores comunes a todos los términos del polinomio. Por ejemplo, el MFC para $6x + 21$ es 3, ya que 3 es el número más grande que es factor tanto de $6x$ como de 21. Para factorizar, utilizamos la propiedad distributiva.

$$6x + 21 = 3(2x + 7)$$

El 3 y el $2x + 7$ son *factores* del polinomio $6x + 21$.

Considere los términos x^3, x^4, x^5 y x^6. El MFC de estos términos es x^3, ya que x^3 es la potencia de x más alta que divide a los cuatro términos.

EJEMPLO 1 ▸ Determine el MFC de los términos siguientes.

a) y^{12}, y^4, y^9, y^7 **b)** x^3y^2, xy^4, x^5y^6 **c)** $6x^2y^3z, 9x^3y^4, 24x^2z^5$

Solución

a) Observe que y^4 es la potencia más alta de y común a los cuatro términos. Por lo tanto, el MFC es y^4.

b) La potencia más alta de x común a los tres términos es x (o x^1). La potencia más alta de y común a los tres términos es y^2. Así, el MFC de los tres términos es xy^2.

c) El MFC es $3x^2$. Como y no aparece en $24x^2z^5$, no es parte del MFC; como z no aparece en $9x^3y^4$, no es parte del MFC.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 3**

EJEMPLO 2 ▸ Determine el MFC de los términos siguientes.

$$6(x - 2)^2, 5(x - 2), 18(x - 2)^7$$

Solución Los tres números 6, 5 y 18, no tienen factor común distinto de 1. La potencia más alta de $(x - 2)$ común a los tres términos es $(x - 2)$. Así, el MFC de los tres términos es $(x - 2)$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 5**

2 Factorizar un monomio de un polinomio

Cuando factorizamos un monomio de un polinomio estamos factorizando el máximo factor común. *El primer paso en cualquier problema de factorización consiste en determinar y luego factorizar el MFC.*

Para factorizar un monomio de un polinomio

1. Determine el máximo factor común de todos los términos del polinomio.
2. Escriba cada término como el producto del MFC y otro factor.
3. Use la propiedad distributiva para *factorizar* el MFC.

EJEMPLO 3 Factorice $15x^4 - 5x^3 + 25x^2$.

Solución El MFC es $5x^2$. Escriba cada término como producto del MFC y otro producto. Luego factorice el MFC.

$$\begin{aligned} 15x^4 - 5x^3 + 25x^2 &= \boxed{5x^2} \cdot 3x^2 - \boxed{5x^2} \cdot x + \boxed{5x^2} \cdot 5 \\ &= 5x^2(3x^2 - x + 5) \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 15

Para comprobar el procedimiento de factorización, multiplique los factores utilizando la propiedad distributiva. El producto debe ser la expresión con la que se inició. Pongamos el ejemplo 3,

Comprobación $$\begin{aligned} 5x^2(3x^2 - x + 5) &= 5x^2(3x^2) + 5x^2(-x) + 5x^2(5) \\ &= 15x^4 - 5x^3 + 25x^2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Factorice $20x^3y^3 + 6x^2y^4 - 12xy^5$.

Solución El MFC es $2xy^3$. Escriba cada término como producto del MFC y otro producto. Luego factorice el MFC.

$$\begin{aligned} 20x^3y^3 + 6x^2y^4 - 12xy^5 &= \boxed{2xy^3} \cdot 10x^2 + \boxed{2xy^3} \cdot 3xy - \boxed{2xy^3} \cdot 6y^2 \\ &= 2xy^3(10x^2 + 3xy - 6y^2) \end{aligned}$$

Comprobación $2xy^3(10x^2 + 3xy - 6y^2) = 20x^3y^3 + 6x^2y^4 - 12xy^5$

Ahora resuelva el ejercicio 19

Cuando el coeficiente principal de un polinomio es negativo, por lo general factorizamos un factor común con un coeficiente negativo. Esto da como resultado que el polinomio restante tenga un coeficiente principal positivo.

EJEMPLO 5 Factorice **a)** $-12a - 18$ **b)** $-2b^3 + 6b^2 - 16b$

Solución Como los coeficientes principales en las partes **a)** y **b)** son negativos, factorizamos factores comunes con un coeficiente negativo.

a) $-12a - 18 = -6(2a + 3)$ *Factorizar -6.*

b) $-2b^3 + 6b^2 - 16b = -2b(b^2 - 3b + 8)$ *Factorizar $-2b$.*

Ahora resuelva el ejercicio 27

EJEMPLO 6 **Lanzamiento de una pelota** Cuando se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 32 pies por segundo desde la parte más alta de un edificio de 160 pies de altura, su distancia, d, respecto del piso en cualquier instante t, puede determinarse mediante la función $d(t) = -16t^2 + 32t + 160$.

a) Determine la distancia de la pelota respecto del piso después de 3 segundos; es decir, determine $d(3)$.

b) Factorice el MFC del lado derecho de la función.

c) Evalúe $d(3)$ en la forma factorizada.

d) Compare sus respuestas de las partes **a)** y **c)**.

Solución

a)
$$\begin{aligned} d(t) &= -16t^2 + 32t + 160 \\ d(3) &= -16(3)^2 + 32(3) + 160 && \text{Sustituya } t \text{ por } 3. \\ &= -16(9) + 96 + 160 \\ &= 112 \end{aligned}$$

La distancia es 112 pies.

b) Factorice -16 de los tres términos a la derecha del signo igual.

$$d(t) = -16(t^2 - 2t - 10)$$

c)
$$\begin{aligned} d(t) &= -16(t^2 - 2t - 10) \\ d(3) &= -16[3^2 - 2(3) - 10] && \text{Sustituya } t \text{ por } 3. \\ &= -16(9 - 6 - 10) \\ &= -16(-7) \\ &= 112 \end{aligned}$$

d) Las respuestas son iguales. Puede determinar los cálculos de la parte **c)** con mayor facilidad que los cálculos de la parte **a)**.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 65**

3 Factorizar un factor binomial común

Algunas veces la factorización exige factorizar un binomio como el máximo factor común, como se ilustra en los ejemplos 7 a 9.

EJEMPLO 7 ▸ Factorice $3x(5x - 6) + 4(5x - 6)$.

Solución El MFC es $(5x - 6)$. Al factorizar el MFC se obtiene

$$3x(5x - 6) + 4(5x - 6) = (5x - 6)(3x + 4)$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 37**

En el ejemplo 7 también podríamos haber colocado el factor común a la derecha para obtener

$$3x(5x - 6) + 4(5x - 6) = (3x + 4)(5x - 6)$$

Las formas factorizadas $(5x - 6)(3x + 4)$ y $(3x + 4)(5x - 6)$ son equivalentes de acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación, y ambas son correctas. Por lo general, cuando listamos la respuesta a un ejemplo o ejercicio, colocamos el término común que se ha factorizado a la izquierda.

EJEMPLO 8 ▸ Factorice $9(2x - 5) + 6(2x - 5)^2$.

Solución EL MFC es $3(2x - 5)$. Reescriba cada término como producto del MFC y otro factor.

$$\begin{aligned} 9(2x - 5) + 6(2x - 5)^2 &= 3(2x - 5) \cdot 3 + 3(2x - 5) \cdot 2(2x - 5) \\ &= 3(2x - 5)[3 + 2(2x - 5)] && \text{Factorizar } 3(2x - 5). \\ &= 3(2x - 5)[3 + 4x - 10] && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= 3(2x - 5)(4x - 7) && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 39**

EJEMPLO 9 Factorice $(3x - 4)(a + b) - (x - 1)(a + b)$.

Solución El binomio $a + b$ es el MFC de los dos términos. Por lo tanto, lo factorizamos.

$$\begin{aligned}(3x - 4)(a + b) - (x - 1)(a + b) &= (a + b)[(3x - 4) - (x - 1)] && \text{Factorizar } (a+b).\\ &= (a + b)(3x - 4 - x + 1) && \text{Simplificar.}\\ &= (a + b)(2x - 3) && \text{Factores.}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 43

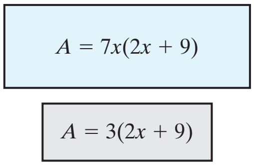


FIGURA 5.13

EJEMPLO 10 **Área** En la **figura 5.13**, el área del rectángulo grande es $7x(2x + 9)$, y el área del rectángulo pequeño es $3(2x + 9)$. Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre las áreas de estos dos rectángulos.

Solución Para determinar la diferencia entre las áreas, reste el área del rectángulo pequeño del área del rectángulo grande.

$$\begin{aligned}&7x(2x + 9) - 3(2x + 9) && \text{Restar las áreas.}\\ &= (2x + 9)(7x - 3) && \text{Factorizar } (2x+9).\end{aligned}$$

La diferencia de las áreas para los dos rectángulos es $(2x + 9)(7x - 3)$.

Ahora resuelva el ejercicio 59

4 Factorizar por agrupación

Cuando un polinomio tiene *cuatro términos*, se le podría factorizar por agrupación. Para **factorizar por agrupación**, quitamos los factores comunes de grupos de términos. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 11 Factorice $ax + ay + bx + by$.

Solución No hay factor común (diferente de 1) para todos los términos. Sin embargo, a es común a los primeros dos términos, y b es común a los últimos dos. Factorice a de los primeros dos términos y b de los últimos.

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$$

Ahora $(x + y)$ es común a ambos términos. Factorice $(x + y)$.

$$a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

Así, $ax + ay + bx + by = (x + y)(a + b)$ o $(a + b)(x + y)$.

Ahora resuelva el ejercicio 49

Para factorizar cuatro términos por agrupación

1. Determine si los cuatro términos tienen un factor común. Si es así, factorice el máximo factor común de cada término.
2. Acomode los cuatro términos en dos grupos de dos términos cada uno. Cada grupo debe tener un MFC.
3. Factorice el MFC de cada grupo de dos términos.
4. Si los dos términos formados en el paso 2 tienen un MFC, factorícelo.

EJEMPLO 12 Factorice por agrupación $x^3 - 5x^2 + 2x - 10$.

Solución No hay factores comunes a los cuatro términos. Sin embargo, x^2 es común a los primeros dos términos, y 2 es común a los últimos dos.

$$\begin{aligned}x^3 - 5x^2 + 2x - 10 &= x^2(x - 5) + 2(x - 5)\\ &= (x - 5)(x^2 + 2)\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 55

En el ejemplo 12, $(x^2 + 2)(x - 5)$ también es una respuesta aceptable. ¿Cambiaría la respuesta del ejemplo 12 si intercambiamos el orden de $2x$ y $-5x^2$? Inténtelo en el ejemplo 13.

EJEMPLO 13 Factorice $x^3 + 2x - 5x^2 - 10$.

Solución No hay factor común para los cuatro términos. Factorice x de los primeros dos términos y -5 de los últimos dos.

$$\begin{aligned} x^3 + 2x - 5x^2 - 10 &= x(x^2 + 2) - 5(x^2 + 2) \\ &= (x^2 + 2)(x - 5) \end{aligned}$$

Observe que obtuvimos resultados equivalentes en los ejemplos 12 y 13.

Ahora resuelva el ejercicio 51

Sugerencia útil

Cuando utilizamos la agrupación para factorizar cuatro términos, si los términos *primero* y *tercero* son positivos debemos factorizar una expresión positiva tanto de los primeros dos términos como de los segundos dos términos para obtener un factor común para los dos términos restantes (vea el ejemplo 12). Si el *primer* término es positivo y el *tercero* es negativo, debemos factorizar una expresión positiva de los primeros dos términos y una expresión negativa de los últimos dos términos para obtener un factor común para los dos términos restantes (vea el ejemplo 13).

El primer paso para resolver cualquier problema de factorización consiste en determinar si todos los términos tienen un factor común. Si es así, empiece por factorizar el factor común. Por ejemplo, para factorizar $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 10x$, primero factorizamos x de cada término. Luego factorizamos los cuatro términos restantes por agrupación, como se hizo en el ejemplo 12.

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 10x &= x(x^3 - 5x^2 + 2x - 10) && \text{Factorizar el MFC, } x\text{, de los cuatro términos.} \\ &= x(x - 5)(x^2 + 2) && \text{Factores del ejemplo 12.} \end{aligned}$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cuál es el primer paso en *cualquier* problema de factorización?
2. ¿Qué es el máximo factor común de los términos de una expresión?
3. a) Explique cómo determinar el máximo factor común de los términos de un polinomio.
   b) Utilizando su procedimiento de la parte **a)**, determine el máximo factor común del polinomio
   $$6x^2y^5 - 2x^3y + 12x^9y^3$$
   c) Factorice el polinomio de la parte **b)**.
4. Determine el MFC de los siguientes términos:
   $$x^4y^6, x^3y^5, xy^6, x^2y^4$$
   Explique cómo determinó su respuesta.
5. Determine el MFC de los siguientes términos:
   $$12(x - 4)^3, 6(x - 4)^6, 3(x - 4)^9$$
   Explique cómo determinó su respuesta.
6. Si uno de los términos de un polinomio es también el MFC, ¿qué se escribe en lugar de ese término cuando se factoriza el MFC? Explique.
7. a) Explique cómo factorizar por agrupación un polinomio de cuatro términos.
   b) Factorice $6x^3 - 2xy^3 + 3x^2y^2 - y^5$ mediante el procedimiento que indicó en la parte **a)**.
8. ¿Cuál es el primer paso para factorizar $-x^2 + 8x - 15$? Explique su respuesta.

Práctica de habilidades

Factorice el máximo factor común.

9. $7n + 14$
10. $15p + 25$
11. $2x^2 - 4x + 10$
12. $6x^2 - 12x + 27$
13. $12y^2 - 16y + 28$
14. $12x^3 - 8x^2 - 6x$
15. $9x^4 - 3x^3 + 11x^2$
16. $45y^{12} + 60y^{10}$
17. $-24a^7 + 9a^6 - 3a^2$
18. $-16c^5 - 12c^4 + 6c^3$
19. $3x^2y + 6x^2y^2 + 3xy$
20. $24a^2b^2 + 16ab^4 + 72ab^3$
21. $80a^5b^4c - 16a^4b^2c^2 + 24a^2c$
22. $36xy^2z^3 + 36x^3y^2z + 9x^2yz$
23. $9p^4q^5r - 3p^2q^2r^2 + 12pq^5r^3$
24. $24m^6 + 8m^4 - 4m^3n$
25. $-22p^2q^2 - 16pq^3 + 26r$
26. $-15y^3z^5 - 28y^3z^6 + 9xy^2z^2$

Factorice un factor con un coeficiente negativo.

27. $-8x + 4$ **28.** $-20a - 30$ **29.** $-x^2 - 4x + 22$
30. $-y^5 - 6y^2 - 4$ **31.** $-3r^2 - 6r + 9$ **32.** $-12t^2 + 48t - 60$
33. $-6r^4s^3 + 4r^2s^4 + 2rs^5$ **34.** $-5p^6q^3 - 10p^4q^4 + 25pq^7$ **35.** $-a^4b^2c + 5a^3bc^2 + a^2b$
36. $-20x^5y^3z - 4x^4yz^2 - 8x^2y^5$

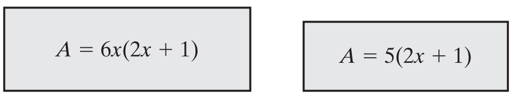
Factor.

37. $x(a + 3) + 1(a + 3)$ **38.** $y(b - 2) - 5(b - 2)$
39. $7x(x - 4) + 2(x - 4)^2$ **40.** $4y(y + 1) - 7(y + 1)^2$
41. $(x - 2)(3x + 5) - (x - 2)(5x - 4)$ **42.** $(z + 4)(z + 3) + (z - 1)(z + 3)$
43. $(2a + 4)(a - 3) - (2a + 4)(2a - 1)$ **44.** $(6b - 1)(b + 4) + (6b - 1)(2b + 5)$
45. $x^2 + 4x - 5x - 20$ **46.** $a^2 + 3a - 6a - 18$ **47.** $8y^2 - 4y - 20y + 10$
48. $18m^2 + 30m + 9m + 15$ **49.** $am + an + bm + bn$ **50.** $cx - cy - dx + dy$
51. $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ **52.** $2z^3 + 4z^2 - 5z - 10$ **53.** $10m^2 - 12mn - 25mn + 30n^2$
54. $12x^2 + 9xy - 4xy - 3y^2$ **55.** $5a^3 + 15a^2 - 10a - 30$ **56.** $2r^4 - 2r^3 - 7r^2 + 7r$
57. $c^5 - c^4 + c^3 - c^2$ **58.** $b^4 - b^3 - b + b^2$

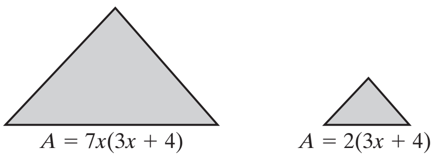
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 59 a 62, A representa una expresión para el área de la figura. Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre las áreas de las figuras geométricas. Vea el ejemplo 10.*

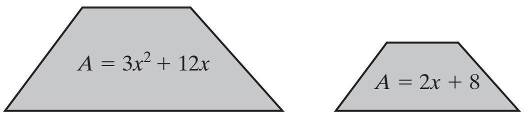
59.



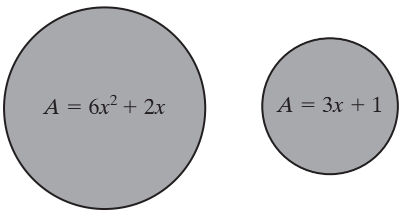
60.



61.

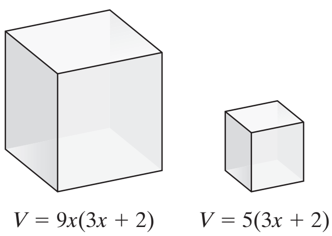


62.

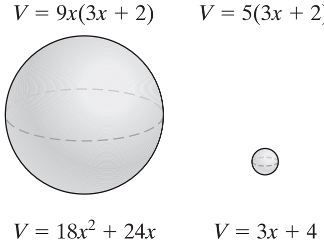


Volumen *En los ejercicios 63 y 64, V representa una expresión para el volumen de la figura. Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre los volúmenes de los sólidos geométricos.*

63.



64.



65. Bengala Cuando se dispara hacia arriba una bengala con una velocidad de 80 pies por segundo, su altura, h, en pies, respecto del piso a los t segundos, puede determinarse mediante la función $h(t) = -16t^2 + 80t$.

a) Determine la altura de la bengala tres segundos después de ser disparada.

b) Exprese la función con el lado derecho en forma factorizada.

c) Evalúe $h(3)$ usando la forma factorizada de la parte **b)**.

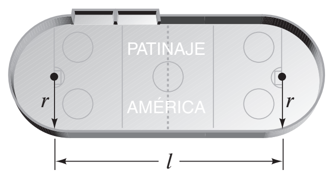
66. Tiro en movimiento Cuando un basquetbolista lanza un tiro mientras salta, la altura, h, en pies, del balón por encima del piso en cualquier instante t, bajo ciertas circunstancias, puede determinarse mediante la función $h(t) = -16t^2 + 20t + 8$.

a) Determine la altura del balón en el segundo 1.

b) Exprese la función con el lado derecho en forma factorizada.

c) Evalúe $h(1)$ utilizando la forma factorizada en la parte **b)**.

67. Pista de patinaje El área de la pista de patinaje con extremos semicirculares que se muestra es $A = \pi r^2 + 2rl$.



a) Determine A cuando $r = 20$ pies y $l = 40$ pies.

b) Escriba el área, A, en forma factorizada.

c) Determine A cuando $r = 20$ pies y $l = 40$ pies; utilice la forma factorizada que indicó en la parte **b)**.

68. Área La fórmula para determinar el área de un trapecio puede escribirse como $A = \frac{1}{2}hb_1 + \frac{1}{2}hb_2$. Exprese esta fórmula en forma factorizada.

69. Compra de una computadora Fred Yang acaba de comprar una computadora en \$975 mediante un préstamo sin interés. Fred debe pagar \$75 cada mes hasta que se liquide la computadora. El monto adeudado de la computadora es una función del tiempo, donde.

$$A(t) = 975 - 75t$$

y t es el número de meses desde que Fred compró la computadora.

a) Determine el monto adeudado 6 meses después de que Fred compró la computadora.
b) Escriba la función en forma factorizada.
c) Utilice el resultado de la parte **b)** para determinar el monto que se adeuda 6 meses después de que Fred compró la computadora.

70. Salario El 2 de enero de 2006, Jill Ferguson inició un nuevo empleo con un salario anual de \$33,000. Su salario se incrementará \$1500 cada año. Así, su salario es una función del número de años que ella trabaja, donde

$$S(n) = 33{,}000 + 1500n$$

y n es los años desde 2006.

a) Determine el salario de Jill en 2010.
b) Escriba la función en forma factorizada.
c) Utilice el resultado de la parte **b)** para determinar el salario de Jill en 2010.

71. Precio de automóviles Cuando salieron a la venta los automóviles modelo 2006, su precio de lista era superior en 6% respecto del de los modelos 2005. Más tarde, el precio de todos los automóviles 2006 se redujo en 6%. El precio de venta puede representarse mediante $(x + 0.06x) - 0.06(x + 0.06x)$, donde x es el precio de lista del modelo 2005.

a) Factorice $(x + 0.06x)$ de cada término.
b) ¿El precio es mayor o menor que el precio del modelo 2005?

Lea el ejercicio 71 antes de resolver los ejercicios 72 a 74.

72. Precio de un vestido El precio de un vestido se reduce en 10%, y luego se le aplica un nuevo descuento de 10%.

a) Escriba una expresión para calcular el precio final del vestido.

b) Compare el precio final con el precio normal del vestido; ¿cómo son? Utilice factorización para obtener su respuesta.

73. Precio de una segadora El precio de una segadora aumentó 15%. Más tarde, en una venta especial, su precio se redujo en 20%.

a) Escriba una expresión para calcular el precio final de la segadora.

b) Compare el precio final con el precio normal; ¿cómo son? Utilice factorización para obtener su respuesta.

74. Determinación de precio ¿En cuál de las siguientes partes, **a)** o **b)**, el precio final será menor y por cuánto?

a) Disminuya el precio de un artículo en 6% y luego auméntelo en 8%.

b) Aumente el precio de un artículo en 6% y luego disminúyalo en 8%.

Factorice.

75. $5a(3x + 2)^5 + 4(3x + 2)^4$

76. $4p(2r - 3)^7 - 3(2r - 3)^6$

77. $4x^2(x - 3)^3 - 6x(x - 3)^2 + 4(x - 3)$

78. $12(p + 2q)^4 - 40(p + 2q)^3 + 12(p + 2q)^2$

79. $ax^2 + 2ax - 3a + bx^2 + 2bx - 3b$

80. $6a^2 - a^2c + 18a - 3ac + 6ab - abc$

Factorice. Suponga que todas las variables de los exponentes representan números naturales.

81. $x^{6m} - 2x^{4m}$

82. $x^{2mn} + x^{6mn}$

83. $3x^{4m} - 2x^{3m} + x^{2m}$

84. $r^{y+4} + r^{y+3} + r^{y+2}$

85. $a^rb^r + c^rb^r - a^rd^r - c^rd^r$

86. $6a^kb^k - 2a^kc^k - 9b^k + 3c^k$

87. a) $6x^3 - 3x^2 + 9x = 3x(2x^2 - x + 3)$?

b) Si la factorización anterior es correcta, ¿cuál debe ser el valor de $6x^3 - 3x^2 + 9x - [3x(2x^2 - x + 3)]$ para cualquier valor de x? Explique.

c) Seleccione un valor para x y evalúe la expresión de la parte **b)**. ¿Obtuvo lo que esperaba? Si no, explique por qué.

88. a) Determine si la siguiente factorización es correcta.

$$\begin{aligned} 3(x - 2)^2 - 6(x - 2) &= 3(x - 2)[(x - 2) - 2] \\ &= 3(x - 2)(x - 4) \end{aligned}$$

b) Si la factorización anterior es correcta, ¿cuál debe ser el valor de $3(x - 2)^2 - 6(x - 2) - [3(x - 2)(x - 4)]$ para cualquier valor de x? Explique.

c) Seleccione un valor para x y evalúe la expresión de la parte **b)**. ¿Obtuvo lo que esperaba? Si no, explique por qué.

89. Considere la factorización $8x^3 - 16x^2 - 4x = 4x(2x^2 - 4x - 1)$.

a) Si hacemos

$$y_1 = 8x^3 - 16x^2 - 4x$$
$$y_2 = 4x(2x^2 - 4x - 1)$$

y graficamos cada función, ¿qué debería suceder? Explique.

b) En su calculadora graficadora, grafique y_1 y y_2, cómo se dieron en la parte **a)**.

c) ¿Obtuvo los resultados que esperaba?

d) Al verificar un procedimiento de factorización mediante esta técnica, ¿qué significa si las gráficas no se intersecan? Explique.

90. Considere la factorización $2x^4 - 6x^3 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 3x - 4)$.

a) Introduzca

$$y_1 = 2x^4 - 6x^3 - 8x^2$$
$$y_2 = 2x^2(x^2 - 3x - 4)$$

en su calculadora.

b) Si utiliza la característica TABLE de su calculadora, al comparar la tabla de valores para y_1 con la tabla de valores para y_2, ¿qué esperaría? Explique.

c) Utilice la característica TABLE para mostrar los valores de y_1 y y_2 para valores de x de 0 a 6.

d) ¿Obtuvo los resultados que esperaba?

e) Cuando comprueba un proceso de factorización utilizando la característica TABLE, ¿qué significa que los valores de y_1 y y_2 sean diferentes?

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **91.** Evalúe $\dfrac{\left(\left|\frac{1}{2}\right| - \left|-\frac{1}{3}\right|\right)^2}{-\left|\frac{1}{3}\right| \cdot \left|-\frac{2}{5}\right|}$.

[2.1] **92.** Resuelva $3(2x - 4) + 3(x + 1) = 9$.

[3.1] **93.** Grafique $y = x^2 - 1$.

[4.3] **94. Ejercicio** Jason Richter hace ejercicio todos los días: camina a 3 mph y luego trota a 5 mph. Si tarda 0.9 horas en recorrer un total de 3.5 millas, ¿cuánto tiempo trota?

[5.2] **95.** Multiplique $(7a - 3)(-2a^2 - 4a + 1)$.

Examen de mitad de capítulo: 5.1-5.4

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en donde se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

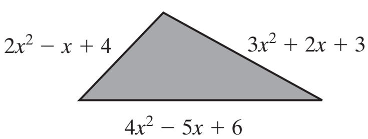
1. Escriba el polinomio $-7 + 2x + 5x^4 - 1.5x^3$, en orden descendente. Proporcione el grado de este polinomio.

2. Evalúe $P\left(\frac{1}{2}\right)$ dado que $P(x) = 8x^2 - 7x + 3$.

3. Simplifique $(2n^2 - n - 12) + (-3n^2 - 6n + 8)$.

4. Reste $(7x^2y - 10xy)$ de $(-9x^2y + 4xy)$.

5. Determine una expresión polinomial, en forma simplificada, para el perímetro del triángulo.



Multiplique.

6. $2x^5(3xy^4 + 5x^2 - 7x^3y)$

7. $(7x - 6y)(3x + 2y)$

8. $(3x + 1)(2x^3 - x^2 + 5x + 9)$

9. $\left(8p - \frac{1}{5}\right)\left(8p + \frac{1}{5}\right)$

10. $(4m - 3n)(3m^2 + 2mn - 6n^2)$

11. Escriba $x^2 - 14x + 49$ como el cuadrado de un binomio. Explique cómo determinó su respuesta.

Divida.

12. $\dfrac{4x^4y^3 + 6x^2y^2 - 11x}{2x^2y^2}$

13. $\dfrac{12x^2 + 23x + 7}{4x + 1}$

14. $\dfrac{2y^3 - y^2 + 7y - 10}{2y - 3}$

Utilice división sintética para dividir.

15. $\dfrac{x^2 - x - 72}{x + 8}$

16. $\dfrac{3a^4 - 2a^3 - 14a^2 + 11a + 2}{a - 2}$

17. Factorice el máximo factor común en $32b^3c^3 + 16b^2c + 24b^5c^4$.

Factorice completamente.

18. $7b(2x + 9) - 3c(2x + 9)$

19. $2b^4 - b^3c + 4b^3c - 2b^2c^2$

20. $5a(3x - 2)^5 - 4(3x - 2)^6$

5.5 Factorización de trinomios

1 Factorizar trinomios con la forma $x^2 + bx + c$.

2 Factorizar un factor común.

3 Factorizar trinomios con la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, mediante prueba y error.

4 Factorizar trinomios con la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$ mediante agrupación.

5 Factorizar trinomios mediante sustitución.

1 Factorizar trinomios con la forma $x^2 + bx + c$

En esta sección aprenderemos a **factorizar trinomios** con la forma $ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Observe que a representa el coeficiente del término x al cuadrado, b representa el coeficiente del término x, y c representa el término constante.

Trinomios	Coeficientes
$3x^2 + 2x - 5$	$a = 3, \quad b = 2, \quad c = -5$
$-\frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$	$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -4, \quad c = 3$

Para factorizar trinomios con la forma $x^2 + bx + c$ (nota: $a = 1$)

1. Determine dos números (o factores) cuyo producto sea c y cuya suma sea b.
2. Los factores del trinomio tendrán la forma

$$(x + \underbrace{\square}_{\text{Un factor determinado en el paso 1}})(x + \underbrace{\square}_{\text{Otro factor determinado en el paso 1}})$$

Si los números determinados en el paso 1 son, por ejemplo, 3 y -5, los factores se escribirían $(x + 3)(x - 5)$. Este procedimiento se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Factorice $x^2 - x - 12$.

Solución $a = 1, b = -1, c = -12$. Debemos determinar dos números cuyo producto sea c, que es –12, y cuya suma es b, que es -1. Iniciamos listando los factores de -12 para intentar encontrar un par cuya suma sea -1.

Factores de -12	Suma de factores
$(1)(-12)$	$1 + (-12) = -11$
$(2)(-6)$	$2 + (-6) = -4$
$(3)(-4)$	$3 + (-4) = -1$
$(4)(-3)$	$4 + (-3) = 1$
$(6)(-2)$	$6 + (-2) = 4$
$(12)(-1)$	$12 + (-1) = 11$

Los números que estamos buscando son 3 y –4, ya que su producto es -12 y su suma es -1. Ahora factorizamos el trinomio utilizando estos números.

$$x^2 - x - 12 = (x + \underbrace{3}_{\text{Un factor de } -12})(x \underbrace{- 4}_{\text{Otro factor de } -12})$$

Ahora resuelva el ejercicio 13

Observe que, en el ejemplo 1, listamos todos los factores de –12. Sin embargo, después de que se han encontrado dos factores cuyo producto es c y cuya suma es b, no hay necesidad de listar los demás factores. Los factores se listaron para mostrar, por ejemplo, que $(2)(-6)$ es un conjunto de factores diferente que $(-2)(6)$. Observe que conforme el factor positivo aumenta, también lo hace la suma de los factores.

Sugerencia útil

Considere los factores $(2)(-6)$ y $(-2)(6)$ y sus sumas.

Factores	Suma de factores
$2(-6)$	$2 + (-6) = -4$
$-2(6)$	$-2 + 6 = 4$

Observe que si se cambia el signo de cada número del producto, el signo de la suma de los factores se modifica. Podemos utilizar este hecho para determinar con más rapidez los factores que estamos buscando. Si al buscar una suma específica obtiene el opuesto de esa suma, cambie el signo de cada factor para obtener la suma que está buscando.

EJEMPLO 2 Factorice $p^2 - 7p + 6$.

Solución Debemos determinar dos números cuyo producto sea 6 y cuya suma sea -7. Puesto que la suma de dos números negativos es un número negativo, y el producto de dos números negativos es un número positivo, ambos números deben ser negativos. Los factores negativos de 6 son $(-1)(-6)$ y $(-2)(-3)$. Como se muestra a continuación, los números que estamos buscando son -1 y -6.

Factores de 6	Suma de los factores
$(-1)(-6)$	$-1 + (-6) = -7$
$(-2)(-3)$	$-2 + (-3) = -5$

Por lo tanto,

$$p^2 - 7p + 6 = (p - 1)(p - 6)$$

Como los factores pueden colocarse en cualquier orden, $(p - 6)(p - 1)$ también es una respuesta aceptable.

Ahora resuelva el ejercicio 23

Sugerencia útil

Comprobación de la factorización

Las respuestas a problemas de factorización pueden verificarse multiplicando los factores que se obtuvieron. Si la factorización es correcta, usted obtendrá el polinomio con el que inició. Para comprobar el ejemplo 2, multiplicaremos los factores utilizando el método PIES.

$$(p - 1)(p - 6) = p^2 - 6p - p + 6 = p^2 - 7p + 6$$

Como el producto de los factores es el trinomio con el que empezamos, nuestra factorización es correcta. No olvide verificar siempre su factorización.

El procedimiento utilizado para factorizar trinomios con la forma $x^2 + bx + c$ puede utilizarse con otros trinomios, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Factorice $x^2 + 2xy - 15y^2$.

Solución Debemos determinar dos números cuyo producto sea -15 y cuya suma sea 2. Los dos números son 5 y -3.

Factores de -15	Suma de los factores
$5(-3)$	$5 + (-3) = 2$

Como el último término del trinomio contiene a y^2, el segundo término de cada factor debe contener a y.

$$x^2 + 2xy - 15y^2 = (x + 5y)(x - 3y)$$

Comprobación $$(x + 5y)(x - 3y) = x^2 - 3xy + 5xy - 15y^2$$
$$= x^2 + 2xy - 15y^2$$

Ahora resuelva el ejercicio 75

2 Factorizar un factor común

El primer paso para factorizar cualquier trinomio consiste en determinar si los tres términos tienen un factor común. Si es así, factorice ese factor común y luego el polinomio restante.

EJEMPLO 4 ▸ Factorice $3x^4 - 6x^3 - 72x^2$.

Solución El factor $3x^2$ es común a los tres términos del trinomio. Primero factorícelo.

$$3x^4 - 6x^3 - 72x^2 = 3x^2(x^2 - 2x - 24) \qquad \textit{Factorizar } 3x^2.$$

El término $3x^2$ que se factorizó es parte de la respuesta, pero ya no desempeña papel alguno en el procedimiento de factorización. Ahora continúe factorizando $x^2 - 2x - 24$. Determine dos números cuyo producto sea -24 y cuya suma sea -2. Los números son -6 y 4.

$$3x^2(x^2 - 2x - 24) = 3x^2(x - 6)(x + 4)$$

Por lo tanto, $3x^4 - 6x^3 - 72x^2 = 3x^2(x - 6)(x + 4)$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 33**

3 Factorizar trinomios con la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, mediante prueba y error

A continuación analizaremos algunos ejemplos de factorización de trinomios con la forma

$$ax^2 + bx + c, \quad a \neq 1$$

Se ilustrarán dos métodos para factorizar este tipo de trinomios. El primer método, llamado de prueba y error, implica ensayar diferentes combinaciones hasta encontrar la correcta. El segundo método hace uso de la factorización por agrupación, un procedimiento que se presentó en la sección 5.4.

Analicemos primero el método de prueba y error para factorizar trinomios. En ocasiones, a este procedimiento se le denomina el método PIES (o PIES inverso). Para facilitar nuestra explicación, multiplicaremos $(2x + 3)(x + 1)$ mediante el método PIES.

Producto de primeros términos

Producto de segundos términos

$$(2x + 3)(x + 1) = \overset{P}{2x(x)} + \overset{I}{3(x)} + \overset{E}{2x(1)} + \overset{S}{3(1)} = 2x^2 + 5x + 3$$

Suma de los productos de los términos externos e internos

Por lo tanto, si factoriza el trinomio $2x^2 + 5x + 3$ se dará cuenta de que el producto de los primeros términos de los factores debe ser $2x^2$, el producto de los segundos términos debe ser 3, y la suma de los productos de los términos externos e internos debe ser $5x$.

Para factorizar $2x^2 + 5x + 3$, empezamos como se muestra aquí.

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x \quad\;)(x \quad\;) \qquad \textit{El producto de los primeros términos es } 2x^2.$$

Ahora completamos los segundos términos utilizando enteros positivos cuyo producto sea 3. Sólo tomaremos en cuenta enteros positivos, ya que el producto de los últimos términos es positivo y la suma de los productos de los términos externos e internos también lo es. Las dos posibilidades son

$$\left.\begin{array}{l}(2x + 1)(x + 3)\\(2x + 3)(x + 1)\end{array}\right\} \quad \textit{El producto de los segundos términos es 3.}$$

Para determinar cuál factorización es correcta, determinamos la suma de los productos de los términos externos e internos. Si alguna de las sumas da por resultado $5x$, el término central del trinomio, la factorización es correcta.

$$(2x + 1)(x + 3) = 2x^2 + 6x + x + 3 = 2x^2 + 7x + 3 \quad \text{Término central incorrecto}$$

$$(2x + 3)(x + 1) = 2x^2 + 2x + 3x + 3 = 2x^2 + 5x + 3 \quad \text{Término central correcto}$$

Por consiguiente, los factores de $2x^2 + 5x + 3$ son $2x + 3$ y $x + 1$. Así,

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1).$$

Observe que si hubiésemos empezado la factorización escribiendo

$$2x^2 + 5x + 3 = (x \qquad)(2x \qquad)$$

también habríamos obtenido los factores correctos.

A continuación se indican algunas directrices para utilizar el método de **prueba y error** de factorización de un trinomio, en donde $a \neq 1$ y los tres términos carecen de factores comunes.

Para factorizar trinomios con la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, mediante prueba y error

1. Escriba todos los pares de factores del coeficiente del término cuadrático, a.
2. Escriba todos los pares de factores de la constante, c.
3. Intente diferentes combinaciones con estos factores hasta encontrar el término central correcto, bx.

EJEMPLO 5 Factorice $3t^2 - 13t + 10$.

Solución Primero comprobamos si los tres términos carecen de factor común. Luego determinamos que a es 3 y que los únicos factores de 3 son 1 y 3. Por consiguiente, escribimos

$$3t^2 - 13t + 10 = (3t \qquad)(t \qquad)$$

El número 10 tiene factores positivos y negativos. Sin embargo, ya que el producto de los segundos términos debe ser positivo $(+10)$ y la suma de los productos de los términos exterior e interior debe ser negativa (-13), los dos factores del 10 deben ser negativos. (¿Por que?) Los factores negativos de 10 son $(-1)(-10)$ y $(-2)(-5)$. A continuación se ofrece una lista de los factores posibles. Buscamos los factores que nos proporcionen el término central correcto, $-13t$.

Factores posibles	Suma de productos de términos externos e internos	
$(3t - 1)(t - 10)$	$-31t$	
$(3t - 10)(t - 1)$	$-13t$	⟵ Término central correcto
$(3t - 2)(t - 5)$	$-17t$	
$(3t - 5)(t - 2)$	$-11t$	

Por lo tanto, $3t^2 - 13t + 10 = (3t - 10)(t - 1)$.

Ahora resuelva el ejercicio 35

La siguiente sugerencia es muy importante. Estúdiela cuidadosamente.

Sugerencia útil

Factorización por prueba y error

Al factorizar un trinomio con la forma $ax^2 + bx + c$, el signo del término constante, c, es muy útil para determinar la solución. Si $a > 0$, entonces:

1. Cuando el término constante, c, es positivo y el coeficiente numérico del término x, b, es positivo, ambos factores numéricos serán positivos.

   Ejemplo

   $$\underset{\text{Positivo}}{x^2 + 7x} \quad x^2 + \underset{\uparrow\ \text{Positivo}}{7x} + \underset{\uparrow\ \text{Positivo}}{12} = (x + \underset{\uparrow\ \text{Positivo}}{3})(x + \underset{\uparrow\ \text{Positivo}}{4})$$

2. Cuando c es positivo y b es negativo, ambos factores numéricos serán negativos.

   Ejemplo

   $$x^2 \underset{\uparrow\ \text{Negativo}}{-\ 5x} + \underset{\uparrow\ \text{Positivo}}{6} = (x \underset{\uparrow\ \text{Negativo}}{-\ 2})(x \underset{\uparrow\ \text{Negativo}}{-\ 3})$$

   Siempre que la constante c sea positiva (como en los dos ejemplos anteriores) el signo en ambos factores será igual que el signo del término x del trinomio.

3. Cuando c es negativa, uno de los factores numéricos será positivo y el otro será negativo.

   Ejemplo

   $$x^2 + x \underset{\uparrow\ \text{Negativo}}{-\ 6} = (x + \underset{\uparrow\ \text{Positivo}}{3})(x \underset{\uparrow\ \text{Negativo}}{-\ 2})$$

EJEMPLO 6 Factorice $8x^2 + 8x - 30$.

Solución Primero verificamos si los tres términos tienen un factor común. Observe que 2 puede factorizarse.

$$8x^2 + 8x - 30 = 2(4x^2 + 4x - 15)$$

Los factores de 4, el coeficiente principal, son $4 \cdot 1$ y $2 \cdot 2$. Por lo tanto, la factorización será de la forma $(4x\quad)(x\quad)$ o $(2x\quad)(2x\quad)$. No importa si inicia con el primer conjunto de factores o con el segundo. Por lo general, iniciaremos primero con factores de tamaño medio, por lo que comenzaremos con $(2x\quad)(2x\quad)$. Si al emplear estos factores no se obtiene la respuesta, trabajaremos con el otro conjunto. Los factores de -15 son $(1)(-15)$, $(3)(-5)$, $(5)(-3)$ y $(15)(-1)$. Necesitamos que el término central sea $4x$.

Factores posibles	Suma de productos de los términos externos e internos
$(2x + 1)(2x - 15)$	$-28x$
$(2x + 3)(2x - 5)$	$-4x$
$(2x + 5)(2x - 3)$	$4x$

Como encontramos el conjunto de factores que proporciona el término correcto para x, podemos detenernos. Así,

$$8x^2 + 8x - 30 = 2(2x + 5)(2x - 3)$$

Ahora resuelva el ejercicio 37

En el ejemplo 6, si comparamos el segundo y tercer conjuntos de factores, vemos que están constituidos por los mismos números, excepto por los signos de los segundos términos. Observe que cuando los signos del segundo término de cada factor se intercambian, la suma de los productos de los términos externos e internos también cambia de signo.

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

La calculadora graficadora puede utilizarse para comprobar problemas de factorización. Para verificar la factorización del ejemplo 6,

$$8x^2 + 8x - 30 = 2(2x + 5)(2x - 3)$$

hacemos $Y_1 = 8x^2 + 8x - 30$ y $Y_2 = 2(2x + 5)(2x - 3)$. Luego utilizamos la característica TABLE para comparar resultados, como se muestra en la **figura 5.14**.

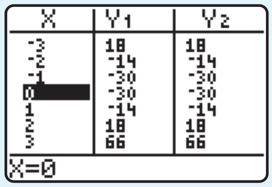


FIGURA 5.14

Como Y_1 y Y_2 tienen los mismos valores para cada valor de x, no se han cometido errores. Este procedimiento sólo puede indicarle si se han cometido equivocaciones, pero no si ha factorizado por completo. Por ejemplo, $8x^2 + 8x - 30$ y $(4x + 10)(2x - 3)$ darán el mismo conjunto de valores.

EJERCICIOS

Utilice su graficadora para determinar si cada trinomio se ha factorizado correctamente.

1. $30x^2 + 37x - 84 \stackrel{?}{=} (6x - 7)(5x + 12)$ **2.** $72x^2 + 20x - 35 \stackrel{?}{=} (9x - 5)(8x + 7)$

EJEMPLO 7 Factorice $6x^2 - 11xy - 10y^2$.

Solución Los factores de 6 son $6 \cdot 1$ o $2 \cdot 3$. Por lo tanto, los factores del trinomio pueden ser de la forma $(6x \quad)(x \quad)$ o $(2x \quad)(3x \quad)$. Comenzaremos con los factores de tamaño medio; escribimos

$$6x^2 - 11xy - 10y^2 = (2x \qquad)(3x \qquad)$$

Los factores de -10 son $(-1)(10)$, $(1)(-10)$, $(-2)(5)$ y $(2)(-5)$. Como hay ocho factores de -10, habrá ocho parejas de posibles factores por probar. ¿Puede enumerarlos? La factorización correcta es

$$6x^2 - 11xy - 10y^2 = (2x - 5y)(3x + 2y)$$

Ahora resuelva el ejercicio 51

En el ejemplo 7 fuimos afortunados de encontrar los factores correctos usando la forma $(2x \quad)(3x \quad)$. Si no hubiésemos encontrado los factores correctos empleando esa forma, tendríamos que haber probado $(6x \quad)(x \quad)$.

Al factorizar un trinomio cuyo coeficiente principal es negativo, empezamos factorizando un número negativo. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} -24x^3 - 60x^2 + 36x &= -12x(2x^2 + 5x - 3) && \text{Factorizar } -12x. \\ &= -12x(2x - 1)(x + 3) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -3x^2 + 8x + 16 &= -1(3x^2 - 8x - 16) && \text{Factorizar } -1. \\ &= -(3x + 4)(x - 4) \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 **Área de una región sombreada** Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el área de la región sombreada en la **figura 5.15**.

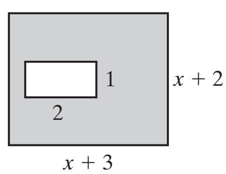


FIGURA 5.15

Solución Para calcular el área de la región sombreada, necesitamos restar el área del rectángulo pequeño del área del rectángulo grande. Recuerde que el área del rectángulo es largo $\cdot$ ancho.

$$
\begin{aligned}
\text{Área del rectángulo grande} &= (x+3)(x+2)\\
&= x^2+2x+3x+6\\
&= x^2+5x+6\\
\text{Área del rectángulo pequeño} &= (2)(1)=2\\
\text{Área de la región sombreada} &= \text{área grande} - \text{área pequeña}\\
&= x^2+5x+6-2\\
&= x^2+5x+4 && \textit{Simplificar.}\\
&= (x+4)(x+1) && \textit{Factorizar.}
\end{aligned}
$$

El área de la región sombreada es $(x + 4)(x + 1)$.

Ahora resuelva el ejercicio 89

4 Factorizar trinomios con la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$ mediante agrupación

Ahora estudiaremos el método por **agrupación** para factorizar trinomios con la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$.

Para factorizar trinomios con la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$ mediante agrupación

1. Determine dos números cuyo producto sea $a \cdot c$, y cuya suma sea b.
2. Reescriba el término central, bx, mediante los números determinados en el paso 1.
3. Factorice por agrupación.

EJEMPLO 9 Factorice $2x^2 - 5x - 12$.

Solución Vemos que $a = 2$, $b = -5$ y $c = -12$. Debemos encontrar dos números cuyo producto sea $a \cdot c$ o $2(-12) = -24$, y cuya suma sea b, -5. Los dos números son -8 y 3, ya que $(-8)(3) = -24$, y $-8 + 3 = -5$. Ahora reescriba el término central, $-5x$, utilizando $-8x$ y $3x$.

$$2x^2 - 5x - 12 = 2x^2 \overbrace{-\,8x + 3x}^{-5x} - 12$$

Ahora, factorice por agrupación como se explicó en la sección 5.4. Factorice $2x$ de los primeros dos términos, y 3 de los últimos dos.

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 5x + 12 &= 2x^2 - 8x + 3x - 12\\
&= 2x(x-4) + 3(x-4)\\
&= (x-4)(2x+3) && \textit{Factorizar } (x-4).
\end{aligned}
$$

Por tanto, $2x^2 - 5x - 12 = (x - 4)(2x + 3)$.

Ahora resuelva el ejercicio 61

Observe que en el ejemplo 9 escribimos $-5x$ como $-8x + 3x$. Como se demuestra enseguida, se tendrían los mismos factores si escribiéramos $-5x$ como $3x - 8x$. Por lo tanto, cuando se factoriza por agrupación no importa cuál factor se liste primero. A continuación factorizamos x de los primeros dos términos y -4 de los últimos dos.

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 5x - 12 &= 2x^2 \overbrace{+\,3x - 8x}^{-5x} - 12\\
&= x(2x+3) - 4(2x+3)\\
&= (2x+3)(x-4) && \textit{Factorizar } (2x+3).
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 10 ▸ Factorice $12a^2 - 19ab + 5b^2$.

Solución Debemos encontrar dos números cuyo producto sea $(12)(5) = 60$, y cuya suma sea -19. Como el producto de los números es positivo y su suma es negativa, los dos números deben ser negativos. (¿Por qué?).

Los dos números son -15 y -4 ya que $(-15)(-4) = 60$ y $-15 + (-4) = -19$. Ahora reescribimos el término central, $-19ab$, utilizando $-15ab$ y $-4ab$. Luego factorizamos por agrupación.

$$\begin{aligned} 12a^2 - 19ab + 5b^2 &= 12a^2 \overbrace{- 15ab - 4ab}^{-19ab} + 5b^2 \\ &= 3a(4a - 5b) - b(4a - 5b) \\ &= (4a - 5b)(3a - b) \end{aligned}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 45**

Resuelva nuevamente el ejemplo 10, pero esta vez escribiendo $-19ab$ como $-4ab - 15ab$. Si lo hace de la manera correcta, obtendrá los mismos factores.

Es importante que sepa que no todos los trinomios pueden factorizarse por los métodos que se presentaron en esta sección. En las secciones 8.1 y 8.2 se explicarán algunos procedimientos para factorizar polinomios que no pueden factorizarse usando sólo enteros (o sobre el conjunto de enteros). Un polinomio que no puede factorizarse (sobre un conjunto específico de números) se denomina **polinomio primo**.

EJEMPLO 11 ▸ Factorice $2x^2 + 6x + 5$.

Solución Cuando trate de factorizar este polinomio verá que no es posible hacerlo por los métodos de prueba y error o agrupación. Éste es un polinomio primo sobre el conjunto de enteros.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 47**

5 Factorizar trinomios mediante sustitución

En ocasiones un trinomio más complicado puede factorizarse sustituyendo una variable por otra. Los tres ejemplos siguientes ilustran la **factorización mediante sustitución**.

EJEMPLO 12 ▸ Factorice $y^4 - y^2 - 6$.

Solución Si podemos reescribir esta expresión en la forma $ax^2 + bx + c$, será más fácil factorizarla. Como $(y^2)^2 = y^4$, si sustituimos y^2 por x, el trinomio se convierte en

$$\begin{aligned} y^4 - y^2 - 6 &= (y^2)^2 - y^2 - 6 \\ &= x^2 - x - 6 \qquad \text{Sustituir } y^2 \text{ por } x. \end{aligned}$$

Ahora factorice $x^2 - x - 6$.

$$= (x + 2)(x - 3)$$

Finalmente, sustituya x con y^2 para obtener

$$= (y^2 + 2)(y^2 - 3) \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } y^2.$$

Así, $y^4 - y^2 - 6 = (y^2 + 2)(y^2 - 3)$. Observe que y^2 se sustituyó por x, y después x se sustituyó nuevamente por y^2.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 65**

EJEMPLO 13 ▸ Factorice $3z^4 - 17z^2 - 28$.

Solución Sea $x = z^2$. Entonces el trinomio puede escribirse

$$\begin{aligned} 3z^4 - 17z^2 - 28 &= 3(z^2)^2 - 17z^2 - 28 \\ &= 3x^2 - 17x - 28 && \text{Sustituir } z^2 \text{ por } x. \\ &= (3x + 4)(x - 7) && \text{Factorizar.} \end{aligned}$$

Ahora sustituya x por z^2.

$$= (3z^2 + 4)(z^2 - 7) \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } z^2.$$

Así, $3z^4 - 17z^2 - 28 = (3z^2 + 4)(z^2 - 7)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 69

EJEMPLO 14 ▸ Factorice $2(x + 5)^2 - 5(x + 5) - 12$.

Solución Nuevamente usaremos una sustitución, como en los ejemplos 12 y 13. Al sustituir $a = x + 5$ en la ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} &2(x + 5)^2 - 5(x + 5) - 12 \\ &= 2a^2 - 5a - 12 && \text{Sustituir } (x + 5) \text{ por } a. \end{aligned}$$

Ahora factorice $2a^2 - 5a - 12$.

$$= (2a + 3)(a - 4)$$

Por último, reemplace a con $x + 5$ para obtener

$$\begin{aligned} &= [2(x + 5) + 3][(x + 5) - 4] && \text{Sustituir } a \text{ por } (x + 5). \\ &= [2x + 10 + 3][x + 1] \\ &= (2x + 13)(x + 1) \end{aligned}$$

Así, $2(x + 5)^2 - 5(x + 5) - 12 = (2x + 13)(x + 1)$. Observe que $x + 5$ se sustituyó por a, y luego a por $x + 5$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 73

En los ejemplos 12 y 13 usamos x en nuestra sustitución, mientras que en el ejemplo 14 utilizamos a. La letra seleccionada no afecta la respuesta final.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.5

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Al factorizar un trinomio, ¿cuál debe ser siempre el primer paso?
2. En un examen, Tom Phu escribió la siguiente factorización, pero el profesor la consideró incompleta. Explique por qué la factorización de Tom no es completa.

$$15x^2 - 21x - 18 = (5x + 3)(3x - 6)$$

3. **a)** Explique paso a paso el procedimiento para factorizar $6x^2 + x - 12$.

   b) Factorice $6x^2 + x - 12$ mediante el procedimiento que explicó en la parte **a)**.
4. **a)** Explique paso a paso el procedimiento para factorizar $8x^2 - 20x - 12$.

   b) Factorice $8x^2 - 20x - 12$ mediante el procedimiento que explicó en la parte **a)**.
5. El polinomio $2x^2 + 8x + 6 = (x + 3)(2x + 2)$, ¿se ha factorizado completamente? Si no es así, proporcione la factorización completa. Explique.
6. El polinomio $x^3 - 3x^2 - 10x = (x^2 + 2x)(x - 5)$, ¿se ha factorizado completamente? Si no es así, proporcione la factorización completa. Explique.
7. El polinomio $3x^3 + 6x^2 - 24x = x(x + 4)(3x - 6)$, ¿se ha factorizado por completo? Si no es así, proporcione la factorización completa. Explique.
8. El polinomio $x^4 + 11x^3 + 30x^2 = x^2(x + 5)(x + 6)$, ¿se ha factorizado totalmente? Si no es así, proporcione la factorización completa. Explique.

Al factorizar un trinomio con la forma $ax^2 + bx + c$, ¿cuál será el signo entre los términos de los factores binomiales? si:

9. $a > 0, b > 0$ y $c > 0$

10. $a > 0, b > 0$ y $c < 0$

11. $a > 0, b < 0$ y $c < 0$

12. $a > 0, b < 0$ y $c > 0$

Práctica de habilidades

Factorice de forma completa cada trinomio. Si el polinomio es primo, indíquelo.

13. $x^2 + 7x + 12$

14. $a^2 - 2a - 15$

15. $b^2 + 8b - 9$

16. $y^2 - 9y + 20$

17. $z^2 + 4z + 4$

18. $c^2 - 12c + 36$

19. $r^2 + 24r + 144$

20. $y^2 - 18y + 81$

21. $x^2 + 30x - 64$

22. $x^2 + 11x - 210$

23. $x^2 - 13x - 30$

24. $p^2 - 6p - 19$

25. $-a^2 + 18a - 45$

26. $-x^2 - 15x - 56$

27. $x^2 + xy + 7y^2$

28. $a^2 + 7ab + 12b^2$

29. $-2m^2 - 14m - 20$

30. $-3x^2 - 12x - 9$

31. $4r^2 + 12r - 16$

32. $b^2 - 12bc - 45c^2$

33. $x^3 + 3x^2 - 18x$

34. $x^4 + 14x^3 + 33x^2$

35. $5a^2 - 8a + 3$

36. $4w^2 + 9w + 2$

37. $3x^2 - 3x - 6$

38. $-3b^2 - 14b + 5$

39. $6c^2 - 13c - 63$

40. $30z^2 - 71z + 35$

41. $8b^2 - 2b - 3$

42. $4a^2 + 43a + 30$

43. $6c^2 + 11c - 10$

44. $5z^2 - 11z + 6$

45. $16p^2 - 16pq - 12q^2$

46. $6r^4 + 5r^3 - 4r^2$

47. $4x^2 + 4xy + 9y^2$

48. $6r^2 + 7rs + 8s^2$

49. $18a^2 + 18ab - 8b^2$

50. $9y^2 - 104y - 48$

51. $8x^2 + 30xy - 27y^2$

52. $32x^2 - 22xy + 3y^2$

53. $100b^2 - 90b + 20$

54. $x^5y - 3x^4y - 18x^3y$

55. $a^3b^5 - a^2b^5 - 12ab^5$

56. $a^3b + 2a^2b - 35ab$

57. $3b^4c - 18b^3c^2 + 27b^2c^3$

58. $6p^3q^2 - 24p^2q^3 - 30pq^4$

59. $8m^8n^3 + 4m^7n^4 - 24m^6n^5$

60. $18x^2 + 9x - 20$

61. $30x^2 - x - 20$

62. $36x^2 - 23x - 8$

63. $8x^4y^5 + 24x^3y^5 - 32x^2y^5$

64. $8b^3c^2 + 28b^2c^3 + 12bc^4$

Factorice de forma completa cada trinomio.

65. $x^4 + x^2 - 6$

66. $y^4 + y^2 - 12$

67. $b^4 + 9b^2 + 20$

68. $c^4 + 8c^2 + 12$

69. $6a^4 + 5a^2 - 25$

70. $(2x + 1)^2 + 2(2x + 1) - 15$

71. $4(x + 1)^2 + 8(x + 1) + 3$

72. $(2y + 3)^2 - (2y + 3) - 6$

73. $6(a + 2)^2 - 7(a + 2) - 5$

74. $6(p - 5)^2 + 11(p - 5) + 3$

75. $x^2y^2 + 9xy + 14$

76. $a^2b^2 + 6ab - 27$

77. $2x^2y^2 - 9xy - 11$

78. $3b^2c^2 - bc - 2$

79. $2y^2(2 - y) - 7y(2 - y) + 5(2 - y)$

80. $2y^2(y + 3) + 13y(y + 3) + 15(y + 3)$

81. $2p^2(p - 4) + 7p(p - 4) + 6(p - 4)$

82. $3x^2(x - 1) + 5x(x - 1) - 2(x - 1)$

83. $a^6 - 7a^3 - 30$

84. $2y^6 - 9y^3 - 5$

85. $x^2(x + 5) + 3x(x + 5) + 2(x + 5)$

86. $x^2(x + 6) - x(x + 6) - 30(x + 6)$

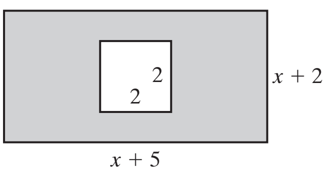
87. $5a^5b^2 - 8a^4b^3 + 3a^3b^4$

88. $2x^4y^6 + 3x^3y^5 - 9x^2y^4$

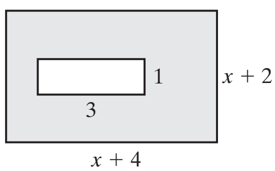
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 89 a 92 determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el área de cada región sombreada. Vea el ejemplo 8.*

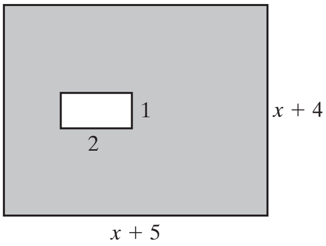
89.



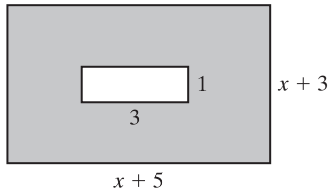
90.



91.



92.



93. Si los factores de un polinomio son $(2x + 3y)$ y $(x - 4y)$, encuentre el polinomio. Explique cómo determinó su respuesta.

94. Si los factores de un polinomio son 3, $(4x + 5)$ y $(2x + 3)$, encuentre el polinomio. Explique cómo determinó su respuesta.

95. Si sabemos que un factor del polinomio $x^2 + 4x - 21$ es $x - 3$, ¿cómo podemos determinar el otro factor? Determine el otro factor.

96. Si sabemos que un factor del polinomio $x^2 - xy - 6y^2$ es $x - 3y$, ¿cómo podemos determinar el otro factor? Determine el otro factor.

97. **a)** De los siguientes trinomios, ¿cuál será más difícil de factorizar por el método de prueba y error? Explique su respuesta.

$$30x^2 + 23x - 40 \quad \text{o} \quad 49x^2 - 98x + 13$$

b) Factorice ambos trinomios.

98. **a)** De los siguientes trinomios, ¿cuál cree que será más difícil de factorizar por el método de prueba y error? Explique su respuesta.

$$48x^2 + 26x - 35 \quad \text{o} \quad 35x^2 - 808x + 69$$

b) Factorice ambos trinomios.

99. Determine todos los valores enteros de b para los que $2x^2 + bx - 5$ es factorizable.

100. Determine todos los valores enteros de b para los que $3x^2 + bx - 7$ es factorizable.

101. Si $x^2 + bx + 5$ es factorizable, ¿cuáles son los únicos dos valores posibles de b? Explique.

102. Si $x^2 + bx + c$ es factorizable y c es un número primo, ¿cuáles son los únicos dos factores posibles de b? Explique.

Considere el trinomio $ax^2 + bx + c$. Más adelante en el curso aprenderá que si la expresión $b^2 - 4ac$, denominada el ***discriminante***, *no es un cuadrado perfecto, el trinomio no puede factorizarse en el conjunto de enteros.* ***Cuadrados perfectos*** *son 1, 4, 9, 16, 25, 49, etcétera. La raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es un número entero no negativo. En los ejercicios 103 a 106,* **a)** *determine el valor de $b^2 - 4ac$.* **b)** *Si $b^2 - 4ac$ es un cuadrado perfecto, factorice el polinomio; si $b^2 - 4ac$ no es un cuadrado perfecto, indique que el polinomio no puede factorizarse.*

103. $x^2 - 8x + 15$

104. $6y^2 - 5y - 6$

105. $x^2 - 4x + 6$

106. $3t^2 - 6t + 2$

107. Construya un trinomio, que se pueda factorizar, con la forma $x^2 + (c + 1)x + c$, en donde c es un número real.

108. Construya un trinomio, que se pueda factorizar, con la forma $x^2 - (c + 1)x + c$, en donde c es un número real.

En los ejercicios 109 a 114, factorice completamente. Suponga que las variables en los exponentes representan enteros positivos.

109. $4a^{2n} - 4a^n - 15$

110. $a^2(a + b) - 2ab(a + b) - 3b^2(a + b)$

111. $x^2(x + y)^2 - 7xy(x + y)^2 + 12y^2(x + y)^2$

112. $3m^2(m - 2n) - 4mn(m - 2n) - 4n^2(m - 2n)$

113. $x^{2n} + 3x^n - 10$

114. $9r^{4y} + 3r^{2y} - 2$

115. Considere $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$.

a) Explique cómo puede comprobar esta factorización mediante gráficas en su calculadora graficadora.

b) Compruebe si la factorización es correcta siguiendo el procedimiento que explicó en la parte **a)**.

116. Considere $6x^3 - 11x^2 - 10x = x(2x - 5)(3x + 2)$.

a) Explique cómo puede comprobar esta factorización utilizando la característica TABLE de una calculadora graficadora.

b) Compruebe si la factorización es correcta siguiendo el procedimiento que explicó en la parte **a)**.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **117.** Resuelva $F = \frac{9}{5}C + 32$ por C.

[3.3] **118.** Grafique $y = -3x + 4$.

[4.5] **119.** Evalúe el determinante $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

[5.2] **120.** Multiplique $[(x + y) + 6]^2$.

[5.3] **121.** Factorice $2x^3 + 4x^2 - 5x - 10$.

5.6 Fórmulas especiales de factorización

1 Factorizar la diferencia de dos cuadrados.

2 Factorizar trinomios cuadrados perfectos.

3 Factorizar la suma y la diferencia de dos cubos.

1 Factorizar la diferencia de dos cuadrados

En esta sección se presentan algunas fórmulas especiales para factorizar la diferencia de dos cuadrados, trinomios cuadrados perfectos, y la suma y diferencia de dos cubos. Le será de utilidad memorizar estas fórmulas.

La expresión $x^2 - 9$ es un ejemplo de la diferencia de dos cuadrados.

$$x^2 - 9 = (x)^2 - (3)^2$$

Para factorizar la diferencia de dos cuadrados, es conveniente usar la **fórmula para la diferencia de dos cuadrados**. Esta fórmula se estudió por primera vez en la sección 5.2.

Diferencia de dos cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

EJEMPLO 1 Factorice las siguientes expresiones mediante la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

a) $x^2 - 16$ **b)** $25x^2 - 36y^2$

Solución Reescriba cada expresión como una diferencia de dos cuadrados. Luego utilice la fórmula.

a) $x^2 - 16 = (x)^2 - (4)^2$
$= (x + 4)(x - 4)$

b) $25x^2 - 36y^2 = (5x)^2 - (6y)^2$
$= (5x + 6y)(5x - 6y)$

Ahora resuelva el ejercicio 13

EJEMPLO 2 Factorice las siguientes diferencias de cuadrados.

a) $x^6 - y^4$ **b)** $2z^4 - 162x^6$

Solución Reescriba cada expresión como una diferencia de dos cuadrados. Luego utilice la fórmula.

a) $x^6 - y^4 = (x^3)^2 - (y^2)^2$
$= (x^3 + y^2)(x^3 - y^2)$

b) $2z^4 - 162x^6 = 2(z^4 - 81x^6)$
$= 2[(z^2)^2 - (9x^3)^2]$
$= 2(z^2 + 9x^3)(z^2 - 9x^3)$

Ahora resuelva el ejercicio 21

EJEMPLO 3 Factorice $x^4 - 81y^4$.

Solución
$$x^4 - 81y^4 = (x^2)^2 - (9y^2)^2$$
$$= (x^2 + 9y^2)(x^2 - 9y^2)$$

Observe que $(x^2 - 9y^2)$ también es una diferencia de dos cuadrados. Utilizamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados una segunda vez para obtener

$$= (x^2 + 9y^2)[(x)^2 - (3y)^2]$$
$$= (x^2 + 9y^2)(x + 3y)(x - 3y)$$

Ahora resuelva el ejercicio 69

EJEMPLO 4 Factorice $(x - 5)^2 - 4$ utilizando la fórmula para la diferencia de dos cuadrados.

Solución Primero expresamos $(x - 5)^2 - 4$ como una diferencia de dos cuadrados.

$$\begin{aligned}(x-5)^2 - 4 &= (x-5)^2 - 2^2 \\ &= [(x-5)+2][(x-5)-2] \\ &= (x-3)(x-7)\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 25

Observación: **No es posible factorizar la suma de dos cuadrados con la forma $a^2 + b^2$ en el conjunto de los números reales**.

Por ejemplo, no es posible factorizar $x^2 + 4$, ya que $x^2 + 4 = x^2 + 2^2$, es una suma de dos cuadrados y no una diferencia de cuadrados.

2 Factorizar trinomios cuadrados perfectos

En la sección 5.2, vimos que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Si invertimos los lados izquierdo y derecho de estas dos fórmulas, obtenemos dos **fórmulas especiales de factorización**.

Trinomios cuadrados perfectos

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Estos dos trinomios se denominan **trinomios cuadrados perfectos**, ya que cada uno es el cuadrado de un binomio. *Para ser un trinomio cuadrado perfecto, el primero y el último términos deben ser el cuadrado de alguna expresión, y el término central debe ser el doble del producto de las raíces cuadradas del primero y último términos*. Cuando se le pida factorizar un trinomio, determine si es un trinomio cuadrado perfecto antes de tratar de factorizarlo mediante los procedimientos explicados en la sección 5.5. Si es un trinomio cuadrado perfecto, puede factorizarlo mediante las fórmulas indicadas con anterioridad.

Ejemplos de trinomios cuadrados perfectos

$$y^2 + 6y + 9 \quad \text{o} \quad y^2 + 2(y)(3) + 3^2$$
$$9a^2b^2 - 24ab + 16 \quad \text{o} \quad (3ab)^2 - 2(3ab)(4) + 4^2$$
$$(r+s)^2 + 10(r+s) + 25 \quad \text{o} \quad (r+s)^2 + 2(r+s)(5) + 5^2$$

Ahora factorizaremos algunos trinomios cuadrados perfectos.

EJEMPLO 5 Factorice $x^2 - 8x + 16$.

Solución Como el primer término, x^2, y el último término, 4^2, son cuadrados, este trinomio podría ser un trinomio cuadrado perfecto. Para determinar si lo es, tome el doble del producto de x y 4 para ver si obtiene $8x$.

$$2(x)(4) = 8x$$

Como $8x$ es el término central, y como su signo es negativo, factorice como sigue:

$$x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$$

Ahora resuelva el ejercicio 29

EJEMPLO 6 Factorice $9x^4 - 12x^2 + 4$.

Solución El primer término es un cuadrado, $(3x^2)^2$, lo mismo que el último término, 2^2. Como $2(3x^2)(2) = 12x^2$, factorizamos como sigue:

$$9x^4 - 12x^2 + 4 = (3x^2 - 2)^2$$

Ahora resuelva el ejercicio 37

EJEMPLO 7 Factorice $(a + b)^2 + 12(a + b) + 36$.

Solución El primer término, $(a + b)^2$, es un cuadrado. El último término, 36 o 6^2, también. El término central es $2(a + b)(6) = 12(a + b)$. Por lo tanto, éste es un trinomio cuadrado perfecto. Así,

$$(a + b)^2 + 12(a + b) + 36 = [(a + b) + 6]^2 = (a + b + 6)^2$$

Ahora resuelva el ejercicio 39

EJEMPLO 8 Factorice $x^2 - 6x + 9 - y^2$.

Solución Como $x^2 - 6x + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto que puede expresarse como $(x - 3)^2$, escribimos

$$(x - 3)^2 - y^2$$

Ahora $(x - 3)^2 - y^2$ es una diferencia de cuadrados; por lo tanto

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 - y^2 &= [(x - 3) + y][(x - 3) - y]\\ &= (x - 3 + y)(x - 3 - y)\end{aligned}$$

Así, $x^2 - 6x + 9 - y^2 = (x - 3 + y)(x - 3 - y)$.

Ahora resuelva el ejercicio 45

El polinomio del ejemplo 8 tiene cuatro términos. En la sección 5.4 aprendimos a factorizar por agrupación los polinomios con cuatro términos. Si analiza el ejemplo 8, verá que sin importar de cuánto se trate, los cuatro términos no pueden acomodarse de modo que tanto los primeros dos términos como los últimos dos tengan un factor común. Siempre que un polinomio con cuatro términos no pueda factorizarse por agrupación, trate de reescribir tres de los términos como el cuadrado de un binomio, y luego factorice mediante la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

EJEMPLO 9 Factorice $4a^2 + 12ab + 9b^2 - 25$.

Solución Primero comprobamos que este polinomio de cuatro términos no puede factorizarse por agrupación. Después, lo analizamos para determinar si tres de los términos que lo conforman pueden expresarse como el cuadrado de un binomio. Ya que esto es posible, escribimos los tres términos como el cuadrado de un binomio. Para completar la factorización, utilizamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

$$\begin{aligned}4a^2 + 12ab + 9b^2 - 25 &= (2a + 3b)^2 - 5^2\\ &= [(2a + 3b) + 5][(2a + 3b) - 5]\\ &= (2a + 3b + 5)(2a + 3b - 5)\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 47

3 Factorizar la suma y la diferencia de dos cubos

Al principio de esta sección factorizamos la diferencia de dos cuadrados. Ahora factorizaremos la suma y la diferencia de dos cubos. Considere el producto de $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

$$\begin{array}{rrrr} & a^2 & - ab & + b^2 \\ & & a & + b \\ \hline & a^2b & - ab^2 & + b^3 \\ a^3 & - a^2b & + ab^2 & \\ \hline a^3 & & & + b^3 \end{array}$$

Así, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. También mediante la multiplicación podemos mostrar que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Las fórmulas para factorizar **la suma y la diferencia de dos cubos** aparecen en los siguientes recuadros.

Suma de dos cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Diferencia de dos cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

EJEMPLO 10 Factorice la siguiente suma de cubos $x^3 + 64$.

Solución Reescriba $x^3 + 64$ como una suma de dos cubos, $x^3 + 4^3$. Haga que x corresponda a a y 4 a b. Luego factorice mediante la fórmula de la suma de dos cubos.

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - a\ b + b^2) \\ x^3 + 4^3 &= (x + 4)[x^2 - x(4) + 4^2] \\ &= (x + 4)(x^2 - 4x + 16) \end{aligned}$$

Así, $x^3 + 64 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$.

Ahora resuelva el ejercicio 51

EJEMPLO 11 Factorice la siguiente diferencia de cubos $27x^3 - 8y^6$.

Solución Primero observamos que $27x^3$ y $8y^6$ no tienen factores comunes distintos de 1. Como podemos expresar a $27x^3$ y a $8y^6$ como cubos, podemos factorizar mediante la fórmula para la diferencia de dos cubos.

$$\begin{aligned} 27x^3 - 8y^6 &= (3x)^3 - (2y^2)^3 \\ &= (3x - 2y^2)[(3x)^2 + (3x)(2y^2) + (2y^2)^2] \\ &= (3x - 2y^2)(9x^2 + 6xy^2 + 4y^4) \end{aligned}$$

Así, $27x^3 - 8y^6 = (3x - 2y^2)(9x^2 + 6xy^2 + 4y^4)$.

Ahora resuelva el ejercicio 57

EJEMPLO 12 Factorice $8y^3 - 64x^6$.

Solución Primero factorice 8, que es común a los dos términos.

$$8y^3 - 64x^6 = 8(y^3 - 8x^6)$$

Ahora factorice $y^3 - 8x^6$ escribiéndolo como una diferencia de dos cubos.

$$\begin{aligned} 8(y^3 - 8x^6) &= 8[(y)^3 - (2x^2)^3] \\ &= 8(y - 2x^2)[y^2 + y(2x^2) + (2x^2)^2] \\ &= 8(y - 2x^2)(y^2 + 2x^2y + 4x^4) \end{aligned}$$

Así, $8y^3 - 64x^6 = 8(y - 2x^2)(y^2 + 2x^2y + 4x^4)$.

Ahora resuelva el ejercicio 59

EJEMPLO 13 Factorice $(x - 2)^3 + 125$.

Solución Escriba $(x - 2)^3 + 125$ como una suma de dos cubos; luego factorice utilizando la fórmula para la suma de dos cubos.

$$\begin{aligned}(x-2)^3 + (5)^3 &= [(x-2) + 5][(x-2)^2 - (x-2)(5) + (5)^2]\\ &= (x - 2 + 5)(x^2 - 4x + 4 - 5x + 10 + 25)\\ &= (x+3)(x^2 - 9x + 39)\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 65

Sugerencia útil

El cuadrado de un binomio tiene un 2 como parte del término central del trinomio.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

La suma o la diferencia de dos cubos tiene un factor similar al del trinomio en el cuadrado del binomio. Sin embargo, el término central no incluye un 2.

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + \underbrace{ab}_{\text{no es } 2ab} + b^2)$$

EJEMPLO 14 **Volumen** Utilizando los cubos de la **figura 5.16**, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre sus volúmenes.

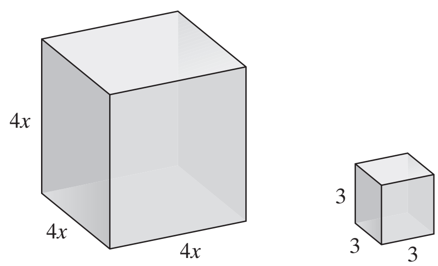


FIGURA 5.16 Cubo grande Cubo pequeño

Solución Para encontrar la diferencia entre los volúmenes, reste el volumen del cubo pequeño del volumen del cubo grande.

$$\begin{aligned}\text{Volumen del cubo grande} &= (4x)^3\\ \text{Volumen del cubo pequeño} &= 3^3\\ \text{Diferencia entre los volúmenes} &= (4x)^3 - 3^3 && \textit{Restar volúmenes.}\\ &= (4x - 3)[(4x)^2 + (4x)3 + 3^2] && \textit{Factorizar.}\\ &= (4x-3)(16x^2 + 12x + 9) && \textit{Simplificar.}\end{aligned}$$

La diferencia entre los volúmenes de los dos cubos es $(4x - 3)(16x^2 + 12x + 9)$.

Ahora resuelva el ejercicio 87

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.6

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) Explique cómo factorizar la diferencia de dos cuadrados.

   b) Mediante el procedimiento que explicó en la parte **a)**, factorice $x^2 - 16$.

2. Explique por qué una suma de dos cuadrados, $a^2 + b^2$, no puede factorizarse en el conjunto de los números reales.

3. Explique cómo se determina si un trinomio es un trinomio cuadrado perfecto.

4. **a)** Explique cómo factorizar un trinomio cuadrado perfecto.
   b) Mediante el procedimiento que explicó en la parte **a)**, factorice $x^2 + 12x + 36$.
5. Proporcione la fórmula para factorizar la suma de dos cubos.
6. Proporcione la fórmula para factorizar la diferencia de dos cubos.
7. El polinomio $x^2 + 14x - 49 = (x + 7)(x - 7)$, ¿está factorizado de manera correcta? Explique.
8. El polinomio $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$, ¿está factorizado de manera correcta? Explique.
9. El polinomio $x^2 - 81 = (x - 9)^2$, ¿está factorizado de manera correcta? Explique.
10. El polinomio $x^2 - 64 = (x + 8)(x - 8)$, ¿está factorizado de manera correcta? Explique.

Práctica de habilidades

Utilice la fórmula para la diferencia de dos cuadrados o la fórmula del trinomio cuadrado perfecto para factorizar cada polinomio.

11. $x^2 - 81$ **12.** $x^2 - 25$ **13.** $a^2 - 100$
14. $1 - 9x^2$ **15.** $1 - 49b^2$ **16.** $x^2 - 81z^2$
17. $25 - 16y^4$ **18.** $49 - 144b^4$ **19.** $\frac{1}{100} - y^2$
20. $\frac{1}{25} - z^2$ **21.** $x^2y^2 - 121c^2$ **22.** $5a^2c^2 - 20x^2y^2$
23. $0.04x^2 - 0.09$ **24.** $0.16p^2 - 0.81q^2$ **25.** $36 - (x - 6)^2$
26. $144 - (a + b)^2$ **27.** $a^2 - (3b + 2)^2$ **28.** $(2c + 3)^2 - 9$
29. $x^2 + 10x + 25$ **30.** $b^2 - 18b + 81$ **31.** $49 - 14t + t^2$
32. $4 + 4a + a^2$ **33.** $36p^2q^2 + 12pq + 1$ **34.** $4x^2 - 20xy + 25y^2$
35. $0.81x^2 - 0.36x + 0.04$ **36.** $0.25x^2 - 0.40x + 0.16$ **37.** $y^4 + 4y^2 + 4$
38. $b^4 - 16b^2 + 64$ **39.** $(a + b)^2 + 6(a + b) + 9$ **40.** $(x + y)^2 + 2(x + y) + 1$
41. $(y - 3)^2 + 8(y - 3) + 16$ **42.** $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ **43.** $x^2 + 6x + 9 - y^2$
44. $p^2 + 2pq + q^2 - 16r^2$ **45.** $25 - (x^2 + 4x + 4)$ **46.** $49 - (c^2 - 8c + 16)$
47. $9a^2 - 12ab + 4b^2 - 9$ **48.** $(4a - 3b)^2 - (2a + 5b)^2$ **49.** $y^4 - 6y^2 + 9$
50. $z^6 + 14z^3 + 49$

Factorice mediante la fórmula para la suma o diferencia de dos cubos.

51. $a^3 + 125$ **52.** $x^3 - 27$ **53.** $64 - a^3$
54. $8 - b^3$ **55.** $p^3 - 27a^3$ **56.** $w^3 - 216$
57. $27y^3 - 8x^3$ **58.** $6x^3 + 48y^3$ **59.** $16a^3 - 54b^3$
60. $2b^3 - 250c^3$ **61.** $x^6 + y^9$ **62.** $16x^6 - 250y^3$
63. $(x + 1)^3 + 1$ **64.** $(a - 3)^3 + 8$ **65.** $(a - b)^3 - 27$
66. $(2x + y)^3 - 64$ **67.** $b^3 - (b + 3)^3$ **68.** $(m - n)^3 - (m + n)^3$

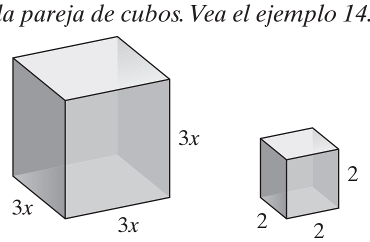
Factorice usando una de las fórmulas especiales para factorizar.

69. $a^4 - 4b^4$ **70.** $121y^4 - 49x^2$ **71.** $49 - 64x^2y^2$
72. $25y^2 - 81x^2$ **73.** $(x + y)^2 - 16$ **74.** $25x^4 - 81y^6$
75. $x^3 - 64$ **76.** $3a^2 - 36a + 108$ **77.** $9x^2y^2 + 24xy + 16$
78. $a^4 + 12a^2 + 36$ **79.** $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ **80.** $8y^3 - 125x^6$
81. $x^2 - 2x + 1 - y^2$ **82.** $16x^2 - 8xy + y^2 - 4$ **83.** $(x + y)^3 + 1$
84. $4r^2 + 4rs + s^2 - 9$ **85.** $(m + n)^2 - (2m - n)^2$ **86.** $(r + p)^3 + (r - p)^3$

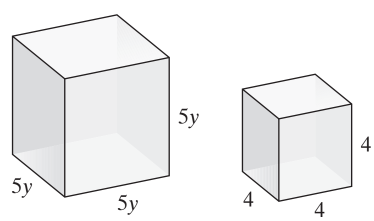
Resolución de problemas

Volumen *En los ejercicios 87 a 90, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre los volúmenes de cada pareja de cubos. Vea el ejemplo 14.*

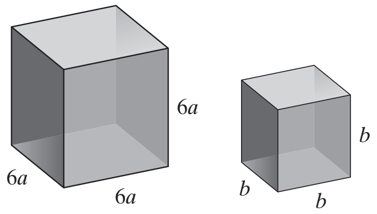
87.



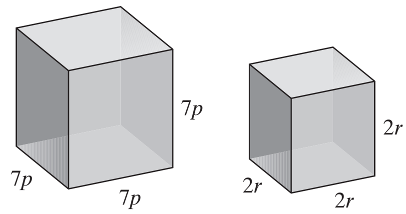
88.



89.

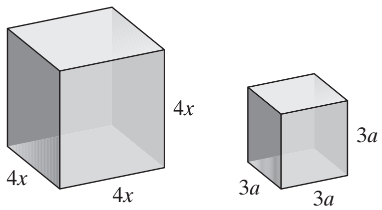


90.

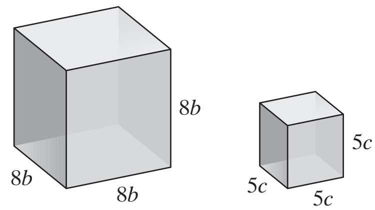


Volumen *En los ejercicios 91 y 92, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la suma de los volúmenes de cada pareja de cubos.*

91.

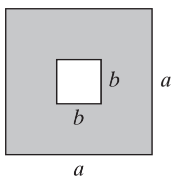


92.



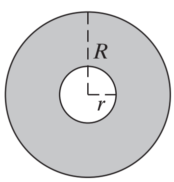
Área o volumen *En los ejercicios 93 a 97,* **a)** *determine el área o volumen de la figura sombreada mediante la sustracción del área o volumen más pequeño del más grande. La fórmula para encontrar el área o volumen se indica debajo de cada figura.* **b)** *Escriba la expresión obtenida en la parte* **a)** *en forma factorizada. Parte del MFC de los ejercicios 94, 96 y 97 es π.*

93. Cuadrados



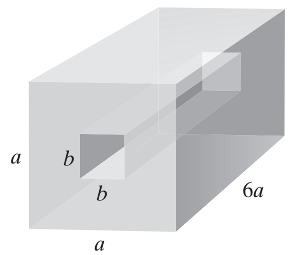
$A = s^2$

94. Círculos



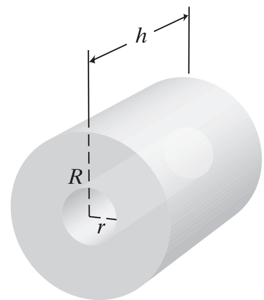
$A = \pi r^2$

95. Sólido rectangular



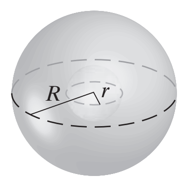
$V = lwh$

96. Cilindro



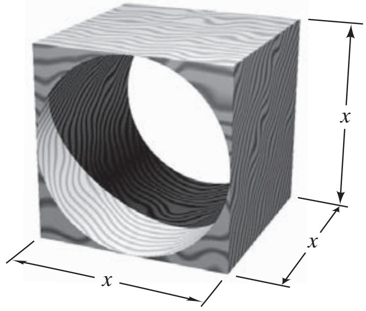
$V = \pi r^2 h$

97. Esfera



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

98. **Área y volumen** Se hace un agujero circular en un cubo de madera, tal como se muestra en la figura.



a) Escriba una expresión en forma factorizada, en términos de x, para calcular el área de la sección transversal de la madera restante.

b) Escriba una expresión en forma factorizada, en términos de x, para calcular el volumen de la madera restante.

99. Determine dos valores de b que hagan de $4x^2 + bx + 9$ un trinomio cuadrado perfecto. Explique cómo determinó su respuesta.

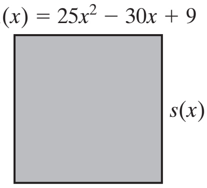
100. Determine dos valores de c que hagan de $16x^2 + cx + 4$ un trinomio cuadrado perfecto. Explique cómo determinó su respuesta.

101. Determine el valor de c que harán de $25x^2 + 20x + c$ un trinomio cuadrado perfecto. Explique cómo determinó su respuesta.

102. Determine el valor de d que hace de $49x^2 - 42x + d$ un trinomio cuadrado perfecto. Explique cómo determinó su respuesta.

103. **Área** Una fórmula para calcular el área de un cuadrado es $A = s^2$, donde s es la longitud de un lado. Suponga que el área de un cuadrado es la que se indica a continuación.

$A(x) = 25x^2 - 30x + 9$



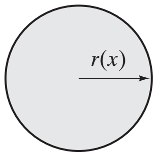
a) explique cómo determinar la longitud del lado x, $s(x)$,

b) determine $s(x)$,

c) determine $s(2)$.

104. Área La fórmula para calcular el área de un círculo es $A = \pi r^2$, donde r es el radio. Suponga que el área de un círculo es la que se indica a continuación,

$$A(x) = 9\pi x^2 + 12\pi x + 4\pi$$



a) explique cómo determinar el radio, $r(x)$,

b) determine $r(x)$,

c) determine $r(4)$.

105. Factorice $x^4 + 64$ escribiendo la expresión como $(x^4 + 16x^2 + 64) - 16x^2$, que es una diferencia de dos cuadrados.

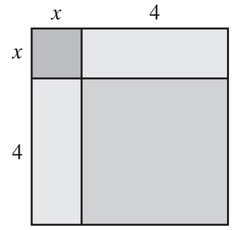
106. Factorice $x^4 + 4$ sumando y restando $4x^2$. (Vea el ejercicio 105).

107. Si $P(x) = x^2$, utilice la diferencia de dos cuadrados para simplificar $P(a + h) - P(a)$.

108. Si $P(x) = x^2$, utilice la diferencia de dos cuadrados para simplificar $P(a + 1) - P(a)$.

109. Suma de áreas La figura muestra cómo *completar el cuadrado*. La suma de las áreas de las tres partes del cuadrado que están sombreadas en gris es

$$x^2 + 4x + 4x \quad \text{o} \quad x^2 + 8x$$



a) Determine el área de la cuarta parte (en rojo) para completar el cuadrado.

b) Determine la suma de las áreas de las cuatro partes del cuadrado.

c) Este procedimiento ha dado como resultado un trinomio cuadrado perfecto en la parte **b)**. Escriba el trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.

110. Factorice $(m - n)^3 - (9 - n)^3$.

Factorice completamente.

111. $64x^{4a} - 9y^{6a}$

112. $16p^{8w} - 49p^{6w}$

113. $a^{2n} - 16a^n + 64$

114. $144r^{8k} + 48r^{4k} + 4$

115. $x^{3n} - 8$

116. $27x^{3m} + 64x^{6m}$

En los ejercicios 117 y 118 utilice su calculadora graficadora para comprobar la factorización. Indique si la factorización es correcta o no. Explique sus respuestas.

117. $2x^2 - 18 \stackrel{?}{=} 2(x + 3)(x - 3)$

118. $8x^3 + 27 \stackrel{?}{=} 2x(4x^2 + 5x + 9)$

Reto

119. La expresión $x^6 - 1$ puede factorizarse usando la diferencia de dos cuadrados o la diferencia de dos cubos. Al principio los factores no parecen ser los mismos, pero con un poco de manipulación algebraica puede demostrarse que son iguales. Factorice $x^6 - 1$ mediante **a)** la diferencia de dos cuadrados, y **b)** la diferencia de dos cubos. **c)** Muestre que ambas respuestas son iguales, factorizando completamente las respuestas obtenidas en la parte **a)**. Luego multiplique los dos binomios por los dos trinomios.

Actividad en grupo

Analice y responda en equipo el ejercicio 120.

120. Más adelante en el curso necesitaremos construir trinomios cuadrados perfectos. Examinen algunos trinomios cuadrados perfectos con coeficiente principal igual a 1.

a) Si el trinomio $x^2 + bx + c$ es un trinomio cuadrado perfecto, expliquen cómo están relacionados b y c.

b) Construyan un trinomio cuadrado perfecto, si los primeros dos términos son $x^2 + 6x$.

c) Construyan un trinomio cuadrado perfecto, si los primeros dos términos son $x^2 - 10x$.

d) Construyan un trinomio cuadrado perfecto, si los primeros dos términos son $x^2 - 14x$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] **121.** Simplifique $-2[3x - (2y - 1) - 5x] + 3y$.

[3.6] **122.** Si $f(x) = x^2 - 3x + 6$ y $g(x) = 5x - 2$, determine $(g - f)(-1)$.

[4.4] **123. Ángulos** Un ángulo recto se divide en tres ángulos más pequeños. El más grande de los tres mide el doble del más pequeño. El ángulo restante mide 10° más que el ángulo más pequeño. Determine la medida de cada ángulo.

[5.4] **124.** Factorice el máximo factor común de $45y^{12} + 60y^{10}$.

125. Factorice $12x^2 - 9xy + 4xy - 3y^2$.

5.7 Repaso general de factorización

1 Factorizar polinomios mediante una combinación de técnicas.

1 Factorizar polinomios mediante una combinación de técnicas

Hemos presentado varios métodos para factorizar. Ahora combinaremos problemas y técnicas de las secciones anteriores.

Un procedimiento general para factorizar cualquier polinomio es el siguiente.

Para factorizar un polinomio

1. Determine si todos los términos del polinomio tienen un máximo factor común distinto de 1. Si es así, factorice el MFC.
2. Si el polinomio tiene dos términos, determine si es una diferencia de dos cuadrados o una suma o diferencia de dos cubos. En cualquiera de estos casos, factorice utilizando la fórmula adecuada.
3. Si el polinomio tiene tres términos, determine si es un trinomio cuadrado perfecto. Si lo es, factorícelo como corresponde. De lo contrario, factorice el trinomio utilizando el método de prueba y error, por agrupación o por sustitución, como se explicó en la sección 5.5.
4. Si el polinomio tiene más de tres términos, trate de factorizarlo mediante agrupación. Si eso no funciona, vea si tres de los términos son el cuadrado de un binomio.
5. Como paso final, examine el polinomio factorizado para ver si los factores enumerados tienen un factor común y se pueden factorizar más. Si encuentra un factor común, factorícelo.

Los ejemplos siguientes ilustran cómo utilizar este procedimiento.

EJEMPLO 1 Factorice $2x^4 - 50x^2$.

Solución Primero verifique si existe un máximo factor común distinto de 1. Como $2x^2$ es común a ambos términos, factorícelo.

$$2x^4 - 50x^2 = 2x^2(x^2 - 25) = 2x^2(x + 5)(x - 5)$$

Observe que $x^2 - 25$ se factoriza como una diferencia de dos cuadrados.

Ahora resuelva el ejercicio 3

EJEMPLO 2 Factorice $3x^2y^2 - 24xy^2 + 48y^2$.

Solución Comience factorizando el MFC, $3y^2$, de cada término.

$$3x^2y^2 - 24xy^2 + 48y^2 = 3y^2(x^2 - 8x + 16) = 3y^2(x - 4)^2$$

Observe que $x^2 - 8x + 16$ es un trinomio cuadrado perfecto. Si no lo reconoce, también podrá obtener la respuesta correcta factorizando el trinomio en $(x - 4)(x - 4)$.

Ahora resuelva el ejercicio 27

EJEMPLO 3 Factorice $24x^2 - 6xy + 40xy - 10y^2$.

Solución Como siempre, comience por determinar si todos los términos del polinomio tienen un factor común. En este ejemplo, el número 2 es común a todos los términos. Factorice el 2; después factorice el polinomio de cuatro términos resultante mediante agrupación.

$$\begin{aligned} 24x^2 - 6xy + 40xy - 10y^2 &= 2(12x^2 - 3xy + 20xy - 5y^2) \\ &= 2[3x(4x - y) + 5y(4x - y)] \\ &= 2(4x - y)(3x + 5y) \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 31

EJEMPLO 4 Factorice $12a^2b - 18ab + 24b$.

Solución $$12a^2b - 18ab + 24b = 6b(2a^2 - 3a + 4)$$

Como $2a^2 - 3a + 4$ no puede factorizarse, concluimos aquí.

Ahora resuelva el ejercicio 7

EJEMPLO 5 Factorice $2x^4y + 54xy$.

Solución
$$\begin{aligned} 2x^4y + 54xy &= 2xy(x^3 + 27) \\ &= 2xy(x + 3)(x^2 - 3x + 9) \end{aligned}$$

Observe que factorizamos $x^3 + 27$ como una suma de dos cubos.

Ahora resuelva el ejercicio 19

EJEMPLO 6 Factorice $3x^2 - 18x + 27 - 3y^2$.

Solución Primero factorizamos el 3 de los cuatro términos.

$$3x^2 - 18x + 27 - 3y^2 = 3(x^2 - 6x + 9 - y^2)$$

Ahora veremos si podemos factorizar los cuatro términos dentro de los paréntesis mediante agrupación. Como puede ver, esto no es posible, así que analizaremos si podemos escribir tres de los términos como el cuadrado de un binomio. Como esto puede hacerse, expresamos $x^2 - 6x + 9$, como $(x - 3)^2$ y luego utilizar la fórmula de la diferencia de dos cuadrados. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 3x^2 - 18x + 27 - 3y^2 &= 3[(x - 3)^2 - y^2] \\ &= 3[(x - 3 + y)(x - 3 - y)] \\ &= 3(x - 3 + y)(x - 3 - y) \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 43

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

En esta sección hemos repasado todas las técnicas para la factorización de expresiones. Si todavía tiene problemas para factorizar, vuelva a estudiar el material de las secciones 5.4 a 5.6.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.7

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique los procedimientos que pueden utilizarse para factorizar un polinomio de **a)** dos términos, **b)** tres términos y **c)** cuatro términos.

2. ¿Cuál es el primer paso en el procedimiento de factorización?

Práctica de habilidades

Factorice completamente cada uno de los siguientes polinomios.

3. $3x^2 - 75$
4. $4x^2 - 24x + 36$
5. $10s^2 + 19s - 15$
6. $-8r^2 + 26r - 15$
7. $6x^3y^2 + 10x^2y^3 + 14x^2y^2$
8. $24m^3n - 12m^2n^2 + 16mn^3$
9. $0.8x^2 - 0.072$
10. $0.5x^2 - 0.08$
11. $6x^5 - 54x$
12. $8x^2y^2z^2 - 32x^2y^2$
13. $3x^6 - 3x^5 + 12x^5 - 12x^4$
14. $2x^2y^2 + 6xy^2 - 10xy^2 - 30y^2$
15. $5x^4y^2 + 20x^3y^2 + 15x^3y^2 + 60x^2y^2$
16. $6x^2 - 15x - 9$
17. $x^4 - x^2y^2$
18. $5x^3 + 135$
19. $x^7y^2 - x^4y^2$
20. $x^4 - 81$

21. $x^5 - 16x$

22. $12x^2y^2 + 33xy^2 - 9y^2$

23. $4x^6 + 32y^3$

24. $8x^4 - 4x^3 - 4x^3 + 2x^2$

25. $5(a + b)^2 - 20$

26. $12x^3y^2 + 4x^2y^2 - 40xy^2$

27. $6x^2 + 36xy + 54y^2$

28. $3x^2 - 30x + 75$

29. $(x + 2)^2 - 4$

30. $5y^4 - 45x^6$

31. $6x^2 + 24xy - 3xy - 12y^2$

32. $pq - 8q + pr - 8r$

33. $(y + 5)^2 + 4(y + 5) + 4$

34. $(x + 1)^2 - (x + 1) - 6$

35. $b^4 + 2b^2 + 1$

36. $45a^4 - 30a^3 + 5a^2$

37. $x^3 + \frac{1}{64}$

38. $8y^3 - \frac{1}{27}$

39. $6y^3 + 14y^2 + 4y$

40. $3x^3 + 2x^2 - 27x - 18$

41. $a^3b - 81ab^3$

42. $x^6 + y^6$

43. $49 - (x^2 + 2xy + y^2)$

44. $x^2 - 2xy + y^2 - 25$

45. $24x^2 - 34x + 12$

46. $40x^2 + 52x - 12$

47. $18x^2 + 39x - 15$

48. $7(a - b)^2 + 4(a - b) - 3$

49. $x^4 - 16$

50. $(x + 5)^2 - 12(x + 5) + 36$

51. $5bc - 10cx - 7by + 14xy$

52. $16y^4 - 9y^2$

53. $3x^4 - x^2 - 4$

54. $x^2 + 16x + 64 - 100y^2$

55. $z^2 - (x^2 - 12x + 36)$

56. $4a^3 + 32$

57. $2(y + 4)^2 + 5(y + 4) - 12$

58. $x^6 + 15x^3 + 54$

59. $a^2 + 12ab + 36b^2 - 16c^2$

60. $y^2 - y^4$

61. $10x^4y + 25x^3y - 15x^2y$

62. $4x^2y^2 + 12xy + 9$

63. $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

64. $12r^2s^2 + rs - 1$

Resolución de problemas

Relacione cada ejercicio del 65 al 72 con las expresiones etiquetadas con las letras **a)** *a* **h)** *a la derecha de ellas.*

65. $a^2 + b^2$

66. $a^2 - b^2$

67. $a^2 + 2ab + b^2$

68. $a^3 + b^3$

69. $a^3 - b^3$

70. $a^2 - 2ab + b^2$

71. un factor de $a^3 + b^3$

72. un factor de $a^3 - b^3$

a) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

b) $(a - b)^2$

c) $a^2 - ab + b^2$

d) $(a + b)^2$

e) no es factorizable

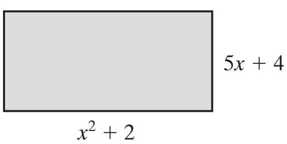
f) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

g) $(a + b)(a - b)$

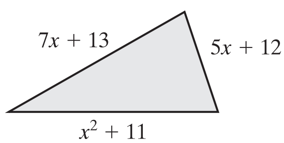
h) $a^2 + ab + b^2$

Perímetro *En los ejercicios 73 y 74, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el perímetro de cada figura.*

73.

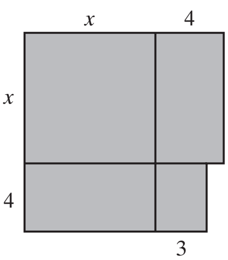


74.

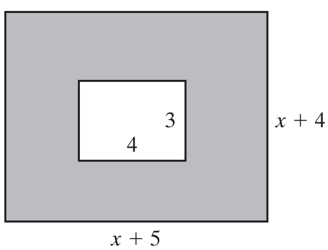


Área *En los ejercicios 75 a 78, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el área de la región sombreada de cada figura.*

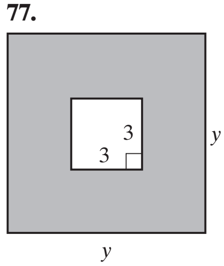
75.



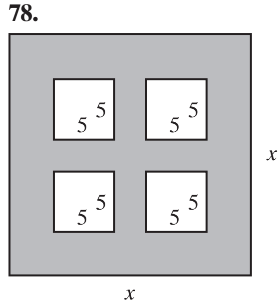
76.



77.

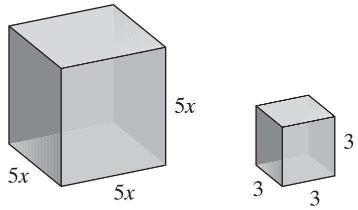


78.

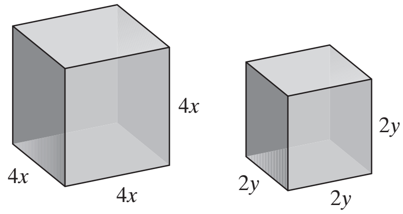


Volumen *En los ejercicios 79 y 80, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre los volúmenes de cada par de cubos.*

79.

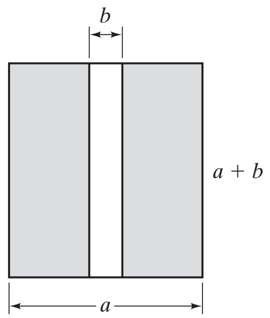


80.

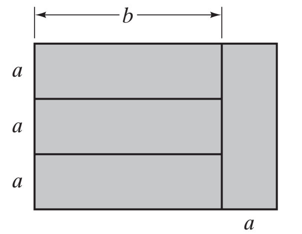


Área *En los ejercicios 81 a 84,* **a)** *escriba una expresión para calcular el área sombreada de la figura, y* **b)** *escriba la expresión en forma factorizada.*

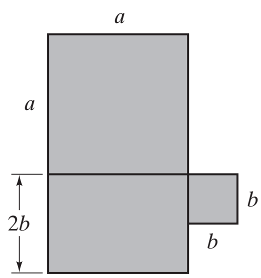
81.



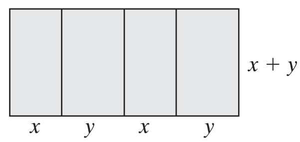
82.



83.



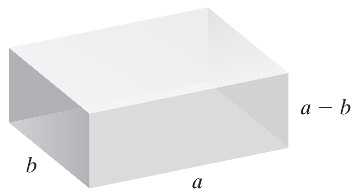
84.



85. Área de la superficie

a) Escriba una expresión para calcular el área de la superficie de los cuatro lados de la caja que se ilustra a continuación (no tome en cuenta la tapa ni la base).

b) Escriba la expresión en forma factorizada.



86. Explique cómo puede utilizarse la fórmula de factorización de la *diferencia* de dos cubos para factorizar $x^3 + 27$.

87. a) Explique cómo construir un trinomio cuadrado perfecto.

b) Construya un trinomio cuadrado perfecto y luego muestre sus factores.

Retos

En este capítulo sólo hemos trabajado con exponentes enteros; sin embargo, en una expresión también pueden factorizarse los exponentes fraccionarios. Las expresiones siguientes no son polinomios. **a)** *En cada expresión factorice la variable con el exponente menor (o más negativo). (Los exponentes fraccionarios se analizarán en la sección 7.2.)* **b)** *Factorice completamente.*

88. $x^{-2} - 5x^{-3} + 6x^{-4}$, factorice x^{-4}.

89. $x^{-3} - 2x^{-4} - 3x^{-5}$, factorice x^{-5}.

90. $x^{5/2} + 3x^{3/2} - 4x^{1/2}$, factorice $x^{1/2}$

91. $5x^{1/2} + 2x^{-1/2} - 3x^{-3/2}$, factorice $x^{-3/2}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] **92.** Resuelva $6(x + 4) - 4(3x + 3) = 6$.

[2.6] **93.** Determine el conjunto solución para $\left|\frac{6 + 2z}{3}\right| > 2$.

[4.3] **94. Mezcla de cafés** Dennos Reissing dirige una tienda de abarrotes, y desea mezclar 30 libras de café para vender a un costo total de $170. Para obtener la mezcla, utilizará café que vende a $5.20 por libra y café que vende a $6.30 por libra. ¿Cuántas libras de cada café debe utilizar?

[5.2] **95.** Multiplique $(5x + 4)(x^2 - x + 4)$.

[5.4] **96.** Factorice $2x^3 + 6x^2 - 5x - 15$.

5.8 Ecuaciones polinomiales

1. Usar la propiedad del factor nulo para resolver ecuaciones.
2. Usar la factorización para resolver ecuaciones.
3. Usar la factorización para resolver problemas de aplicación.
4. Usar la factorización para determinar las intersecciones con el eje x de una función cuadrática.

Siempre que se establece que dos polinomios son iguales entre sí, tenemos una **ecuación polinomial**.

Ejemplos de ecuaciones polinomiales

$$x^2 + 2x = x - 5$$
$$y^3 + 3y - 2 = 0$$
$$4x^4 + 2x^2 = -3x + 2$$

El **grado de una ecuación polinomial** es el mismo que el del término con mayor grado. Por ejemplo, las tres ecuaciones anteriores tienen grados 2, 3 y 4, respectivamente. Con frecuencia, una ecuación de segundo grado con una variable se denomina **ecuación cuadrática**.

Ejemplos de ecuaciones cuadráticas

$$3x^2 + 6x - 4 = 0$$
$$5x = 2x^2 - 4$$
$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

Cualquier ecuación cuadrática puede escribirse en la **forma general**.

Forma general de una ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

donde a, b y c son números reales.

Antes de continuar, asegúrese de que puede convertir cada una de las tres ecuaciones cuadráticas dadas anteriormente a su forma general, con $a > 0$.

1 Usar la propiedad del factor nulo para resolver ecuaciones

Para resolver ecuaciones utilizando factorización, empleamos la **propiedad del factor nulo**.

Propiedad del factor nulo (factor cero)

Para todos los números reales a y b, si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$, o bien a y $b = 0$.

La propiedad del factor nulo indica que, *si el producto de dos factores es igual a cero, uno o ambos factores deben ser cero*.

EJEMPLO 1 ▸ Resuelva la ecuación $(x + 5)(x - 3) = 0$.

Solución Como el producto de los factores es igual a 0, según la propiedad del factor nulo, uno o ambos factores deben ser iguales a cero. Igualamos cada factor a 0 y resolvemos cada ecuación por separado.

$$x + 5 = 0 \qquad \text{o} \qquad x - 3 = 0$$
$$x = -5 \qquad\qquad\qquad x = 3$$

Por lo tanto, si x es -5 o 3, el producto de los factores es 0.

Compruebe

$x = -5$

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$
$$(-5 + 5)(-5 - 3) \stackrel{?}{=} 0$$
$$0(-8) \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \quad \textit{Verdadero}$$

$x = 3$

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$
$$(3 + 5)(3 - 3) \stackrel{?}{=} 0$$
$$8(0) \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \quad \textit{Verdadero}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 21**

2 Usar la factorización para resolver ecuaciones

A continuación se indica un procedimiento que se puede utilizar para obtener la solución de una ecuación mediante factorización.

Para resolver una ecuación mediante factorización

1. Utilice la propiedad de la suma para eliminar todos los términos de un lado de la ecuación. Con esto se obtendrá un lado de la ecuación igual a 0.
2. Sume los términos semejantes en la ecuación y después factorice.
3. Iguale a cero cada factor que *contenga una variable*. Resuelva las ecuaciones y determine las soluciones.
4. Verifique las soluciones en la ecuación *original*.

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación $4x^2 = 24x$.

Solución Primero igualamos a cero el lado derecho de la ecuación, restando $24x$ en ambos lados. Después factorizamos el lado izquierdo de la ecuación.

$$4x^2 - 24x = 0$$
$$4x(x - 6) = 0$$

Ahora igualamos a cero cada factor y despejamos x.

$$4x = 0 \quad \text{o} \quad x - 6 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = 6$$

Una verificación mostrará que los números 0 y 6 satisfacen la ecuación $4x^2 = 24x$.

Ahora resuelva el ejercicio 27

Cómo evitar errores comunes

La propiedad del factor nulo sólo puede utilizarse cuando un lado de la ecuación es igual a 0.

CORRECTA	INCORRECTA
$(x - 4)(x + 3) = 0$	$\cancel{(x - 4)(x + 3) = 2}$
$x - 4 = 0$ o $x + 3 = 0$	$\cancel{x - 4 = 2}$ ~~o~~ $\cancel{x + 3 = 2}$
$x = 4$ $\quad$ $x = -3$	$\cancel{x = 6}$ $\quad$ $\cancel{x = -1}$

En el procedimiento incorrecto, ilustrado a la derecha, no se puede utilizar la propiedad del factor nulo, ya que el lado derecho de la ecuación no es igual a 0. El ejemplo 3 muestra cómo resolver estos problemas correctamente.

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $(x - 1)(3x + 2) = 4x$.

Solución Como el lado derecho de la ecuación no es igual a 0, no podemos utilizar aún la propiedad del factor nulo; en lugar de eso comenzamos por multiplicar los factores del lado izquierdo de la ecuación. Después restamos $4x$ en ambos lados para obtener 0 del lado derecho. Luego factorizamos y resolvemos la ecuación.

$$(x - 1)(3x + 2) = 4x$$
$$3x^2 - x - 2 = 4x \qquad \textit{Multiplicar los factores.}$$
$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \qquad \textit{Hacer un lado igual a 0.}$$
$$(3x + 1)(x - 2) = 0 \qquad \textit{Factorizar el trinomio.}$$
$$3x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0 \qquad \textit{Propiedad del factor nulo.}$$
$$3x = -1 \qquad x = 2 \qquad \textit{Resolver las ecuaciones.}$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

Las soluciones son $-\frac{1}{3}$ y 2. Compruebe estos valores en la ecuación original.

Ahora resuelva el ejercicio 41

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $3x^2 + 2x + 12 = -13x$.

Solución

$$\begin{aligned}
3x^2 + 2x + 12 &= -13x \\
3x^2 + 15x + 12 &= 0 && \text{Haga un lado igual a 0.} \\
3(x^2 + 5x + 4) &= 0 && \text{Factorizar 3.} \\
3(x + 4)(x + 1) &= 0 && \text{Factorizar el trinomio.} \\
x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 &= 0 && \text{Propiedad del factor nulo.} \\
x = -4 \qquad\qquad x &= -1 && \text{Despejar } x.
\end{aligned}$$

Como el factor 3 no tiene una variable, no tenemos que igualarlo a cero. Sólo los números -4 y -1 satisfacen la ecuación $3x^2 + 2x + 12 = -13x$.

Ahora resuelva el ejercicio 45

Sugerencia útil

Al resolver una ecuación cuyo término principal tiene un coeficiente *negativo*, por lo general lo convertimos en positivo multiplicando ambos lados de la ecuación por -1. Esto facilita el procedimiento de factorización, como se muestra en el ejemplo siguiente.

$$\begin{aligned}
-x^2 + 5x + 6 &= 0 \\
-1(-x^2 + 5x + 6) &= -1 \cdot 0 \\
x^2 - 5x - 6 &= 0
\end{aligned}$$

Ahora podemos resolver la ecuación $x^2 - 5x - 6 = 0$ factorizando.

$$\begin{aligned}
(x - 6)(x + 1) &= 0 \\
x - 6 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 &= 0 \\
x = 6 \qquad\qquad x &= -1
\end{aligned}$$

Los números 6 y –1 satisfacen la ecuación original: $-x^2 + 5x + 6 = 0$.

Todas las ecuaciones de los ejemplos 1 a 4 fueron ecuaciones cuadráticas que se reescribieron en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y se resolvieron por factorización. Otros métodos que pueden usarse para resolver ecuaciones cuadráticas son: completar el cuadrado y la fórmula cuadrática; en el capítulo 8 analizaremos estos métodos.

La propiedad del factor nulo puede extenderse a tres o más factores, como se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Resuelva la ecuación $2p^3 + 5p^2 - 3p = 0$.

Solución Primero factorizamos, y después igualamos a 0 cada factor que tenga p.

$$\begin{aligned}
2p^3 + 5p^2 - 3p &= 0 \\
p(2p^2 + 5p - 3) &= 0 && \text{Factorizar } p. \\
p(2p - 1)(p + 3) &= 0 && \text{Factorizar el trinomio.} \\
p = 0 \quad \text{o} \quad 2p - 1 = 0 \quad \text{o} \quad p + 3 &= 0 && \text{Propiedad del factor nulo.} \\
2p = 1 \qquad\qquad p &= -3 && \text{Despejar } p. \\
p &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Los números 0, $\frac{1}{2}$ y -3 son soluciones de la ecuación.

Ahora resuelva el ejercicio 49

Observe que la ecuación del ejemplo 5 no es una ecuación cuadrática, ya que el exponente del término principal es 3, no 2. Ésta es una **ecuación cúbica** o **de tercer grado**.

EJEMPLO 6 En la función $f(x) = 2x^2 - 13x - 16$, determine todos los valores de a para los que $f(a) = 8$.

Solución Primero reescribimos la función como $f(a) = 2a^2 - 13a - 16$. Como $f(a) = 8$, escribimos

$$\begin{aligned} 2a^2 - 13a - 16 &= 8 && \textit{Determine f(a) igual a 8.} \\ 2a^2 - 13a - 24 &= 0 && \textit{Haga que un lado sea igual a 0.} \\ (2a+3)(a-8) &= 0 && \textit{Factorice el trinomio.} \\ 2a + 3 = 0 \quad \text{o} \quad a - 8 &= 0 && \textit{Propiedad del factor nulo.} \\ 2a = -3 \qquad\quad a &= 8 && \textit{Despeje a.} \\ a = -\frac{3}{2} \qquad\qquad & \end{aligned}$$

Si comprueba estas respuestas, encontrará que $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 8$ y $f(8) = 8$.

Ahora resuelva el ejercicio 69

3 Usar la factorización para resolver problemas de aplicación

Ahora veamos algunos problemas de aplicación para cuya solución se utiliza la factorización.

EJEMPLO 7 **Triángulo** En una exhibición, una gran tienda de campaña tendrá una entrada en forma triangular (vea la **figura 5.17**).

Determine la base y la altura de la entrada, si la altura medirá 3 pies menos que el doble de la base, y el área total de la entrada es de 27 pies cuadrados.

Solución **Entienda el problema** Haga un dibujo de la entrada e incluya la información indicada (**figura 5.18**).

FIGURA 5.17

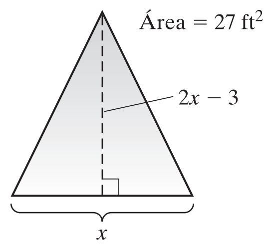


FIGURA 5.18

Traduzca Para resolver el problema, usaremos la fórmula para calcular el área de un triángulo.

$$A = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$

$$27 = \frac{1}{2}(x)(2x-3) \qquad \textit{Sustituir expresiones para la base, la altura y el área.}$$

Realice los cálculos

$$2(27) = \cancel{2}\left[\frac{1}{\cancel{2}}(x)(2x-3)\right] \qquad \textit{Multiplicar ambos lados por 2 para eliminar fracciones.}$$

$$\begin{aligned} 54 &= x(2x-3) \\ 54 &= 2x^2 - 3x \\ \text{o} \quad 2x^2 - 3x - 54 &= 0 && \textit{Hacer que un lado sea igual a 0.} \\ (2x+9)(x-6) &= 0 && \textit{Factorizar el trinomio.} \\ 2x + 9 = 0 \quad \text{o} \quad x - 6 &= 0 && \textit{Propiedad del factor nulo.} \\ 2x = -9 \qquad\quad x &= 6 && \textit{Despejar x.} \\ x = -\frac{9}{2} \qquad\qquad & \end{aligned}$$

Responda Como las dimensiones de una figura geométrica no pueden ser negativas, podemos eliminar $x = -\frac{9}{2}$ como una respuesta para nuestro problema. Por lo tanto,

$$\text{base} = x = 6 \text{ pies}$$
$$\text{altura} = 2x - 3 = 2(6) - 3 = 9 \text{ pies}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 99**

EJEMPLO 8 ▸ Altura de una bala de cañón Un cañón se coloca en la cima de un risco cuya altura es de 288 pies sobre el nivel de un lago que se encuentra junto a su base. Se dispara una bala, directamente hacia arriba, con una velocidad de 112 pies por segundo. La altura, h, en pies, en que se encuentra la bala de cañón respecto del nivel del lago en cualquier instante, t, se determina mediante la función

$$h(t) = -16t^2 + 112t + 288$$

Determine el tiempo que le toma a la bala de cañón para golpear el agua después de haber sido disparada.

Solución **Entienda el problema** Necesitamos hacer un dibujo para analizar mejor el problema (vea la **figura 5.19**). Cuando la bala golpea el agua, su altura respecto del lago es de 0 pies.

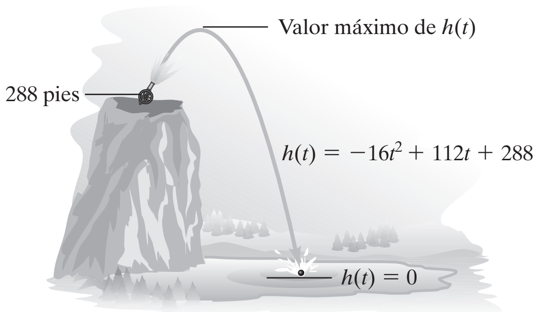


FIGURA 5.19

Traduzca Para resolver el problema necesitamos determinar el tiempo, t, cuando $h(t) = 0$. Para ello establecemos que la función indicada sea igual a cero y despejamos t.

$$\begin{aligned}
-16t^2 + 112t + 288 &= 0 && \textit{Determinar } h(t) = 0.\\
-16(t^2 - 7t - 18) &= 0 && \textit{Factorizar } -16.\\
-16(t + 2)(t - 9) &= 0 && \textit{Factorizar el trinomio.}\\
t + 2 = 0 \quad \text{o} \quad t - 9 &= 0 && \textit{Propiedad del factor nulo.}\\
t = -2 \qquad\quad t &= 9 && \textit{Despejar } t.
\end{aligned}$$

Responda Como t es el número de segundos, -2 no es una respuesta posible. La bala de cañón golpeará el agua 9 segundos después de haber sido disparada.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 105**

Teorema de Pitágoras

El siguiente problema de aplicación utiliza el teorema de Pitágoras. Los dos lados más cortos de un triángulo rectángulo (vea la **figura 5.20**) se denominan **catetos**, y el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**. El **teorema de Pitágoras** expresa la relación entre los catetos y la hipotenusa del triángulo.

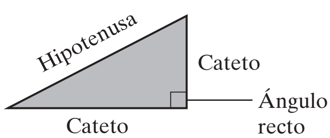


FIGURA 5.20

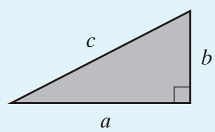
Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus dos catetos; esto es

$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$$

Si a y b representan las longitudes de los catetos, y c representa la longitud de la hipotenusa, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$



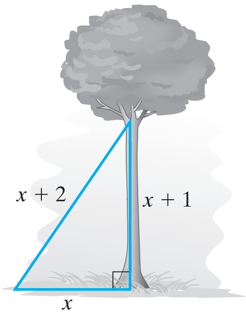


FIGURA 5.21

EJEMPLO 9 ▸ **Cable para un árbol** Para ayudarle a crecer recto, Jack Keating coloca un cable tirante en un árbol. La localización de los puntos de donde se amarra el cable (una estaca sobre el suelo y la parte superior e inferior del árbol), se indica en la **figura 5.21**. Determine la longitud del cable. Observe que la longitud del cable es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que se forma con el árbol y el piso.

Solución **Entienda el problema** Para resolver este problema utilizamos el teorema de Pitágoras. De acuerdo con la figura, vemos que los catetos son x y $x + 1$, y que la hipotenusa es $x + 2$.

Traduzca

$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2 \qquad \textit{Teorema de Pitágoras}$$

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 \qquad \textit{Sustituir expresiones para los catetos y la hipotenusa.}$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + 2x + 1 &= x^2 + 4x + 4 && \textit{Elevar al cuadrado los términos.} \\ 2x^2 + 2x + 1 &= x^2 + 4x + 4 && \textit{Simplificar.} \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 && \textit{Hacer que un lado sea igual a 0.} \\ (x - 3)(x + 1) &= 0 && \textit{Factorizar.} \end{aligned}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0 \qquad \textit{Resolver.}$$

$$x = 3 \qquad\qquad x = -1$$

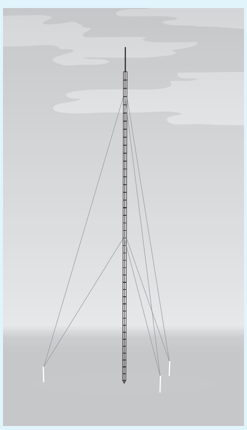
Responda Con base en la figura, sabemos que x no puede tener un valor negativo. Por lo tanto, la única respuesta posible es 3. La estaca está colocada a tres pies de distancia respecto del árbol. En la parte superior, el cable se sujeta al árbol a $x + 1$ o 4 pies de altura respecto del piso. La longitud del cable es igual a $x + 2$ o 5 pies.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 109**

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Tanto las aplicaciones dadas en esta sección como el conjunto de ejercicios, se han escrito de modo que las ecuaciones cuadráticas sean factorizables. En la vida real, las ecuaciones cuadráticas por lo general no se pueden factorizar (en el conjunto de los números enteros), y necesitan resolverse de otras formas. En las secciones 8.1 y 8.2, analizaremos métodos para resolver ecuaciones cuadráticas que no son factorizables.

Puede determinar soluciones aproximadas a ecuaciones cuadráticas que no son factorizables por medio de su calculadora graficadora. Considere el siguiente ejemplo de la vida real.



EJEMPLO **Antenas de celulares** En Estados Unidos, el número de antenas repetidoras de señales de telefonía celular ha estado creciendo. Desde 1996 a 2002, el número de estas antenas, N, en miles, puede aproximarse de forma muy precisa por medio de la función

$$N(t) = -1.45t^2 + 21.88t + 25.44$$

donde t es el número de años desde 1996. Determine el año en que el número de antenas repetidoras llegó a 80,000.

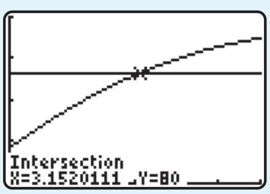
Solución **Entienda el problema y traduzca** Para responder esta pregunta necesitamos que la función $N(t)$ sea igual a 80, y despejar t.

$$-1.45t^2 + 21.88t + 25.44 = 80 \qquad \textit{Determinar } N(t) = 80.$$

No podemos resolver esta ecuación mediante factorización, pero sí utilizando una calculadora graficadora. Para hacerlo, denominamos a un lado de la ecuación Y_1 y al otro Y_2.

$$Y_1 = -1.45x^2 + 21.88x + 25.44$$

$$Y_2 = 80$$



[0, 6, 1, 0, 120, 30]

FIGURA 5.22

Realice los cálculos Ahora grafique las dos funciones en su calculadora graficadora y utilice las teclas $\boxed{\text{TRACE}}$ y $\boxed{\text{ZOOM}}$ u otras teclas (por ejemplo la tecla $\boxed{\text{CALC}}$ con la opción 5, *intersect*, en la TI-84 Plus) para obtener su respuesta. La **figura 5.22** ilustra la pantalla de una TI-84 Plus, mostrando que la coordenada x de la intersección de las ecuaciones está aproximadamente en $x = 3.1520$.

Responda Por consiguiente, 3 años a partir de 1996, o 1999, había casi 80,000 antenas repetidoras.

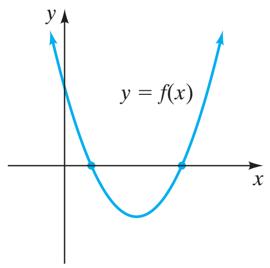


FIGURA 5.23

4 Usar la factorización para determinar las intersecciones con el eje *x* de una función cuadrática

Considere la gráfica de la **figura 5.23**.

En las intersecciones con el eje x, el valor de la función, o y, es 0. Así, si deseamos determinar las **intersecciones con el eje *x* de una gráfica**, podemos establecer la función igual a 0 y despejar x.

EJEMPLO 10 ▸ Determine las intersecciones con el eje x de la gráfica de $y = x^2 - 2x - 8$.

Solución En las intersecciones con el eje x, y tiene un valor de 0. Por lo tanto, para determinar las intersecciones con el eje x escribimos

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$(x - 4)(x + 2) = 0$$
$$x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$
$$x = 4 \qquad\qquad x = -2$$

Las soluciones de $x^2 - 2x - 8 = 0$, son 4 y -2. Las intersecciones con el eje x de la gráfica que se obtiene de $y = x^2 - 2x - 8$ son $(4, 0)$ y $(-2, 0)$, como se ilustra en la **figura 5.24**.

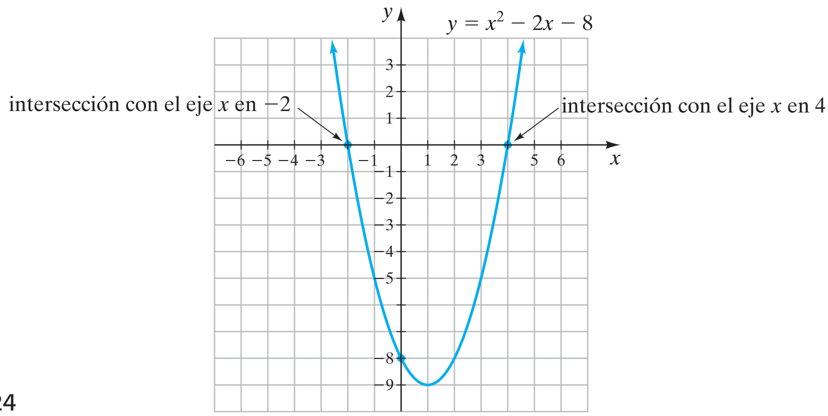


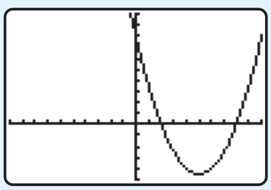
FIGURA 5.24

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 75**

Si conocemos las intersecciones con el eje x de una gráfica, podemos determinar la ecuación de la gráfica. Lea el siguiente recuadro para aprender cómo hacerlo con ayuda de su calculadora graficadora.

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Determine la ecuación de la gráfica en la **figura 5.25**.



$[-10, 10, 1, -10, 20, 2]$ FIGURA 5.25

Si suponemos que las intersecciones son valores enteros, entonces las intersecciones con el eje x están en 2 y en 8. Por lo tanto,

Intersecciones con el eje *x* en	Factores	Posible ecuación de la gráfica
2 y 8	$(x - 2)(x - 8)$	$y = (x - 2)(x - 8)$ o $y = x^2 - 10x + 16$

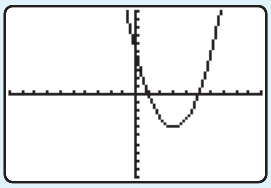
Como la intersección con el eje y de la gráfica en la **figura 5.25** está en 16, $y = x^2 - 10x + 16$ es la ecuación de la gráfica. El ejemplo 11 explica por qué utilizamos las palabras *posible ecuación de la gráfica.*

(*continúa en la página siguiente*)

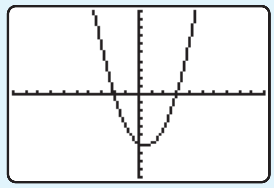
EJERCICIOS

Escriba una ecuación para cada gráfica que se ilustra. Suponga que todas las intersecciones con el eje x tienen valores enteros y que se muestra la ventana estándar.

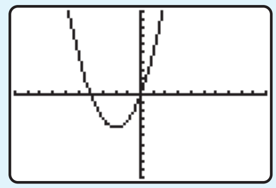
1.



2.



3.



EJEMPLO 11 ▸ Escriba una ecuación cuya gráfica tenga intersecciones con el eje x en -2 y en 4.

Solución: Si las intersecciones están en -2 y 4, entonces un conjunto de factores que se obtienen con base en estas intersecciones son $(x + 2)$ y $(x - 4)$, respectivamente. Por lo tanto, una ecuación que tendrá intersecciones con x en -2 y 4 es

$$y = (x + 2)(x - 4) \text{ o } y = x^2 - 2x - 8.$$

Observe que otras ecuaciones pueden tener gráficas con las mismas intersecciones con el eje x. Por ejemplo, la gráfica de $y = 2(x^2 - 2x - 8)$ o $y = 2x^2 - 4x - 16$ también tiene intersecciones con x en -2 y en 4. De hecho, la gráfica de $y = a(x^2 - 2x - 8)$, para cualquier número real a distinto de cero, tendrá intersecciones con el eje x en -2 y 4.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 93**

En el ejemplo 11, aunque las intersecciones con x de la gráfica de $y = a(x^2 - 2x - 8)$ siempre estarán en -2 y 4, la intersección con y de la gráfica dependerá del valor de a. Por ejemplo, si $a = 1$, la intersección con el eje y estará en 1(8) u 8. Si $a = 2$, la intersección estará en 2(8) o 16 y así sucesivamente.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.8

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cómo determina el grado de una función polinomial?

2. ¿Qué es una ecuación cuadrática?

3. ¿Cuál es la forma general de una ecuación cuadrática?

4. a) Explique la propiedad del factor nulo.

b) Resuelva la ecuación $(3x - 7)(2x + 3) = 0$ por medio de la propiedad del factor nulo.

5. a) Explique por qué la ecuación $(x + 3)(x + 4) = 2$ *no puede* resolverse escribiendo $x + 3 = 2$ o $x + 4 = 2$.

b) Resuelva la ecuación $(x + 3)(x + 4) = 2$.

6. Cuando se factoriza una constante de una ecuación, ¿por qué no es necesario determinar que la constante sea igual a 0 al resolver la ecuación?

7. a) Explique cómo resolver una ecuación polinomial mediante factorización.

b) Resuelva la ecuación $-x - 20 = -12x^2$ mediante el procedimiento explicado en la parte **a)**.

8. a) ¿Cuál es el primer paso para resolver la ecuación $-x^2 + 2x + 35 = 0$?

b) Resuelva la ecuación de la parte **a)**.

9. a) ¿Cómo se denominan los lados más cortos de un triángulo rectángulo?

b) ¿Cómo se denomina al lado más largo de un triángulo rectángulo?

10. Escriba el teorema de Pitágoras y explique su significado.

11. Si la gráfica de $y = x^2 + 10x + 16$ tiene intersecciones con el eje x en -8 y -2, ¿cuál es la solución de la ecuación $x^2 + 10x + 16 = 0$? Explique.

12. Si las soluciones para la ecuación $2x^2 - 15x + 18 = 0$ son $\frac{3}{2}$ y 6, ¿cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de $y = 2x^2 - 15x + 18$? Explique.

13. ¿Es posible que una función cuadrática no tenga intersecciones con el eje x? Explique.

14. ¿Es posible que una función cuadrática tenga sólo una intersección con el eje x? Explique.

15. ¿Es posible que una función cuadrática tenga dos intersecciones con el eje x? Explique.

16. ¿Es posible que una función cuadrática tenga tres intersecciones con el eje x? Explique.

Práctica de habilidades

Resuelva.

17. $x(x + 3) = 0$

18. $x(x - 4) = 0$

19. $4x(x - 1) = 0$

20. $8x(x + 6) = 0$

21. $2(x + 1)(x - 7) = 0$

22. $3(a - 5)(a + 2) = 0$

23. $x(x - 9)(x - 4) = 0$

24. $2a(a + 3)(a + 8) = 0$

25. $(3x - 2)(7x - 1) = 0$

26. $(2x + 3)(4x + 5) = 0$

27. $4x^2 = 12x$

28. $3y^2 = -24y$

29. $x^2 + 5x = 0$

30. $2a^2 - 8a = 0$

31. $-x^2 + 6x = 0$

32. $-3x^2 - 21x = 0$

33. $3x^2 = 27x$

34. $18a^2 = -36a$

35. $a^2 + 6a + 5 = 0$

36. $x^2 - 6x + 5 = 0$

37. $x^2 + x - 12 = 0$

38. $b^2 + b - 72 = 0$

39. $x^2 + 8x + 16 = 0$

40. $c^2 - 10c = -25$

41. $(2x + 5)(x - 1) = 12x$

42. $a(a + 2) = 48$

43. $2y^2 = -y + 6$

44. $3a^2 = -a + 2$

45. $3x^2 - 6x - 72 = 0$

46. $2a^2 + 18a + 40 = 0$

47. $x^3 - 3x^2 = 18x$

48. $x^3 = -19x^2 + 42x$

49. $4c^3 + 4c^2 - 48c = 0$

50. $3b^3 - 8b^2 - 3b = 0$

51. $18z^3 = 15z^2 + 12z$

52. $12a^3 = 16a^2 + 3a$

53. $x^2 - 25 = 0$

54. $2y^2 = 98$

55. $4x^2 = 9$

56. $49c^2 = 81$

57. $4y^3 - 36y = 0$

58. $3x^4 - 48x^2 = 0$

59. $-x^2 = 2x - 99$

60. $-x^2 + 16x = 63$

61. $(x + 7)^2 - 16 = 0$

62. $(x - 6)^2 - 4 = 0$

63. $(2x + 5)^2 - 9 = 0$

64. $(x + 1)^2 - 3x = 7$

65. $6a^2 - 12 - 4a = 19a - 32$

66. $4(a^2 - 3) = 6a + 4(a + 3)$

67. $2b^3 + 16b^2 = -30b$

68. $(a - 1)(3a + 2) = 4a$

69. Para $f(x) = 3x^2 + 7x + 9$, determine todos los valores de a para los que $f(a) = 7$.

70. Para $f(x) = 4x^2 - 11x + 2$, determine todos los valores de a para los que $f(a) = -4$.

71. Para $g(x) = 10x^2 - 31x + 16$, determine todos los valores de a para los que $g(a) = 1$.

72. Para $g(x) = 6x^2 + x - 3$, determine todos los valores de a para los que $g(a) = -2$.

73. Para $r(x) = x^2 - x$, determine todos los valores de a para los que $r(a) = 30$.

74. Para $r(x) = 10x^2 - 19x - 5$, determine todos los valores de a para los que $r(a) = -11$.

Utilice factorización para determinar las intersecciones con el eje x de las gráficas de cada ecuación (vea el ejemplo 10).

75. $y = x^2 - 10x + 24$

76. $y = x^2 - 13x + 42$

77. $y = x^2 + 16x + 64$

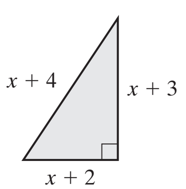
78. $y = 15x^2 - 14x - 8$

79. $y = 12x^3 - 46x^2 + 40x$

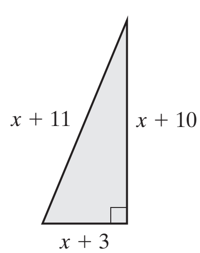
80. $y = 12x^3 - 39x^2 + 30x$

Triángulo rectángulo *En los ejercicios 81 a 86, utilice el teorema de Pitágoras para determinar x.*

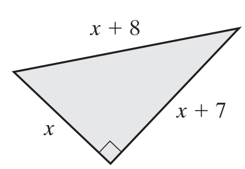
81.

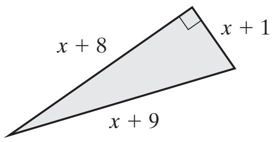


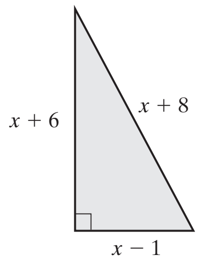
82.

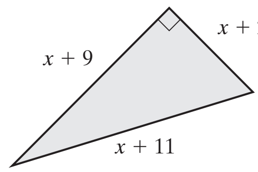


83.



84.


85.


86.


Resolución de problemas

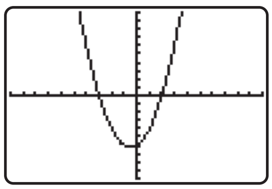
En los ejercicios 87 a 90, determine las intersecciones con el eje x de cada gráfica; luego relacione la ecuación con la gráfica apropiada, marcada con las letras **a)** *a* **d)**.

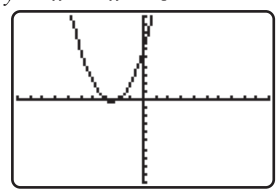
87. $y = x^2 - 5x + 6$

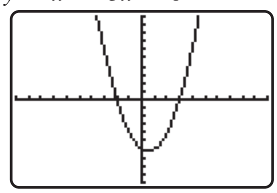
88. $y = x^2 - x - 6$

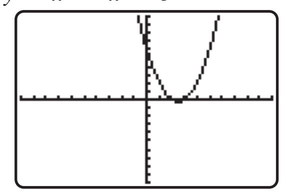
89. $y = x^2 + 5x + 6$

90. $y = x^2 + x - 6$

a)


b)


c)


d)


Escriba una ecuación cuya gráfica tenga las intersecciones con el eje x en los valores dados.

91. 1 y 5.

92. 3 y -7.

93. 4 y -2.

94. $\frac{3}{2}$ y 6.

95. $-\frac{5}{6}$ y 2.

96. -0.4 y 2.6.

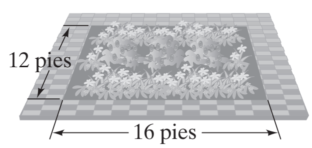
97. **Mesa rectangular para café** Una mesa para café es rectangular; si el largo mide 1 pie más que el doble de su ancho, y el área superficial de la tabla superior mide 10 pies cuadrados, determine su largo y ancho.

98. **Cobertizo rectangular** El piso de un cobertizo tiene un área de 60 pies cuadrados. Determine el largo y ancho, si el largo mide dos pies menos que el doble de su ancho.

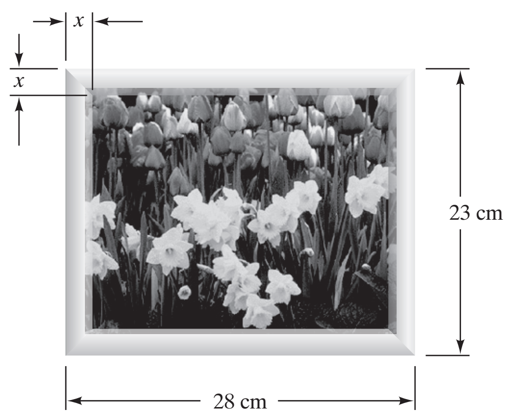
99. **Vela triangular** La vela de un bote es triangular y su altura mide seis pies más que su base. Si el área de la vela es 80 pies cuadrados, determine su base y su altura.

100. **Tienda triangular** Una tienda de campaña triangular tiene una altura que mide 4 pies menos que su base. Si el área de un lado es 70 pies cuadrados, determine la base y la altura de la tienda.

101. **Rectángulo** El jardín de Frank Bullock está rodeado por un pasillo de ancho uniforme. El jardín y el pasillo juntos cubren un área de 320 pies cuadrados. Si el jardín mide 12 pies por 16 pies, determine el ancho del pasillo.



102. **Marco de una pintura** El marco de una pintura mide 28 cm por 23 cm. El área de la pintura es de 414 centímetros cuadrados. Determine el ancho del marco.



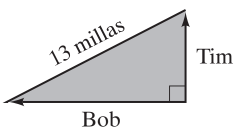
103. **Hortaliza** La hortaliza de Sally Yang es rectangular y mide 20 pies por 30 pies. Además para cubrir el terreno con mantillo, ella quiere hacer un pasillo de ancho uniforme alrededor de la hortaliza. Si ella tiene suficiente mantillo para cubrir un área de 936 pies cuadrados, ¿cuál debe ser el ancho del pasillo?

104. **Jardín cuadrado** Ronnie Tucker tiene un jardín cuadrado, a cuyo alrededor agrega un pasillo de 2 pies de ancho. Si el área total del pasillo y el jardín es de 196 pies cuadrados, determine las dimensiones del jardín.

105. **Esculturas de agua** En un edificio en Navy Pier en Chicago, una fuente de agua, dispara pequeños chorros sobre un pasillo. Los chorros de agua alcanzan una altura máxima, y luego caen en un estanque al otro lado del pasillo. La altura respecto del disparador, h, de un chorro de agua t segundos después de que sale puede determinarse mediante la función $h(t) = -16t^2 + 32t$. Determine el tiempo que le toma al chorro de agua regresar a la altura del disparador; esto es, cuando $h(t) = 0$.

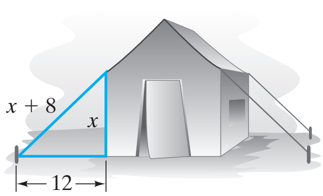
106. Proyectil Un modelo de cohete será lanzado desde una colina que se encuentra a 80 pies sobre el nivel del mar. El lugar del lanzamiento está cercano al océano (nivel del mar) y el cohete caerá en él. La distancia del cohete, s, por encima del nivel del mar en cualquier instante, t, se determina mediante la ecuación $s(t) = -16t^2 + 64t + 80$. Determine el tiempo que le toma al cohete para caer en el océano.

107. Paseo en bicicleta Dos ciclistas, Bob y Tim, inician su paseo en el mismo punto. Bob conduce hacia el oeste y Tim hacia el norte. En algún momento, se encuentran separados entre sí por una distancia de 13 millas. Si Bob recorrió 7 millas más que Antonio, determine la distancia que recorrió cada uno de ellos.

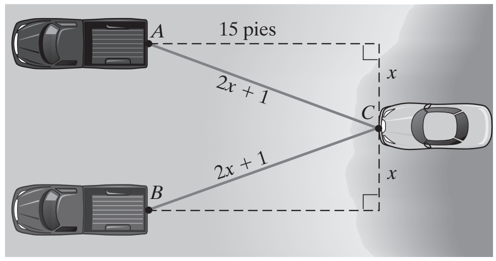


108. Marco para pintura Abril está haciendo un marco para una pintura rectangular que le regalará a su mamá. La diagonal del marco es de 20 pulgadas. Determine las dimensiones del marco, si su longitud mide 4 pulgadas más que su ancho.

109. Cables de una tienda de campaña Una tienda de campaña se estabiliza mediante cables. Un cable se sujeta al suelo a 12 pies de distancia de la tienda. La longitud del cable utilizado mide 8 pies más que la altura a donde se sujeta el otro extremo del cable. ¿Cuál es la longitud del cable?



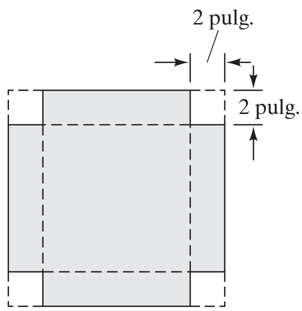
110. Automóvil atascado en el barro Suponga que dos automóviles, indicados mediante los puntos A y B en la figura, jalan a un tercer automóvil, C, fuera del barro. Determine la distancia del automóvil A al B.



111. Tienda de bicicletas Una tienda de bicicletas utiliza una ecuación para calcular sus ingresos mensuales, $R(x) = 70x - x^2$, y otra para determinar sus costos mensuales, $C(x) = 17x + 150$, en donde x es el número de bicicletas vendidas y $x \geq 10$. Determine el número de bicicletas que debe vender la tienda para alcanzar el punto de equilibrio (no ganar ni perder); esto es, el punto en donde los ingresos son iguales a los costos.

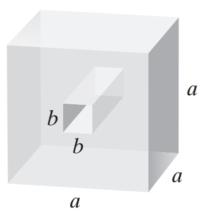
112. Flores de seda Edith Hall fabrica flores de seda y las vende a diferentes tiendas. Su compañía tiene una ecuación para calcular sus ingresos, $R(x) = 40x - x^2$, y otra para determinar sus costos, $C(x) = 14x + 25$, en donde x es el número de flores vendidas y $x \geq 5$. Determine el número de flores que debe venderse para alcanzar el punto de equilibrio.

113. Fabricación de una caja Monique Sidding fabrica una caja cortando piezas de 2 por 2 pulgadas de un cartón cuadrado, doblando hacia arriba los lados, para crear una caja de 2 pulgadas de altura. ¿Cuál es el tamaño del cartón necesario para fabricar una caja de 2 pulgadas de altura con un volumen de 162 pulgadas cúbicas?



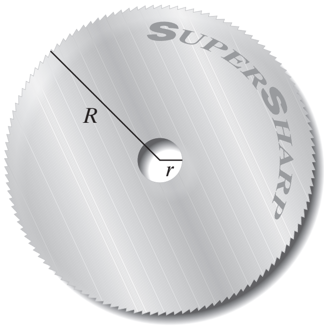
114. Fabricación de una caja Una caja rectangular se formará cortando cuadrados de cada esquina de una pieza rectangular de hojalata y doblando hacia arriba los lados. La caja tendrá 3 pulgadas de altura, el largo será el doble del ancho, y el volumen será de 96 pulgadas cúbicas. Determine el largo y el ancho de la caja.

115. Cubo A un cubo sólido con dimensiones a^3, se le quita un sólido rectangular con dimensiones ab^2.



a) Escriba una fórmula para determinar el volumen que queda, V.
b) Factorice el lado derecho de la fórmula de la parte **a)**.
c) Si el volumen es de 1620 pulgadas cúbicas y a es igual a 12 pulgadas, determine b.

116. Hoja de una sierra circular Una sierra circular de acero tiene un agujero en su centro, como se muestra en la figura.

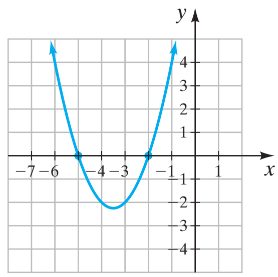


a) Escriba una fórmula para calcular el área de la hoja.

b) Factorice el lado derecho de la fórmula de la parte **a)**.

c) Determine A, si $R = 10$ cm y $r = 3$ cm.

117. Considere la gráfica siguiente de una función cuadrática.



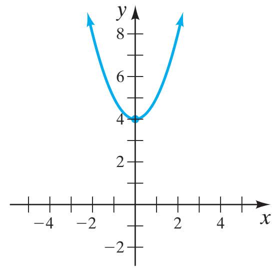
a) Escriba una función cuadrática que tenga las intersecciones con el eje x indicadas.

b) Escriba una ecuación cuadrática con una variable cuya solución sea -2 y -5.

c) ¿Cuántas funciones cuadráticas diferentes pueden tener intersecciones con el eje x de -2 y -5? Explique.

d) ¿Cuántas ecuaciones cuadráticas diferentes con una variable pueden tener soluciones de -2 y -5? Explique.

118. La gráfica de la ecuación $y = x^2 + 4$ se ilustra a continuación.



a) ¿Cuántas intersecciones con el eje x tiene la gráfica?

b) ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $x^2 + 4 = 0$? Explique su respuesta.

119. Considere la función cuadrática

$$P(x) = ax^2 + bx + c, a > 0.$$

a) La gráfica de este tipo de función puede no tener intersecciones con el eje x, una intersección con el eje x o dos intersecciones con el eje x. Bosqueje cada una de estas posibilidades.

b) ¿Cuántas posibles soluciones reales puede tener la ecuación $ax^2 + bx + c = 0, a > 0$? Explique su respuesta a la parte **b)** utilizando los bosquejos de la parte **a)**.

120. Distancia para detenerse La distancia, d en pies, para detener un automóvil común que viaja sobre pavimento seco puede calcularse mediante la función $d(s) = 0.034s^2 + 0.56s - 17.11$, en donde s es la velocidad del automóvil antes de frenar y $60 \le s \le 80$ millas por hora. Si un automóvil requiere de 190 pies para detenerse después de aplicar los frenos, ¿qué tan rápido va el automóvil?

121. Distancia para detenerse La distancia, d en pies, para detener un automóvil común que viaja sobre pavimento mojado puede calcularse mediante la función $d(s) = -0.31s^2 + 59.82s - 2180.22$, en donde s es la velocidad del automóvil antes de frenar y $60 \le s \le 80$ millas por hora. Si un automóvil requiere de 545 pies para detenerse después de aplicar los frenos, ¿qué tan rápido va el automóvil?

Retos

Resuelva.

122. $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ **123.** $x^4 - 13x^2 = -36$ **124.** $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

Actividad en grupo

En cursos más avanzados de matemáticas podría necesitar despejar y' (se lee "y prima") en una ecuación. *Cuando esto ocurra, trate a y' como una variable diferente de y. De forma individual despeje a y' de cada ecuación. En equipo, compare sus respuestas y obtenga las respuestas correctas en equipo.*

125. $xy' + yy' = 1$ **126.** $xy - xy' = 3y' + 2$ **127.** $2xyy' - xy = x - 3y'$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.5] **128.** Simplifique $(4x^{-2}y^3)^{-2}$.

[2.5] **129.** Resuelva la desigualdad y grafique la solución en la recta numérica.

$$-1 < \frac{4(3x - 2)}{3} \le 5$$

[4.1] **130.** Resuelva el sistema de ecuaciones

$$3x + 4y = 2$$
$$2x = -5y - 1$$

[5.2] **131.** Si $f(x) = -x^2 + 3x$ y $g(x) = x^2 + 5$, determine $(f \cdot g)(4)$.

[5.7] **132.** Factorice $(x + 1)^2 - (x + 1) - 6$.

Resumen del capítulo 5

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.1	
Términos son las partes que se suman o restan en una expresión matemática.	Los términos de $-3x^2 + 1.6x + 15$ son $-3x^2, 1.6x$ y 15
Un **polinomio** es una suma finita de términos en la que todas las variables tienen exponentes enteros no negativos y ninguna variable aparece en el denominador.	$9x^7 - 3x^5 + 4x - \frac{1}{2}$ es un polinomio.
El **grado de un término** es la suma de los exponentes en las variables	El término $3x^2y^9$ es de grado 11.
El **término principal** de un polinomio es el término del grado mayor. El **coeficiente principal** es el coeficiente del término principal.	En el polinomio $9x^7 - 3x^5 + 4x - \frac{1}{2}$, el término principal es $9x^7$ y el coeficiente principal es 9.
Un **monomio** es un polinomio con un término. Un **binomio** es un polinomio con dos términos. Un **trinomio** es un polinomio con tres términos.	$-13mn^2p^3$ $x^4 - 1$ $1.9x^3 - 28.3x^2 - 101.5x$
Un polinomio es **lineal** si es de grado 0 o 1. Un polinomio con una variable es **cuadrático** si es de grado 2. Un polinomio con una variable es **cúbico** si es de grado 3.	$19, 8y + 17$ $x^2 - 5x + 16$ $-4x^3 + 11x^2 - 9x + 6$
Una **función polinomial** tiene la forma $y = P(x)$. Para evaluar $P(a)$, reemplace x por a.	$P(x) = 2x^2 - x + 3$ es una función polinomial. Para evaluar $P(x)$ en $x = 10$, $P(10) = 2(10)^2 - 10 + 3$ $= 200 - 10 + 3 = 193$
Para **sumar o restar polinomios** reduzca los términos semejantes.	$(5x^2 - 9x + 10) + (2x^2 + 17x - 8)$ $= 5x^2 - 9x + 10 + 2x^2 + 17x - 8 = 7x^2 + 8x + 2$
Sección 5.2	
Para **multiplicar polinomios**, multiplique cada término de un polinomio por cada término del otro polinomio.	$3a(a - 2) = 3a \cdot a - 3a \cdot 2$ $= 3a^2 - 6a$
Propiedad distributiva, forma desarrollada $a(b + c + d + \cdots + n) = ab + ac + ad + \cdots + an$	$x(2x^2 + 8x - 5) = 2x^3 + 8x^2 - 5x$
Para **multiplicar dos binomios**, utilice el **método PIES**; multiplique los términos **P**rimeros, **I**nternos, **E**xternos, **S**egundos.	$(3x - 1)(4x + 9) = 12x^2 - 4x + 27x - 9$ $= 12x^2 + 23x - 9$
Para multiplicar un polinomio por un polinomio, puede utilizar el formato vertical.	Multiplique $(2x^2 - x + 8)(5x + 1)$ $\begin{array}{r} 2x^2 - x + 8 \\ 5x + 1 \\ \hline 2x^2 - x + 8 \\ 10x^3 - 5x^2 + 40x \\ \hline 10x^3 - 3x^2 + 39x + 8 \end{array}$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 5.2 (continuación)

Cuadrado de un binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(7x + 4)^2 &= (7x)^2 + 2(7x)(4) + 4^2\\ &= 49x^2 + 56x + 16\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{2}m - 3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}m\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}m\right)(3) + 3^2 = \frac{1}{4}m^2 - 3m + 9$$

Producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos (binomios conjugados)

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(5c + 6)(5c - 6) = (5c)^2 - 6^2 = 25c^2 - 36$$

Sección 5.3

Para dividir un polinomio entre un monomio, divida cada término del polinomio entre el monomio.

$$\begin{aligned}\frac{6y + 10x^2y^5 - 17x^9y^8}{2xy^2} &= \frac{6y}{2xy^2} + \frac{10x^2y^5}{2xy^2} - \frac{17x^9y^8}{2xy^2}\\ &= \frac{3}{xy} + 5xy^3 - \frac{17x^8y^6}{2}\end{aligned}$$

Para dividir dos polinomios, utilice la división larga.

Divida $(8x^2 + 6x - 9) \div (2x + 1)$.

$$\begin{array}{r} 4x + 1 \\ 2x + 1\,\overline{)\,8x^2 + 6x - 9} \\ \underline{8x^2 + 4x} \\ 2x - 9 \\ \underline{2x + 1} \\ -10 \end{array}$$

Así que, $\dfrac{8x^2 + 6x - 9}{2x + 1} = 4x + 1 - \dfrac{10}{2x + 1}$

Para dividir un polinomio entre un binomio de la forma $x - a$, utilice la **división sintética**.

Utilice la división para dividir

$$(x^3 + 2x^2 - 11x + 5) \div (x + 4)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 2 & -11 & 5 \\ & & -4 & 8 & 12 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 17 \end{array}$$

Por tanto, $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 11x + 5}{x + 4} = x^2 - 2x - 3 + \dfrac{17}{x + 4}$

Teorema del residuo

Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x - a$, el residuo es $P(a)$.

Determine el residuo cuando

$2x^3 - 6x^2 - 11x + 29$ se divide entre $x + 2$.

Sea $P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 11x + 29$; entonces

$$\begin{aligned}P(-2) &= 2(-2)^3 - 6(-2)^2 - 11(-2) + 29\\ &= -16 - 24 + 22 + 29\\ &= 11.\end{aligned}$$

El residuo es 11.

Sección 5.4

El **máximo factor común** (MFC) es el producto de los factores comunes de todos los términos en el polinomio.

El MFC de z^5, z^4, z^9, z^2 es z^2.

El MFC de $9(x - 4)^3, 6(x - 4)^{10}$ es $3(x - 4)^3$.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.4 (continuación)	
Para factorizar un monomio de un polinomio **1.** Determine el máximo factor común de todos los términos en el polinomio. **2.** Escriba cada término como el producto del MFC y otro factor. **3.** Utilice la propiedad distributiva para *factorizar* el MFC.	$35x^6 + 15x^4 + 5x^3 = 5x^3(7x^3) + 5x^3(3x) + 5x^3(1)$ $= 5x^3(7x^3 + 3x + 1)$ $4n(7n + 10) - 13(7n + 10) = (7n + 10)(4n - 13)$
Para factorizar por agrupación cuatro términos. **1.** Determine si los cuatro términos tienen un factor común. Si es así, factorice el MFC de cada término. **2.** Acomode los cuatro términos en dos grupos de dos términos cada uno. Cada grupo de dos términos debe tener un MFC. **3.** Factorice el MFC de cada grupo de dos términos. **4.** Si los dos términos formados en el paso 3 tienen MFC, factorícelo.	$cx + cy + dx + dy = c(x + y) + d(x + y)$ $= (x + y)(c + d)$ $x^3 + 6x^2 - 5x - 30 = x^2(x + 6) - 5(x + 6)$ $= (x + 6)(x^2 - 5)$
Sección 5.5	
Para factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ **1.** Determine dos números (o factores) cuyo producto sea c y cuya suma sea b. **2.** Los factores del trinomio serán de la forma $(x + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Un factor determinado en el paso 1}}}{\boxed{}})(x + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Otro factor determinado en el paso 1}}}{\boxed{}})$	Factorice $m^2 - m - 42$. Los factores de -42 cuya suma es -1 son -7 y 6. Observe que $(-7)(6) = -42$ y $-7 + 6 = -1$. Por lo tanto, $m^2 - m - 42 = (m - 7)(m + 6)$
Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, mediante prueba y error **1.** Escriba todas las parejas de factores del coeficiente del término cuadrado, a. **2.** Escriba todas las parejas de factores de la constante, c. **3.** Pruebe diferentes combinaciones de estos factores hasta que se determine el término central correcto, bx.	$4t^2 + 9t + 5 = (4t + 5)(t + 1)$ Observe que $4t + 5t = 9t$. $2a^2 - 15ab + 28b^2 = (2a - 7b)(a - 4b)$ Observe que $-8ab - 7ab = -15ab$.
Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, mediante agrupación **1.** Determine dos números cuyo producto sea $a \cdot c$ y cuya suma sea b. **2.** Reescriba el término de en medio, bx, mediante los números que encontró en el paso 1. **3.** Factorice por agrupación.	Factorice mediante agrupación $2y^2 + 9y - 18$. Dos números cuyo producto es -36 y cuya suma es 9 son 12 y -3. Por lo tanto, $2y^2 + 9y - 18 = 2y^2 + 12y - 3y - 18$ $= 2y(y + 6) - 3(y + 6)$ $= (y + 6)(2y - 3)$
Un **polinomio primo** es un polinomio que no puede factorizarse.	$x^2 + 5x + 9$ es un polinomio primo.
La **factorización por sustitución** ocurre cuando se sustituye una variable por otra variable o expresión.	Factorice $a^6 - 2a^3 - 3$. $a^6 - 2a^3 - 3 = (a^3)^2 - 2a^3 - 3$ $= x^2 - 2x - 3$ *Sustituya x por a^3.* $= (x - 3)(x + 1)$ $= (a^3 - 3)(a^3 + 1)$ *Sustituya a^3 por x.*

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.5 (continuación)	
Diferencia de dos cuadrados $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	$x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x + 7)(x - 7)$
Trinomios cuadrados perfectos $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	$d^2 + 8d + 16 = d^2 + 2(d)(4) + 4^2 = (d + 4)^2$ $4m^2 - 12m + 9 = (2m)^2 - 2(2m)(3) + 3^2 = (2m - 3)^2$
Suma de dos cubos $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$y^3 + 8 = y^3 + 2^3 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$
Diferencia de dos cubos $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$27z^3 - 64x^3 = (3z)^3 - (4x)^3 = (3z - 4x)(9z^2 + 12xz + 16x^2)$
Sección 5.7	
Para factorizar un polinomio **1.** Determine si todos los términos en el polinomio tienen un máximo factor común distinto de 1. Si es así, factorice el MFC. **2.** Si el polinomio tiene dos términos, determine si es una diferencia de dos cuadrados o una suma o diferencia de dos cubos. Si es así, factorice mediante la fórmula apropiada. **3.** Si el polinomio tiene tres términos, determine si es un trinomio cuadrado perfecto. De serlo, factorice de acuerdo con esto. Si no es así, factorice el trinomio mediante prueba y error, agrupación, o sustitución como se explicó en la sección 5.5. **4.** Si el polinomio tiene más de tres términos, intente factorizar mediante agrupación. Si no funciona, vea si tres de los términos son el cuadrado de un binomio. **5.** Como paso final, examine su polinomio factorizado para ver si algún factor listado tiene un factor común que pueda factorizarse más. Si determina un factor común, factorícelo en este momento.	$2x^7 + 16x^6 + 24x^5 = 2x^5(x^2 + 8x + 12)$ $= 2x^5(x + 6)(x + 2)$ $36a^6 - 100a^4b^2 = 4a^4(9a^2 - 25b^2)$ $= 4a^4[(3a)^2 - (5b)^2]$ $= 4a^4(3a + 5b)(3a - 5b)$ $125m^3 - 64 = (5m)^3 - 4^3$ $= (5m - 4)(25m^2 + 20m + 16)$
Sección 5.8	
Una **ecuación polinomial** se forma cuando dos polinomios se igualan entre sí.	$x^2 - 5x = 2x + 7$
Una **ecuación cuadrática** es una ecuación polinomial de segundo grado (con una variable). **Forma general de una ecuación cuadrática** $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$ donde a, b y c son números reales.	$2x^2 - 6x + 11 = 0$ $x^2 - 4 = x + 2$ $x^2 - 3x + 5 = 0$ es una ecuación cuadrática en la forma general.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 5.8 (continuación)

Propiedad del factor nulo

Para todos los números reales a y b, si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$, o bien los dos a y b son iguales a 0.

Resuelva $(x + 6)(x - 1) = 0$.

$$x + 6 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$$
$$x = -6 \qquad\qquad x = 1$$

Las soluciones son -6 y 1.

Para resolver una ecuación mediante factorización

1. Utilice la propiedad de la suma para quitar todos los términos de un lado de la ecuación. Esto resultará en un lado de la ecuación igual a cero.
2. Reduzca los términos semejantes de la ecuación y luego factorice.
3. Haga cada factor, *que tenga una variable*, igual a 0, resuelva las ecuaciones y determine las soluciones.
4. Compruebe las soluciones en la ecuación *original*.

Resuelva $3x^2 + 13x - 4 = 2x$.

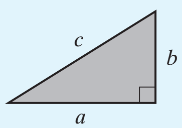
$$3x^2 + 11x - 4 = 0$$
$$(3x - 1)(x + 4) = 0$$
$$3x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 4 = 0$$
$$x = \frac{1}{3} \quad \text{o} \quad x = -4$$

Una comprobación muestra que $\frac{1}{3}$ y -4 son soluciones.

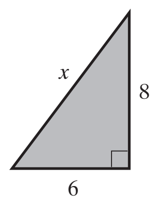
Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, si a y b representan las longitudes de los catetos y c representa la longitud de la hipotenusa, entonces

$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Determine la longitud de la hipotenusa en el triángulo rectángulo siguiente.



$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$$
$$6^2 + 8^2 = x^2$$
$$36 + 64 = x^2$$
$$100 = x^2$$
$$10 = x$$

Observación: -10 no es una respuesta posible.

Ejercicios de repaso del capítulo 5

[5.1] *Determine si cada expresión es un polinomio. Si la expresión es un polinomio,* **a)** *proporcione el nombre especial del polinomio, si lo tiene,* **b)** *escriba el polinomio en orden descendente de la variable x, y* **c)** *indique el grado del polinomio.*

1. $3x^2 + 9$

2. $5x + 4x^3 - 7$

3. $8x - x^{-1} + 6$

4. $-3 - 10x^2y + 6xy^3 + 2x^4$

Realice cada operación indicada.

5. $(x^2 - 5x + 8) + (2x + 6)$

6. $(7x^2 + 2x - 5) - (2x^2 - 9x - 1)$

7. $(2a - 3b - 2) - (-a + 5b - 9)$

8. $(4x^3 - 4x^2 - 2x) + (2x^3 + 4x^2 - 7x + 13)$

9. $(3x^2y + 6xy - 5y^2) - (4y^2 + 3xy)$

10. $(-8ab + 2b^2 - 3a) + (-b^2 + 5ab + a)$

11. Sume $x^2 - 3x + 12$ con $4x^2 + 10x - 9$.

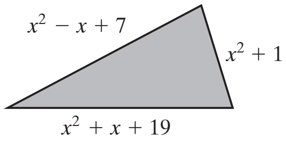
12. Reste $3a^2b - 2ab$ de $-7a^2b - ab$.

13. Determine $P(2)$, si $P(x) = 2x^2 - 3x + 19$.

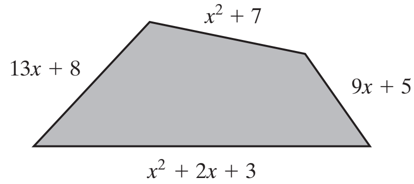
14. Determine $P(-3)$, si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 10$.

Perímetro *En los ejercicios 15 y 16, determine una expresión polinomial para calcular el perímetro de cada figura.*

15.

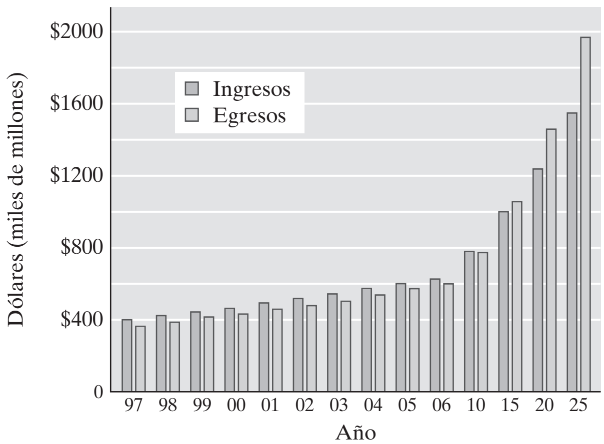


16.



En los ejercicios 17 y 18 de la página 379, utilizamos la siguiente gráfica, donde se muestran los ingresos y egresos de la Administración de Seguridad Social de Estados Unidos entre 1997 y 2025.

Ingresos y egresos de seguridad social



Fuente: Administración de seguridad social de Estados Unidos.

17. Ingresos en seguridad social
La función $R(t) = 0.78t^2 + 20.28t + 385.0$, en donde t representa los años desde 1997 y $0 \leq t \leq 28$, sirve para aproximar los ingresos la seguridad social en Estados Unidos, $R(t)$, en miles de millones de dólares.
a) Mediante la función proporcionada, estime los ingresos en 2010.
b) Compare su respuesta en la parte **a)** con la gráfica. ¿La gráfica apoya su respuesta?

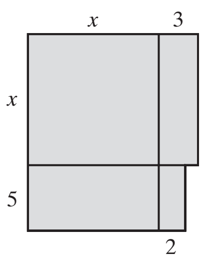
18. Egresos en seguridad social
La función $G(t) = 1.74t^2 + 7.32t + 383.91$, en donde t representa años desde 1997 y $0 \leq t \leq 28$, sirve para aproximar los egresos de la industria de seguridad social, $G(t)$, en miles de millones de dólares.
a) Mediante la función proporcionada, estime los egresos en 2010.
b) Compare su respuesta de la parte **a)** con la gráfica. ¿La gráfica apoya su respuesta?

[5.2] *Multiplique.*

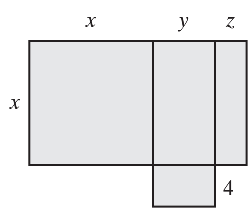
19. $2x(3x^2 - 7x + 5)$
20. $-3xy^2(x^3 + xy^4 - 4y^5)$
21. $(3x - 5)(2x + 9)$
22. $(5a + 1)(10a - 3)$
23. $(x + 8y)^2$
24. $(a - 11b)^2$
25. $(2xy - 1)(5x + 4y)$
26. $(2pq - r)(3pq + 7r)$
27. $(2a + 9b)^2$
28. $(4x - 3y)^2$
29. $(7x + 5y)(7x - 5y)$
30. $(2a - 5b^2)(2a + 5b^2)$
31. $(4xy + 6)(4xy - 6)$
32. $(9a^2 - 2b^2)(9a^2 + 2b^2)$
33. $[(x + 3y) + 2]^2$
34. $[(2p - q) - 5]^2$
35. $(3x^2 + 4x - 6)(2x - 3)$
36. $(4x^3 + 6x - 2)(x + 3)$

Área *En los ejercicios 37 y 38, determine una expresión para calcular el área total de cada figura.*

37.



38.



Para cada par de funciones, determine **a)** $(f \cdot g)(x)$ y **b)** $(f \cdot g)(3)$.

39. $f(x) = x + 1, g(x) = x - 3$

40. $f(x) = 2x - 4, g(x) = x^2 - 3$

41. $f(x) = x^2 + x - 3, g(x) = x - 2$

42. $f(x) = x^2 - 2, g(x) = x^2 + 2$

[5.3] *Divida.*

43. $\dfrac{4x^7y^5}{20xy^3}$

44. $\dfrac{3s^5t^8}{12s^5t^3}$

45. $\dfrac{45pq - 25q^2 - 15q}{5q}$

46. $\dfrac{7a^2 - 16a + 32}{4}$

47. $\dfrac{2x^3y^2 + 8x^2y^3 + 12xy^4}{8xy^3}$

48. $(8x^2 + 14x - 15) \div (2x + 5)$

49. $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 17x + 7) \div (2x + 1)$

50. $(4a^4 - 7a^2 - 5a + 4) \div (2a - 1)$

51. $(x^2 + x - 22) \div (x - 3)$

52. $(4x^3 + 12x^2 + x - 9) \div (2x + 3)$

Utilice la división sintética para obtener el cociente de cada expresión.

53. $(3x^3 - 2x^2 + 10) \div (x - 3)$

54. $(2y^5 - 10y^3 + y - 2) \div (y + 1)$

55. $(x^5 - 18) \div (x - 2)$

56. $(2x^3 + x^2 + 5x - 3) \div \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

Determine el residuo de cada división mediante el teorema del residuo. Si el divisor es un factor del dividendo, indíquelo.

57. $(x^2 - 4x + 13) \div (x - 3)$

58. $(2x^3 - 6x^2 + 3x) \div (x + 4)$

59. $(3x^3 - 6) \div \left(x - \dfrac{1}{3}\right)$

60. $(2x^4 - 6x^2 - 8) \div (x + 2)$

[5.4] *En cada expresión, factorice el máximo factor común.*

61. $4x^2 + 8x + 32$

62. $15x^5 + 6x^4 - 12x^5y^3$

63. $10a^3b^3 - 14a^2b^6$

64. $24xy^4z^3 + 12x^2y^3z^2 - 30x^3y^2z^3$

Factorice por agrupación.

65. $5x^2 - xy + 30xy - 6y^2$

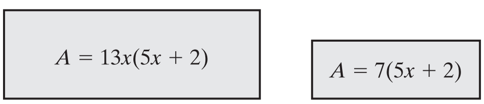
66. $12a^2 + 8ab + 15ab + 10b^2$

67. $(2x - 5)(2x + 1) - (2x - 5)(x - 8)$

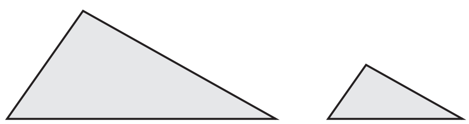
68. $7x(3x - 7) + 3(3x - 7)^2$

Área *En los ejercicios 69 y 70, A representa el área de la figura. Determine una expresión en forma factorizada, para calcular la diferencia entre las áreas de las figuras geométricas.*

69.



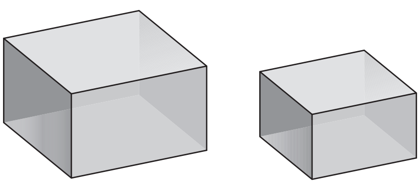
70.



$A = 14x^2 + 18x$ $\quad A = 7x + 9$

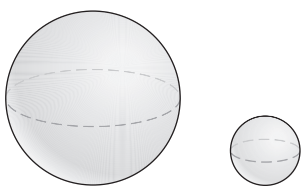
Volumen *En los ejercicios 71 y 72, V representa el volumen de la figura. Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre los volúmenes de las figuras geométricas.*

71.



$V = 9x(17x + 3)$ $\quad V = 7(17x + 3)$

72.



$V = 20x^2 + 25x$ $\quad V = 8x + 10$

[5.5] *Factorice cada trinomio.*

73. $x^2 + 9x + 18$

74. $x^2 + 3x - 10$

75. $x^2 - 3x - 28$

76. $x^2 - 10x + 16$

77. $-x^2 + 12x + 45$

78. $-x^2 + 13x - 12$

79. $2x^3 + 13x^2 + 6x$

80. $8x^4 + 10x^3 - 25x^2$

81. $4a^5 - 9a^4 + 5a^3$

82. $12y^5 + 61y^4 + 5y^3$

83. $x^2 - 15xy - 54y^2$

84. $6p^2 - 19pq + 10q^2$

85. $x^4 + 10x^2 + 21$

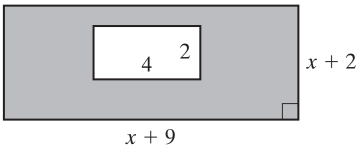
86. $x^4 + 2x^2 - 63$

87. $(x + 3)^2 + 10(x + 3) + 24$

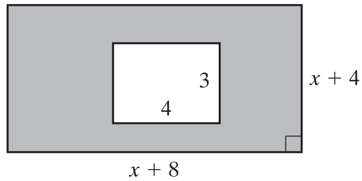
88. $(x - 4)^2 - (x - 4) - 20$

Área *En los ejercicios 89 y 90, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el área de la región sombreada en cada figura.*

89.



90.



[5.6] *Utilice una fórmula especial de factorización para factorizar las siguientes expresiones.*

91. $x^2 - 36$

92. $x^2 - 121$

93. $x^4 - 81$

94. $x^4 - 16$

95. $4a^2 + 4a + 1$

96. $16y^2 - 24y + 9$

97. $(x + 2)^2 - 16$

98. $(3y - 1)^2 - 36$

99. $p^4 + 18p^2 + 81$

100. $m^4 - 20m^2 + 100$

101. $x^2 + 8x + 16 - y^2$

102. $a^2 + 6ab + 9b^2 - 36c^2$

103. $16x^2 + 8xy + y^2$

104. $36b^2 - 60bc + 25c^2$

105. $x^3 - 27$

106. $y^3 + 64z^3$

107. $125x^3 - 1$

108. $8a^3 + 27b^3$

109. $y^3 - 64z^3$

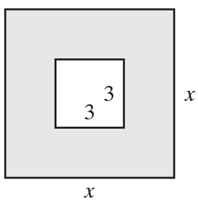
110. $(x - 2)^3 - 27$

111. $(x + 1)^3 - 8$

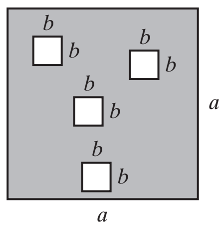
112. $(a + 4)^3 + 1$

Área *En los ejercicios 113 y 114, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el área de la región sombreada en cada figura.*

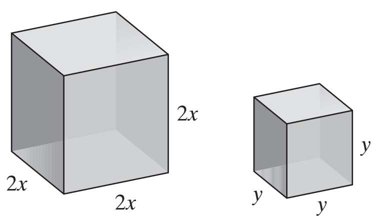
113.



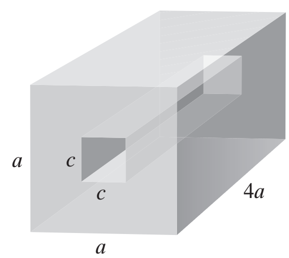
114.



115. Volumen Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre los volúmenes de estos dos cubos.



116. Volumen Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el volumen de la región sombreada de esta figura.



[5.4–5.7] *Factorice completamente.*

117. $x^2y^4 - 2xy^4 - 15y^4$

118. $5x^3 - 30x^2 + 40x$

119. $3x^3y^4 + 18x^2y^4 - 6x^2y^4 - 36xy^4$

120. $3y^5 - 75y$

121. $4x^3y + 32y$

122. $5x^4y + 20x^3y + 20x^2y$

123. $6x^3 - 21x^2 - 12x$

124. $x^2 + 10x + 25 - z^2$

125. $5x^3 + 40y^3$

126. $x^2(x + 6) + 3x(x + 6) - 4(x + 6)$

127. $4(2x + 3)^2 - 12(2x + 3) + 5$

128. $4x^4 + 4x^2 - 3$

129. $(x + 1)x^2 - (x + 1)x - 2(x + 1)$

130. $9ax - 3bx + 21ay - 7by$

131. $6p^2q^2 - 5pq - 6$

132. $9x^4 - 12x^2 + 4$

133. $16y^2 - (x^2 + 4x + 4)$

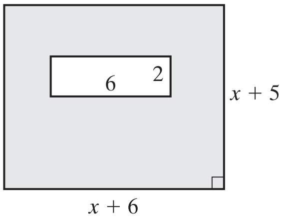
134. $6(2a + 3)^2 - 7(2a + 3) - 3$

135. $6x^4y^5 + 9x^3y^5 - 27x^2y^5$

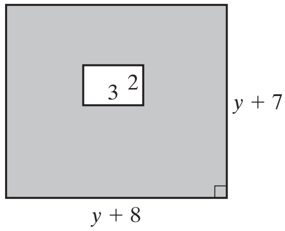
136. $x^3 - \frac{8}{27}y^6$

Área *En los ejercicios 137 a 142, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el área de la región sombreada de cada figura.*

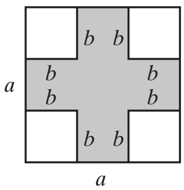
137.



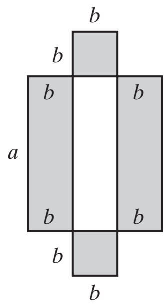
138.



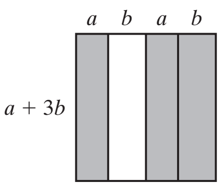
139.



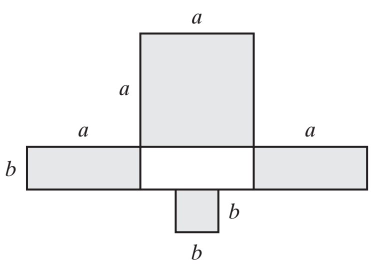
140.



141.



142.



[5.8] *Resuelva.*

143. $(x - 2)(4x + 1) = 0$

144. $(2x + 5)(3x + 10) = 0$

145. $4x^2 = 8x$

146. $12x^2 + 16x = 0$

147. $x^2 + 7x + 12 = 0$

148. $a^2 + a - 30 = 0$

149. $x^2 = 8x - 7$

150. $c^3 - 6c^2 + 8c = 0$

151. $5x^2 = 80$

152. $x(x + 3) = 2(x + 4) - 2$

153. $12d^2 = 13d + 4$

154. $20p^2 - 6 = 7p$

Utilice factorización para determinar las intersecciones con el eje x de la gráfica de cada ecuación.

155. $y = 2x^2 - 6x - 36$

156. $y = 20x^2 - 49x + 30$

Escriba una ecuación cuya gráfica tenga las intersecciones con el eje x en los valores dados.

157. -4 y 6

158. $-\frac{5}{2}$ y $-\frac{1}{6}$

En los ejercicios 159 a 163, responda la pregunta.

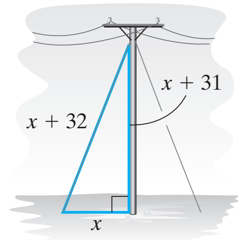
159. **Alfombra** El área de una alfombra rectangular de Fred Bank, es de 108 pies cuadrados. Determine el largo y ancho de la alfombra, si el largo es 3 pies mayor que el ancho.

160. **Anuncio triangular** La base de un anuncio triangular mide 5 pies más que el doble de la altura. Determine la base y la altura, si el área del triángulo es 26 pies cuadrados.

161. Cuadrado Un cuadrado tiene un lado de 4 pulgadas mayor que el lado de un segundo cuadrado. Si el área del cuadrado más grande es de 49 pulgadas cuadradas, determine la longitud de cada lado de ambos cuadrados.

162. Velocidad Un proyectil es lanzado hacia arriba, desde la parte más alta de un edificio de 144 pies de altura, con una velocidad de 128 pies por segundo. La distancia del proyectil respecto del suelo, s, en cualquier instante, t, en segundos, está dada mediante la fórmula $s(t) = -16t^2 + 128t + 144$. Determine el tiempo que tarda el proyectil en estrellarse contra el suelo.

163. Poste telefónico Se sujetan dos cables tensados a un poste telefónico para ayudar a estabilizarlo. Un cable se sujeta del piso a x pies de la base del poste. La altura del poste es $x + 31$ y el largo del cable es $x + 32$. Determine x.



Examen de práctica del capítulo 5

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección en donde se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en el **Chapter Test Prep Video CD.** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. a) Proporcione el nombre específico del siguiente polinomio.

$$-4x^2 + 3x - 6x^4$$

b) Escriba el polinomio en potencias descendentes de la variable x.

c) Indique el grado del polinomio.

d) ¿Cuál es el coeficiente principal del polinomio?

Realice cada operación.

2. $(7x^2y - 5y^2 + 4x) - (3x^2y + 9y^2 - 6y)$

3. $2x^3y^2(-4x^5y + 12x^3y^2 - 6x)$

4. $(2a - 3b)(5a + b)$

5. $(2x^2 + 3xy - 6y^2)(2x + y)$

6. $(12x^6 - 15x^2y + 21) \div 3x^2$

7. $(2x^2 - 7x + 9) \div (2x + 3)$

8. Utilice la división sintética para obtener el cociente. $(3x^4 - 12x^3 - 60x + 1) \div (x - 5)$

9. Utilice el teorema del residuo para determinar el residuo cuando $2x^3 - 6x^2 - 5x + 8$ se divide entre $x + 3$.

Factorice completamente.

10. $12x^3y + 10x^2y^4 - 14xy^3$

11. $x^3 - 2x^2 - 3x$

12. $2a^2 + 4ab + 3ab + 6b^2$

13. $2b^4 + 5b^2 - 18$

14. $4(x - 5)^2 + 20(x - 5)$

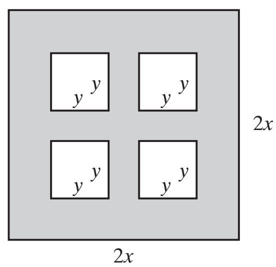
15. $(x + 4)^2 + 2(x + 4) - 3$

16. $27p^3q^6 - 8q^6$

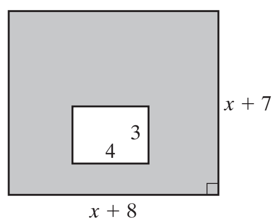
17. Si $f(x) = 3x - 4$ y $g(x) = x - 5$, determine **a)** $(f \cdot g)(x)$ y **b)** $(f \cdot g)(2)$

Área *En los ejercicios 18 y 19, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el área de la región sombreada.*

18.



19.



Resuelva.

20. $7x^2 + 25x - 12 = 0$

21. $x^3 + 3x^2 - 10x = 0$

22. Utilice factorización para determinar las intersecciones con el eje x de la gráfica de la ecuación $y = 8x^2 + 10x - 3$.

23. Determine una ecuación cuya gráfica tenga intersecciones con el eje x en 2 y 7.

24. Área El área de un triángulo es de 22 metros cuadrados. Si la base del triángulo es 3 metros mayor que 2 veces la altura, determine la base y la altura del triángulo.

25. Béisbol Una pelota de béisbol es lanzada hacia arriba, desde la parte más alta de un edificio de 448 pies de altura, con una velocidad inicial de 48 pies por segundo. La distancia, s, de la pelota de béisbol respecto del suelo en cualquier instante, t, en segundos, está dada por la ecuación $s(t) = -16t^2 + 48t + 448$. Determine el tiempo que tarda la pelota de béisbol en golpear el suelo.

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revise las preguntas que haya respondido incorrectamente. Los números de la sección y el objetivo en donde se analiza el material correspondiente se indican después de cada respuesta.

1. Determine $A \cup B$ para $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{3, 5, 6, 8\}$.

2. Ilustre $\{x | x \leq -5\}$ en la recta de los números reales.

3. Divida $\left|\frac{3}{8}\right| \div (-4)$.

4. Evalúe $(-3)^3 - 2^2 - (-2)^2 + (9 - 8)^2$.

5. Simplifique $\left(\frac{2r^4s^5}{r^2}\right)^3$.

6. Resuelva $4(2x - 2) - 3(x + 7) = -4$.

7. Resuelva $k = 2(d + e)$ por e.

8. **Terreno** Craig Camapanella, un arquitecto, desea cercar dos áreas iguales, como se ilustra en la figura. Si ambas áreas son cuadrados y el largo total de la cerca utilizada es de 91 metros, determine las dimensiones de cada cuadrado.

9. **Copias** Cecil Winthrop tiene un manuscrito y necesita obtener 6 copias del mismo antes de enviárselo a su editor en Boston. La primera copia cuesta 15 centavos por página y cada copia adicional cuesta 5 centavos por página. Si el pago total es de \$248, ¿cuántas páginas tiene el manuscrito?

10. **Promedio de calificaciones** Las primeras cuatro calificaciones que obtuvo Todd Garner en sus exámenes son 68, 72, 90 y 86. ¿Qué rango de calificaciones de su quinto examen producirá un promedio mayor o igual que 70 y menor que 80?

11. ¿$(4, 1)$ es una solución de la ecuación $3x + 2y = 13$?

12. Escriba la ecuación $2 = 6x - 3y$ en la forma general.

13. Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(8, -4)$ y $(-1, -2)$.

14. Si $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 16$, determine $f(-4)$.

15. Grafique la desigualdad $2x - y \leq 6$.

16. Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 4$$
$$\frac{2}{3}x - y = \frac{8}{3}$$

17. Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$x - 2y = 2$$
$$2x + 3y = 11$$
$$-y + 4z = 7$$

18. Evalúe el determinante.

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

19. Divida $(2x^3 - 9x + 15) \div (x - 6)$.

20. Factorice $64x^3 - 27y^3$.

6 Expresiones racionales y ecuaciones

OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Las expresiones racionales son expresiones que tienen fracciones, mientras que las *ecuaciones racionales* son ecuaciones que tienen expresiones racionales. En este capítulo aprenderá a trabajar con expresiones racionales, y a resolver ecuaciones racionales. Para tener éxito en este capítulo, debe tener una plena comprensión de las técnicas de factorización analizadas en el capítulo 5.

CUANDO DOS O MÁS personas realizan una tarea, tardan menos tiempo que si la realizan de manera aislada cada una de ellas. Por ejemplo, en las páginas 427 y 428, determinaremos el tiempo que tardan dos personas, trabajando juntas, en cosechar manzanas (ejercicio 11), limpiar canalones (ejercicio 13) o escardar un jardín (ejercicio 14), cuando sabemos el tiempo que cada persona tarda en completar la tarea si la realiza sola.

6.1 Dominios de funciones racionales y multiplicación y división de expresiones racionales

1 Determinar los dominios de funciones racionales.

2 Reducir expresiones racionales.

3 Multiplicar expresiones racionales.

4 Dividir expresiones racionales.

1 Determinar los dominios de funciones racionales

Para entender las expresiones racionales, es preciso comprender las técnicas de factorización que se analizaron en el capítulo 5. Una **expresión racional** es una expresión de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.

Ejemplos de expresiones racionales

$$\frac{2}{x}, \qquad \frac{x+3}{x}, \qquad \frac{x^2+4x}{x-6}, \qquad \frac{a}{a^2-4}, \qquad \frac{t^2-5t+7}{t^3+t^2-9t}$$

Observe que el denominador de una expresión racional no puede ser igual a 0, ya que la división entre 0 no está definida. En la expresión $\frac{x+3}{x}$, x no puede ser igual a 0, ya que el denominador tendría un valor 0. En $\frac{x^2+4x}{x-6}$ x no puede ser igual a 6, ya que el denominador tendría un valor 0. ¿Qué valores de a no pueden utilizarse en la expresión $\frac{a}{a^2-4}$? Si respondió 2 y -2, contestó correctamente.

Al escribir una expresión racional con una variable en el denominador, siempre suponemos que el valor o valores de la variable que hacen el denominador igual a cero quedan excluidos. Por ejemplo, si escribimos $\frac{5}{x-3}$, suponemos que $x \neq 3$, aunque esto no se indique de manera específica.

En la sección 5.1 estudiamos las funciones polinomiales. Ahora introducimos las funciones racionales. Una **función racional** es la de la forma $f(x) = \frac{p}{q}$ o $y = \frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.

Ejemplos de funciones racionales

$$f(x) = \frac{4}{x} \qquad y = \frac{x^2+2}{x+3} \qquad T(a) = \frac{a+9}{a^2-4} \qquad h(x) = \frac{7x-8}{2x+1}$$

El **dominio** de una función racional será el conjunto de valores que pueden utilizarse para reemplazar la variable. Por ejemplo, en la función racional $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, el dominio será el conjunto de todos los números reales, excepto el 3, lo que se escribe $\{x|x \neq 3\}$. Si x fuera 3, el denominador sería 0, y la división entre 0 no está definida.

EJEMPLO 1 Para las funciones dadas $f(x)$ y $g(x)$, determine el dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = x - 3$, $g(x) = x^2 + 2x - 15$

c) $f(x) = x$, $g(x) = x^2 + 8$

Solución

a) Como $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales, el dominio de cada una es el conjunto de todos los números reales. Por lo tanto, el dominio del cociente de las funciones $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ será el conjunto de todos los números reales para los que el denominador del cociente sea diferente de 0. Con base en lo aprendido en la sección 3.6 sabemos que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \qquad \textit{Sustituir expresiones para } f(x) \textit{ y } g(x).$$

$$= \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} \qquad \textit{Factorizar el denominador.}$$

Con base en esta forma factorizada, vemos que x no puede ser 2 ni -2. Así, el dominio está formado por todos los números reales excepto 2 y –2, y puede expresarse como $\{x|x \neq 2 \text{ y } x \neq -2\}$.

b)
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$= \frac{x-3}{x^2+2x-15} \quad \text{Sustituir expresiones para } f(x) \text{ y } g(x).$$
$$= \frac{x-3}{(x-3)(x+5)} \quad \text{Factorizar el denominador.}$$

Observe que $x - 3$ en el numerador se cancelaría con $x - 3$ en el denominador. Sin embargo, cuando determinamos el dominio del cociente de funciones, lo hacemos *antes* de simplificar la expresión. Como el denominador no puede ser 0, x no puede tener valores de 3 ni de -5. El dominio es $\{x|x \neq 3 \text{ y } x \neq -5\}$.

c)
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$= \frac{x}{x^2+8}$$

Como ningún valor de x puede hacer que el denominador sea 0, el dominio está formado por todos los números reales y puede escribirse como $\{x|x \text{ es un número real}\}$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 21

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Si usted tiene una calculadora graficadora, sería recomendable que practicara en ella la graficación de algunas funciones racionales. Esto le dará una idea de la gran variedad de gráficas que pueden producir las funciones racionales.

Si graficara en su calculadora la expresión $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ del ejemplo 1**a)**, la pantalla podría verse como la de la **figura 6.1**.

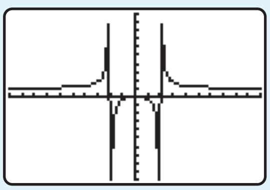


FIGURA 6.1

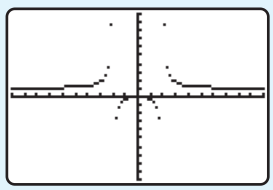


FIGURA 6.2

El dominio de esta función está formado por todos los números reales, excepto 2 y -2.

Observe lo que parecen ser líneas verticales en $x = 2$ y $x = -2$, los valores de x donde la función no está definida. Esta calculadora está en un modo llamado *modo de conexión*. Cuando está en este modo, conectará todos los puntos que grafique, pasando del punto con la coordenada x más pequeña al siguiente mayor. Justo a la izquierda de -2, el valor de y es un número positivo grande, y justo a la derecha de -2, el valor de y es un número negativo grande. La recta vertical es el intento de la calculadora para conectar estos dos puntos de x y y. Una situación similar ocurre en $x = 2$.

En ocasiones es preferible que la calculadora esté en *modo de puntos*. Cuando está en este modo muestra puntos desconectados que se han calculado. Lea el manual que acompaña a su calculadora para aprender cómo cambiar de modo de conexión a modo de puntos y viceversa. En la **figura 6.2** se muestra la misma gráfica de la **figura 6.1**, pero esta vez en una calculadora en modo de puntos.

2 Reducir expresiones racionales

Al resolver problemas que incluyen expresiones racionales, debemos asegurarnos de escribir la respuesta en los términos mínimos. Una expresión racional está **simplificada** cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes, salvo el 1. La fracción $\frac{6}{9}$ no está simplificada, ya que 6 y 9 tienen como factor común el número 3. Cuando se factoriza el número 3, la fracción simplificada es $\frac{2}{3}$.

$$\frac{6}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

La expresión racional $\frac{ab - b^2}{2b}$ no está simplificada, ya que el numerador y el denominador tienen un factor, b. Para simplificar esta expresión, factorice b en cada término del numerador; luego, divida.

$$\frac{ab - b^2}{2b} = \frac{\cancel{b}(a - b)}{2\cancel{b}} = \frac{a - b}{2}$$

Así, $\frac{ab - b^2}{2b}$ se convierte en $\frac{a - b}{2}$ cuando se simplifica.

Para simplificar expresiones racionales

1. Factorice de la manera más completa posible el numerador y el denominador.
2. Divida el denominador y el numerador entre los factores comunes.

EJEMPLO 2 Simplifique. **a)** $\frac{x^2 + 5x + 4}{x + 4}$ **b)** $\frac{3x^3 - 3x^2}{x^3 - x}$

Solución

a) Factorice el numerador; luego divida entre el factor común.

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x + 4} = \frac{\cancel{(x + 4)}(x + 1)}{\cancel{x + 4}} = x + 1$$

La expresión racional se simplifica a $x + 1$.

b) Factorice el numerador y el denominador. Luego divida entre los factores comunes.

$$\frac{3x^3 - 3x^2}{x^3 - x} = \frac{3x^2(x - 1)}{x(x^2 - 1)}$$

$$= \frac{3\overset{x}{\cancel{x^2}}\cancel{(x - 1)}}{\cancel{x}(x + 1)\cancel{(x - 1)}} \qquad \text{Factorizar } x^2 - 1.$$

$$= \frac{3x}{x + 1}$$

La expresión racional se simplifica a $\frac{3x}{x + 1}$.

Ahora resuelva el ejercicio 33

Cuando los términos de un numerador sólo difieren en el signo respecto de los términos de un denominador, podemos factorizar -1 del numerador o bien del denominador. *Cuando se factoriza –1 en un polinomio, los signos de todos los término del polinomio cambian.* Por ejemplo,

$$-2x + 3 = -1(2x - 3) = -(2x - 3)$$

$$6 - 5x = -1(-6 + 5x) = -(5x - 6)$$

$$-3x^2 + 8x - 6 = -1(3x^2 - 8x + 6) = -(3x^2 - 8x + 6)$$

EJEMPLO 3 Simplifique $\dfrac{27x^3 - 8}{2 - 3x}$.

Solución

$$\frac{27x^3 - 8}{2 - 3x} = \frac{(3x)^3 - (2)^3}{2 - 3x}$$

Escriba el numerador como una diferencia de dos cubos.

$$= \frac{(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)}{2 - 3x}$$

Factorice; recuerde que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

$$= \frac{\cancel{(3x - 2)}(9x^2 + 6x + 4)}{-1\cancel{(3x - 2)}}$$

Factorice -1 del denominador y divida entre los factores comunes.

$$= \frac{9x^2 + 6x + 4}{-1}$$

$$= -(9x^2 + 6x + 4) \quad \text{o} \quad -9x^2 - 6x - 4$$

Ahora resuelva el ejercicio 41

Cómo evitar errores comunes

INCORRECTO INCORRECTO

$$\frac{\cancel{x^2}^{\,x} + 6}{\cancel{x}_{\,1}} \qquad \frac{x + \cancel{8}^{\,2}}{\cancel{4}_{\,1}}$$

Recuerde que sólo se puede dividir entre **factores** comunes. Por lo tanto, las expresiones $\dfrac{x^2 + 6}{x}$ y $\dfrac{x + 8}{4}$ no pueden simplificarse. Solamente cuando las expresiones están *multiplicadas* pueden factorizarse. Ninguna de las expresiones anteriores puede simplificarse de su forma original.

CORRECTO

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}}$$
$$= x + 2$$

INCORRECTO

$$\frac{\cancel{x^2}^{\,x} - \cancel{4}^{\,2}}{\cancel{x}_{\,1} - \cancel{2}_{\,1}}$$

3 Multiplicar expresiones racionales

Ahora que sabemos cómo simplificar una expresión racional, podemos analizar la multiplicación de expresiones racionales.

Para multiplicar expresiones racionales

Para multiplicar expresiones racionales, utilice la siguiente regla:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad b \neq 0, d \neq 0$$

Para multiplicar expresiones racionales, siga estos pasos:

1. Factorice tanto como sea posible todos los numeradores y los denominadores.
2. Divida entre los factores comunes.
3. Multiplique usando la regla anterior.
4. Cuando sea posible, simplifique la respuesta. (Este paso no es necesario si se realiza correctamente el paso 2).

Si se factorizaron todos los factores comunes en el paso 2, su respuesta en el paso 4 debe estar en la forma simplificada. Sin embargo, si olvidó un factor común en el paso 2, puede factorizarlo en el paso 4 para obtener una respuesta más simplificada.

EJEMPLO 4 Multiplique. **a)** $\frac{x-5}{6x} \cdot \frac{x^2-2x}{x^2-7x+10}$ **b)** $\frac{2x-3}{x-4} \cdot \frac{x^2-8x+16}{3-2x}$

Solución

a) $\frac{x-5}{6x} \cdot \frac{x^2-2x}{x^2-7x+10} = \frac{\cancel{x-5}}{6\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-5)}}$ *Factorice; divida entre los factores comunes.*

$$= \frac{1}{6}$$

b) $\frac{2x-3}{x-4} \cdot \frac{x^2-8x+16}{3-2x} = \frac{2x-3}{x-4} \cdot \frac{(x-4)(x-4)}{3-2x}$ *Factorice.*

$$= \frac{\cancel{2x-3}}{\cancel{x-3}} \cdot \frac{\cancel{(x-4)}(x-4)}{-1\cancel{(2x-3)}}$$ *Factorice −1 del denominador; divida entre los factores comunes.*

$$= \frac{x-4}{-1}$$

$$= -(x-4) \quad \text{o} \quad -x+4 \quad \text{o} \quad 4-x$$

Ahora resuelva el ejercicio 61

EJEMPLO 5 Multiplique $\frac{x^2-y^2}{x+y} \cdot \frac{x+4y}{2x^2-xy-y^2}$.

Solución

$$\frac{x^2-y^2}{x+y} \cdot \frac{x+4y}{2x^2-xy-y^2} = \frac{\cancel{(x+y)}\cancel{(x-y)}}{\cancel{x+y}} \cdot \frac{x+4y}{(2x+y)\cancel{(x-y)}}$$ *Factorice: divida entre los factores comunes.*

$$= \frac{x+4y}{2x+y}$$

Ahora resuelva el ejercicio 55

EJEMPLO 6 Multiplique $\frac{ab-ac+bd-cd}{ab+ac+bd+cd} \cdot \frac{b^2+bc+bd+cd}{b^2+bd-bc-cd}$.

Solución

Factorice los numeradores y denominadores mediante agrupación. Luego divida entre los factores comunes.

$$\frac{ab-ac+bd-cd}{ab+ac+bd+cd} \cdot \frac{b^2+bc+bd+cd}{b^2+bd-bc-cd}$$

$$= \frac{a(b-c)+d(b-c)}{a(b+c)+d(b+c)} \cdot \frac{b(b+c)+d(b+c)}{b(b+d)-c(b+d)}$$ *Propiedad distributiva.*

$$= \frac{(b-c)(a+d)}{(b+c)(a+d)} \cdot \frac{(b+c)(b+d)}{(b+d)(b-c)}$$ *Factorice completamente;*

$$= \frac{\cancel{(b-c)}\cancel{(a+d)}}{\cancel{(b+c)}\cancel{(a+d)}} \cdot \frac{\cancel{(b+c)}\cancel{(b+d)}}{\cancel{(b+d)}\cancel{(b-c)}} = 1$$ *divida entre los factores comunes.*

Ahora resuelva el ejercicio 75

4 Dividir expresiones racionales

A continuación analizaremos la división de expresiones racionales.

Para dividir expresiones racionales

Para dividir expresiones racionales, utilice la regla siguiente:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

Para dividir expresiones racionales, invertimos el divisor (la segunda fracción, o fracción inferior) y procedemos como cuando multiplicamos expresiones racionales.

EJEMPLO 7 Divida $\dfrac{18x^4}{5y^3} \div \dfrac{3x^5}{25y}$.

Solución

$$\frac{18x^4}{5y^3} \div \frac{3x^5}{25y} = \frac{\overset{6}{\cancel{18}}\,\cancel{x^4}}{\cancel{5}\,\underset{y^2}{\cancel{y^3}}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{25}}\,\cancel{y}}{\cancel{3}\,\underset{x}{\cancel{x^5}}}$$ Invierta el divisor; divida entre los factores comunes.

$$= \frac{6 \cdot 5}{y^2 x} = \frac{30}{xy^2}$$

Ahora resuelva el ejercicio 51

En el ejemplo 7 todos los numeradores y denominadores fueron monomios. Cuando los numeradores o denominadores son binomios o trinomios, los factorizamos, si es posible, para dividir entre factores comunes. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Divida. **a)** $\dfrac{x^2 - 25}{x + 7} \div \dfrac{x - 5}{x + 7}$ **b)** $\dfrac{12a^2 - 22a + 8}{3a} \div \dfrac{3a^2 + 2a - 8}{8a^2 + 16a}$

Solución

a) $$\frac{x^2 - 25}{x + 7} \div \frac{x - 5}{x + 7} = \frac{x^2 - 25}{x + 7} \cdot \frac{x + 7}{x - 5}$$ Invierta el divisor.

$$= \frac{(x + 5)\cancel{(x - 5)}}{\cancel{x + 7}} \cdot \frac{\cancel{x + 7}}{\cancel{x - 5}}$$ Factorice una vez más; divida entre los factores comunes.

$$= x + 5$$

b) $$\frac{12a^2 - 22a + 8}{3a} \div \frac{3a^2 + 2a - 8}{8a^2 + 16a}$$

$$= \frac{12a^2 - 22a + 8}{3a} \cdot \frac{8a^2 + 16a}{3a^2 + 2a - 8}$$ Invierta el divisor.

$$= \frac{2(6a^2 - 11a + 4)}{3a} \cdot \frac{8a(a + 2)}{(3a - 4)(a + 2)}$$ Factorice.

$$= \frac{2\cancel{(3a - 4)}(2a - 1)}{3\cancel{a}} \cdot \frac{8\cancel{a}\cancel{(a + 2)}}{\cancel{(3a - 4)}\cancel{(a + 2)}}$$ Factorice una vez más; divida entre los factores comunes.

$$= \frac{16(2a - 1)}{3}$$

Ahora resuelva el ejercicio 59

EJEMPLO 9 Divida $\dfrac{x^4 - y^4}{x - y} \div \dfrac{x^2 + xy}{x^2 - 2xy + y^2}$.

Solución

$$\begin{aligned}
&\frac{x^4 - y^4}{x - y} \div \frac{x^2 + xy}{x^2 - 2xy + y^2} \\
&= \frac{x^4 - y^4}{x - y} \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + xy} && \text{Invierta el divisor.} \\
&= \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x - y} \cdot \frac{(x - y)(x - y)}{x(x + y)} && \text{Factorice.} \\
&= \frac{(x^2 + y^2)\cancel{(x + y)}\cancel{(x - y)}}{\cancel{x - y}} \cdot \frac{(x - y)(x - y)}{x\cancel{(x + y)}} && \text{Factorice una vez más; divida entre los factores comunes.} \\
&= \frac{(x^2 + y^2)(x - y)^2}{x}
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 69

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

A lo largo de este capítulo necesitaremos factorizar polinomios. Es importante que usted entienda las técnicas de factorización que se trataron en el capítulo 5. Si tiene dificultad al factorizar, repase ahora ese tema.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. **a)** ¿Qué es una expresión racional?
   b) Proporcione su propio ejemplo de una expresión racional.

2. Explique por qué $\dfrac{\sqrt{x}}{x + 3}$ no es una expresión racional.

3. **a)** ¿Qué es una función racional?
   b) Proporcione su propio ejemplo de una función racional.

4. Explique por qué $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x + 4}}$ no es una función racional.

5. **a)** ¿Qué es el dominio de una función racional?
   b) ¿Cuál es el dominio de $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 25}$?

6. **a)** Explique cómo simplificar una expresión racional.
   b) Mediante el procedimiento que estableció en la parte **a)**, simplifique
   $$\frac{6x^2 + 19x + 10}{4x^2 - 25}$$

7. **a)** Explique cómo simplificar una expresión racional en donde el numerador y del denominador sólo difieren en el signo.
   b) Mediante el procedimiento que explicó en la parte **a)**, simplifique
   $$\frac{3x^2 - 2x - 7}{-3x^2 + 2x + 7}$$

8. **a)** Explique cómo multiplicar expresiones racionales.
   b) Mediante el procedimiento indicado en la parte **a)**, multiplique
   $$\frac{6a^2 + a - 1}{3a^2 + 2a - 1} \cdot \frac{3a^2 + 4a + 1}{6a^2 + 5a + 1}$$

9. **a)** Explique cómo dividir expresiones racionales.
   b) Mediante el procedimiento indicado en la parte **a)**, divida
   $$\frac{r + 2}{r^2 + 9r + 18} \div \frac{(r + 2)^2}{r^2 + 5r + 6}$$

10. Considere $f(x) = \dfrac{x}{x}$. ¿Será $f(x) = 1$ para todos los valores de x?

Práctica de habilidades

Determine los valores que deben excluirse en las expresiones siguientes.

11. $\dfrac{4x}{5x - 20}$

12. $\dfrac{x + 2}{x^2 - 64}$

13. $\dfrac{4}{2x^2 - 15x + 25}$

14. $\dfrac{2}{(x - 6)^2}$

15. $\dfrac{x - 3}{x^2 + 12}$

16. $\dfrac{-2}{49 - r^2}$

17. $\dfrac{x^2 + 81}{x^2 - 81}$

18. $\dfrac{x^2 - 36}{x^2 + 36}$

Determine el dominio de cada función.

19. $f(p) = \dfrac{p+1}{p-2}$

20. $f(z) = \dfrac{3}{-18z+9}$

21. $y = \dfrac{5}{x^2+x-6}$

22. $y = \dfrac{9}{x^2+4x-21}$

23. $f(a) = \dfrac{3a^2-6a+4}{2a^2+3a-2}$

24. $f(x) = \dfrac{10-3x}{x^3+8x}$

25. $g(x) = \dfrac{x^2-x+8}{x^2+4}$

26. $h(x) = \dfrac{x^3-64x}{x^2+81}$

27. $m(a) = \dfrac{a^2+36}{a^2-36}$

28. $k(b) = \dfrac{b^2-36}{b^2+36}$

Simplifique cada expresión racional.

29. $\dfrac{x-xy}{x}$

30. $\dfrac{x^2-5x}{x}$

31. $\dfrac{5x^2-20xy}{15x}$

32. $\dfrac{x^2+7x}{x^2-2x}$

33. $\dfrac{x^3-x}{x^2-1}$

34. $\dfrac{4x^2y+12xy+18x^3y^3}{10xy^2}$

35. $\dfrac{5r-8}{8-5r}$

36. $\dfrac{4x^2-16x^4+6x^5y}{14x^3y^2}$

37. $\dfrac{p^2-2p-24}{6-p}$

38. $\dfrac{4x^2-9}{2x^2-x-3}$

39. $\dfrac{a^2-3a-10}{a^2+5a+6}$

40. $\dfrac{y^2-10yz+24z^2}{y^2-5yz+4z^2}$

41. $\dfrac{8x^3-125y^3}{2x-5y}$

42. $\dfrac{64x^3-27z^3}{3z-4x}$

43. $\dfrac{(x+6)(x-3)+(x+6)(x-2)}{2(x+6)}$

44. $\dfrac{(2x-1)(x+4)+(2x-1)(x+1)}{3(2x-1)}$

45. $\dfrac{a^2+7a-ab-7b}{a^2-ab+5a-5b}$

46. $\dfrac{xy-yw+xz-zw}{xy+yw+xz+zw}$

47. $\dfrac{x^2-x-12}{x^3+27}$

48. $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$

Multiplique o divida como se indica. Simplifique todas las respuestas.

49. $\dfrac{2x}{5y} \cdot \dfrac{y^3}{6}$

50. $\dfrac{32x^2}{y^4} \cdot \dfrac{5x^3}{8y^2}$

51. $\dfrac{9x^3}{4} \div \dfrac{3}{16y^2}$

52. $\dfrac{10m^4}{49x^5y^7} \div \dfrac{25m^5}{21x^{12}y^5}$

53. $\dfrac{3-r}{r-3} \cdot \dfrac{r-9}{9-r}$

54. $\dfrac{7a+7b}{5} \div \dfrac{a^2-b^2}{a-b}$

55. $\dfrac{x^2+3x-10}{4x} \cdot \dfrac{x^2-3x}{x^2-5x+6}$

56. $\dfrac{p^2+7p+10}{p+5} \cdot \dfrac{1}{p+2}$

57. $\dfrac{r^2+10r+21}{r+7} \div \dfrac{(r^2-5r-24)}{r^3}$

58. $(x-3) \div \dfrac{x^2+3x-18}{x^3}$

59. $\dfrac{x^2+12x+35}{x^2+4x-5} \div \dfrac{x^2+3x-28}{7x-7}$

60. $\dfrac{x+1}{x^2-17x+30} \div \dfrac{8x+8}{x^2+7x-18}$

61. $\dfrac{a-b}{9a+9b} \div \dfrac{a^2-b^2}{a^2+2a+1}$

62. $\dfrac{2x^2+8xy+8y^2}{x^2+4xy+4y^2} \cdot \dfrac{2x^2+7xy+6y^2}{4x^2+14xy+12y^2}$

63. $\dfrac{3x^2-x-4}{4x^2+5x+1} \cdot \dfrac{2x^2-5x-12}{6x^2+x-12}$

64. $\dfrac{6x^3-x^2-x}{2x^2+x-1} \cdot \dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+x}$

65. $\dfrac{x+2}{x^3-8} \cdot \dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$

66. $\dfrac{x^4-y^8}{x^2+y^4} \div \dfrac{x^2-y^4}{x^2}$

67. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2} \div \dfrac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$

68. $\dfrac{(x^2-y^2)^2}{(x^2-y^2)^3} \div \dfrac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$

69. $\dfrac{2x^4+4x^2}{6x^2+14x+4} \div \dfrac{x^2+2}{3x^2+x}$

70. $\dfrac{8a^3-1}{4a^2+2a+1} \div \dfrac{a^2-2a+1}{(a-1)^2}$

71. $\dfrac{(a-b)^3}{a^3-b^3} \cdot \dfrac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$

72. $\dfrac{r^2-16}{r^3-64} \div \dfrac{r^2+8r+16}{r^2+4r+16}$

73. $\dfrac{4x+y}{5x+2y}\cdot\dfrac{10x^2-xy-2y^2}{8x^2-2xy-y^2}$

74. $\dfrac{2x^3-7x^2+3x}{x^2+2x-3}\cdot\dfrac{x^2+3x}{(x-3)^2}$

75. $\dfrac{ac-ad+bc-bd}{ac+ad+bc+bd}\cdot\dfrac{pc+pd-qc-qd}{pc-pd+qc-qd}$

76. $\dfrac{2p^2+2pq-pq^2-q^3}{p^3+p^2+pq^2+q^2}\div\dfrac{p^3+p+p^2q+q}{p^3+p+p^2+1}$

77. $\dfrac{3r^2+17rs+10s^2}{6r^2+13rs-5s^2}\div\dfrac{6r^2+rs-2s^2}{6r^2-5rs+s^2}$

78. $\dfrac{x^3-4x^2+x-4}{x^5-x^4+x^3-x^2}\cdot\dfrac{2x^3+2x^2+x+1}{2x^3-8x^2+x-4}$

Resolución de problemas

79. Construya una expresión racional que no esté definida en $x = 2$ y $x = -3$. Explique cómo determinó su respuesta.

80. Construya una expresión racional que no esté definida en $x = 4$ y $x = -5$. Explique cómo determinó su respuesta.

81. Considere la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Explique por qué esta función nunca puede ser igual a 0.

82. Considere la función racional $g(x) = \dfrac{2}{x+3}$. Explique por qué esta función nunca puede ser igual a 0.

83. Considere la función racional $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-36}$. ¿Para cuáles valores de x, si los hay, esta función **a)** es igual a 0? **b)** no está definida? Explique.

84. Considere la función $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-81}$. ¿Para cuáles valores de x, si los hay, esta función **a)** es igual a 0; **b)** no está definida? Explique.

85. Proporcione una función que no esté definida en $x = 3$ y $x = -1$, y que tenga un valor de 0 en $x = 2$. Explique cómo determinó su respuesta.

86. Proporcione una función que no esté definida en $x = -4$ y $x = -2$, y que tenga un valor de 0 en $x = 5$. Explique cómo determinó su respuesta.

Determine el polinomio que debe colocarse en el área sombreada para obtener un enunciado verdadero. Explique cómo determinó su respuesta.

87. $\dfrac{\boxed{}}{x^2+2x-15} = \dfrac{1}{x-3}$

88. $\dfrac{\boxed{}}{3x+2} = x-3$

89. $\dfrac{y^2-y-20}{\boxed{}} = \dfrac{y+4}{y+1}$

90. $\dfrac{\boxed{}}{6p^2+p-15} = \dfrac{2p-1}{2p-3}$

Determine el polinomio que debe colocarse en el área sombreada para obtener un enunciado verdadero. Explique cómo determinó su respuesta.

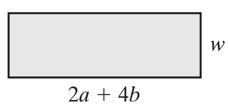
91. $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+2x-3}\cdot\dfrac{\boxed{}}{x^2-2x-8} = 1$

92. $\dfrac{x^2-4}{(x+2)^2}\cdot\dfrac{2x^2+x-6}{\boxed{}} = \dfrac{x-2}{2x+5}$

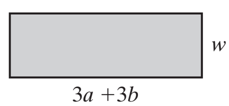
93. $\dfrac{x^2-9}{2x^2+3x-2}\div\dfrac{2x^2-9x+9}{\boxed{}} = \dfrac{x+3}{2x-1}$

94. $\dfrac{4r^2-r-18}{\boxed{}}\div\dfrac{4r^3-9r^2}{6r^2-9r+3} = \dfrac{3(r-1)}{r^2}$

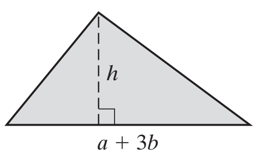
95. Área Considere el siguiente rectángulo. Su área es $3a^2+7ab+2b^2$, y su longitud es $2a+4b$. Determine su ancho, w, en términos de a y b, dividiendo su área entre su longitud.



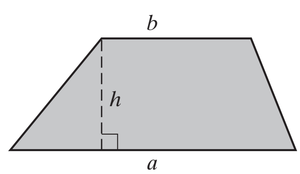
96. Área Considere el siguiente rectángulo. Su área es $a^2+2ab+b^2$, y su longitud es $3a+3b$. Determine su ancho, w, en términos de a y b, dividiendo su área entre su longitud.



97. Área Considere el siguiente triángulo. Si su área es $a^2+2ab+3b^2$ y su base es $a+3b$, determine su altura, h. Utilice la fórmula área $= \dfrac{1}{2}$(base)(altura).



98. Área Considere el siguiente trapecio. Si su área es $a^2+2ab+b^2$ determine su altura, h. Utilice la fórmula área $= \dfrac{1}{2}h(a+b)$.



Realice cada operación indicada.

99. $\left(\dfrac{2x^2 - 3x - 14}{2x^2 - 9x + 7} \div \dfrac{6x^2 + x - 15}{3x^2 + 2x - 5}\right) \cdot \dfrac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3}$

100. $\left(\dfrac{a^2 - b^2}{2a^2 - 3ab + b^2} \cdot \dfrac{2a^2 - 7ab + 3b^2}{a^2 + ab}\right) \div \dfrac{ab - 3b^2}{a^2 + 2ab + b^2}$

101. $\dfrac{5x^2(x - 1) - 3x(x - 1) - 2(x - 1)}{10x^2(x - 1) + 9x(x - 1) + 2(x - 1)} \cdot \dfrac{2x + 1}{x + 3}$

102. $\dfrac{x^2(3x - y) - 5x(3x - y) - 24(3x - y)}{x^2(3x - y) - 9x(3x - y) + 8(3x - y)} \cdot \dfrac{x - 1}{x + 3}$

103. $\dfrac{(x - p)^n}{x^{-2}} \div \dfrac{(x - p)^{2n}}{x^{-6}}$

104. $\dfrac{x^{-3}}{(a - b)^r} \div \dfrac{x^{-5}}{(a - b)^{r+2}}$

Simplifique.

105. $\dfrac{x^{5y} + 3x^{4y}}{3x^{3y} + x^{4y}}$

106. $\dfrac{m^{2x} - m^x - 2}{m^{2x} - 4}$

En los ejercicios 107 a 110,

a) *Determine el dominio de la función.*

b) *Grafique la función en modo de conexión.*

c) *¿La función crece, decrece o permanece igual conforme x se aproxima a 2, acercándose a 2 por el lado izquierdo?*

d) *¿La función crece, decrece o permanece igual conforme x se aproxima a 2, acercándose a 2 desde el lado derecho?*

107. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

108. $f(x) = \dfrac{x}{x - 2}$

109. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

110. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 2}$

111. Con base en la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Determine el dominio de la función.

b) Complete la tabla siguiente.

x	−10	−1	−0.5	−0.1	−0.01	0.01	0.1	0.5	1	10
y										

c) Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Considere qué le sucede a la función conforme x se aproxima a 0, tanto por la izquierda como por la derecha.

d) ¿Esta gráfica puede tener un valor de 0? Explique su respuesta.

Actividad en grupo

112. Consideren la función racional $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

a) Determinen en equipo su dominio.

b) De manera individual cada miembro del grupo complete la siguiente tabla para la función.

x	−2	−1	0	1	1.9	1.99	2.01	2.1	3	4	5	6
y												

c) Comparen sus respuestas a la parte **b)**, y pónganse de acuerdo acerca de cuáles son los valores correctos de la tabla.

d) Tracen en grupo la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. ¿La función está definida cuando $x = 2$?

e) ¿Esta gráfica puede tener algún valor de 0? Si es así, ¿para qué valor o valores de a es $f(a) = 0$?

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **113.** Despeje y de $6(x - 2) + 6y = 12x$.

[2.5] **114.** Resuelva $4 + \dfrac{4x}{3} < 6$ y proporcione la respuesta en notación de intervalo.

[2.6] **115.** Resuelva $\left|\dfrac{2x - 4}{12}\right| = 5$.

[3.2] **116.** Sea $f(x) = |6 - 3x| - 2$. Determine $f(1.3)$.

[4.1] **117.** Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$3x + 4y = 2$$
$$2x + 5y = -1$$

[5.6] **118.** Factorice $9x^2 + 6xy + y^2 - 4$.

6.2 Suma y resta de expresiones racionales

1. Sumar y restar expresiones con un denominador común.
2. Determinar el mínimo común denominador (MCD).
3. Sumar y restar expresiones sin denominadores comunes.
4. Analizar una aplicación de expresiones racionales.

1 Sumar y restar expresiones con un denominador común

Al sumar (o restar) dos expresiones racionales con un común denominador, sumamos (o restamos) los numeradores y conservamos el denominador común.

Para sumar o restar expresiones racionales

Para sumar o restar expresiones racionales, utilice las siguientes reglas.

SUMA

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad c \neq 0$$

RESTA

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, \quad c \neq 0$$

Para sumar o restar expresiones racionales con un denominador común.

1. Sume o reste los numeradores, tal como indican las reglas anteriores.
2. Si es posible, simplifique las expresiones.

EJEMPLO 1 Sume.

a) $\dfrac{3}{x+6} + \dfrac{x-4}{x+6}$ **b)** $\dfrac{x^2+3x-2}{(x+5)(x-3)} + \dfrac{4x+12}{(x+5)(x-3)}$

Solución

a) Como los denominadores son iguales, sumamos los numeradores y conservamos el denominador común.

$$\frac{3}{x+6} + \frac{x-4}{x+6} = \frac{3+(x-4)}{x+6} \quad \textit{Sumar numeradores.}$$

$$= \frac{x-1}{x+6}$$

b) $$\frac{x^2+3x-2}{(x+5)(x-3)} + \frac{4x+12}{(x+5)(x-3)} = \frac{x^2+3x-2+(4x+12)}{(x+5)(x-3)} \quad \textit{Sumar numeradores.}$$

$$= \frac{x^2+7x+10}{(x+5)(x-3)} \quad \textit{Reducir términos semejantes.}$$

$$= \frac{\cancel{(x+5)}(x+2)}{\cancel{(x+5)}(x-3)} \quad \textit{Factorizar; dividir entre los factores comunes.}$$

$$= \frac{x+2}{x-3}$$

Ahora resuelva el ejercicio 11

Al restar expresiones racionales, asegúrese de restar todo el numerador de la fracción. Lea con atención el recuadro siguiente. Cómo evitar errores comunes.

Cómo evitar errores comunes

En ocasiones, los estudiantes cometen el error siguiente. Estudie la información que se presenta para evitarlo.

¿Cómo simplificaría este problema?

$$\frac{4x}{x-2}-\frac{2x+1}{x-2}$$

CORRECTO

$$\frac{4x}{x-2}-\frac{2x+1}{x-2}=\frac{4x-(2x+1)}{x-2}$$
$$=\frac{4x-2x-1}{x-2}$$
$$=\frac{2x-1}{x-2}$$

INCORRECTO

$$\frac{4x}{x-2}-\frac{2x+1}{x-2}=\frac{4x-2x+1}{x-2}$$
$$=\frac{2x+1}{x-2}$$

El procedimiento del lado derecho es incorrecto, ya que hay que restar *todo el numerador,* $2x + 1$, de $4x$, y no sólo $2x$. Observe que **debe cambiar el signo de cada término del numerador de la fracción restada** (no sólo el signo del primer término). Observe que, de acuerdo con la propiedad distributiva, $-(2x + 1) = -2x - 1$.

EJEMPLO 2 Reste $\frac{a}{a-6}-\frac{a^2-4a-6}{a-6}$.

Solución

$$\frac{a}{a-6}-\frac{a^2-4a-6}{a-6}=\frac{a-(a^2-4a-6)}{a-6}$$ *Restar numeradores.*

$$=\frac{a-a^2+4a+6}{a-6}$$

$$=\frac{-a^2+5a+6}{a-6}$$ *Reducir términos semejantes.*

$$=\frac{-(a^2-5a-6)}{a-6}$$ *Factorizar −1.*

$$=\frac{-\cancel{(a-6)}(a+1)}{\cancel{a-6}}$$ *Factorizar; dividir entre los factores comunes.*

$$=-(a+1) \text{ o } -a-1$$

Ahora resuelva el ejercicio 13

2 Determinar el mínimo común denominador (MCD)

Para sumar o restar dos fracciones numéricas con *denominadores distintos*, primero debemos obtener un denominador común. Para obtener el denominador común, muchas veces es necesario escribir los valores numéricos como productos de números primos. Un **número primo** es un número mayor que 1 que sólo tiene dos divisores, él mismo y 1. Algunos números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13 y 17. A continuación se muestra cómo los números 36 y 48 se escriben como un producto de números primos:

$$36 = 2\cdot2\cdot3\cdot3 = 2^2\cdot3^2$$

$$48 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3 = 2^4\cdot3$$

Para determinar el **mínimo común denominador** de una expresión racional, podríamos necesitar escribir coeficientes numéricos como productos de números primos.

Para determinar el mínimo común denominador (MCD) de expresiones racionales

1. Escriba como producto de números primos cada coeficiente no primo (distinto de 1) de los monomios del denominador.
2. Factorice por completo cada denominador. Cualquier factor que aparezca más de una vez debe expresarse como potencia. Por ejemplo, $(x + 5)(x + 5)$ debe expresarse como $(x + 5)^2$.
3. Liste todos los factores diferentes (distintos de 1) que aparezcan en cualquiera de los denominadores. Cuando el mismo factor aparezca en más de un denominador, escríbalo con la mayor potencia.
4. El mínimo común denominador es el producto de todos los factores encontrados en el paso 3.

EJEMPLO 3 Determine el MCD de cada expresión.

a) $\dfrac{3}{5x} - \dfrac{2}{x^2}$ **b)** $\dfrac{1}{18x^3y} + \dfrac{5}{27x^2y^3}$ **c)** $\dfrac{3}{x} - \dfrac{2y}{x+5}$ **d)** $\dfrac{7}{x^2(x+1)} + \dfrac{3z}{x(x+1)^3}$

Solución

a) Los factores que aparecen en el denominador son 5 y x. Liste cada factor con su máxima potencia. El MCD es el producto de estos factores.

Mayor potencia de x

$$\text{MCD} = 5 \cdot x^2 = 5x^2$$

b) Los coeficientes numéricos escritos como productos de números primos son $18 = 2 \cdot 3^2$ y $27 = 3^3$. Los factores variables que aparecen son x y y. Utilizamos las máximas potencias de los factores para obtener el MCD.

$$\text{MCD} = 2 \cdot 3^3 \cdot x^3y^3 = 54x^3y^3$$

c) Los factores son x y $x + 5$. Observe que la x del segundo denominador, $x + 5$, no es un factor del denominador, ya que la operación es una suma y no una multiplicación.

$$\text{MCD} = x(x + 5)$$

d) Los factores son x y $x + 1$. La mayor potencia de x es 2, y la mayor potencia de $x + 1$ es 3.

$$\text{MCD} = x^2(x + 1)^3$$

Ahora resuelva el ejercicio 31

En ocasiones es necesario factorizar todos los denominadores para obtener el MCD. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Determine el MCD de cada expresión.

a) $\dfrac{3}{2x^2 - 4x} + \dfrac{8x}{x^2 - 4x + 4}$ **b)** $\dfrac{4x}{x^2 - x - 12} - \dfrac{6x^2}{x^2 - 7x + 12}$

Solución

a) Factorice ambos denominadores.

$$\frac{3}{2x^2 - 4x} + \frac{8x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{3}{2x(x-2)} + \frac{8x}{(x-2)^2}$$

Los factores son 2, x y $x - 2$. Multiplique los factores elevados a la mayor potencia a la que aparezca cada uno.

$$\text{MCD} = 2 \cdot x \cdot (x - 2)^2 = 2x(x - 2)^2$$

b) Factorice ambos denominadores.

$$\frac{4x}{x^2 - x - 12} - \frac{6x^2}{x^2 - 7x + 12} = \frac{4x}{(x + 3)(x - 4)} - \frac{6x^2}{(x - 3)(x - 4)}$$
$$\text{MCD} = (x + 3)(x - 4)(x - 3)$$

Observe que aunque $x - 4$ es un factor común a cada denominador, la máxima potencia de ese factor que aparece en cada denominador es 1.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 29

3 Sumar y restar expresiones sin denominadores comunes

El procedimiento que se usa para sumar o restar expresiones racionales sin denominadores comunes, se explica a continuación.

Para sumar o restar expresiones racionales con denominadores distintos

1. Determine el MCD.
2. Reescriba cada fracción como una fracción equivalente con el MCD. Esto se hace multiplicando el numerador y el denominador de cada fracción por los factores necesarios para obtener el MCD.
3. Conserve el denominador en forma factorizada, pero desarrolle el numerador.
4. Sume o reste los numeradores, conservando el MCD.
5. Cuando sea posible reducir la fracción mediante factorización del numerador, hágalo.

EJEMPLO 5 ▸ Sume. **a)** $\frac{2}{x} + \frac{9}{y}$ **b)** $\frac{5}{4a^2} + \frac{3}{14ab^3}$

Solución

a) Primero determinamos el MCD.

$$\text{MCD} = xy$$

A continuación escribimos cada fracción con el MCD. Para esto, multiplicamos *tanto* el numerador *como* el denominador de cada fracción por los factores necesarios para obtener el MCD.

En este problema, la primera fracción debe multiplicarse por $\frac{y}{y}$ y la segunda por $\frac{x}{x}$.

$$\frac{2}{x} + \frac{9}{y} = \frac{y}{y} \cdot \frac{2}{x} + \frac{9}{y} \cdot \frac{x}{x} = \frac{2y}{xy} + \frac{9x}{xy}$$

Al multiplicar el numerador y el denominador por el mismo factor, en realidad estamos multiplicando por 1, lo cual no cambia el valor de la fracción, pero sí su apariencia. Así, la nueva fracción es equivalente a la fracción original.

Ahora sumamos los numeradores y dejamos solo al MCD.

$$\frac{2y}{xy} + \frac{9x}{xy} = \frac{2y + 9x}{xy} \quad \text{o} \quad \frac{9x + 2y}{xy}$$

Por lo tanto, $\frac{2}{x} + \frac{9}{y} = \frac{9x + 2y}{xy}$.

b) El MCD de 4 y 14 es 28. El MCD de las dos fracciones es $28a^2b^3$. Debemos escribir cada fracción con el denominador $28a^2b^3$. Para esto, multiplicamos la primera fracción por $\frac{7b^3}{7b^3}$ y la segunda fracción de la derecha por $\frac{2a}{2a}$.

$$\frac{5}{4a^2} + \frac{3}{14ab^3} = \frac{7b^3}{7b^3} \cdot \frac{5}{4a^2} + \frac{3}{14ab^3} \cdot \frac{2a}{2a}$$ *Multiplicar para obtener el MCD.*

$$= \frac{35b^3}{28a^2b^3} + \frac{6a}{28a^2b^3}$$

$$= \frac{35b^3 + 6a}{28a^2b^3}$$ *Sumar numeradores.*

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 39**

EJEMPLO 6 ▸ Reste $\frac{x + 2}{x - 4} - \frac{x + 5}{x + 4}$.

Solución El MCD es $(x - 4)(x + 4)$. Escribimos cada fracción con el denominador $(x - 4)(x + 4)$.

$$\frac{x+2}{x-4} - \frac{x+5}{x+4} = \frac{x+4}{x+4} \cdot \frac{x+2}{x-4} - \frac{x+5}{x+4} \cdot \frac{x-4}{x-4}$$ *Multiplicar para obtener el MCD.*

$$= \frac{(x+4)(x+2)}{(x+4)(x-4)} - \frac{(x+5)(x-4)}{(x+4)(x-4)}$$

$$= \frac{x^2 + 6x + 8}{(x+4)(x-4)} - \frac{x^2 + x - 20}{(x+4)(x-4)}$$ *Multiplicar los binomios en el numerador.*

$$= \frac{x^2 + 6x + 8 - (x^2 + x - 20)}{(x+4)(x-4)}$$ *Restar numeradores.*

$$= \frac{x^2 + 6x + 8 - x^2 - x + 20}{(x+4)(x-4)}$$

$$= \frac{5x + 28}{(x+4)(x-4)}$$ *Reducir términos semejantes.*

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 45**

EJEMPLO 7 ▸ Sume $\frac{2}{x - 3} + \frac{x + 5}{3 - x}$.

Solución Observe que cada denominador es el opuesto, o inverso aditivo, del otro. (Los términos de los denominadores sólo difieren en el signo.) Cuando surge esta situación especial, podemos multiplicar el numerador y el denominador de cualquiera de las fracciones por -1 para obtener el MCD.

$$\frac{2}{x-3} + \frac{x+5}{3-x} = \frac{2}{x-3} + \frac{-1}{-1} \cdot \frac{(x+5)}{(3-x)}$$ *Multiplicar para obtener el MCD.*

$$= \frac{2}{x-3} + \frac{-x-5}{x-3}$$

$$= \frac{2 - x - 5}{x-3}$$ *Sumar denominadores.*

$$= \frac{-x-3}{x-3}$$ *Reducir términos semejantes.*

Ya que no hay factores comunes en el numerador y en el denominador, $\frac{-x-3}{x-3}$ no puede simplificarse más.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 43**

EJEMPLO 8 Reste $\dfrac{3x+4}{2x^2-5x-12} - \dfrac{2x-3}{5x^2-18x-8}$.

Solución Factorice el denominador de cada expresión.

$$\frac{3x+4}{2x^2-5x-12} - \frac{2x-3}{5x^2-18x-8} = \frac{3x+4}{(2x+3)(x-4)} - \frac{2x-3}{(5x+2)(x-4)}$$

El MCD es $(2x+3)(x-4)(5x+2)$.

$$\frac{3x+4}{(2x+3)(x-4)} - \frac{2x-3}{(5x+2)(x-4)}$$

$$= \frac{5x+2}{5x+2}\cdot\frac{3x+4}{(2x+3)(x-4)} - \frac{2x-3}{(5x+2)(x-4)}\cdot\frac{2x+3}{2x+3} \quad \textit{Multiplicar para obtener el MCD.}$$

$$= \frac{15x^2+26x+8}{(5x+2)(2x+3)(x-4)} - \frac{4x^2-9}{(5x+2)(2x+3)(x-4)} \quad \textit{Multiplicar los numeradores.}$$

$$= \frac{15x^2+26x+8-(4x^2-9)}{(5x+2)(2x+3)(x-4)} \quad \textit{Restar los numeradores.}$$

$$= \frac{15x^2+26x+8-4x^2+9}{(5x+2)(2x+3)(x-4)}$$

$$= \frac{11x^2+26x+17}{(5x+2)(2x+3)(x-4)} \quad \textit{Reducir términos semejantes.}$$

Ahora resuelva el ejercicio 49

EJEMPLO 9 Realice las operaciones indicadas.

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-6}{x^2-4}$$

Solución Primero factorizamos x^2-4. El MCD de las tres fracciones es $(x+2)(x-2)$.

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-6}{x^2-4}$$

$$= \frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-6}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{x+2}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x-2}{x-2} + \frac{x-6}{(x+2)(x-2)} \quad \textit{Multiplicar para obtener el MCD.}$$

$$= \frac{x^2+x-2}{(x+2)(x-2)} - \frac{x^2-x-2}{(x+2)(x-2)} + \frac{x-6}{(x+2)(x-2)} \quad \textit{Multiplicar numeradores.}$$

$$= \frac{x^2+x-2-(x^2-x-2)+(x-6)}{(x+2)(x-2)} \quad \textit{Restar y sumar numeradores.}$$

$$= \frac{x^2+x-2-x^2+x+2+x-6}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{3x-6}{(x+2)(x-2)} \quad \textit{Reducir términos semejantes.}$$

$$= \frac{3\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} \quad \textit{Factorizar; dividir entre factores comunes.}$$

$$= \frac{3}{x+2}$$

Ahora resuelva el ejercicio 67

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

En el ejemplo 9, encontramos que

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-6}{x^2-4} = \frac{3}{x+2}$$

Suponga que, en una calculadora graficadora, definimos

$$Y_1 = \frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-6}{x^2-4}$$

$$Y_2 = \frac{3}{x+2}$$

Si utilizamos la característica TABLE de su calculadora graficadora, ¿cómo son los valores de Y_1 y Y_2? La función Y_1 no está definida en $x = -2$ y $x = 2$. La función Y_2 no está definida en $x = -2$. Para todos los valores de x distintos de -2 y 2, los valores de Y_1 y Y_2 deben ser iguales, a menos que hayamos cometido algún error. La siguiente es una tabla de valores de Y_1 y Y_2, para valores de x de -3 a 3.

X	Y1	Y2
-3	-3	-3
-2	ERROR	ERROR
-1	3	3
0	1.5	1.5
1	1	1
2	ERROR	.75
3	.6	.6

X= -3

Las gráficas de Y_1 y Y_2 se muestran en las **figuras 6.3** y **6.4**, respectivamente. Ilustramos las gráficas en este formato (en lugar de la pantalla de una calculadora graficadora) para mostrar más detalles. El círculo vacío de la gráfica de la **figura 6.3** no es visible en una graficadora. Observe que la gráfica de Y_1 tiene un círculo vacío en 2, ya que Y_1 no está definida en $x = 2$. Como Y_2 sí está definida en ese punto, la gráfica de la **figura 6.4** no incluye este círculo abierto. Ninguna de las dos funciones está definida en $x = -2$.

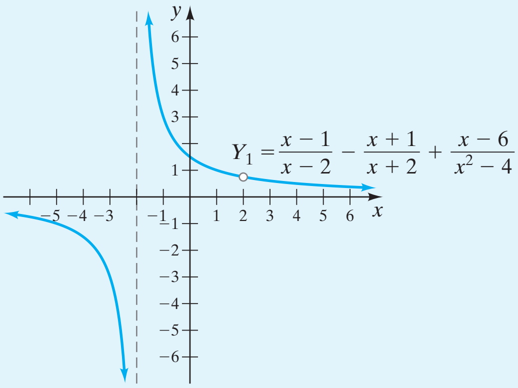


FIGURA 6.3

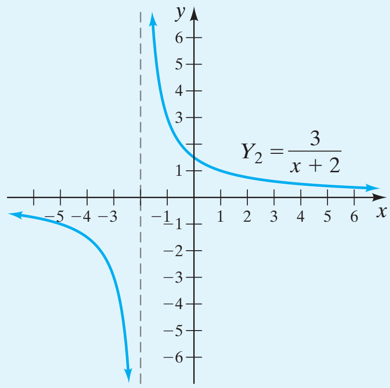


FIGURA 6.4

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

Ahora que hemos analizado las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de expresiones racionales, resumamos rápidamente los procedimientos.

Para sumar o restar expresiones racionales, obtenga el MCD. Exprese cada fracción con el MCD. Luego sume o reste los numeradores y escriba el resultado sobre el MCD.

Para multiplicar expresiones racionales, factorice cada expresión completamente, divida entre los factores comunes, multiplique los numeradores, y multiplique los denominadores.

Para dividir expresiones racionales, multiplique la primera fracción (la superior) por el recíproco de la segunda fracción (la inferior). Luego factorice cada expresión por completo, divida entre los factores comunes, multiplique los numeradores, y multiplique los denominadores.

4 Analizar una aplicación de expresiones racionales

En la sección 6.5 se abordará el tema de las aplicaciones de expresiones racionales, pero por el momento presentaremos una aplicación que implica la suma y resta de expresiones o funciones racionales.

En economía se estudian conceptos como el ingreso, el costo y la utilidad. Si $R(x)$ es una función del ingreso y $C(x)$ es una función del costo, entonces la función de la utilidad, $P(x)$, es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

donde x es el número de artículos fabricados y vendidos por una compañía. Usaremos esta información en el ejemplo 10.

EJEMPLO 10 ▸ **Botes de vela** La compañía de botes de vela Don Perrione fabrica y vende al menos seis botes cada semana.

Suponga que $$R(x) = \frac{6x - 7}{x + 2} \quad \text{y} \quad C(x) = \frac{4x - 13}{x + 3}$$

donde x es el número de botes de vela vendidos. Determine la función de la utilidad.

Solución **Entienda el problema y traduzca** Para determinar la función de la utilidad, restamos la función del costo de la función del ingreso.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$
$$P(x) = \frac{6x - 7}{x + 2} - \frac{4x - 13}{x + 3}$$

El MCD es $(x + 2)(x + 3)$.

Realice los cálculos

$$= \frac{x + 3}{x + 3} \cdot \frac{6x - 7}{x + 2} - \frac{4x - 13}{x + 3} \cdot \frac{x + 2}{x + 2} \qquad \textit{Multiplicar para obtener el MCD.}$$

$$= \frac{6x^2 + 11x - 21}{(x + 3)(x + 2)} - \frac{4x^2 - 5x - 26}{(x + 3)(x + 2)} \qquad \textit{Multiplicar los numeradores.}$$

$$= \frac{(6x^2 + 11x - 21) - (4x^2 - 5x - 26)}{(x + 3)(x + 2)} \qquad \textit{Restar los numeradores.}$$

$$= \frac{6x^2 + 11x - 21 - 4x^2 + 5x + 26}{(x + 3)(x + 2)}$$

$$= \frac{2x^2 + 16x + 5}{(x + 3)(x + 2)} \qquad \textit{Reducir términos semejantes.}$$

Responda La función de utilidad es $P(x) = \dfrac{2x^2 + 16x + 5}{(x + 3)(x + 2)}$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 81**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. **a)** ¿Qué es el mínimo común denominador de dos o más expresiones racionales?
   b) Explique cómo determinar el MCD.
   c) Por medio del procedimiento que indicó en la parte **b)**, determine el MCD de

$$\frac{5}{64x^2 - 121} \quad \text{y} \quad \frac{1}{8x^2 - 27x + 22}$$

2. **a)** Explique cómo sumar o restar dos expresiones racionales.
   b) Sume $\dfrac{4}{x + 2} + \dfrac{x}{3x^2 - 4x - 20}$ siguiendo el procedimiento que indicó en la parte **a)**.

En los ejercicios 3 y 4, **a)** *explique por qué la resta no es correcta, y* **b)** *realice la resta correcta.*

3. $\dfrac{x^2 - 4x}{(x + 3)(x - 2)} - \dfrac{x^2 + x - 2}{(x + 3)(x - 2)} \neq \dfrac{x^2 - 4x - x^2 + x - 2}{(x + 3)(x - 2)}$

4. $\dfrac{x - 5}{(x + 4)(x - 3)} - \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x + 4)(x - 3)} \neq \dfrac{x - 5 - x^2 - 6x + 5}{(x + 4)(x - 3)}$

Práctica de habilidades

Sume o reste.

5. $\frac{3x}{x+2}+\frac{5}{x+2}$

6. $\frac{3x}{x+4}+\frac{12}{x+4}$

7. $\frac{7x}{x-5}-\frac{2}{x-5}$

8. $\frac{10x}{x-6}-\frac{60}{x-6}$

9. $\frac{x}{x+3}+\frac{9}{x+3}-\frac{2}{x+3}$

10. $\frac{2x}{x+7}+\frac{17}{x+7}-\frac{3}{x+7}$

11. $\frac{5x-6}{x-8}+\frac{2x-5}{x-8}$

12. $\frac{-4x+6}{x^2+x-6}+\frac{5x-3}{x^2+x-6}$

13. $\frac{x^2-2}{x^2+6x-7}-\frac{-4x+19}{x^2+6x-7}$

14. $\frac{-x^2}{x^2+5xy-14y^2}+\frac{x^2+xy-2y^2}{x^2+5xy-14y^2}$

15. $\frac{x^3-12x^2+45x}{x(x-8)}-\frac{x^2+5x}{x(x-8)}$

16. $\frac{3r^2+15r}{r^3+2r^2-8r}+\frac{2r^2+5r}{r^3+2r^2-8r}$

17. $\frac{3x^2-x}{2x^2-x-21}+\frac{2x-8}{2x^2-x-21}-\frac{x^2-2x+27}{2x^2-x-21}$

18. $\frac{2x^2+9x-15}{2x^2-13x+20}-\frac{3x+10}{2x^2-13x+20}-\frac{3x-5}{2x^2-13x+20}$

Determine el mínimo común denominador.

19. $\frac{5}{2a^2}+\frac{9}{3a^3}$

20. $\frac{1}{9x^2}-\frac{8}{6x^5}$

21. $\frac{-4}{8x^2y^2}+\frac{7}{5x^4y^6}$

22. $\frac{x+12}{16x^2y}-\frac{x^2}{3x^3}$

23. $\frac{2}{3a^4b^2}+\frac{7}{2a^3b^5}$

24. $\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x-3}$

25. $\frac{4x}{x+3}+\frac{6}{x+9}$

26. $\frac{4}{(r-7)(r+2)}-\frac{r+8}{r-7}$

27. $5z^2+\frac{9z}{z-6}$

28. $\frac{b^2+3}{18b}-\frac{b-7}{12(b+8)}$

29. $\frac{x}{x^4(x-2)}-\frac{x+9}{x^2(x-2)^3}$

30. $\frac{x+2}{(x-3)^3(x+4)^2}+\frac{x-7}{(x+4)^4(x-9)}$

31. $\frac{a-2}{a^2-5a-24}+\frac{3}{a^2+11a+24}$

32. $\frac{3x-5}{6x^2+13xy+6y^2}+\frac{3}{3x^2+5xy+2y^2}$

33. $\frac{x}{2x^2-7x+3}+\frac{x-3}{4x^2+4x-3}-\frac{x^2+1}{2x^2-3x-9}$

34. $\frac{3}{x^2+3x-4}-\frac{4}{4x^2+5x-9}+\frac{x+2}{4x^2+25x+36}$

Sume o reste.

35. $\frac{2}{3r}+\frac{8}{r}$

36. $\frac{9}{x^2}+\frac{3}{2x}$

37. $\frac{5}{12x}-\frac{1}{4x^2}$

38. $\frac{5x}{4y}+\frac{7}{6xy}$

39. $\frac{3}{8x^4y}+\frac{1}{5x^2y^3}$

40. $\frac{7}{4xy^3}+\frac{1}{6x^2y}$

41. $\frac{b}{a-b}-\frac{a+b}{b}$

42. $\frac{4x}{3xy}+11$

43. $\frac{a}{a-b}-\frac{a}{b-a}$

44. $\frac{9}{b-2}+\frac{3b}{2-b}$

45. $\frac{4x}{x-4}+\frac{x+3}{x+1}$

46. $\frac{x}{x^2-9}-\frac{4(x-3)}{x+3}$

47. $\frac{3}{a+2}+\frac{3a+1}{a^2+4a+4}$

48. $\frac{2m+9}{m-5}-\frac{4}{m^2-3m-10}$

49. $\frac{x}{x^2+2x-8}+\frac{x+1}{x^2-3x+2}$

50. $\frac{-x^2+5x}{(x-5)^2}+\frac{x+8}{x-5}$

51. $\frac{5x}{x^2-9x+8}-\frac{3(x+2)}{x^2-6x-16}$

52. $\frac{2}{(2p-3)(p+4)}-\frac{3}{(p+4)(p-4)}$

53. $4-\frac{x-1}{x^2+3x-10}$

54. $\frac{3x}{2x-3}+\frac{3x+6}{2x^2+x-6}$

55. $\frac{3a+2}{4a+1}-\frac{3a+6}{4a^2+9a+2}$

56. $\frac{7}{3q^2+q-4}+\frac{9q+2}{3q^2-2q-8}$

57. $\frac{x-y}{x^2-4xy+4y^2}+\frac{x-3y}{x^2-4y^2}$

58. $\frac{x+2y}{x^2-xy-2y^2}-\frac{y}{x^2-3xy+2y^2}$

59. $\frac{2r}{r-4}-\frac{2r}{r+4}+\frac{64}{r^2-16}$

60. $\frac{4}{p+1}+\frac{3}{p-1}+\frac{p+4}{p^2-1}$

61. $\frac{-4}{x^2+2x-3} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-1}$

62. $\frac{2}{x^2-16} + \frac{x+1}{x^2+8x+16} + \frac{3}{x-4}$

63. $\frac{3}{3x-2} - \frac{1}{x-4} + 5$

64. $\frac{x}{3x+4} + \frac{3x+2}{x-5} - \frac{7x^2+24x+28}{3x^2-11x-20}$

65. $2 - \frac{1}{8r^2+2r-15} + \frac{r+2}{4r-5}$

66. $\frac{x}{x^2-10x+24} - \frac{3}{x-6} + 1$

67. $\frac{3}{5x+6} + \frac{x^2-x}{5x^2-4x-12} - \frac{4}{x-2}$

68. $\frac{3}{x^2-13x+36} + \frac{4}{2x^2-7x-4} + \frac{1}{2x^2-17x-9}$

69. $\frac{3m}{6m^2+13mn+6n^2} + \frac{2m}{4m^2+8mn+3n^2}$

70. $\frac{(x-y)^2}{x^3-y^3} + \frac{2}{x^2+xy+y^2}$

71. $\frac{5r-2s}{25r^2-4s^2} - \frac{2r-s}{10r^2-rs-2s^2}$

72. $\frac{6}{(2r-1)^2} + \frac{2}{2r-1} - 3$

73. $\frac{2}{2x+3y} - \frac{4x^2-6xy+9y^2}{8x^3+27y^3}$

74. $\frac{4}{4x-5y} - \frac{3x^2+2y^2}{64x^3-125y^3}$

Resolución de problemas

75. Cuando dos expresiones racionales se suman o restan, ¿sus numeradores deben factorizarse? Explique.

76. ¿Las expresiones $\frac{x-3}{4-x}$ y $-\frac{x-3}{x-4}$ son equivalentes? Explique.

77. ¿Las expresiones $\frac{8-x}{3-x}$ y $\frac{x-8}{x-3}$ son equivalentes? Explique.

78. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales, ¿$(f+g)(x)$ siempre será una función racional?

79. Si $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ y $g(x) = \frac{x}{x+4}$, determine

a) el dominio de $f(x)$.
b) el dominio de $g(x)$.
c) $(f+g)(x)$.
d) el dominio de $(f+g)(x)$.

80. Si $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$ y $g(x) = \frac{x}{x-3}$, determine

a) el dominio de $f(x)$.
b) el dominio de $g(x)$.
c) $(f+g)(x)$.
d) el dominio de $(f+g)(x)$.

Utilidad *En los ejercicios 81 a 84, determine la función de la utilidad, P(x). (Vea el ejemplo 10.)*

81. $R(x) = \frac{4x-5}{x+1}$ y $C(x) = \frac{2x-7}{x+2}$

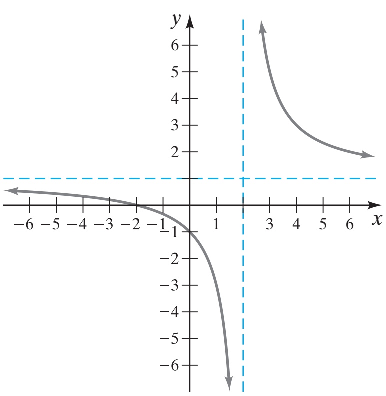
82. $R(x) = \frac{5x-2}{x+2}$ y $C(x) = \frac{3x-4}{x+1}$

83. $R(x) = \frac{8x-3}{x+2}$ y $C(x) = \frac{5x-8}{x+3}$

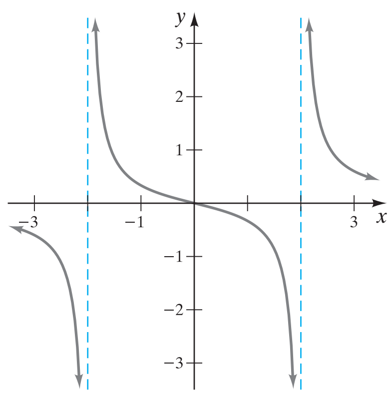
84. $R(x) = \frac{7x-10}{x+3}$ y $C(x) = \frac{5x-8}{x+4}$

En las figuras siguientes, las líneas punteadas de color rojo se denominan ***asíntotas****. Las asíntotas no son parte de la gráfica pero se utilizan para mostrar valores a los que ésta se aproxima, pero no toca. En los ejercicios 85 y 86, determine el dominio y el rango de la función racional que se muestra.*

85.



86.



En los ejercicios 87 a 90, utilice $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ *y* $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + x - 6}$. *Determine lo siguiente.*

87. $(f + g)(x)$

88. $(f - g)(x)$

89. $(f \cdot g)(x)$

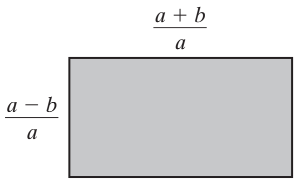
90. $(f/g)(x)$

91. Demuestre que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$.

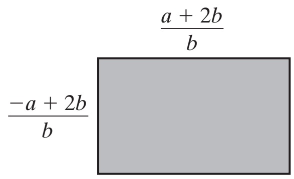
92. Demuestre que $x^{-1} + y^{-1} = \dfrac{x + y}{xy}$.

Área y perímetro *Observe los rectángulos siguientes. Determine* **a)** *su perímetro;* **b)** *su área.*

93.



94.



Determine el polinomio que debe colocarse en el área sombreada para obtener un enunciado verdadero. Explique cómo determinó su respuesta.

95. $\dfrac{5x^2 - 6}{x^2 - x - 1} - \dfrac{\boxed{}}{x^2 - x - 1} = \dfrac{-2x^2 + 6x - 12}{x^2 - x - 1}$

96. $\dfrac{r^2 - 6}{r^2 - 5r + 6} - \dfrac{\boxed{}}{r^2 - 5r + 6} = \dfrac{1}{r - 2}$

Realice las operaciones indicadas.

97. $\left(3 + \dfrac{1}{x + 3}\right)\left(\dfrac{x + 3}{x - 2}\right)$

98. $\left(\dfrac{3}{r + 1} - \dfrac{4}{r - 2}\right)\left(\dfrac{r - 2}{r + 10}\right)$

99. $\left(\dfrac{5}{a - 5} - \dfrac{2}{a + 3}\right) \div (3a + 25)$

100. $\left(\dfrac{x^2 + 4x - 5}{2x^2 + x - 3} \cdot \dfrac{2x + 3}{x + 1}\right) - \dfrac{2}{x + 2}$

101. $\left(\dfrac{x + 5}{x - 3} - x\right) \div \dfrac{1}{x - 3}$

102. $\left(\dfrac{x + 5}{x^2 - 25} + \dfrac{1}{x + 5}\right)\left(\dfrac{2x^2 - 13x + 15}{4x^2 - 6x}\right)$

103. El promedio ponderado de dos valores a y b está dado por $a\left(\dfrac{x}{n}\right) + b\left(\dfrac{n - x}{n}\right)$, donde $\dfrac{x}{n}$ es el peso dado a a y $\dfrac{n - x}{n}$ es el peso dado a b.

a) Exprese esta suma como una sola fracción.

b) En un examen a usted recibió una calificación de 60, y en un examen b obtuvo 92. Si el examen a cuenta $\dfrac{2}{5}$ de su calificación final y el examen b cuenta $\dfrac{3}{5}$, determine su promedio ponderado.

104. Demuestre que $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^{-1} + (xy)^{-1} = \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{xy}$.

En los ejercicios 105 y 106, realice la operación indicada.

105. $(a - b)^{-1} + (a - b)^{-2}$

106. $\left(\dfrac{a - b}{a}\right)^{-1} - \left(\dfrac{a + b}{a}\right)^{-1}$

Utilice su calculadora graficadora para determinar si las sumas siguientes son correctas.

107. $\dfrac{x - 3}{x + 4} + \dfrac{x}{x^2 - 2x - 24} \stackrel{?}{=} \dfrac{x^2 - 10x + 18}{(x + 4)(x - 6)}$

108. $\dfrac{x - 2}{x^2 - 25} + \dfrac{x - 2}{2x^2 + 17x + 35} \stackrel{?}{=} \dfrac{3x^2 - 4x - 4}{(x + 5)(x - 5)(2x + 7)}$

Retos

109. Exprese cada suma como una sola fracción.

a) $1 + \dfrac{1}{x}$

b) $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

c) $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}$

d) $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \cdots + \dfrac{1}{x^n}$

110. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Determine $f(a + h) - f(a)$.

111. Sea $g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$. Determine $g(a + h) - g(a)$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.4] **112. Llenado de cajas** Una máquina llena cajas de cereal a una velocidad de 80 por minuto. Después, la máquina baja su velocidad a 60 cajas por minuto. Si la suma de los dos periodos fue de 14 minutos y el número de cajas llenadas a alta velocidad fue el mismo que el número resultante a baja velocidad, determine **a)** el tiempo que trabajó la máquina a alta velocidad, y **b)** cuántas cajas llenó durante los 14 minutos.

[2.6] **113.** Resuelva para x y proporcione la solución en notación de conjuntos. $|x - 3| - 6 < -1$

[3.4] **114.** Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, 3)$ y $(7, -3)$.

[4.5] **115.** Evalúe el determinante $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$.

[5.3] **116.** Divida $\dfrac{6x^2 - 5x + 6}{2x + 3}$.

[5.8] **117.** Resuelva $3p^2 = 22p - 7$.

6.3 Fracciones complejas

1. Reconocer fracciones complejas.
2. Simplificar fracciones complejas multiplicando por un denominador común.
3. Simplificar fracciones complejas simplificando el numerador y el denominador.

1 Reconocer fracciones complejas

Una **fracción compleja** es aquella que contiene una expresión fraccionaria en su numerador, en su denominador, o en ambos.

Ejemplos de fracciones complejas

$$\frac{\frac{2}{3}}{5}, \quad \frac{\frac{x+1}{x}}{4x}, \quad \frac{\frac{x}{y}}{x+1}, \quad \frac{\frac{a+b}{a}}{\frac{a-b}{b}}, \quad \frac{9 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{8}{x}}$$

La expresión que se encuentra sobre la **línea principal de la fracción** es el numerador, y la expresión que está debajo de ella es el denominador.

$$\frac{\boxed{\dfrac{a+b}{a}}}{\boxed{\dfrac{a-b}{b}}}$$

$\dfrac{a+b}{a}$ ⟵ numerador de la fracción compleja

——— ⟵ línea principal de la fracción

$\dfrac{a-b}{b}$ ⟵ denominador de la fracción compleja

A continuación explicaremos dos métodos que pueden utilizarse para simplificar las fracciones complejas. Simplificar una expresión compleja, significa escribirla eliminando las fracciones de su numerador y de su denominador.

2 Simplificar fracciones complejas multiplicando por un denominador común

El primer método implica la multiplicación del numerador y del denominador de la fracción compleja por un denominador común.

Para simplificar una fracción compleja multiplicando por un denominador común

1. Determine el mínimo común denominador de todas las fracciones que aparecen en la fracción compleja. Éste es el MCD de la fracción compleja.
2. Multiplique el numerador y el denominador de la fracción compleja por el MCD que se determinó en el paso 1.
3. Simplifique lo más posible.

En el paso 2, en realidad se multiplica la fracción compleja por $\frac{\text{MCD}}{\text{MCD}}$, lo cual es equivalente a multiplicarla por 1.

EJEMPLO 1 Simplifique $\dfrac{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x}}{\dfrac{x^2}{5}}$.

Solución Los denominadores de la fracción compleja son x^2, x y 5. Por lo tanto, el MCD de la fracción compleja es $5x^2$. Multiplicamos el numerador y el denominador por $5x^2$.

$$\frac{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x}}{\dfrac{x^2}{5}} = \frac{5x^2\left(\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x}\right)}{5x^2\left(\dfrac{x^2}{5}\right)}$$

Multiplicar el numerador y el denominador por $5x^2$.

$$= \frac{5\cancel{x^2}\left(\dfrac{4}{\cancel{x^2}}\right) - 5\overset{x}{\cancel{x^2}}\left(\dfrac{3}{\cancel{x}}\right)}{\cancel{5}x^2\left(\dfrac{x^2}{\cancel{5}}\right)}$$

Propiedad distributiva.

$$= \frac{20 - 15x}{x^4}$$

Simplificar.

Ahora resuelva el ejercicio 13

EJEMPLO 2 Simplifique $\dfrac{a + \dfrac{3}{b}}{b + \dfrac{3}{a}}$.

Solución Multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción compleja por su MCD, ab.

$$\frac{a + \frac{3}{b}}{b + \frac{3}{a}} = \frac{ab\left(a + \frac{3}{b}\right)}{ab\left(b + \frac{3}{a}\right)}$$ *Multiplicar el numerador y el denominador por ab.*

$$= \frac{a^2b + 3a}{ab^2 + 3b}$$ *Propiedad distributiva.*

$$= \frac{a\cancel{(ab + 3)}}{b\cancel{(ab + 3)}} = \frac{a}{b}$$ *Factorizar y simplificar.*

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 17**

EJEMPLO 3 ▸ Simplifique $\dfrac{a^{-1} + ab^{-2}}{ab^{-2} - a^{-2}b^{-1}}$.

Solución Primero rescribimos cada expresión sin exponentes negativos.

$$\frac{a^{-1} + ab^{-2}}{ab^{-2} - a^{-2}b^{-1}} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2}}{\frac{a}{b^2} - \frac{1}{a^2b}}$$

$$= \frac{a^2b^2\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2}\right)}{a^2b^2\left(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{a^2b}\right)}$$ *Multiplicar el numerador y el denominador por a^2b^2, el MCD de la fracción compleja.*

$$= \frac{\overset{a}{\cancel{a^2}}\, b^2\left(\frac{1}{\cancel{a}}\right) + a^2\cancel{b^2}\left(\frac{a}{\cancel{b^2}}\right)}{a^2\cancel{b^2}\left(\frac{a}{\cancel{b^2}}\right) - \cancel{a^2}\,\overset{b}{\cancel{b^2}}\left(\frac{1}{\cancel{a^2}\,\cancel{b}}\right)}$$ *Propiedad distributiva.*

$$= \frac{ab^2 + a^3}{a^3 - b}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 43**

Aunque en el ejemplo 3 podríamos factorizar una a de ambos términos en el numerador de la respuesta, no seríamos capaces de simplificar más la respuesta dividiendo entre los factores comunes. De modo que conservaremos la respuesta hasta ese punto.

3 Simplificar fracciones complejas simplificando el numerador y el denominador

Las fracciones complejas también pueden simplificarse como sigue:

Para simplificar una fracción compleja simplificando el numerador y el denominador

1. Sume o reste, lo que sea necesario, para obtener una expresión racional en el numerador.
2. Sume o reste, lo que sea necesario, para obtener una expresión racional en el denominador.
3. Invierta el denominador de la fracción compleja y multiplique por el numerador de la fracción compleja.
4. Simplifique lo más posible.

El ejemplo 4 ilustra cómo puede simplificarse la fracción compleja del ejemplo 1 mediante este segundo método.

EJEMPLO 4 Simplifique $\dfrac{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{x}}{\dfrac{x^2}{5}}$.

Solución Restamos las fracciones del numerador para obtener una expresión racional en él. El denominador común de las fracciones del numerador es x^2.

$$\frac{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{x}}{\dfrac{x^2}{5}} = \frac{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{x}\cdot\dfrac{x}{x}}{\dfrac{x^2}{5}}$$

Obtener el denominador común en el numerador.

$$= \frac{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{5}}$$

$$= \frac{\dfrac{4-3x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{5}}$$

$$= \frac{4-3x}{x^2}\cdot\frac{5}{x^2}$$

Invertir el denominador y multiplicar.

$$= \frac{5(4-3x)}{x^4}$$

$$\text{o} \quad \frac{20-15x}{x^4}$$

Ésta es la misma respuesta que se obtuvo en el ejemplo 1.

Ahora resuelva el ejercicio 13

Sugerencia útil

Algunos estudiantes prefieren el segundo método cuando la fracción compleja consta de una sola fracción sobre una fracción única, como

$$\frac{\dfrac{x+3}{18}}{\dfrac{x-8}{6}}$$

Para fracciones más complejas, muchos estudiantes optan por el primer método, ya que de esta manera no tienen que sumar fracciones.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una fracción compleja?

2. Hemos indicado dos procedimientos para trabajar con fracciones complejas. ¿Cuál procedimiento prefiere? ¿Por qué?

Práctica de habilidades

Simplifique.

3. $\dfrac{\dfrac{15a}{b^2}}{\dfrac{b^3}{5}}$

4. $\dfrac{\dfrac{10x^2y^4}{3z^3}}{\dfrac{5xy}{9z^5}}$

5. $\dfrac{\dfrac{36x^4}{5y^4z^5}}{\dfrac{9xy^2}{15z^5}}$

6. $\dfrac{\dfrac{40x^3}{7y^5z^5}}{\dfrac{8x^2y^2}{28x^4z^5}}$

7. $\dfrac{\dfrac{10x^3y^2}{9yz^4}}{\dfrac{40x^4y^7}{27y^2z^8}}$

8. $\dfrac{\dfrac{3a^4b^3}{7b^4c}}{\dfrac{15a^2b^6}{14ac^7}}$

9. $\dfrac{1-\dfrac{x}{y}}{3x}$

10. $\dfrac{2+\dfrac{a}{b}}{5b}$

11. $\dfrac{x-\dfrac{x}{y}}{\dfrac{8+x}{y}}$

12. $\dfrac{a+\dfrac{2a}{b}}{\dfrac{7+a}{b}}$

13. $\dfrac{x+\dfrac{5}{y}}{1+\dfrac{x}{y}}$

14. $\dfrac{\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}}$

15. $\dfrac{\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{2a}}{a+\dfrac{a}{2}}$

16. $\dfrac{3-\dfrac{1}{y}}{2-\dfrac{1}{y}}$

17. $\dfrac{\dfrac{a^2}{b}-b}{\dfrac{b^2}{a}-a}$

18. $\dfrac{x-\dfrac{4}{y}}{y-\dfrac{4}{x}}$

19. $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x+y}{x}}$

20. $\dfrac{\dfrac{1}{m}+\dfrac{9}{m^2}}{2+\dfrac{1}{m^2}}$

21. $\dfrac{\dfrac{a}{b}-6}{\dfrac{-a}{b}+6}$

22. $\dfrac{7-\dfrac{x}{y}}{\dfrac{x}{y}-7}$

23. $\dfrac{\dfrac{4x+8}{3x^2}}{\dfrac{4x^3}{9}}$

24. $\dfrac{\dfrac{x^2-y^2}{x}}{\dfrac{x+y}{x^4}}$

25. $\dfrac{\dfrac{a}{a+1}-1}{\dfrac{2a+1}{a-1}}$

26. $\dfrac{\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{x+4}{x}}$

27. $\dfrac{1+\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x-1}}$

28. $\dfrac{\dfrac{2}{x-1}+2}{\dfrac{2}{x+1}-2}$

29. $\dfrac{\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{a-1}{a+1}}{\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{a-1}{a+1}}$

30. $\dfrac{\dfrac{a-2}{a+2}-\dfrac{a+2}{a-2}}{\dfrac{a-2}{a+2}+\dfrac{a+2}{a-2}}$

31. $\dfrac{\dfrac{5}{5-x}+\dfrac{6}{x-5}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x-5}}$

32. $\dfrac{\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{3}{m-1}}{\dfrac{6}{m-1}}$

33. $\dfrac{\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-2}}{\dfrac{1}{x}}$

34. $\dfrac{\dfrac{2}{x^2+x-20}+\dfrac{3}{x^2-6x+8}}{\dfrac{2}{x^2+3x-10}+\dfrac{3}{x^2+2x-24}}$

35. $\dfrac{\dfrac{2}{a^2-3a+2}+\dfrac{2}{a^2-a-2}}{\dfrac{2}{a^2-1}+\dfrac{2}{a^2+4a+3}}$

36. $\dfrac{\dfrac{1}{x^2+5x+4}+\dfrac{2}{x^2+2x-8}}{\dfrac{2}{x^2-x-2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}}$

Simplifique.

37. $2a^{-2}+b$

38. $6a^{-2}+b^{-1}$

39. $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}$

40. $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{\dfrac{5}{ab}}$

41. $\dfrac{a^{-1}+1}{b^{-1}-1}$

42. $\dfrac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}$

43. $\dfrac{a^{-2}-ab^{-1}}{ab^{-2}+a^{-1}b^{-1}}$

44. $\dfrac{xy^{-1}+x^{-1}y^{-2}}{x^{-1}-x^{-2}y^{-1}}$

45. $\dfrac{\dfrac{9a}{b}+a^{-1}}{\dfrac{b}{a}+a^{-1}}$

46. $\dfrac{x^{-2}+\dfrac{3}{x}}{3x^{-1}+x^{-2}}$

47. $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{(a+b)^{-1}}$

48. $\dfrac{4a^{-1}-b^{-1}}{(a-b)^{-1}}$

49. $5x^{-1}-(3y)^{-1}$

50. $\dfrac{\dfrac{7}{x}+\dfrac{1}{y}}{(x-y)^{-1}}$

51. $\dfrac{\dfrac{2}{xy}-\dfrac{8}{y}+\dfrac{5}{x}}{3x^{-1}-4y^{-2}}$

52. $\dfrac{4m^{-1}+3n^{-1}+(2mn)^{-1}}{\dfrac{5}{m}+\dfrac{7}{n}}$

Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 53 a 56 se dan el área y el ancho de cada rectángulo. En cada caso, determine la longitud, l, mediante la división del área, A, entre el ancho, w.*

53. $A = \dfrac{x^2 + 12x + 35}{x + 3}$ $\quad w = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 5x + 6}$ $\quad l$

54. $A = \dfrac{x^2 + 10x + 16}{x + 4}$ $(x > 1)$ $\quad w = \dfrac{x^2 + 11x + 24}{x^2 + 3x - 4}$ $\quad l$

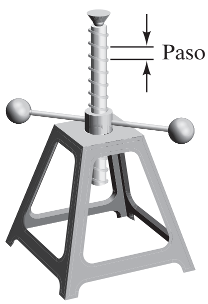
55. $A = \dfrac{x^2 + 11x + 28}{x + 5}$ $(x > 1)$ $\quad w = \dfrac{x^2 + 8x + 7}{x^2 + 4x - 5}$ $\quad l$

56. $A = \dfrac{x^2 + 17x + 72}{x + 3}$ $(x > 2)$ $\quad w = \dfrac{x^2 + 11x + 18}{x^2 + x - 6}$ $\quad l$

57. Gato mecánico La eficiencia de un gato mecánico, E, está dada por la fórmula

$$E = \frac{\frac{1}{2}h}{h + \frac{1}{2}}$$

donde h está determinada por el paso de la rosca del gato mecánico.



Determine la eficiencia de un gato mecánico cuyo valor de h es:

a) $\dfrac{2}{5}$ **b)** $\dfrac{1}{3}$

58. Resistores Si se conectan en paralelo dos resistores con resistencia R_1 y R_2, podemos determinar su resistencia combinada, R_T, mediante la fórmula:

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Simplifique el lado derecho de la fórmula.

59. Resistores Si se conectan en paralelo tres resistores con resistencia R_1, R_2 y R_3, podemos determinar su resistencia combinada mediante la fórmula:

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Simplifique el lado derecho de esta fórmula.

60. Óptica Una fórmula que se utiliza en el estudio de la óptica es

$$f = (p^{-1} + q^{-1})^{-1}$$

donde p es la distancia del objeto respecto de una lente, q es la distancia de la imagen respecto de la lente, y f es la longitud focal de la lente. Exprese el lado derecho de la fórmula sin exponentes negativos.

61. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, determine $f(f(a))$.

62. Si $f(x) = \dfrac{2}{x + 2}$, determine $f(f(a))$.

Retos

Para cada función, determine $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

63. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

64. $f(x) = \dfrac{5}{x}$

65. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

66. $f(x) = \dfrac{6}{x - 1}$

67. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

68. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

Simplifique.

69. $\dfrac{1}{2a + \dfrac{1}{2a + \dfrac{1}{2a}}}$

70. $\dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x + 1}}}$

71. $\dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}}}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **72.** Evalúe $\dfrac{\left|-\frac{3}{9}\right| - \left(-\frac{5}{9}\right)\cdot\left|-\frac{3}{8}\right|}{|-5-(-3)|}$.

[2.5] **73.** Resuelva $\frac{3}{5} < \frac{-x-5}{3} < 6$ y proporcione la solución en la notación de intervalos.

[2.6] **74.** Resuelva $|x - 1| = |2x - 4|$.

[3.5] **75.** Determine si las dos rectas representadas por las siguientes ecuaciones son paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas.

$$6x + 2y = 5$$
$$4x - 9 = -2y$$

6.4 Resolución de ecuaciones racionales

1 Resolver ecuaciones racionales.
2 Verificar soluciones.
3 Resolver proporciones.
4 Resolver problemas que incluyen funciones racionales.
5 Resolver problemas de aplicación mediante expresiones racionales.
6 Despejar una variable en una fórmula con expresiones racionales.

1 Resolver ecuaciones racionales

En las secciones 6.1 a 6.3 se presentaron técnicas para sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones racionales. En esta sección analizaremos un método para resolver ecuaciones racionales. Una **ecuación racional** es aquella que contiene al menos una expresión racional.

Para resolver ecuaciones racionales

1. Determine el MCD de todas las expresiones racionales de la ecuación.
2. Multiplique *ambos* lados de la ecuación por el MCD. Esto dará por resultado que todos los términos de la ecuación queden multiplicados por el MCD.
3. Elimine los paréntesis que haya y reduzca los términos semejantes de cada lado de la ecuación.
4. Resuelva la ecuación utilizando las propiedades analizadas en secciones anteriores.
5. Verifique la solución en la ecuación *original*.

En el paso 2, multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD para eliminar fracciones. En algunos de los ejemplos siguientes no se mostrará la verificación para ahorrar espacio.

EJEMPLO 1 Resuelva $\frac{3x}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2x-3}{4}$.

Solución Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD, 4. Después utilizamos la propiedad distributiva, con la cual cada término de la ecuación quedará multiplicado por el MCD.

$$\boxed{4}\left(\frac{3x}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2x-3}{4}\cdot\boxed{4} \qquad \textit{Multiplicar ambos lados por 4.}$$

$$4\left(\frac{3x}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2x - 3 \qquad \textit{Propiedad distributiva.}$$

$$3x + 2 = 2x - 3$$
$$x + 2 = -3$$
$$x = -5$$

Una comprobación mostrará que -5 es la solución.

Ahora resuelva el ejercicio 15

2 Verificar soluciones

Siempre que aparezca una variable en algún denominador, usted deberá verificar su probable solución en la ecuación original. Si al hacerlo resulta que la solución probable da por resultado que un denominador sea igual a 0, ese valor no es solución de la ecuación. Estos valores son las **raíces extrañas** o **soluciones extrañas**. Una raíz extraña es un número que se obtiene al resolver una ecuación, pero que no es solución de la ecuación original.

EJEMPLO 2 Resuelva $2 - \frac{4}{x} = \frac{1}{3}$.

Solución Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD, $3x$.

$$\boxed{3x}\left(2 - \frac{4}{x}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \boxed{3x} \quad \textit{Multiplicar ambos lados por 3x.}$$

$$3x(2) - 3\cancel{x}\left(\frac{4}{\cancel{x}}\right) = \left(\frac{1}{\cancel{3}}\right)\cancel{3}x \quad \textit{Propiedad distributiva.}$$

$$6x - 12 = x$$
$$5x - 12 = 0$$
$$5x = 12$$
$$x = \frac{12}{5}$$

Compruebe

$$2 - \frac{4}{x} = \frac{1}{3}$$

$$2 - \frac{4}{\frac{12}{5}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{3} \quad \textit{Sustituir x por } \frac{12}{5}.$$

$$2 - \frac{20}{12} \stackrel{?}{=} \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \textit{Verdadero.}$$

Ahora resuelva el ejercicio 21

EJEMPLO 3 Resuelva $x - \frac{6}{x} = -5$.

Solución

$$\boxed{x} \cdot \left(x - \frac{6}{x}\right) = -5 \cdot \boxed{x} \quad \textit{Multiplicar ambos lados por el MCD, x.}$$

$$x(x) - \cancel{x}\left(\frac{6}{\cancel{x}}\right) = -5x \quad \textit{Propiedad distributiva.}$$

$$x^2 - 6 = -5x$$
$$x^2 + 5x - 6 = 0$$
$$(x - 1)(x + 6) = 0$$
$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 6 = 0$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = -6$$

Al comprobar 1 y -6 se mostrará que ambos números son soluciones para la ecuación.

Ahora resuelva el ejercicio 35

EJEMPLO 4 Resuelva $\frac{3x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x - 2} = \frac{2}{x + 2}$.

Solución Primero factorice el denominador, $x^2 - 4$, y luego determine el MCD.

$$\frac{3x}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{1}{x - 2} = \frac{2}{x + 2}$$

El MCD es $(x + 2)(x - 2)$. Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD, y después utilizamos la propiedad distributiva. Este proceso eliminará las fracciones de la ecuación.

$$(x+2)(x-2)\cdot\left[\frac{3x}{(x+2)(x-2)}+\frac{1}{x-2}\right]=\frac{2}{x+2}\cdot(x+2)(x-2)$$

$$\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}\cdot\frac{3x}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}}+(x+2)\cancel{(x-2)}\cdot\frac{1}{\cancel{(x-2)}}=\frac{2}{\cancel{(x+2)}}\cdot\cancel{(x+2)}(x-2)$$

$$\begin{aligned}3x+(x+2)&=2(x-2)\\4x+2&=2x-4\\2x+2&=-4\\2x&=-6\\x&=-3\end{aligned}$$

Una verificación mostrará que -3 es la solución.

Ahora resuelva el ejercicio 39

EJEMPLO 5 Resuelva la ecuación $\frac{22}{2p^2-9p-5}-\frac{3}{2p+1}=\frac{2}{p-5}$.

Solución Factorizamos el denominador y después determinamos el MCD.

$$\frac{22}{(2p+1)(p-5)}-\frac{3}{2p+1}=\frac{2}{p-5}$$

Multiplique ambos lados de la ecuación por el MCD, $(2p+1)(p-5)$.

$$\cancel{(2p+1)}\cancel{(p-5)}\cdot\frac{22}{\cancel{(2p+1)}\cancel{(p-5)}}-\cancel{(2p+1)}(p-5)\cdot\frac{3}{\cancel{(2p+1)}}=\frac{2}{\cancel{p-5}}\cdot(2p+1)\cancel{(p-5)}$$

$$\begin{aligned}22-3(p-5)&=2(2p+1)\\22-3p+15&=4p+2\\37-3p&=4p+2\\35&=7p\\5&=p\end{aligned}$$

Al parecer, la solución es 5. Sin embargo, hay que verificarlo, ya que aparece una variable en un denominador.

Compruebe

$$\frac{22}{2p^2-9p-5}-\frac{3}{2p+1}=\frac{2}{p-5}$$

$$\frac{22}{2(5)^2-9(5)-5}-\frac{3}{2(5)+1}\stackrel{?}{=}\frac{2}{5-5}$$ *Sustituir 5 por p.*

Indefinido $\longrightarrow$ $\frac{22}{0}-\frac{3}{11}=\frac{2}{0}$ $\longleftarrow$ Indefinido

Como 5 hace que el denominador sea 0 y la división entre 0 no está definida, 5 es una solución extraña. Por lo tanto, debe escribir como respuesta "**no existe solución**".

Ahora resuelva el ejercicio 43

En el ejemplo 5, la única posible solución es 5. Sin embargo, cuando $p=5$, el denominador $\frac{2}{p-5}$ es 0. Por lo tanto, 5 no puede ser solución. En realidad no teníamos que mostrar la comprobación completa, pero por claridad lo hicimos así en este ejemplo.

Sugerencia útil

Recuerde, siempre que resuelva una ecuación en la que aparezca una variable en algún denominador, debe verificar si la solución es o no una solución extraña. Si la solución da por resultado algún denominador 0, entonces es una solución extraña y no es una verdadera solución de la ecuación.

3 Resolver proporciones

Las **proporciones** son un tipo especial de ecuaciones racionales de la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Pueden resolverse por medio de *multiplicación cruzada* como sigue. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. Las proporciones también pueden resolverse multiplicando ambos lados de la proporción por el mínimo común denominador. En los ejemplos 6 y 7 resolveremos proporciones multiplicando ambos lados por el MCD. Luego se le pedirá que determine las soluciones, si es posible, mediante la multiplicación cruzada. *Cuando resuelva una proporción en la que el denominador de una o más razones contenga una variable, deberá verificar la solución para asegurarse de que no es extraña.*

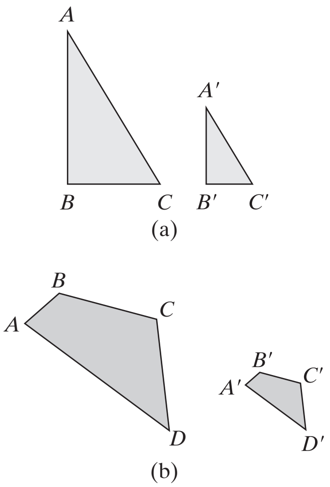


FIGURA 6.5

Las proporciones se suelen utilizar para trabajar con figuras semejantes. Las **figuras semejantes** son aquellas cuyos ángulos correspondientes son iguales y cuyos lados correspondientes son proporcionales. La **figura 6.5** ilustra dos conjuntos de figuras semejantes.

En la **figura 6.5a**, la razón de la longitud del lado AB respecto de la longitud del lado BC es igual a la razón de la longitud del lado $A'B'$ respecto de la longitud del lado $B'C'$. Es decir,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Si en un par de figuras semejantes se desconoce la longitud de un lado, con frecuencia éste puede determinarse utilizando proporciones, como se ilustra en el ejemplo 6.

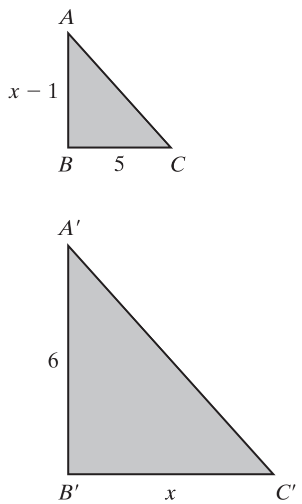


FIGURA 6.6

EJEMPLO 6 ▸ **Triángulos semejantes** Los triángulos ABC y $A'B'C'$ de la **figura 6.6** son figuras semejantes. Determine la longitud de los lados AB y $B'C'$.

Solución Podemos establecer una proporción y despejar x, para después determinar las longitudes.

$$\begin{aligned}
\frac{AB}{BC} &= \frac{A'B'}{B'C'} \\
\frac{x-1}{5} &= \frac{6}{x} \\
5x \cdot \frac{x-1}{5} &= \frac{6}{x} \cdot 5x && \text{Multiplicar ambos lados por el MCD, } 5x. \\
x(x-1) &= 6 \cdot 5 \\
x^2 - x &= 30 \\
x^2 - x - 30 &= 0 \\
(x-6)(x+5) &= 0 && \text{Factorizar el trinomio.}
\end{aligned}$$

$$x - 6 = 0 \quad \text{o} \quad x + 5 = 0$$
$$x = 6 \qquad\qquad x = -5$$

Como la longitud del lado de un triángulo no puede ser un número negativo, -5 no es una respuesta posible. Al sustituir x por 6, vemos que la longitud del lado $B'C'$ es 6 y la longitud del lado AB es $6 - 1$ o 5.

Compruebe

$$\begin{aligned}
\frac{AB}{BC} &= \frac{A'B'}{B'C'} \\
\frac{5}{5} &\stackrel{?}{=} \frac{6}{6} \\
1 &= 1 && \text{Verdadero}
\end{aligned}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 49**

La respuesta del ejemplo 6 también podría haberse obtenido mediante multiplicación cruzada. Ahora, trate de resolver el ejemplo 6 mediante multiplicación cruzada.

EJEMPLO 7 Resuelva $\dfrac{x^2}{x-3} = \dfrac{9}{x-3}$.

Solución Esta ecuación es una proporción. La resolveremos multiplicando ambos lados de la ecuación por el MCD, $x - 3$.

$$\cancel{(x-3)} \cdot \frac{x^2}{\cancel{x-3}} = \frac{9}{\cancel{x-3}} \cdot \cancel{(x-3)}$$

$$x^2 = 9$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x+3)(x-3) = 0 \qquad \text{Factorizar la diferencia de dos cuadrados.}$$

$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$

$$x = -3 \qquad\qquad x = 3$$

Compruebe $x = -3$ $\qquad$ $x = 3$

$$\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3} \qquad\qquad \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$$

$$\frac{(-3)^2}{-3-3} \stackrel{?}{=} \frac{9}{-3-3} \qquad\qquad \frac{3^2}{3-3} \stackrel{?}{=} \frac{9}{3-3}$$

$$\frac{9}{-6} \stackrel{?}{=} \frac{9}{-6} \qquad\qquad \frac{9}{0} \stackrel{?}{=} \frac{9}{0} \quad \longleftarrow \text{Indefinido}$$

$$-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \qquad \text{Verdadero}$$

Como $x = 3$, hace que el denominador sea 0, entonces 3 *no* es solución de la ecuación, sino una raíz extraña. La única solución de la ecuación es -3.

Ahora resuelva el ejercicio 45

En el ejemplo 7, ¿qué se obtendría si se comenzara con la multiplicación cruzada? Resuélvalo así y observe.

4 Resolver problemas que incluyen funciones racionales

Ahora resolveremos un problema que implica una función racional.

EJEMPLO 8 Considere la función $f(x) = x - \dfrac{2}{x}$. Determine todos los valores de a para los que $f(a) = 1$.

Solución Como $f(a) = a - \dfrac{2}{a}$, necesitamos encontrar todos los valores para los que $a - \dfrac{2}{a} = 1$, $a \neq 0$. Empezaremos por multiplicar ambos lados de la ecuación por a, el MCD.

$$a \cdot \left(a - \frac{2}{a}\right) = a \cdot 1$$

$$a^2 - 2 = a$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a-2)(a+1) = 0$$

$$a - 2 = 0 \quad \text{o} \quad a + 1 = 0$$

$$a = 2 \qquad\qquad a = -1$$

Compruebe

$$f(x) = x - \frac{2}{x}$$
$$f(2) = 2 - \frac{2}{2} = 2 - 1 = 1$$
$$f(-1) = -1 - \frac{2}{(-1)} = -1 + 2 = 1$$

Para $a = 2$, o $a = -1$, $f(a) = 1$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 53**

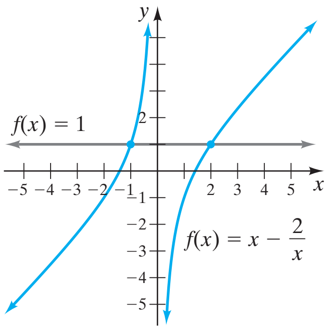


FIGURA 6.7

En el ejemplo 8, usamos $f(x) = x - \frac{2}{x}$. La **figura 6.7** muestra la gráfica de $f(x) = x - \frac{2}{x}$. En este curso no tendrá que graficar funciones como ésta. Ilustramos esta gráfica para reforzar la respuesta obtenida en el ejemplo 8.

Observe que la función está indefinida en $x = 0$, y que cuando $x = -1$ o $x = 2$, parece que $f(x) = 1$. Esto es lo que esperamos con base en los resultados obtenidos en el ejemplo 8.

El ejemplo 8 también podría haber sido resuelto por medio de una calculadora graficadora, estableciendo $y_1 = x - \frac{2}{x}$ y $y_2 = 1$ y determinando la coordenada x de las intersecciones de las dos rectas.

5 Resolver problemas de aplicación mediante expresiones racionales

Ahora veamos un problema de aplicación que involucra ecuaciones racionales.

EJEMPLO 9 ▸ **Resistencia total** En electrónica, la resistencia total R_T, de los resistores conectados en un circuito paralelo, se determina mediante la fórmula

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

donde $R_1, R_2, R_3, \ldots R_n$ son las resistencias de los resistores individuales (medidos en ohms, con el símbolo Ω) del circuito. Determine la resistencia total si dos resistores, uno de 100 ohms y el otro de 300 ohms, se conectan en un circuito paralelo. Vea la **figura 6.8**.

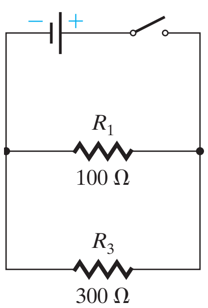


FIGURA 6.8

Solución Como sólo hay dos resistencias, utilizamos la fórmula

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Sea $R_1 = 100$ ohms y $R_2 = 300$ ohms; entonces

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{100} + \frac{1}{300}$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD, $300R_T$.

$$300R_T \cdot \frac{1}{R_T} = 300R_T\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{300}\right)$$
$$300\,\cancel{R_T} \cdot \frac{1}{\cancel{R_T}} = \overset{3}{\cancel{300}}R_T\left(\frac{1}{\cancel{100}}\right) + \cancel{300}R_T\left(\frac{1}{\cancel{300}}\right)$$
$$300 = 3R_T + R_T$$
$$300 = 4R_T$$
$$R_T = \frac{300}{4} = 75$$

Así, la resistencia total del circuito paralelo es de 75 ohms. Tenga en cuenta que hay menos resistencia cuando los resistores se conectan en paralelo que cuando están en forma separada.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 95**

6 Despejar una variable en una fórmula con expresiones racionales

En ocasiones se puede dar la necesidad de despejar una variable en una fórmula en la que dicha variable aparece en más de un término. Cuando esto sucede, es posible despejar la variable mediante factorización. Para hacerlo agrupe en un lado de la ecuación todos los términos que contienen la variable que quiere despejar, y todos los demás términos en el otro lado. Luego factorice la variable. Este proceso se ilustra en los ejemplos 10 a 12.

EJEMPLO 10 ▶ **Óptica** Una fórmula que se utiliza en óptica es $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$. En la fórmula, p representa la distancia a la que está un objeto respecto de una lente o espejo, q representa la distancia de la imagen respecto de la lente o espejo, y f la longitud focal de la lente o espejo. En el caso de las personas que utilizan anteojos, la distancia de la imagen es la distancia que hay entre las lentes y su retina. Vea la **figura 6.9**. Despeje f de esta fórmula.

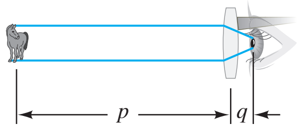


FIGURA 6.9

Solución Nuestro objetivo es aislar la variable f. Comenzamos por multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, pqf, para eliminar fracciones.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$$

$$pqf\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=pqf\left(\frac{1}{f}\right) \quad \text{Multiplicar ambos lados por el MCD, } pqf.$$

$$\cancel{p}qf\left(\frac{1}{\cancel{p}}\right)+p\cancel{q}f\left(\frac{1}{\cancel{q}}\right)=pq\cancel{f}\left(\frac{1}{\cancel{f}}\right) \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$qf+pf=pq \quad \text{Simplificar.}$$

$$f(q+p)=pq \quad \text{Factorizar } f.$$

$$\frac{f\cancel{(q+p)}}{\cancel{q+p}}=\frac{pq}{q+p} \quad \text{Dividir ambos lados entre } q+p.$$

$$f=\frac{pq}{q+p} \quad \text{o} \quad f=\frac{pq}{p+q}$$

▶ **Ahora resuelva el ejercicio 69**

EJEMPLO 11 ▶ **Banca** Una fórmula que se utiliza en la banca es $A = P + Prt$, donde A representa la cantidad que debe pagarse al banco cuando se prestan P dólares a una tasa de interés simple, r, durante el tiempo, t, en años. Despeje P de esta ecuación.

Solución Como los dos términos que contienen la variable P están en el lado derecho de la ecuación, factorizamos P en ambos términos.

$$A=P+Prt \quad P \text{ está en ambos términos.}$$

$$A=P(1+rt) \quad \text{Factorizar } P.$$

$$\frac{A}{1+rt}=\frac{P(1+rt)}{1+rt} \quad \text{Dividir ambos lados entre } 1+rt \text{ para aislar a } P.$$

$$\frac{A}{1+rt}=P$$

Así, $P=\frac{A}{1+rt}$.

▶ **Ahora resuelva el ejercicio 73**

EJEMPLO 12 **Física** Una fórmula que se usa para calcular la fuerza de las palancas es $d = \dfrac{fl}{f + w}$. Despeje f de esta fórmula.

Solución Empezamos por multiplicar ambos lados de la fórmula por $f + w$ para eliminar fracciones. Luego rescribimos la expresión con todos los términos que contienen f a un lado del signo igual, y todos los términos que no incluyen dicha variable al otro lado del signo igual.

$$d = \frac{fl}{f + w}$$

$$d(f + w) = \frac{fl}{\cancel{(f + w)}} \cdot \cancel{(f + w)} \qquad \text{Multiplicar por } f + w \text{ para eliminar fracciones.}$$

$$d(f + w) = fl$$

$$df + dw = fl \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$df - df + dw = fl - df \qquad \text{Aislar en el lado derecho de la ecuación los términos que contengan a } f.$$

$$dw = fl - df$$

$$dw = f(l - d) \qquad \text{Factorizar } f.$$

$$\frac{dw}{l - d} = \frac{f\cancel{(l - d)}}{\cancel{l - d}} \qquad \text{Aislar } f \text{ dividiendo ambos lados entre } l - d.$$

$$\frac{dw}{l - d} = f$$

Así, $f = \dfrac{dw}{l - d}$.

Ahora resuelva el ejercicio 79

Cómo evitar errores comunes

Después de resolver ecuaciones, como se hizo en esta sección, algunos estudiantes olvidan conservar su denominador común cuando suman o restan expresiones racionales. Recuerde, multiplicamos ambos lados de una *ecuación* por el MCD para eliminar el denominador común. Si *sumamos* o *restamos expresiones racionales*, escribimos las fracciones con el MCD y luego sumamos o restamos los numeradores, pero *conservamos el denominador común.*

Por ejemplo, considere el problema de suma

$$\frac{x}{x + 7} + \frac{3}{x + 7}$$

CORRECTO	INCORRECTO
$\dfrac{x}{x + 7} + \dfrac{3}{x + 7} = \dfrac{x + 3}{x + 7}$	$\cancel{\dfrac{x}{x + 7} + \dfrac{3}{x + 7} = (x + 7)\left(\dfrac{x}{x + 7} + \dfrac{3}{x + 7}\right)}$ $= x + 3$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una raíz extraña?
2. ¿En qué circunstancias es necesario verificar las respuestas que dan por resultado raíces extrañas?
3. Analice la ecuación $\dfrac{x}{4} - \dfrac{x}{3} = 2$ y la expresión $\dfrac{x}{4} - \dfrac{x}{3} + 2$.
   a) ¿Cuál es el primer paso para resolver la ecuación? Explique qué efecto tendrá el primer paso sobre la ecuación.
   b) Resuelva la ecuación.
   c) ¿Cuál es el primer paso para simplificar la expresión? Explique qué efecto tendrá este primer paso sobre la expresión.
   d) Simplifique la expresión.

4. Considere la ecuación $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 3$ y la expresión $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + 3$.

   a) ¿Cuál es el primer paso para resolver la ecuación? Explique qué efecto tendrá el primer paso sobre la ecuación.

   b) Resuelva la ecuación.

   c) ¿Cuál es el primer paso para simplificar la expresión? Explique qué efecto tendrá este primer paso sobre la expresión.

   d) Simplifique la expresión.

5. ¿Qué son las figuras semejantes?

6. **a)** Explique cómo resolver una ecuación racional.

   b) Resuelva $\frac{3}{x-4} + \frac{1}{x+4} = \frac{4}{x^2-16}$ siguiendo el procedimiento indicado en la parte **a)**.

7. Tom Kelly al resolver una ecuación que contenía el término $\frac{7}{x-3}$ obtuvo la respuesta $x = 3$. ¿Puede ser correcta esta respuesta? Explique.

8. Geurfino Muldo al resolver una ecuación que contenía el término $\frac{21x}{x^2-16}$, obtuvo la respuesta $x = 4$. ¿Esta respuesta puede ser correcta? Explique.

Práctica de habilidades

Resuelva cada ecuación y compruebe su solución.

9. $\frac{5}{x} = 1$

10. $\frac{12}{x} = 3$

11. $\frac{11}{b} = 2$

12. $\frac{1}{4} = \frac{z+2}{12}$

13. $\frac{6x+7}{5} = \frac{2x+9}{3}$

14. $\frac{a+2}{7} = \frac{a-3}{2}$

15. $\frac{3x}{8} + \frac{1}{4} = \frac{2x-3}{8}$

16. $\frac{3x}{10} + \frac{2}{5} = \frac{4x-3}{5}$

17. $\frac{z}{3} - \frac{3z}{4} = -\frac{5z}{12}$

18. $\frac{w}{2} + \frac{2w}{3} = \frac{7w}{6}$

19. $\frac{3}{4} - x = 2x$

20. $\frac{2}{y} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2y}$

21. $\frac{2}{r} + \frac{5}{3r} = 1$

22. $3 + \frac{2}{x} = \frac{1}{4}$

23. $\frac{x-2}{x-5} = \frac{3}{x-5}$

24. $\frac{c+3}{c+1} = \frac{5}{2}$

25. $\frac{5y-2}{7} = \frac{15y-2}{28}$

26. $\frac{3}{x+1} = \frac{2}{x-3}$

27. $\frac{5.6}{-p-6.2} = \frac{2}{p}$

28. $\frac{4.5}{y-3} = \frac{6.9}{y+3}$

29. $\frac{m+1}{m+10} = \frac{m-2}{m+4}$

30. $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x-6}{x+5}$

31. $x - \frac{4}{3x} = -\frac{1}{3}$

32. $x + \frac{2}{x} = \frac{27}{x}$

33. $\frac{2x-1}{3} - \frac{x}{4} = \frac{7.4}{6}$

34. $\frac{15}{x} + \frac{9x-7}{x+2} = 9$

35. $x + \frac{6}{x} = -7$

36. $b - \frac{8}{b} = -7$

37. $2 - \frac{5}{2b} = \frac{2b}{b+1}$

38. $\frac{3z-2}{z+1} = 4 - \frac{z+2}{z-1}$

39. $\frac{1}{w-3} + \frac{1}{w+3} = \frac{-5}{w^2-9}$

40. $\frac{6}{x+3} + \frac{5}{x+4} = \frac{12x+31}{x^2+7x+12}$

41. $\frac{8}{x^2-9} = \frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3}$

42. $a - \frac{a}{4} + \frac{a}{5} = 19$

43. $\frac{y}{2y+2} + \frac{2y-16}{4y+4} = \frac{2y-3}{y+1}$

44. $\frac{2}{w-5} = \frac{22}{2w^2-9w-5} - \frac{3}{2w+1}$

45. $\frac{x^2}{x-5} = \frac{25}{x-5}$

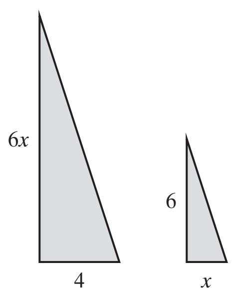
46. $\frac{x^2}{x-9} = \frac{81}{x-9}$

47. $\frac{5}{x^2+4x+3} + \frac{2}{x^2+x-6} = \frac{3}{x^2-x-2}$

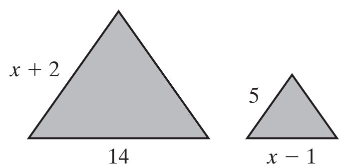
48. $\frac{2}{x^2+2x-8} - \frac{1}{x^2+9x+20} = \frac{4}{x^2+3x-10}$

Figuras semejantes *Determine la longitud de los dos lados desconocidos de cada par de figuras semejantes (es decir, la longitud de los lados que incluyen a la variable x).*

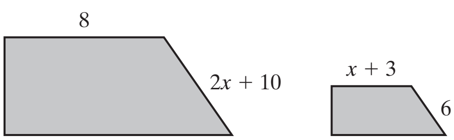
49.



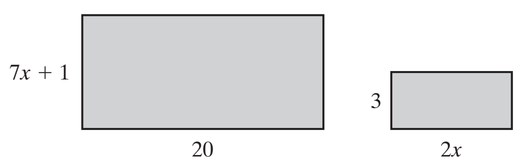
50.



51.



52.



Determine todos los valores para los que $f(a)$ tiene el valor indicado en cada función racional, para cada función racional que se proporciona.

53. $f(x) = 2x - \frac{4}{x}, f(a) = -2$

54. $f(x) = 3x - \frac{5}{x}, f(a) = -14$

55. $f(x) = \frac{x-2}{x+5}, f(a) = \frac{3}{5}$

56. $f(x) = \frac{x+3}{x+5}, f(a) = \frac{4}{7}$

57. $f(x) = \frac{6}{x} + \frac{6}{2x}, f(a) = 6$

58. $f(x) = \frac{4}{x} - \frac{3}{2x}, f(a) = 4$

Despeje la variable indicada en cada fórmula.

59. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1}$, para P_2 (química).

60. $T_a = \frac{T_f}{1-f}$, para f (fórmula de inversión).

61. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1}$, para V_2 (química).

62. $S = \frac{a}{1-r}$, para r (matemáticas).

63. $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$, para y (pendiente).

64. $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$, para x_1 (pendiente).

65. $z = \frac{x - \overline{x}}{s}$, para x (estadística).

66. $z = \frac{x - \overline{x}}{s}$, para s (estadística).

67. $d = \frac{fl}{f + w}$, para w (física).

68. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$, por p (óptica)

69. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$, para q (óptica).

70. $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, para R_T (electrónica).

71. $at_2 - at_1 + v_1 = v_2$, para a (física).

72. $2P_1 - 2P_2 - P_1P_c = P_2P_c$, para P_c (economía).

73. $a_n = a_1 + nd - d$, para d (matemáticas).

74. $S_n - S_nr = a_1 - a_1r^n$, para S_n (matemáticas).

75. $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$, para G (física).

76. $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$, para T_2 (física).

77. $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$, para T_1 (física).

78. $A = \frac{1}{2}h(a + b)$, para h (matemáticas).

79. $\frac{S - S_0}{V_0 + gt} = t$, para V_0 (física).

80. $\frac{E}{e} = \frac{R + r}{r}$, para e (ingeniería).

Simplifique cada expresión en **a)** *y resuelva la ecuación en* **b)**.

81. **a)** $\frac{2}{x-2} + \frac{5}{x^2-4}$

b) $\frac{2}{x-2} + \frac{5}{x^2-4} = 0$

82. **a)** $\frac{4}{x+3} + \frac{5}{2x+6} + \frac{1}{2}$

b) $\frac{4}{x+3} + \frac{5}{2x+6} = \frac{1}{2}$

83. **a)** $\frac{b+3}{b} - \frac{b+4}{b+5} - \frac{15}{b^2+5b}$

b) $\frac{b+3}{b} - \frac{b+4}{b+5} = \frac{15}{b^2+5b}$

84. **a)** $\frac{4x+3}{x^2+11x+30} - \frac{3}{x+6} + \frac{2}{x+5}$

b) $\frac{4x+3}{x^2+11x+30} - \frac{3}{x+6} = \frac{2}{x+5}$

Resolución de problemas

85. ¿Qué restricción debe agregarse al enunciado "Si $ac = bc$, entonces $a = b$"? Explique.

86. Considere $\frac{x-2}{x-5} = \frac{3}{x-5}$.

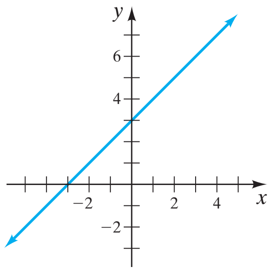
a) Resuelva la ecuación.

b) Si resta $\frac{3}{x-5}$ de ambos lados de la ecuación, obtiene $\frac{x-2}{x-5} - \frac{3}{x-5} = 0$. Simplifique la diferencia del lado izquierdo de la ecuación y resuelva la ecuación.

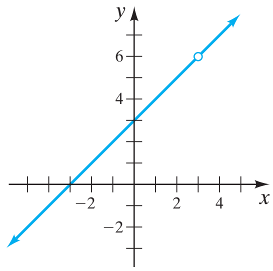
c) Utilice la información obtenida en las partes **a)** y **b)** para construir otra ecuación que no tenga solución.

87. A continuación se presentan dos gráficas. Una es la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ y la otra es la gráfica de $g(x) = x + 3$. Determine cuál gráfica corresponde a $f(x)$ y cuál a $g(x)$. Explique cómo determinó su respuesta.

a)



b)



88. Inversión libre de impuestos La fórmula $T_a = \dfrac{T_f}{1 - f}$ puede usarse para determinar el rendimiento gravable equivalente, T_a, de una inversión libre de impuestos, T_f. En esta fórmula, f es el rango de impuesto federal sobre los ingresos. Tran Du se encuentra en el rango de 25% de impuesto sobre los ingresos.

a) Determine el rendimiento gravable equivalente a una inversión libre de impuesto de 6%.

b) Resuelva esta ecuación para T_f.

c) Determine el rendimiento libre de impuestos equivalente a una inversión gravable de 10%.

89. Seguro Cuando el propietario de una casa compra una póliza de seguros para asegurar su propiedad por un monto mínimo de 80% sobre su valor de reemplazo, la compañía de seguros no reembolsará al propietario el total de su pérdida. La fórmula siguiente se utiliza para determinar cuánto pagará la compañía de seguros, I, cuando la propiedad esté asegurada por menos del 80% sobre el valor de reemplazo.

$$I = \frac{AC}{0.80R}$$

En la fórmula, A es el monto asegurado, C es el costo de reparar el área dañada y R es el valor de reemplazo de la propiedad. (El uso de esta fórmula tiene ciertas excepciones.)

a) Suponga que un incendio en la propiedad de Jan Burdett causó daños con valor de \$10,000. Si ella contrató un seguro por \$50,000 para una propiedad con valor de reemplazo de \$100,000, ¿cuánto pagaría la compañía de seguros por las reparaciones?

b) Resuelva esta fórmula para R, el valor de reemplazo.

90. Velocidad promedio La velocidad promedio se define como un cambio en la distancia dividido entre el cambio en el tiempo, o

$$v = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$$

Esta fórmula puede usarse cuando un objeto a la distancia d_1 en el instante t_1 viaja a la distancia d_2 en el instante t_2.

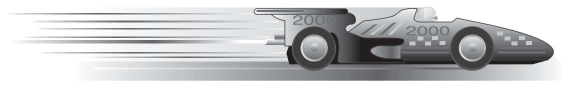
a) Suponga que $t_1 = 2$ horas, $d_1 = 118$ millas, $t_2 = 9$ horas y $d_2 = 412$ millas. Determine la velocidad promedio.

b) Resuelva la fórmula para t_2.

91. Aceleración promedio La aceleración promedio se define como el cambio en la velocidad, dividido entre el cambio en el tiempo, o

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Esta fórmula puede usarse cuando un objeto a la velocidad v_1 en el instante t_1 acelera (o desacelera) a la velocidad v_2 en el instante t_2.



a) Suponga que $v_1 = 20$ pies por minuto, $t_1 = 20$ minutos, $v_2 = 60$ pies por minuto y $t_2 = 22$ minutos. Determine la aceleración promedio. Las unidades serán pies/min^2.

b) Resuelva la fórmula para t_1.

92. Economía Una fórmula para analizar el punto del equilibrio es

$$Q = \frac{F + D}{R - V}$$

Esta fórmula se usa para determinar el número de unidades (o apartamentos), Q, que un inversionista debe alquilar en un edificio para alcanzar el punto de equilibrio (es decir, no ganar ni perder). En la fórmula, F son los gastos mensuales fijos de todo el edificio, D es el pago mensual de las deudas del edificio, R es el alquiler por unidad y V son los gastos variables por unidad.

Suponga que una persona está considerando invertir en un edificio con 50 unidades (o apartamentos). Cada apartamento de dos habitaciones puede alquilarse en \$500 al mes. Se estima que los gastos variables son de \$200 al mes por unidad, los gastos fijos son de \$2500 al mes, y el pago mensual de la deuda es de \$8000. ¿Cuántos apartamentos deben alquilarse para que el inversionista alcance el punto de equilibrio?

93. Tasa de descuento La *tasa de descuento*, P, expresada como una fracción o decimal, puede determinarse por medio de la fórmula

$$P = 1 - \frac{R - D}{R}$$

donde R es el precio regular de un artículo y d es el descuento (la cantidad que se ahorra respecto del precio normal).

a) Determine la tasa de descuento en un bolso con un precio normal de \$39.99 que se vende en \$30.99.

b) Resuelva la fórmula anterior para D.

c) Resuelva la fórmula anterior para R.

Para los ejercicios 94 a 96, consulte el ejemplo 9.

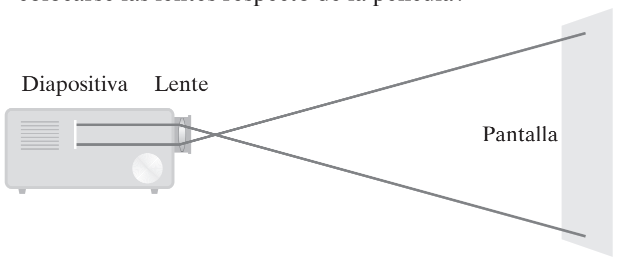
94. Resistencia total ¿Cuál es la resistencia total de un circuito si se conectan en paralelo resistores de 300, 500 y 3000 ohms?

95. Resistencia total ¿Cuál es la resistencia total de un circuito si se conectan en paralelo resistores de 200 y 600 ohms?

96. Resistencia total Tres resistores idénticos se conectan en paralelo. ¿Cuál debe ser la resistencia de cada uno si el circuito resultante tiene una resistencia total de 700 ohms?

Consulte el ejemplo 10 para resolver los ejercicios 97 y 98.

97. Longitud focal En un proyector de películas o diapositivas, la película actúa como el objeto cuya imagen se proyecta sobre una pantalla. Si se usa una lente con longitud focal de 100 mm (0.10 metros) para proyectar una imagen sobre una pantalla ubicada a una distancia de 7.5 metros, ¿a qué distancia deben colocarse las lentes respecto de la película?



98. Espejo cóncavo Un anillo de diamante se coloca a 20.0 cm de un espejo cóncavo (curvado hacia dentro) cuya longitud focal es 15.0 cm. Determine la posición de la imagen (o la *distancia de la imagen*).

99. Inversiones Algunas inversiones, como ciertos bonos municipales y fondos sobre bonos municipales, no sólo están libres de impuestos federales, sino también de impuestos municipales. Cuando se desea comparar una inversión gravable, T_a, con una inversión libre de impuesto federal, estatal y municipal, T_f, se puede utilizar la fórmula

$$T_a = \frac{T_f}{1 - [f + (s + c)(1 - f)]}$$

En la fórmula, s es el rango de impuesto estatal a pagar, c es el rango de impuestos municipales o locales a pagar, y f es el rango de impuestos federales. Howard Levy, quien vive en Detroit, Michigan, está en el rango de impuesto federal de 33%, en el rango de 4.6% de impuesto estatal y en el rango de 3% de impuesto local. Está eligiendo entre invertir en un portafolio bursátil libre de los tres impuestos, que produce 6.01%, y un fondo bursátil gravable que produce 7.68%.

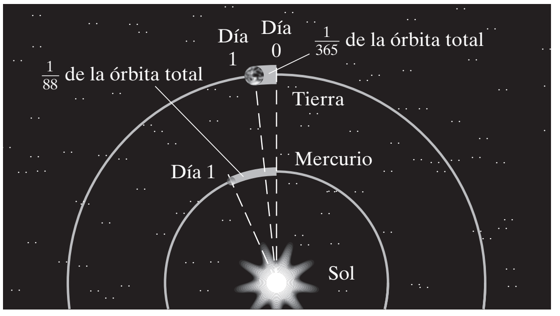
a) Tomando en cuenta su rango de impuestos, determine el equivalente gravable a 6.01% de rendimiento libre de impuestos.

b) ¿Por cuál inversión debe optar Howard? Explique su respuesta.

100. Periodos de planetas El periodo sinódico de Mercurio es el tiempo que dicho planeta necesita para llevar una vuelta de ventaja a la Tierra en sus órbitas alrededor del Sol. Si los periodos orbitales (en días terrestres) de los dos planetas son P_m y P_e, se verá que Mercurio se mueve en promedio a $1/P_m$ de una revolución por día, mientras que la Tierra se mueve al $1/P_e$ de una revolución por día detrás de aquel. La ventaja diaria de Mercurio respecto de la Tierra es $(1/P_m) - (1/P_e)$ de una revolución, de modo que el tiempo que tarda en aventajar a la Tierra en una revolución completa (periodo sinódico), s, puede determinarse mediante la fórmula

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{P_m} - \frac{1}{P_e}$$

Si P_e es 365 días y P_m es 88 días, determine el periodo sinódico en días terrestres.



Retos

101. Construya una ecuación que no pueda tener a 4 ni a −2 como soluciones. Explique cómo determinó su respuesta.

102. Construya una ecuación que contenga la suma de dos expresiones racionales en la variable x, y cuya solución sea el conjunto de *números reales*. Explique cómo determinó su respuesta.

103. Construya una ecuación que contenga dos expresiones racionales en la variable x, y cuya solución sea el conjunto de números reales excepto 0. Explique cómo determinó su respuesta.

Actividad en grupo

104. Longitud focal Una lente con longitud focal de 80 mm se utiliza para enfocar una imagen y fotografiarla con una cámara. La distancia máxima permitida entre la lente y la película plana es de 120 mm.

a) Miembro 1 del grupo: Determine qué tan lejos debe estar la lente respecto de la película, si el objeto que será fotografiado está a 10 metros de distancia.

b) Miembro 2 del grupo: Repita la parte **a)** para una distancia de 3 metros.

c) Miembro 3 del grupo: Repita la parte **a)** para una distancia de 1 metro.

d) Determinen de manera individual cuál es la distancia más corta a la que debe estar un objeto para poder fotografiarlo claramente.

e) Comparen sus respuestas para ver si parecen razonables y consistentes.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] **105.** Resuelva la desigualdad $-1 \le 5 - 2x < 7$.

[3.4] **106.** Determine la pendiente y la intersección con el eje y de la recta que resulta al graficar la ecuación $3(y - 4) = -(x - 2)$.

[5.1] **107.** Simplifique $3x^2y - 4xy + 2y^2 - (3xy + 6y^2 + 9x)$.

[5.8] **108. Jardinería** Se colocará un pasillo de ancho uniforme alrededor del jardín de Jessyca Nino Aquino. El jardín y el pasillo juntos cubren un área de 320 pies cuadrados. Si el jardín mide 12 por 16 pies, determine el ancho del pasillo.

Examen de mitad de capítulo: 6.1-6.4

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en donde se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

1. Determine el dominio de $h(x) = \dfrac{2x + 13}{x^3 - 25x}$.

2. Simplifique la expresión racional $\dfrac{x^2 + 9x + 20}{2x^2 + 5x - 12}$.

Multiplique o divida como se indica.

3. $\dfrac{11a + 11b}{3} \div \dfrac{a^3 + b^3}{15b}$

4. $\dfrac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - 5x - 6} \cdot \dfrac{x^2 - 2x - 24}{x^2 + 11x + 28}$

5. $\dfrac{4a^2 + 4a + 1}{4a^2 + 6a - 2a - 3} \div \dfrac{2a^2 - 17a - 9}{(2a + 3)^2}$

6. **Rectángulo** El área de un rectángulo es $12a^2 + 13ab + 3b^2$. Si el largo es $18a + 6b$, determine una expresión para el ancho dividiendo el área entre el largo.

7. Determine el mínimo común denominador para $\dfrac{x^2 - 5x - 7}{x^2 - x - 30} + \dfrac{3x^2 + 19}{x^2 - 4x - 12}$.

Sume o reste. Simplifique todas las respuestas.

8. $\dfrac{5x}{x - 5} - \dfrac{25}{x - 5}$

9. $\dfrac{10}{3x^2y} + \dfrac{a}{6xy^3}$

10. $\dfrac{4}{2x^2 + 5x - 12} - \dfrac{3}{x^2 - 16}$

Simplifique cada fracción compleja.

11. $\dfrac{9 + \dfrac{a}{b}}{\dfrac{3 - c}{b}}$

12. $\dfrac{\dfrac{5}{x} - \dfrac{8}{x^2}}{6 - \dfrac{1}{x}}$

13. $\dfrac{y^{-2} + 7y^{-1}}{7y^{-3} + y^{-4}}$

14. ¿Qué es una raíz extraña? Explique bajo qué condiciones debe comprobar la existencia de raíces extrañas.

Resuelva cada ecuación y compruebe sus soluciones.

15. $\dfrac{3x - 1}{7} = \dfrac{-x + 9}{2}$

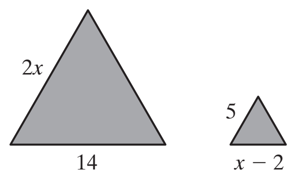
16. $\dfrac{m - 7}{m - 11} = \dfrac{4}{m - 11}$

17. $x = 1 + \dfrac{12}{x}$

18. Despeje a de $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$.

19. Despeje r de $x = \dfrac{4}{1 - r}$.

20. **Triángulos** Los dos triángulos son semejantes. Determine las longitudes de los dos lados desconocidos que incluyen la variable x.



6.5 Ecuaciones racionales: aplicaciones y resolución de problemas

1 Resolver problemas de trabajo.

2 Resolver problemas numéricos.

3 Resolver problemas de movimiento.

En la sección 6.4 y en el conjunto de ejercicios 6.4, se explicó cómo resolver algunos problemas de aplicación que contienen ecuaciones con expresiones racionales. En esta sección examinaremos algunas aplicaciones más. En primer lugar analizaremos problemas de trabajo.

1 Resolver problemas de trabajo

Por **problemas de trabajo** nos referimos a aquellos que involucran a dos o más máquinas o personas que trabajan juntas para realizar alguna tarea. Para resolver este tipo de problemas, partimos del hecho de que la parte del trabajo realizado por la persona 1 (o máquina 1) más la parte del trabajo realizado por la persona 2 (o máquina 2) es igual a la cantidad de trabajo total realizado por ambas personas (o máquinas) o 1 (para 1 tarea completa terminada).

$$\left(\begin{array}{c}\text{parte de la tarea}\\ \text{hecha por la primera}\\ \text{persona o máquina}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{parte de la tarea}\\ \text{hecha por la segunda}\\ \text{persona o máquina}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}1\\ \text{(una tarea completa}\\ \text{terminada)}\end{array}\right)$$

Para determinar la parte de la tarea realizada por cada persona o máquina, utilizamos la fórmula

parte de la tarea concluida = velocidad · tiempo

Esta fórmula es muy similar a la fórmula *cantidad = velocidad · tiempo* que analizamos en la sección 2.4.

Veamos ahora cómo determinar la velocidad. Si, por ejemplo, John puede realizar cierta tarea en 5 horas, podría concluir $\frac{1}{5}$ de la tarea en 1 hora. De este modo, su velocidad es $\frac{1}{5}$ de la tarea por hora. Si Kishi completa un trabajo en 6 horas, su velocidad es $\frac{1}{6}$ del trabajo por hora. De igual manera, si María realiza un trabajo en x minutos, su velocidad es $\frac{1}{x}$ del trabajo por minuto. *En general, si una persona o máquina puede concluir una tarea en x unidades de tiempo, la velocidad es* $\frac{1}{x}$.

EJEMPLO 1 ▸ **Sembrado de flores** Sana y Jerry Jenkins trabajan en un jardín botánico, alrededor de cuyos terrenos se agregarán varios diseños florales. Sana, quien tiene más experiencia, puede plantar las flores y hacer el diseño en 3 horas. Jerry necesita 5 horas de trabajo para realizar el mismo diseño. Si Sana y Jerry trabajan juntos, ¿cuánto tardarán en realizar el diseño?

Solución **Entienda el problema** Necesitamos determinar cuánto tiempo necesitan Sana y Jerry, trabajando juntos, para hacer el diseño floral. Sea x = tiempo, en horas, en que Sana y Jerry hacen juntos el diseño floral. Construiremos una tabla para ayudarnos a determinar la parte de la tarea completada por cada persona.

Trabajador	Velocidad de trabajo	Tiempo trabajado	Parte de la tarea realizada
Sana	$\frac{1}{3}$	x	$\frac{x}{3}$
Jerry	$\frac{1}{5}$	x	$\frac{x}{5}$

Traduzca

$$\left(\begin{array}{c}\text{parte del diseño floral hecho}\\ \text{por Sana en } x \text{ horas}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{parte del diseño floral hecho}\\ \text{por Jerry en } x \text{ horas}\end{array}\right) = 1(\text{diseño floral completo})$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 1$$

Realice los cálculos Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD, 15. Luego despejamos x, el número de horas.

$$15\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{5}\right) = 15 \cdot 1 \qquad \textit{Multiplicar por el MCD, 15.}$$

$$15\left(\frac{x}{3}\right) + 15\left(\frac{x}{5}\right) = 15 \qquad \textit{Propiedad distributiva.}$$

$$5x + 3x = 15$$

$$8x = 15$$

$$x = \frac{15}{8}$$

Responda Sana y Jerry pueden hacer el diseño floral en $\frac{15}{8}$ horas. Este tiempo es razonable, ya que es menor al que necesita cualquiera de las dos personas para hacer el diseño de manera individual.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 15**

En ocasiones un problema puede incluir decimales, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 ▸ **Llenado de una bañera** Jim y Joy McEnroy tienen una bañera con jacuzzi. Cuando abren el grifo para llenar la bañera, el agua está turbia. Desean dejar correr tanta agua como sea necesario hasta que el agua salga limpia. Para hacerlo abren el grifo de agua fría y destapan el desagüe de la bañera. El grifo del agua fría llena la bañera en 7.6 minutos y el desagüe la vacía en 10.3 minutos. Si el desagüe está abierto y se abre el grifo del agua fría, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse de agua la bañera?

Solución **Entienda el problema** Mientras el grifo llena la bañera, el desagüe la vacía, así el grifo y el desagüe están trabajando uno en contra del otro. Sea x = la cantidad de tiempo necesaria para llenar la bañera.

	Velocidad de trabajo	**Tiempo trabajado**	**Parte de la bañera que se llena o se vacía**
Grifo llenando la bañera	$\frac{1}{7.6}$	x	$\frac{x}{7.6}$
Desagüe vaciando la bañera	$\frac{1}{10.3}$	x	$\frac{x}{10.3}$

Traduzca Como el grifo y el desagüe están trabajando uno contra el otro, *restamos* la parte de la bañera que se está vaciando de la parte de la bañera que se va llenando.

$$\begin{pmatrix}\text{parte de la bañera llena}\\ \text{en } x \text{ minutos}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{parte de la bañera vaciada}\\ \text{en } x \text{ minutos}\end{pmatrix} = 1(\text{bañera completamente llena})$$

$$\frac{x}{7.6} - \frac{x}{10.3} = 1$$

Realice los cálculos Con ayuda de una calculadora, podemos determinar que el MCD es (7.6)(10.3) = 78.28. Ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación por 78.28 para eliminar las fracciones.

$$\boxed{78.28}\left(\frac{x}{7.6} - \frac{x}{10.3}\right) = \boxed{78.28}(1)$$

$$\overset{10.3}{\cancel{78.28}}\left(\frac{x}{\cancel{7.6}}\right) - \overset{7.6}{\cancel{78.28}}\left(\frac{x}{\cancel{10.3}}\right) = 78.28(1)$$

$$10.3x - 7.6x = 78.28$$

$$2.7x = 78.28$$

$$x \approx 28.99$$

Responda La bañera se llenará en más o menos 29 minutos.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 25**

EJEMPLO 3 ▸ **Trabajo en un viñedo** Chris Burdett y Mark Greenlaugh trabajan en un viñedo en California. Cuando trabajan juntos, pueden revisar todas las plantas de un terreno determinado en 24 minutos. Para hacer ese trabajo solo, Chris necesita 36 minutos. ¿Cuánto tardará Mark en revisar las plantas él solo?

Solución **Entienda el problema** Sea x = cantidad de tiempo que necesita Mark para revisar las plantas él solo. Sabemos que cuando trabajan juntos pueden hacer ese trabajo en 24 minutos. Organicemos esta información en una tabla.

Trabajador	**Velocidad de trabajo**	**Tiempo trabajado**	**Parte de las plantas revisadas**
Chris	$\frac{1}{36}$	24	$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$
Mark	$\frac{1}{x}$	24	$\frac{24}{x}$

Traduzca

$$\begin{pmatrix}\text{parte de las plantas}\\ \text{revisadas por Chris}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{parte de las plantas}\\ \text{revisadas por Mark}\end{pmatrix} = 1(\text{terreno completo revisado})$$

$$\frac{2}{3} + \frac{24}{x} = 1$$

Realice los cálculos

$$3x\left(\frac{2}{3} + \frac{24}{x}\right) = 3x \cdot 1 \quad \textit{Multiplicar ambos lados por el MCD, 3x.}$$

$$2x + 72 = 3x$$

$$72 = x$$

Responda Mark puede revisar las plantas, él solo, en 72 minutos.

Ahora resuelva el ejercicio 23

Observe que en el ejemplo 3 usamos $\frac{2}{3}$ en lugar de $\frac{24}{36}$ para indicar la parte de las plantas revisada por Chris. Utilice siempre fracciones simplificadas cuando plantee y resuelva ecuaciones.

2 Resolver problemas numéricos

Veamos ahora un **problema numérico**, en el que se debe encontrar un número relacionado con uno o más números.

EJEMPLO 4 **Problema numérico** Cuando el recíproco del triple de un número se resta de 5, el resultado es el recíproco del doble del número. Determine de qué número se trata.

Solución **Entienda el problema** Sea x = el número desconocido. Entonces $3x$ es el triple del número, y $\frac{1}{3x}$ es el recíproco del triple del número. El doble del número es $2x$, y $\frac{1}{2x}$ es el recíproco del doble del número.

Traduzca

$$7 - \frac{1}{3x} = \frac{1}{2x}$$

Realice los cálculos

$$6x\left(7 - \frac{1}{3x}\right) = 6x \cdot \frac{1}{2x} \quad \textit{Multiplicar por el MCD, 6x.}$$

$$6x(7) - 6x\left(\frac{1}{3x}\right) = 6x\left(\frac{1}{2x}\right)$$

$$42x - 2 = 3$$

$$42x = 5$$

$$x = \frac{5}{42}$$

Responda Una comprobación verificará que el número es $\frac{5}{42}$.

Ahora resuelva el ejercicio 33

3 Resolver problemas de movimiento

El último tipo de problema que veremos son los **problemas de movimiento**. Recuerde que estudiamos problemas de movimiento en la sección 2.4, donde aprendimos que distancia = velocidad · tiempo. En ocasiones es conveniente despejar el tiempo cuando resolvemos este tipo de problemas

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

EJEMPLO 5 **Vuelo en aeroplano** Sally Sestani pilotea un monoplano marca Cessna. Cuando hace su plan de vuelo, determina que hay un viento de 20 millas por hora moviéndose de este a oeste a la misma altura a la que volará. Si viaja hacia el oeste (con el viento a favor), puede recorrer 400 millas en el mismo tiempo en que podría recorrer 300 millas volando hacia el este (con el viento en contra). Vea la **figura 6.10**. Suponiendo que, si no hubiese viento, el monoplano volaría a la misma velocidad viajando hacia el este o hacia el oeste, determine la velocidad a la que vuela con el viento en calma.

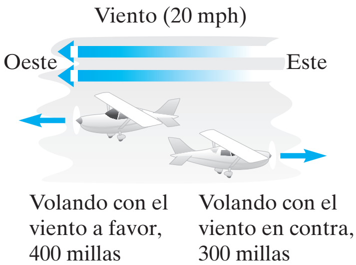


FIGURA 6.10

Solución **Entienda el problema** Sea x = velocidad del monoplano con el viento en calma. Construyamos una tabla que nos ayude a responder la pregunta.

Aeroplano	Distancia	Velocidad	Tiempo
Con el viento en contra	300	$x - 20$	$\frac{300}{x-20}$
Con el viento a favor	400	$x + 20$	$\frac{400}{x+20}$

Traduzca Como los tiempos son los mismos, planteamos y resolvemos la siguiente ecuación:

$$\frac{300}{x-20} = \frac{400}{x+20}$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} 300(x+20) &= 400(x-20) \quad \textit{Multiplicación cruzada.} \\ 300x + 6000 &= 400x - 8000 \\ 6000 &= 100x - 8000 \\ 14{,}000 &= 100x \\ 140 &= x \end{aligned}$$

Responda La velocidad del monoplano con el viento en calma es de 140 millas por hora.

Ahora resuelva el ejercicio 41

EJEMPLO 6 **Paseo en bicicleta acuática** Becky y Al Ryckman pasean en una bicicleta acuática. Cuando viajan en contra de la corriente (alejándose de la costa), promedian 2 millas por hora. De regreso (acercándose a la costa), viajan con la corriente a favor y promedian 3 millas por hora. Si tardan $\frac{1}{4}$ de hora más de ida que de vuelta a la costa, ¿qué tanto se alejaron de la costa durante su paseo?

Solución **Entienda el problema** En este problema, el tiempo de ida y de regreso no son iguales. La pareja necesitó $\frac{1}{4}$ de hora más para alejarse de la costa que para el regreso. Por lo tanto, para igualar los tiempos podemos sumar $\frac{1}{4}$ de hora al tiempo que les tomó el regreso (o restar $\frac{1}{4}$ de hora del tiempo de ida). Sea x = la distancia que les llevó alejarse de la costa.

Bicicleta	Distancia	Velocidad	Tiempo
Viaje de ida	x	2	$\frac{x}{2}$
Viaje de regreso	x	3	$\frac{x}{3}$

Traduzca tiempo del viaje de regreso + $\frac{1}{4}$ de hora = tiempo del viaje de ida

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2}$$

Realice los cálculos

$$12\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\right) = 12\cdot\frac{x}{2} \qquad \textit{Multiplicar por el MCD, 12.}$$

$$12\left(\frac{x}{3}\right)+12\left(\frac{1}{4}\right) = 12\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \textit{Propiedad distributiva.}$$

$$4x+3 = 6x$$

$$3 = 2x$$

$$1.5 = x$$

Responda Por lo tanto, la pareja se alejó 1.5 millas de la costa.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 53**

EJEMPLO 7 ▸ **De viaje** Dawn Puppel vive en Buffalo, Nueva York y viaja a la escuela en South Bend, Indiana. En algunas carreteras, la velocidad límite es de 55 millas por hora, y en otras es de 65 millas por hora. La distancia total que recorre Dawn para llegar a su escuela es de 490 millas. Si Dawn respeta los límites de velocidad y le toma 8 horas el recorrido, ¿cuánto tiempo maneja a 55 millas por hora y cuánto a 65 millas por hora?

Solución **Entienda el problema y traduzca**

Sea x = número de millas recorridas a 55 mph.
Entonces $490 - x$ = número de millas recorridas a 65 mph.

Límite de velocidad	Distancia	Velocidad	Tiempo
55 mph	x	55	$\frac{x}{55}$
65 mph	$490 - x$	65	$\frac{490-x}{65}$

Como el recorrido total dura 8 horas, escribimos

$$\frac{x}{55}+\frac{490-x}{65} = 8$$

Realice los cálculos El MCD de 55 y 65 es 715.

$$715\left(\frac{x}{55}+\frac{490-x}{65}\right) = 715\cdot 8$$

$$715\left(\frac{x}{55}\right)+715\left(\frac{490-x}{65}\right) = 5720$$

$$13x+11(490-x) = 5720$$

$$13x+5390-11x = 5720$$

$$2x+5390 = 5720$$

$$2x = 330$$

$$x = 165$$

Responda El número de millas recorridas a 55 mph es de 165. Por lo tanto, el tiempo recorrido a 55 mph es $\frac{165}{55} = 3$ horas, y el tiempo recorrido a 65 mph es $\frac{490-165}{65} = \frac{325}{65} = 5$ horas.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 59**

En el ejemplo 7, observe que la respuesta a la pregunta no fue el valor obtenido para x, ya que se refiere a distancia y lo que nos pidieron determinar fue el tiempo. *Al trabajar con problemas expresados con palabras, lea con atención y resuélvalos con mucho cuidado, asegurándose de responder la pregunta planteada.*

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.5

MathXL® MyMathLab

Práctica de habilidades y resolución de problemas

1. **Pinta de una pared** Dos hermanos necesitan exactamente el mismo tiempo cada uno para pintar una pared. Si hacen juntos el trabajo, el tiempo total que necesitarán ¿será menor que $\frac{1}{2}$ del tiempo, igual a $\frac{1}{2}$ del tiempo o mayor que $\frac{1}{2}$ del tiempo que requieren si lo hicieran de manera individual? Explique.

2. **Tractores** Dos tractores, uno grande y uno pequeño, trabajan juntos para nivelar un terreno. En la misma cantidad de tiempo, el tractor grande nivela más tierra que el pequeño. Trabajando solo, ¿le tomará más o menos tiempo al tractor pequeño realizar la labor que a los dos trabajando juntos? Explique.

3. a) **Trabajo en equipo** Bill y Bob están planeando hacer una tarea juntos. Bill puede hacerla en siete horas, y Bob puede realizarla en 9 horas. Sea $x =$ el tiempo que Bill y Bob hacen juntos la tarea. Complete la siguiente tabla.

Trabajador	Velocidad de trabajo	Tiempo trabajado	Parte de la tarea terminada
Bill		x	
Bob		x	

b) Analice los ejemplos que se explicaron en esta sección. Luego escriba la ecuación que puede usarse para despejar x. (No la resuelva.)

c) Si trabajan juntos, ¿les tomará más o menos de siete horas terminar la tarea? Explique.

4. a) **Trabajo en grupo** Juanita y Sally planean hacer una tarea juntas. Sally puede hacerla en 3.6 horas, y Juanita puede realizarla en 5.2 horas. Sea $x =$ el tiempo en que Sally y Juanita realizan la tarea juntas. Complete la siguiente tabla.

Trabajadora	Velocidad de trabajo	Tiempo trabajado	Parte de la tarea terminada
Sally		x	
Juanita		x	

b) Analice los ejemplos que se explicaron en esta sección. Luego escriba la ecuación que puede usarse para despejar x. (No la resuelva.)

c) Si trabajan juntas, ¿les tomará más o menos de 3.6 horas completar la tarea? Explique.

Los ejercicios 5 a 36 se refieren a problemas de trabajo. Responda la pregunta que se hace en cada uno. Cuando sea necesario, redondee las respuestas al centésimo más cercano.

5. **Escultura** Marilyn Mays necesita dos meses para tallar una escultura en madera. Larry Gilligan necesita 6 meses para hacer el mismo trabajo. Si ambos escultores trabajan juntos, ¿en cuánto tiempo tallarán la escultura?

6. **Limpiaventanas** Un trabajador puede lavar todas las ventanas de un edificio en 3 horas, y otro puede hacer el mismo trabajo en 4 horas. ¿Cuánto tardarán en lavar todas las ventanas del edificio si trabajan juntos?

7. **Servicio de limpieza** Jason La Rue puede lavar la alfombra del piso principal de un edificio en 3 horas. Tom Lockheart puede hacer el mismo trabajo en 6 horas. Si trabajan juntas, ¿cuánto tiempo les tomará lavar la alfombra?

8. **Impresión de cheques** Una empresa tiene dos computadoras para imprimir los cheques de nómina de sus empleados; una lo hace en 3 horas, y la otra en 7 horas. ¿Cuánto tiempo tardará la impresión de los cheques si ambas computadoras trabajan juntas?

9. **Granja lechera** En una pequeña granja lechera, Jin Chenge puede ordeñar 10 vacas en 30 minutos. Su hijo, Ming, requiere 50 minutos para realizar la misma tarea. ¿Cuánto tardarán ambos si ordeñan juntos las 10 vacas?

10. **Jardinería** Julio y Marcela López podan el césped durante los meses de verano. Con una podadora automática, Julio puede podar un área grande en 9 horas. Con otra podadora, Marcela puede podar el mismo césped en 4 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en podar el césped del terreno si trabajan juntos?

11. **Cosecha de manzanas** En un huerto en Sodus, Nueva York, Kevin Bamard puede cosechar 25 bushels de manzanas en 6 horas. Su hijo tarda el doble en cosechar 25 bushels. ¿Cuánto tardarán juntas en cosechar 25 bushels?

12. **Recolección de fresas** En un terreno de fresas en Jacksonville, North Carolina, Amanda Heinl puede recolectar 80 cuartos de fresas en 10 horas. Su hija, Emily, también puede recolectar 80 cuartos de fresas, pero en 15 horas. ¿Cuánto tardarán en recolectar juntas 80 cuartos de fresas?

13. **Limpieza de canalones** En un complejo habitacional en Altoona, Pennsylvania, Olga Palmieri puede limpiar los canalones de 28 casas en 4.5 días. Su compañero de trabajo, Jien-Ping, puede limpiar los mismos canalones en 5.5 días. ¿Si trabajan juntos, cuánto tiempo tardarán en limpiar los canalones de las 28 casas?

14. **Desyerbar** En una granja cerca de Portland, Maine, Val Short puede desyerbar un surco de papas en 70 minutos. Su amigo, Jason, puede hacerlo en 80 minutos. Si trabajan juntos, ¿cuánto tardarán en desyerbar este surco de papas?

15. **Arado de un campo** Wanda Garner puede arar su maizal en 4 horas. Shawn Robinson hace el mismo trabajo en 6 horas. ¿Cuánto tiempo necesitarán para arar el maizal si trabajan juntas?

16. **Pintura** Karen Sharp y Hephner Bennet son pintores. Karen puede pintar la sala de una casa en 6 horas, Hephner puede hacer el mismo trabajo en 4.5 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en pintar la sala si trabajan juntas?

17. **Llenado de una alberca** Una manguera de $\frac{1}{2}$ pulgada de diámetro puede llenar una alberca en 8 horas, mientras que una manguera de $\frac{4}{5}$ pulgadas de diámetro puede hacerlo en 5 horas. ¿Cuánto tiempo se necesitará para llenar la alberca si se usan ambas mangueras?

18. **Tanque de leche** En una planta lechera, una tanque de leche puede llenarse en 6 horas usando la válvula de llenado. Mediante una válvula de salida, el tanque puede vaciarse en 8 horas. Si las dos válvulas se abren al mismo tiempo ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el tanque?

19. **Refinería** Una refinería tiene grandes tanques para almacenar petróleo. Cada tanque tiene una válvula de entrada y una válvula de salida. El tanque puede llenarse en 20 horas cuando la válvula de entrada está totalmente abierta y la válvula de salida está cerrada. Cuando la válvula de salida está abierta completamente, el tanque puede vaciarse en 25 horas, si la válvula de entrada está cerrada. Si se pone en operación un nuevo tanque y se abren completamente las dos válvulas, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el tanque?

20. **Fabricantes de armarios** Laura Burton y Marcia Klienz son fabricantes de muebles. Laura puede fabricar una alacena para cocina en 10 horas. Si Laura y Marcia trabajan juntas, pueden fabricar la misma alacena en 8 horas. ¿Cuánto tiempo tardará Marcia en fabricar la alacena?

21. **Arqueología** El doctor Indiana Jones y su padre, el doctor Henry Jones, están haciendo una excavación cerca del Foro romano. Trabajando juntos, estos arqueólogos pueden revisar un terreno específico en 2.6 meses. De manera individual, Indiana puede realizar el mismo trabajo en 3.9 meses. ¿Cuánto tiempo tardará Henry en revisar el área completa él solo?

22. **Excavación de una zanja** Arthur Altshiller y Sally Choi trabajan en una empresa de telefonía. Juntos tardan 2.4 horas en cavar una zanja en la que se colocarán ciertos cables. Si Arthur puede excavar la zanja en 3.2 horas, ¿cuánto tiempo tardará Sally en excavarla ella sola?

23. **Tanques de medusas** Wade Martin y Shane Wheeler trabajan en un acuario. Wade tarda 50 minutos en limpiar los tanques de las medusas. Como Shane está aprendiendo a hacerlo, requiere más tiempo para realizar el mismo trabajo. Cuando trabajan juntos, pueden realizar la tarea en 30 minutos. ¿Cuánto tiempo necesita Shane para hacer la tarea ella sola?

24. **Plantío de flores** María Vasquez y LaToya Johnson plantan petunias en su jardín de flores. María tarda el doble de tiempo que LaToya en plantar las flores. Trabajando juntas pueden plantar las flores en 10 horas. ¿Cuánto tardará LaToya en plantar las flores ella sola?

25. **Llenado de una tina** Cuando sólo está abierto el grifo de agua fría, una tina se llena en 8 minutos. Cuando sólo está abierto el grifo de agua caliente, la tina se llena en 12 minutos. Cuando el desagüe de la tina está abierto, la tina se vacía completamente en 7 minutos. Si están abiertos los dos grifos, el de agua caliente y el de agua fría, y también lo está el desagüe, ¿cuánto tardará la tina en llenarse?

26. **Irrigación de cosechas** En la granja de Jed Saifer se usa un gran tanque para regar las cosechas. El tanque tiene dos tubos de entrada y un tubo de salida. Los dos tubos de entrada pueden llenar el tanque en 8 y 12 horas, respectivamente. El tubo de salida puede vaciar el tanque en 15 horas. Si el tanque está vacío, ¿cuánto tardará en llenarse cuando las tres válvulas están abiertas?

27. Bombeo de agua Después de una inundación, el departamento de bomberos de Rushville utiliza tres bombas para drenar agua de los sótanos inundados. Las tres bombas pueden drenar toda el agua de un sótano inundado en 6 horas, 5 horas y 4 horas, respectivamente. Si las tres bombas trabajan juntas, ¿cuánto tardarán en vaciar el sótano?

28. Instalación de ventanas Adam, Frank y Willy son expertos en instalación de ventanas. Adam puede instalar cinco ventanas en 10 horas. Frank puede hacer el mismo trabajo en 8 horas, y Willy puede hacerlo en 6 horas. Si los tres trabajan juntos, ¿cuánto tardarán en instalar las ventanas?

29. Techado de una casa Gary Glaze requiere 15 horas para poner un nuevo techo en una casa. De manera individual, su aprendiz, Anna Gandy, puede colocar el techo de la casa en 20 horas. Después de trabajar solo en un techo durante 6 horas, Gary interrumpe la labor; Anna la retoma y completa el trabajo. ¿Cuánto tiempo le tomará a Anna completar el trabajo?

30. Llenado del tanque Se usan dos tubos para llenar un tanque de petróleo. Cuando se utiliza sólo el tubo más grande, el tanque se llena en 60 horas; cuando se utiliza sólo el tubo más pequeño, el tanque se llena en 80 horas. Un día, se abre el tubo más grande para empezar a llenar el tanque; después de 20 horas, se cierra el tubo más grande y se abre el más pequeño. ¿Cuánto tiempo más se necesitará para terminar de llenar el tanque?

Los ejercicios 31 a 40 incluyen problemas numéricos. Responda la pregunta que se hace en cada uno.

31. ¿Que número multiplicado por el numerador y sumado al denominador de la fracción $\frac{4}{3}$ da por resultado la fracción $\frac{5}{2}$?

32. ¿Que número sumado al numerador y multiplicado por el denominador de la fracción $\frac{4}{5}$ da por resultado la fracción $\frac{1}{15}$?

33. Un número es el doble de otro. La suma de sus recíprocos es $\frac{3}{4}$. Determine ambos números.

34. La suma de los recíprocos de dos enteros consecutivos da por resultado $\frac{11}{30}$. Determine los dos enteros.

35. La suma de los recíprocos de dos enteros pares consecutivos es $\frac{5}{12}$. Determine los dos enteros.

36. Cuando un número se suma al numerador y al denominador de la fracción $\frac{7}{9}$, la fracción resultante es $\frac{5}{6}$. Determine el número que se sumó.

37. Cuando el número 3 se suma al doble del recíproco de otro número, el resultado es $\frac{31}{10}$. Determine el número.

38. El recíproco de 3 menos que un cierto número es el doble del recíproco de 6 menos que el doble del número. Determine el o los números.

39. Si el triple de un número se suma al doble del recíproco del número, el resultado es 5. Determine el o los números.

40. Si el triple del recíproco de un número se resta del doble del recíproco del cuadrado del número, la diferencia es -1. Determine el o los números.

Los ejercicios 41 a 61 son problemas de movimiento. Responda la pregunta que se hace en cada uno. Cuando sea necesario, redondee las respuestas al centésimo más cercano.

41. Góndola Cuando Angelo Burnini rema en su góndola por aguas tranquilas (sin corriente), en Venecia, Italia, recorre 3 millas por hora. Cuando rema con la misma intensidad en el Gran Canal, le toma el mismo tiempo viajar 2.4 millas con la corriente a favor que recorrer 2.3 millas con la corriente en contra. Determine la velocidad de la corriente del río.

42. Transporte por tren El tren Amtrak viaja sin escalas de Lorton, Virginia a Sanford, Florida. June White desea transportar dos automóviles a Florida para el invierno, así que decide enviar uno por tren y conducir el otro. El tren viaja 600 kilómetros en el mismo tiempo en que ella conduce 400 kilómetros. Si la velocidad promedio del tren es 40 kilómetros por hora mayor que la velocidad del automóvil de June, determine las velocidades del tren y del automóvil.

43. Banda sinfín Una banda sinfín, en el aeropuerto de Chicago se mueve a una velocidad de 2.0 pies por segundo. Utilizando la banda, Nancy Killian recorre una distancia de 120 pies en el mismo tiempo que le tomaría recorrer 52 pies caminando. ¿Qué tan rápido camina Nancy?

44. Banda sinfín Una banda sinfín del aeropuerto de Filadelfia, se mueve a una velocidad de 1.8 pies por segundo. Nathan Trotter recorre 100 pies sobre la banda sinfín, después da la vuelta sobre la misma banda y recorre 40 pies a la misma velocidad en dirección opuesta. Si el tiempo utilizado en el recorrido en cada dirección fue el mismo, determine la velocidad a la que camina Nathan.

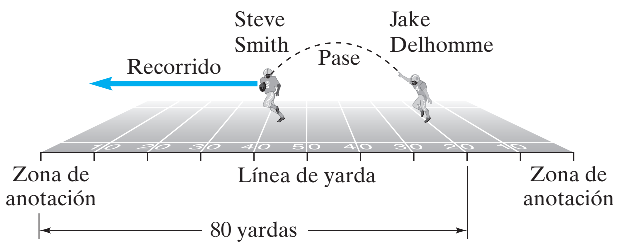
45. Esquí Bonnie Hellier y Clide Vincent darán un paseo en esquí a campo traviesa en las montañas Adirondack. Clide es un esquiador experto, capaz de recorrer 10 millas por hora, mientras que Bonnie promedia 6 millas por hora. Si Bonnie necesita 1/2 hora más que Clide para recorrer el mismo tramo, ¿cuál es la longitud del camino?

46. De excursión Ruth y Jerry Mackin salen a dar un paseo por el Parque Memorial en Houston, Texas. Ruth trota y Jerry va en patines. Javier patina a 2.9 millas por hora más rápido de lo que Ruth trota. Cuando Jerry ha patinado 5.7 millas, Ruth ha trotado 3.4 millas. Determine la velocidad de trote de Ruth.

47. Visita a un centro turístico Phil Mahler condujo 60 millas hasta el parque nacional de Yosemite. Él empleó el doble de tiempo en recorrerlo que lo que necesitó para llegar a él. El tiempo total utilizado en conducir hasta el parque y recorrerlo fue de 5 horas. Determine la velocidad promedio a la que condujo hacia el parque nacional de Yosemite.

48. Viaje en bote Ray Packerd inició un viaje en bote a las 8 a.m. El bote de Ray puede viajar a 20 millas por hora en aguas tranquilas. ¿Qué tan lejos río abajo puede ir Rafael, si la corriente es de 5 millas por hora y él desea ir y regresar en 4 horas?

49. Partido de fútbol americano En un partido de fútbol americano, las Panteras de Carolina tienen el balón en la yarda 20 de su propio terreno. Jake Delhomme pasa el balón a Steve Smith, quien lo atrapa y corre hacia la zona de anotación. Suponga que el balón viajó a 14.7 yardas por segundo en el pase, y que una vez que lo atrapó, Steve corrió a 5.8 yardas por segundo hasta la zona de anotación. Si la jugada completa, desde el momento en que Jake soltó el balón hasta el momento en que Steve llegó a la zona de anotación, duró 10.6 segundos, ¿qué tan lejos lanzó el balón Jake para que Steve lo atrapara? Suponga que toda la jugada se llevó a cabo en el centro del campo.



50. Viaje Cierto día, Pauline Shannon recorrió en su automóvil una distancia de 492 millas, desde Front Royal, Virginia hasta Asheville, North Carolina. Parte del viaje, Pauline condujo a una velocidad constante de 50 millas por hora, y en otra manejó a una velocidad constante de 35 millas por hora. Si el tiempo total del viaje fue de 11.13 horas, ¿qué distancia recorrió a cada velocidad?

51. Trenes subterráneos El tren número 4 en el sistema de trenes subterráneos de Nueva York va de la avenida Woodlawn/Jerome en el Bronx a la avenida Flatbush en Brooklyn. La distancia entre estas dos paradas es de 24.2 millas. En esta ruta, hay dos vías paralelas, una para el tren local y otra para el tren expreso. Ambos trenes inician su recorrido al mismo tiempo, desde Woodland. Cuando el tren expreso llega al final de la ruta en Flatbush, el tren local se encuentra a 7.8 millas de Flatbush. Si el tren expreso es más rápido que el normal en 5.2 millas promedio, determine las velocidades de los dos trenes.

52. Equitación Cada mañana, Ron Lucky monta su caballo, Belleza, y cabalga al trote una distancia de 5.4 millas; luego, deja que Belleza camine a su propio ritmo 2.3 millas. La velocidad del caballo al trotar es 4.2 veces su velocidad al caminar. Si todo el paseo dura 1.5 horas, determine la velocidad a que camina Belleza.

53. Viaje Un automóvil y un tren inician su recorrido hacia un poblado al mismo tiempo y desde el mismo punto; su destino está a 390 millas de distancia. Si la velocidad del automóvil promedia el doble de la velocidad del tren y el automóvil llega 6.5 horas antes que el tren, determine la velocidad del automóvil y la velocidad del tren.

54. Viaje Un tren y un automóvil salen de la estación de trenes de Pasadena, California, hacia la feria estatal de Sacramento. El automóvil promedia 50 millas por hora y el tren promedia 70 millas por hora. Si el tren llega a la feria 2 horas antes que el automóvil, determine la distancia de la estación de trenes a la feria.

55. Viaje Dos amigos recorren, cada uno por su lado, una distancia de 600 millas. Mary Ann Zilke viaja por autopista y llega a su destino dos horas antes que Carla Canola, quien tomó una ruta diferente. Si la velocidad promedio del automóvil de Marie fue 10 millas por hora más rápida que la del automóvil de Carla, determine la velocidad promedio a la que viajó el automóvil de Mary Ann.

56. Carrera de veleros *Bucanero*, el velero ganador de una competencia, completó su recorrido de 30 millas 10 minutos antes que el segundo lugar, *Cuervo*. Si la velocidad promedio de *Bucanero* fue de dos millas por hora más rápida que la de *Cuervo*, determine la velocidad promedio del velero ganador.

57. Viaje en helicóptero Kathy Angel viajó en helicóptero hasta la cima del monte Cook, en Nueva Zelanda. El recorrido fue de 60 kilómetros. Kathy permaneció en la cima del monte $\frac{1}{2}$ hora, y después voló a la ciudad de Te Anu, a 140 kilómetros de distancia. El helicóptero voló en promedio 20 kilómetros por hora más rápido al ir a Te Anu que durante el vuelo hacia la cima del monte. El tiempo total del viaje fue de dos horas. Determine la velocidad promedio a la que voló el helicóptero en su recorrido hacia el monte.

58. Veleros Dos veleros, el *Serendipity* y el *Zerwilliker*, inician su recorrido en el mismo punto y al mismo instante en el lago Michigan, y se dirigen hacia el mismo restaurante en el lago. El *Serendipity* navega a un promedio de 5.2 millas por hora, y el *Zerwilliker* lo hace a un promedio de 4.6 millas por hora. Si el *Serendipity* llega a su destino 0.4 horas antes que el *Zerwilliker*, determine la distancia que hay entre el punto en que iniciaron el recorrido al restaurante.

59. Paseo en bicicleta Robert Wiggins pasea en su bicicleta desde DuPont Circle en Washington, D.C. a Mount Vernon en Virgina. Tarda $2\frac{1}{2}$ horas en completar el viaje de 17 millas. En la parte lenta del viaje, Robert pedalea a una velocidad de 6 millas por hora. En la parte rápida del viaje, él pedalea a 10 millas por hora. ¿Cuánto tiempo viaja a 6 millas por hora y cuánto tiempo viaja a 10 millas por hora?

60. Patinaje y trote Sharon McGhee patina y trota en una pista que tiene una longitud de 38 millas. En la parte que está pavimentada, ella patina a una velocidad de 11 millas por hora. En la parte sin pavimentar, trota a 7 millas por hora. El viaje completo le toma 4 horas en terminarlo. ¿Cuánto tiempo patina y cuánto trota?

61. Puente colgante Un puente colgante tiene una longitud de 450 pies. Phil y Heim empiezan a cruzarlo a pie al mismo tiempo. La velocidad de Heim fue 2 pies por minuto más rápida que la de Phil. Si Heim terminó de cruzar el puente $2\frac{1}{2}$ minutos antes que Phil, determine la velocidad promedio, en pies por minuto, a la que lo cruzó Phil.

62. Vía de tren inclinada Un paseo por el monte Pilatos, cerca de Lucerna, Suiza, incluye un recorrido a lo largo de una vía de tren inclinada que sube hacia la cima; después, se pasa algún tiempo ahí, y luego se regresa por el lado opuesto del monte, a bordo de un teleférico. La distancia que se recorre hacia la cima del monte es de 7.5 kilómetros, y la distancia del descenso es de 8.7 kilómetros. La velocidad del teleférico es 1.2 veces la velocidad del tren sobre la vía inclinada. Si una familia permaneció en la cima del monte durante 3 horas, y el tiempo total del paseo fue de 9 horas, determine la velocidad del recorrido por la vía inclinada.

63. Lanzamiento de cohetes Dos cohetes serán lanzados al mismo tiempo desde el principal centro de operaciones de la NASA en Houston, Texas, y se encontrarán en una estación espacial a muchas millas de distancia de la Tierra. El primer cohete viaja a 20,000 millas por hora, y el segundo a 18,000 millas por hora. Si el primer cohete llegará a la estación espacial 0.6 horas antes que el segundo, ¿qué tan lejos se encuentra la estación espacial del centro de operaciones de la NASA?

64. Construya su propio problema de aplicación y determine la solución.

65. Construya su propio problema de movimiento y determine la solución.

66. Construya su propio problema numérico y determine la solución.

Reto

67. Una oficial que pilota una aeronave de patrullaje determina que un automóvil, que está a una distancia de 10 millas, está siendo conducido a una velocidad de 90 millas por hora.

a) Si la aeronave viaja a 150 millas por hora, ¿cuántos minutos tardará en alcanzar al automóvil?

b) ¿Qué distancia recorrerá el automóvil antes de que la aeronave le dé alcance?

c) Si la oficial desea alcanzar al automóvil en exactamente 8 minutos, ¿qué tan rápido debe volar la aeronave?

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.5] **68.** Simplifique $\dfrac{(2x^{-2}y^{-2})^{-3}}{(3x^{-1}y^{3})^{2}}$.

[1.6] **69.** Exprese 9,260,000,000 en notación científica.

[2.3] **70. Salario semanal** Sandy Ivey recibe un salario semanal de \$240, más 12% de comisión sobre el volumen de sus ventas totales. ¿Cuál debe ser su volumen de ventas en una semana para ganar \$540?

[3.1] **71.** Grafique $y = |x| - 2$.

[5.4] **72.** Factorice $2a^4 - 2a^3 - 5a^2 + 5a$.

6.6 Variación

1 Resolver problemas de variación directa.

2 Resolver problemas de variación inversa.

3 Resolver problemas de variación conjunta.

4 Resolver problemas de variación combinada.

En las secciones 6.4 y 6.5 analizamos muchas aplicaciones de ecuaciones que contienen expresiones racionales. En esta sección veremos algunas más.

1 Resolver problemas de variación directa

Muchas fórmulas científicas se expresan como variaciones. Una **variación** es una ecuación que relaciona una variable con una o más variables distintas, utilizando las operaciones de multiplicación y/o división. Esencialmente, existen tres tipos de problemas de este tipo: de variación directa, de variación inversa y de variación conjunta.

En la **variación directa**, las dos variables relacionadas aumentan o disminuyen juntas; esto es, conforme una aumenta la otra también, y a medida que una disminuye la otra también lo hace.

Piense, por ejemplo, en un automóvil que viaja a 30 millas por hora; el automóvil recorre 30 millas en una hora, 60 millas en 2 horas y 90 millas en 3 horas. Observe que al aumentar el tiempo, la distancia recorrida también aumenta.

La fórmula utilizada para calcular la distancia recorrida es

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}$$

Como la velocidad es constante, 30 millas por hora, la fórmula puede escribirse como

$$d = 30t$$

Decimos que la distancia varía directamente respecto del tiempo, o que la distancia es directamente proporcional al tiempo. Éste es un ejemplo de variación directa.

Variación directa

Si una variable y varía directamente respecto de una variable x, entonces

$$y = kx$$

donde k es la **constante de proporcionalidad** (o la constante de variación).

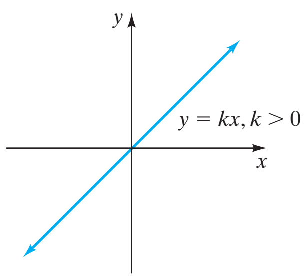


FIGURA 6.11

La gráfica de $y = kx, k > 0$, siempre da por resultado una recta que pasa por el origen (vea la **figura 6.11**). La pendiente de la recta depende del valor de k. Entre mayor sea el valor de k, mayor será la pendiente.

EJEMPLO 1 ▸ **Círculo** La circunferencia de un círculo, C, es directamente proporcional a (o varía directamente respecto de) su radio, r. Escriba la ecuación de la circunferencia de un círculo si la constante de proporcionalidad, k, es 2π.

Solución

$C = kr$ (C varía directamente respecto de r)

$C = 2\pi r$ (la constante de proporcionalidad es 2π)

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 11**

EJEMPLO 2 ▸ **Administración de medicamentos** La cantidad, a, de cierto medicamento que se administra a un paciente es directamente proporcional a la masa corporal del paciente, m, en kilogramos.

a) Escriba esta variación como una ecuación.

b) Si le dan 150 mg a un chico cuya masa corporal es de 30 kg, determine la constante de proporcionalidad.

c) ¿Qué cantidad de este medicamento debe administrarse a un paciente cuya masa corporal es de 62 kg?

Solución **a)** Dijimos que ésta es una variación directa. Es decir, a mayor masa corporal del paciente, mayor cantidad de medicamento tendrá que administrársele. Por lo tanto, planteamos una variación directa,

$$a = km$$

b) Entienda el problema y traduzca Para determinar el valor de la constante de proporcionalidad, sustituimos los valores dados por la cantidad del medicamento y la masa corporal del paciente. Después despejamos k.

$$a = km$$
$$150 = k(30) \quad \text{Sustituir los valores dados.}$$

Realice los cálculos
$$5 = k$$

Responda Así, $k = 5$ mg. Se deben administrar 5 miligramos del medicamento por cada kilogramo de masa corporal de un paciente.

c) Entienda el problema y traduzca Ahora que conocemos la constante de proporcionalidad, podemos usarla para determinar la cantidad de medicamento que se debe administrar según la masa corporal de un paciente. Planteamos la variación y sustituimos los valores para k y m.

$$a = km$$
$$a = 5(62) \quad \text{Sustituir los valores dados.}$$

Realice los cálculos
$$a = 310$$

Responda Así, a un paciente con una masa corporal de 62 kg, se le deben administrar 310 mg del medicamento.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 57

EJEMPLO 3 ▸ La variable y varía directamente respecto del cuadrado de z. Si y es 80 cuando z es 20, determine y cuando z es 45.

Solución Como y varía directamente respecto del *cuadrado de z,* comenzamos con la fórmula $y = kz^2$. En vista de que no se indica cuál es la constante de proporcionalidad, primero debemos determinar k con la información dada.

$$y = kz^2$$
$$80 = k(20)^2 \quad \text{Sustituir los valores dados.}$$
$$80 = 400k \quad \text{Despejar } k.$$
$$\frac{80}{400} = \frac{400k}{400}$$
$$0.2 = k$$

Ahora utilizamos $k = 0.2$ para determinar y cuando z es 45.

$$y = kz^2$$
$$y = 0.2(45)^2 \quad \text{Sustituir los valores dados.}$$
$$y = 405$$

De este modo, cuando z es igual a 45, y es igual a 405.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 35

2 Resolver problemas de variación inversa

Un segundo tipo de variación es la **variación inversa**. Cuando dos cantidades varían inversamente, significa que conforme una cantidad aumenta, la otra disminuye, y viceversa.

Para explicar la variación inversa, utilicemos una vez más la fórmula distancia = velocidad · tiempo. Si despejamos el tiempo, obtenemos tiempo $= \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$. Suponga que la distancia se determina en 120 millas; entonces

$$\text{tiempo} = \frac{120}{\text{velocidad}}$$

A 120 millas por hora, se requeriría 1 hora para recorrer la distancia; a 60 millas por hora, se necesitarían 2 horas; a 30 millas por hora, serían necesarias 4 horas. Observe que cuando la velocidad (o rapidez) disminuye, el tiempo aumenta, y viceversa.

La ecuación anterior puede escribirse como

$$t = \frac{120}{r}$$

Esta ecuación es un ejemplo de variación inversa. El tiempo y la velocidad son inversamente proporcionales. La constante de proporcionalidad es 120.

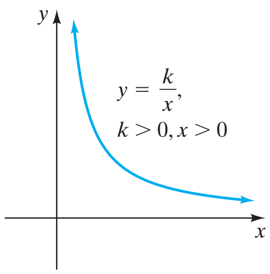


FIGURA 6.12

Variación inversa

Si una variable y varía inversamente respecto de una variable x, entonces

$$y = \frac{k}{x} \qquad (\text{o } xy = k)$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Dos cantidades varían inversamente, o son inversamente proporcionales, si una de ellas aumenta a medida que la otra disminuye. La gráfica de $y = \frac{k}{x}$, para $k > 0$ y $x > 0$, tendrá la forma que se ilustra en la **figura 6.12**. La gráfica de una variación inversa no está definida en $x = 0$, ya que 0 no está en el dominio de la función $y = \frac{k}{x}$.

EJEMPLO 4 ▸ **Hielo derretido** El tiempo, t, que tarda en derretirse un bloque de hielo cuando se le sumerge en agua es inversamente proporcional a la temperatura del agua, T.

a) Escriba esta variación como una ecuación.

b) Si un bloque de hielo tarda 15 minutos en derretirse cuando se le sumerge en agua con una temperatura de 60°F, determine la constante de proporcionalidad.

c) Determine en cuánto tiempo se derretirá un bloque de hielo del mismo tamaño si la temperatura del agua es de 50°F.

Solución **a)** Entre más caliente esté el agua, más rápido se derretirá el hielo. La variación inversa es

$$t = \frac{k}{T}$$

b) Entienda el problema y traduzca Para determinar la constante de proporcionalidad, sustituimos los valores para la temperatura y el tiempo y despejamos k.

$$t = \frac{k}{T}$$

$$15 = \frac{k}{60} \qquad \text{Sustituir los valores dados.}$$

Realice los cálculos $\quad 900 = k$

Responda La constante de proporcionalidad es 900.

c) Entienda el problema y traduzca Ahora que conocemos la constante de proporcionalidad, podemos usarla para determinar en cuánto tiempo se derretirá un bloque de hielo del mismo tamaño si se le sumerge en agua con una temperatura de 50°F. Para ello, establecemos la proporción, sustituimos los valores para k y T, y despejamos t.

$$t = \frac{k}{T}$$

$$t = \frac{900}{50} \qquad \text{Sustituir los valores dados.}$$

Realice los cálculos $\quad t = 18$

Responda El bloque de hielo sumergido en el agua con temperatura de 50°F se derretirá en 18 minutos.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 61**

EJEMPLO 5 ▸ **Iluminación** La iluminación, I, que produce una fuente de luz varía inversamente respecto del cuadrado de la distancia, d, a la que se esté de la fuente. Suponiendo que la iluminación es de 75 unidades a una distancia de 4 metros, determine la ecuación que expresa la relación entre iluminación y distancia.

Solución **Entienda el problema y traduzca** Como la iluminación varía inversamente respecto del *cuadrado* de la distancia, la forma general de la ecuación es

$$I = \frac{k}{d^2} \qquad (\text{o } Id^2 = k)$$

Para determinar k, sustituimos los valores dados para I y d.

$$75 = \frac{k}{4^2} \qquad \text{Sustituir los valores dados.}$$

Realice los cálculos

$$75 = \frac{k}{16} \qquad \text{Despejar } k.$$

$$(75)(16) = k$$

$$1200 = k$$

Responda La fórmula es $I = \dfrac{1200}{d^2}$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 65**

3 Resolver problemas de variación conjunta

Una cantidad puede variar en relación al producto de dos o más cantidades distintas. Este tipo de variación se llama **variación conjunta**.

Variación conjunta

Si y varía conjuntamente respecto de x y z, entonces

$$y = kxz$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

EJEMPLO 6 ▸ **Área de un triángulo** El área, A, de un triángulo varía conjuntamente respecto de su base b, y su altura h. Si el área de un triángulo mide 48 pulgadas cuadradas cuando su base mide 12 pulgadas y su altura es 8 pulgadas, determine el área de un triángulo cuya base mide 15 pulgadas y cuya altura mide 40 pulgadas.

Solución **Entienda el problema y traduzca** Primero escribimos la variación conjunta; después sustituimos los valores conocidos y despejamos k.

$$A = kbh$$

$$48 = k(12)(8) \qquad \text{Sustituir los valores dados.}$$

Realice los cálculos

$$48 = k(96) \qquad \text{Despejar } k.$$

$$\frac{48}{96} = k$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Ahora despejamos el área del triángulo dado.

$$\begin{aligned} A &= kbh \\ &= \frac{1}{2}(15)(40) \qquad \text{Sustituir los valores dados.} \\ &= 300 \end{aligned}$$

Responda El área del triángulo mide 300 pulgadas cuadradas.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 69**

Resumen de variaciones

DIRECTA	INVERSA	CONJUNTA
$y = kx$	$y = \dfrac{k}{x}$	$y = kxz$

4 Resolver problemas de variación combinada

En situaciones de la vida real, muchas veces una variable varía respecto de una combinación de variables. Los siguientes ejemplos ilustran el uso de las **variaciones combinadas**.

EJEMPLO 7 ▸ **Tienda de galletas** Los propietarios de una tienda de galletas determinan que su venta semanal, S, varía directamente respecto de su presupuesto de publicidad, A, e inversamente respecto del precio de las galletas, P. Cuando el presupuesto de publicidad es de \$400 y el precio de las galletas es de \$1, se venden 6200 galletas.

a) Escriba una ecuación de variación que exprese a S en términos de A y P. Incluya el valor de la constante.

b) Determine las ventas esperadas, si el presupuesto de publicidad es de \$600 y el precio de las galletas es de \$1.20.

Solución **a)** Entienda el problema y traduzca Comenzamos con la ecuación

$$S = \frac{kA}{P}$$

Realice los cálculos

$$6200 = \frac{k(400)}{1} \qquad \textit{Sustituir los valores dados.}$$

$$6200 = 400k \qquad \textit{Despejar } k.$$

$$15.5 = k$$

Responda Por lo tanto, la ecuación para calcular las ventas de galletas es $S = \dfrac{15.5A}{P}$.

b) Entienda el problema y traduzca Ahora que conocemos la ecuación de la variación combinada, podemos usarla para determinar las ventas según los valores dados.

$$S = \frac{15.5A}{P}$$

$$= \frac{15.5(600)}{1.20} \qquad \textit{Sustituir los valores dados.}$$

Realice los cálculos

$$= 7750$$

Responda La tienda puede vender 7750 galletas.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 71

EJEMPLO 8 ▸ **Fuerza electrostática** La fuerza electrostática, F, de repulsión entre dos cargas eléctricas positivas, es conjuntamente proporcional respecto de las dos cargas q_1 y q_2, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, d, entre las dos cargas. Exprese F, en términos de q_1, q_2 y d.

Solución

$$F = \frac{kq_1q_2}{d^2}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 75

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.6

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. **a)** Explique qué significa cuando dos elementos varían en proporción directa.
   b) Proporcione su propio ejemplo de dos cantidades que varíen directamente.
   c) Escriba la variación directa para su ejemplo de la parte **b)**.
2. **a)** Explique qué significa cuando dos elementos varían en proporción inversa.
   b) Proporcione su propio ejemplo de dos cantidades que varíen inversamente.
   c) Escriba la variación inversa para su ejemplo de la parte **b)**.
3. ¿Qué se entiende por variación conjunta?
4. ¿Qué se entiende por variación combinada?
5. **a)** En la ecuación $y = \frac{17}{x}$, cuando x aumenta, ¿el valor de y aumenta o disminuye?
   b) ¿Éste es un ejemplo de variación directa o inversa? Explique.
6. **a)** En la ecuación $z = 0.8x^3$, cuando x aumenta, ¿el valor de z aumenta o disminuye?
   b) ¿Éste es un ejemplo de variación directa o inversa? Explique.

Variación *Utilice su intuición para determinar si la variación entre las cantidades indicadas es directa o inversa.*

7. La velocidad y la distancia recorrida por un ciclista.
8. El número de páginas que puede leer Tom en un periodo de dos horas, y su velocidad de lectura.
9. La velocidad de un atleta y el tiempo en que recorre una distancia de 10 kilómetros.
10. El salario semanal de Bárbara, y la cantidad de dinero que se le retiene por concepto de impuesto sobre los ingresos.
11. El radio de un círculo y su área.
12. El lado de un cubo y su volumen.
13. El radio de un globo y su volumen.
14. El diámetro de un círculo y su circunferencia.
15. El diámetro de una manguera y el volumen de agua que pasa por ella.
16. El peso de un cohete (debido a la gravedad terrestre) y la distancia que recorre desde la Tierra.
17. El tiempo que tarda en deshacerse un cubo de hielo sumergido en agua y la temperatura del agua.
18. La distancia entre dos ciudades en un mapa, y la distancia real entre ambas.
19. La abertura del obturador de una cámara fotográfica y la cantidad de luz que llega a la película.
20. El desplazamiento de pulgadas cúbicas expresado en litros producido por una máquina y los caballos de fuerza de la máquina.

21. La longitud de una tabla y la fuerza necesaria para romperla en el centro.
22. El número de calorías ingeridas y la cantidad de ejercicio necesario para quemarlas.
23. La luz que ilumina un objeto y la distancia entre la luz y el objeto.
24. El número de calorías que hay en una hamburguesa y el tamaño de la hamburguesa.

Práctica de habilidades

En los ejercicios 25 a 32, **a)** *escriba la variación, y* **b)** *determine la cantidad que se pide.*

25. x varía directamente respecto de y. Determine x cuando $y = 12$ y $k = 6$.
26. C varía directamente respecto del cuadrado de Z. Determine C cuando $Z = 9$ y $k = \frac{3}{4}$.
27. y varía directamente respecto de R. Determine y cuando $R = 180$ y $k = 1.7$
28. x varía inversamente respecto de y. Determine x cuando $y = 25$ y $k = 5$.
29. R varía inversamente respecto de W. Determine R cuando $W = 160$ y $k = 8$.
30. L varía inversamente respecto del cuadrado de P. Determine L cuando $P = 4$ y $k = 100$.
31. A varía directamente respecto de B, e inversamente respecto de C. Determine A cuando $B = 12$, $C = 4$ y $k = 3$.
32. A varía conjuntamente respecto de R_1 y R_2, e inversamente respecto del cuadrado de L. Determine A cuando $R_1 = 120$, $R_2 = 8$, $L = 5$ y $k = \frac{3}{2}$.

En los ejercicios 33 al 42, **a)** *escriba la variación, y* **b)** *determine la cantidad indicada.*

33. x varía directamente con y. Si x es 12 cuando y es 3, determine x cuando y es 5.
34. Z varía directamente con W. Si Z es 7 cuando W es 28, determine Z cuando W es 140.
35. y varía directamente con el cuadrado de R. Si y es 5 cuando $R = 5$, determine y cuando R es 10.
36. P varía directamente con el cuadrado de Q. Si P es 32 cuando Q es 4, determine P cuando Q es 7.
37. S varía inversamente con G. Si S es 12 cuando G es 0.4, determine S cuando G es 5.
38. C varía inversamente con J. Si C es 7 cuando J es 0.7, determine C cuando J es 12.

39. x varía inversamente con el cuadrado de P. Si x es 4, cuando P es 5, determine x cuando P es 2.

41. F varía conjuntamente con M_1 y M_2, e inversamente con d. Si F es 20 cuando $M_1 = 5$, $M_2 = 10$ y $d = 0.2$, determine F cuando $M_1 = 10$, $M_2 = 20$ y $d = 0.4$.

40. R varía inversamente con el cuadrado de T. Si R es 3 cuando T es 6, determine R cuando T es 2.

42. F varía conjuntamente con q_1 y q_2, e inversamente con el cuadrado de d. Si F es 8 cuando $q_1 = 2$, $q_2 = 8$ y $d = 4$, determine F cuando $q_1 = 28$, $q_2 = 12$ y $d = 2$.

Resolución de problemas

43. Suponga que a varía directamente con b. Si b se duplica, ¿cómo afectará a a? Explique.

44. Suponga que a varía directamente con b^2. Si b se duplica, ¿cómo afectará a a? Explique.

45. Suponga que y varía inversamente con x. Si x se duplica, ¿cómo afectará a y? Explique.

46. Suponga que y varía inversamente con a^2. Si a se duplica, ¿cómo afectará a y? Explique.

En los ejercicios 47 a 52, utilice la fórmula $F = \dfrac{km_1m_2}{d^2}$.

47. Si m_1 se duplica, ¿cómo afectará a F?

48. Si m_1 se cuadruplica y d se duplica, ¿cómo afectará a F?

49. Si m_1 se duplica, y m_2 se divide entre dos, ¿cómo afectará a F?

50. Si d se divide entre dos, ¿cómo afectará a F?

51. Si m_1 se divide entre dos, y m_2 se cuadriplica, ¿cómo afectará a F?

52. Si m_1 se duplica, m_2 se cuadriplica y d se cuadriplica, ¿cómo afectará a F?

En los ejercicios 53 y 54, determine si la variación es de la forma $y = kx$ *o* $y = \dfrac{k}{x}$ *y determine k.*

53.

x	y
2	$\frac{5}{2}$
5	1
10	$\frac{1}{2}$
20	$\frac{1}{4}$

54.

x	y
6	2
9	3
15	5
27	9

55. Utilidad La utilidad por la venta de lámparas es directamente proporcional al número de lámparas vendidas. Cuando se venden 150 lámparas, la utilidad es de $2542.50. Determine la utilidad cuando se venden 520 lámparas.

56. Utilidad La utilidad por la venta de estéreos es directamente proporcional al número de estéreos vendidos. Cuando se venden 65 estéreos, la utilidad es de $4056. Determine la utilidad cuando se venden 80 estéreos.

57. Antibiótico La dosis recomendada, d, de un medicamento antibiótico, vancomycin, es directamente proporcional al peso de la persona. Si a Phuong Kim, quien pesa 132 libras, se le administran 2376 miligramos, determine la dosis recomendada para Nathan Brown, quien pesa 172 libras.

58. Dólares y pesos La conversión de dólares estadounidenses a pesos mexicanos es una variación directa. Entre más dólares convierta más pesos recibe. La semana pasada, Carlos Manuel convirtió 275 dólares en 2433.75 pesos. Ahora su tía le dio 400 dólares. Si el tipo de cambio sigue siendo el mismo, cuando él convierta los 400 dólares, ¿cuántos pesos recibirá?

59. Ley de Hooke La ley de Hooke establece que la longitud que un resorte se estira, S, varía directamente con la fuerza (o peso), F, que se le aplica. Si un resorte se estira 1.4 pulgadas cuando se aplica un peso de 20 libras, ¿cuánto se estirará cuando se aplique un peso de 15 libras?

60. Distancia Cuando un automóvil viaja a una velocidad constante, la distancia recorrida, d, es directamente proporcional al tiempo, t. Si un automóvil recorre 150 millas en 2.5 horas, ¿qué tan lejos viajará el mismo automóvil en 4 horas?

61. Presión y volumen El volumen de un gas, V, varía inversamente con su presión, P. Si el volumen, V, es de 800 centímetros cúbicos cuando la presión es de 200 milímetros (mm) de mercurio, determine el volumen cuando la presión es de 25 mm de mercurio.

62. Construcción de un muro de ladrillos El tiempo, t, requerido para construir un muro de ladrillos varía inversamente con el número de personas, n, que trabajen en él. Si 5 albañiles necesitan 8 horas para construir un muro, ¿cuánto tardarán 4 albañiles en realizar la misma tarea?

63. Carrera El tiempo, t, que necesita un corredor para cubrir una distancia específica es inversamente proporcional a su velocidad. Si Jann Avery corre a un promedio de 6 millas por hora, terminará una carrera en 2.6 horas. ¿Cuánto tiempo necesitará Jackie Donofrio, quien corre a 5 millas por hora, para terminar la misma carrera?

64. **Lanzamiento de una bola** Cuando se lanza una bola en un juego profesional de béisbol, el tiempo, t, que tarda en llegar al home varía inversamente con la velocidad, s, del lanzamiento.* Una bola lanzada a 90 millas por hora tarda 0.459 segundos en llegar al home. ¿Cuánto tardará una bola lanzada a 75 millas por hora en llegar al home?

65. **Intensidad de la luz** La intensidad, I, de la luz emitida por una fuente de energía varía inversamente con el cuadrado de la distancia, d, a la que está dicha fuente. Si la intensidad de la luz es de 20 pies-bujías a 15 pies, determine la intensidad de la luz a 10 pies.

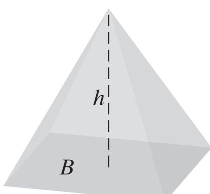
66. **Pelota de tenis** Cuando un tenista sirve una pelota, el tiempo que le toma a la pelota golpear el piso de la caja de servicio es inversamente proporcional a la velocidad a la que viaja. Si Andy Roddick sirve a 122 millas por hora, la pelota necesita 0.21 segundos para pegar en el piso. ¿Cuánto tardará la pelota en pegar en el piso, si Andy sirve a 80 millas por hora?

Andy Roddick

67. **Distancia para detenerse** Suponga que la distancia que una camioneta necesita para detenerse varía directamente con el cuadrado de su velocidad. Una camioneta que viaja a 40 millas por hora puede detenerse en 60 pies. Si la camioneta está viajando a 56 millas por hora, ¿qué distancia necesita para detenerse?

68. **Rocas que caen** Se deja caer una roca desde lo alto de un risco. La distancia que recorre al caer, en pies, es directamente proporcional al cuadrado del tiempo en segundos. Si la roca cae 4 pies en $\frac{1}{2}$ segundo, ¿qué distancia caerá en 3 segundos?

69. **Volumen de una pirámide** El volumen, V, de una pirámide varía conjuntamente con el área de su base, B, y su altura h (vea la figura). Si el volumen de la pirámide es 160 metros cúbicos, cuando el área de su base es de 48 metros cúbicos y su altura es de 10 metros, determine el volumen de una pirámide cuando el área de su base es de 42 metros cuadrados y su altura es de 9 metros.



70. **Pago de hipoteca** El pago mensual de una hipoteca, P, varía conjuntamente con la tasa de interés, r, y el monto de la hipoteca, m. Si el pago mensual de la hipoteca sobre un monto de \$50,000 a 7% de tasa de interés es \$332.50, determine el pago mensual sobre una hipoteca de \$66,000 a 7%.

71. **Alquiler de DVD** El alquiler semanal de DVD, R, en una tienda especializada varía directamente respecto de su presupuesto de publicidad, A, e inversamente respecto del precio diario de alquiler, P. Cuando el presupuesto de publicidad es de \$400 y el precio diario del alquiler es de \$2, la tienda alquila 4600 DVD por semana. ¿Cuántas cintas alquilaría por semana si aumentara su presupuesto de publicidad a \$500 y subieran su precio de alquiler a \$2.50?

72. **Resistencia eléctrica** La resistencia eléctrica de un cable, R, varía directamente respecto de su longitud, L, e inversamente respecto del área de su sección transversal, A. Si la resistencia de un cable es de 0.2 ohms cuando la longitud es de 200 pies, y el área de su sección transversal mide 0.05 pulgadas cuadradas, determine la resistencia de un cable cuya longitud mide 5000 pies, y el área de su sección transversal mide 0.01 pulgadas cuadradas.

73. **Peso de un objeto** El peso, w, de un objeto en la atmósfera de la Tierra varía inversamente respecto del cuadrado de la distancia, d, entre el objeto y el centro de la Tierra. Una persona que pesa 140 libras se encuentra aproximadamente a 4000 millas de distancia del centro de la Tierra. Determine el peso (o fuerza de atracción gravitacional) de esta persona si estuviera a una distancia de 100 millas sobre la superficie de la Tierra.

74. **Consumo de energía** El consumo de energía, en watts, de un aparato, W, varía conjuntamente respecto del cuadrado de la corriente, I, y la resistencia, R. Si el consumo es de 3 watts cuando la corriente es de 0.1 amperes y la resistencia es de 100 ohms, determine el consumo de energía cuando la corriente es de 0.4 amperes y la resistencia es de 250 ohms.

75. **Llamadas telefónicas** El número de llamadas telefónicas entre dos ciudades durante un periodo dado, N, varía directamente respecto del número de habitantes, p_1 y p_2, de las dos ciudades, e inversamente respecto de la distancia, d, entre ellas. Si se realizan 100,000 llamadas entre dos ciudades que se encuentran a una distancia de 300 millas, y el número de habitantes de las ciudades es de 60,000 y 200,000, respectivamente, ¿cuántas llamadas se realizan entre dos ciudades con poblaciones de 125,000 y 175,000 que se encuentran a 450 millas de distancia?

76. **Cobro por consumo de agua** En una región específica del país, el monto de la factura por consumo de agua de un cliente, W, es directamente proporcional a la temperatura diaria promedio durante el mes, T, el área del jardín, A, y la raíz cuadrada de F, el tamaño de la familia, e inversamente proporcional al número de pulgadas de lluvia, R.

*Una bola se va deteniendo poco a poco a lo largo de su camino al home, debido a la resistencia al viento. Para un lanzamiento de 95 mph, la bola es alrededor de 8 mph más rápida cuando sale de la mano del lanzador que cuando cruza el home.

En un mes, la temperatura promedio es 78°F, y el número de pulgadas de lluvia es 5.6. Si una familia promedio de cuatro integrantes tiene un jardín de 1000 pies cuadrados y paga $68 por consumo de agua, calcule cuánto pagará en el mismo mes una familia de seis miembros, cuyo jardín mide 1500 pies cuadrados.

77. Intensidad de iluminación En un artículo de la revista *Outdoor and Travel Photography* se establece que: "Si una superficie se ilumina mediante una fuente de luz puntual (un flash), la intensidad de la iluminación producida es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa".

Si quiere fotografiar un objeto que está a 4 pies de distancia del flash, y la iluminación en su objetivo es $\frac{1}{16}$ de la luz del flash, ¿cuál es la intensidad de iluminación sobre un objeto que está a 7 pies de distancia del flash?

78. Fuerza de atracción Una de las leyes de Newton establece que la fuerza de atracción, F, entre dos masas, es directamente proporcional a las masas de los dos objetos, m_1 y m_2, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, d, entre las dos masas.

a) Escriba la fórmula que representa la ley de Newton.

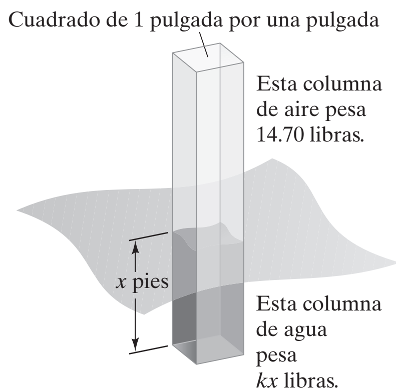
b) ¿Qué le sucede a la fuerza de atracción si una masa se duplica, la otra se triplica, y la distancia entre los objetos se divide entre dos?

79. Presión sobre un objeto La presión P, en libras por pulgadas cuadradas (psi), que se ejerce sobre un objeto a x pies bajo el nivel del mar es de 14.70 psi más el producto de una constante de proporcionalidad, k y el número de pies, x, al que el objeto se encuentra por debajo del nivel del mar (vea la figura). La cifra 14.70 representa el peso, en libras, de la columna de aire (a partir del nivel del mar y hasta la parte superior de la atmósfera) que está sobre un área de 1 pulgada por 1 pulgada de agua de mar. El producto kx representa el peso, en libras, de una columna de agua de 1 pulgada por 1 pulgada por x pies.

a) Escriba una fórmula para calcular la presión que se ejerce sobre un objeto que se encuentra a x pies por debajo del nivel del mar.

b) Si el barómetro de un submarino que se ubica a 60 pies de profundidad registra 40.5 psi, determine la constante k.

c) Si un submarino está construido para soportar una presión de 160 psi, ¿hasta qué profundidad puede descender?



Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **80.** Despeje h de la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^2 h$.

[3.6] **81.** Sea $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = -5x + 1$. Determine $f(-4) \cdot g(-2)$.

[5.2] **82.** Multiplique $(7x - 3)(-2x^2 - 4x + 5)$.

[5.7] **83.** Factorice $(x + 1)^2 - (x + 1) - 6$.

Resumen del capítulo 6

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 6.1	
Una **expresión racional** es una expresión de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.	$\frac{7}{x}, \quad \frac{x^2 - 5}{x + 1}, \quad \frac{t^2 - t + 1}{3t^2 + 5t - 7}$
Una **función racional** es una función de la forma $f(x) = \frac{p}{q}$ o $y = \frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.	$y = \frac{x - 8}{x + 9}, \quad f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{9x^2 - x + 3}$
El **dominio** de una función racional es el conjunto de valores que pueden usarse para remplazar a la variable.	El dominio de $f(x) = \frac{x + 9}{x - 2}$ es $\{x \mid x \neq 2\}$.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES — EJEMPLOS

Sección 6.1 (continuación)

Para simplificar expresiones racionales

1. Factorice completamente el numerador y el denominador.
2. Divida el numerador y el denominador entre los factores comunes, si los hay.

$$\frac{x^3-8}{x^2-4}=\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{(x+2)\cancel{(x-2)}}=\frac{x^2+2x+4}{x+2}$$

Para multiplicar expresiones racionales

Para multiplicar expresiones racionales, factorice todos los numeradores y denominadores y luego utilice la regla:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},\quad b\neq 0, d\neq 0$$

$$\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{2x-1}=\frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}\cdot\frac{x+1}{\cancel{2x-1}}=\frac{x+1}{x-1}$$

Para dividir expresiones racionales

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c},\quad b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$$

$$\frac{x^2+4x+3}{x+1}\div\frac{x+3}{x}=\frac{\cancel{(x+3)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}\cdot\frac{x}{\cancel{x+3}}=x$$

Sección 6.2

Para sumar o restar expresiones racionales

Suma

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},\quad c\neq 0$$

Resta

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c},\quad c\neq 0$$

$$\frac{x}{x^2-49}-\frac{7}{x^2-49}=\frac{x-7}{x^2-49}=\frac{\cancel{x-7}}{(x+7)\cancel{(x-7)}}=\frac{1}{x+7}$$

Para determinar el mínimo común denominador (MCD) de expresiones racionales

1. Escriba cada coeficiente no primo (diferente de 1) de monomios que aparezcan en los denominadores como un producto de números primos.
2. Factorice completamente cada denominador.
3. Liste todos los factores diferentes de cada denominador. Cuando aparezca el mismo factor en más de un denominador, escriba el factor con la mayor potencia que aparezca.
4. El mínimo común denominador es el producto de todos los factores que se encontraron en el paso 2.

El MCD de $\dfrac{7}{9x^2y}+\dfrac{17}{3xy^3}$ es $3\cdot 3\cdot x^2\cdot y^3=9x^2y^3$.

El MCD de $\dfrac{1}{x^2-36}-\dfrac{4x+3}{x^2+13x+42}$ es $(x+6)(x-6)(x+7)$. Observe que $x^2-36=(x+6)(x-6)$ y $x^2+13x+42=(x+6)(x+7)$.

Para sumar o restar expresiones racionales con denominadores diferentes

1. Determine el MCD.
2. Rescriba cada fracción como una fracción equivalente con el MCD.
3. Deje el denominador en la forma factorizada, pero desarrolle el numerador.
4. Sume o reste los numeradores conservando el MCD.
5. Cuando sea posible reducir la fracción factorizando el numerador, hágalo.

Sume $\dfrac{2a}{x^2y}+\dfrac{b}{xy^3}$.

El MCD es x^2y^3.

$$\begin{aligned}\frac{2a}{x^2y}+\frac{b}{xy^3}&=\boxed{\frac{y^2}{y^2}}\cdot\frac{2a}{x^2y}+\frac{b}{xy^3}\cdot\boxed{\frac{x}{x}}\\&=\frac{2ay^2}{x^2y^3}+\frac{bx}{x^2y^3}\\&=\frac{2ay^2+bx}{x^2y^3}\end{aligned}$$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | EJEMPLOS

Sección 6.3

Una **fracción compleja** es aquella que tiene una expresión racional en su numerador o en su denominador o en los dos.

$$\frac{\dfrac{2x}{x-1}}{\dfrac{x^2}{x+1}}, \qquad \frac{7-\dfrac{6}{y}}{\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{8}{y^3}}$$

Para simplificar una fracción compleja mediante la multiplicación por un denominador común

1. Determine el MCD de todas las fracciones que aparezcan en la fracción compleja.
2. Multiplique el numerador y el denominador de la fracción compleja por el MCD de la fracción compleja, que se determinó en el paso 1.
3. Cuando sea posible, simplifique.

Simplifique $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x}$.

El MCD es x.

$$\frac{1+\dfrac{1}{x}}{x} = \frac{x}{x}\cdot\frac{1+\dfrac{1}{x}}{x} = \frac{x(1)+x\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x(x)} = \frac{x+1}{x^2}$$

Para simplificar una fracción compleja mediante la simplificación del numerador y el denominador

1. Cuando sea necesario, sume o reste, para obtener una expresión racional en el numerador.
2. Cuando sea necesario, sume o reste para obtener una expresión racional en el denominador.
3. Invierta el denominador de la fracción compleja y multiplique por el numerador de la fracción compleja.
4. Cuando sea posible, simplifique.

Simplifique $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x}$.

$$\frac{1+\dfrac{1}{x}}{x} = \frac{\dfrac{x+1}{x}}{x} = \frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x^2}$$

Sección 6.4

Para resolver ecuaciones racionales

1. Determine el MCD de todas las expresiones racionales en la ecuación.
2. Multiplique *ambos* lados de la ecuación por el MCD.
3. Elimine todos los paréntesis y reduzca los términos semejantes en cada lado de la ecuación.
4. Resuelva la ecuación, mediante las propiedades que se estudiaron en las secciones anteriores.
5. Compruebe la solución en la ecuación *original*.

Resuelva $\dfrac{5}{x}+1=\dfrac{11}{x}$.

Multiplique ambos lados por el MCD, x.

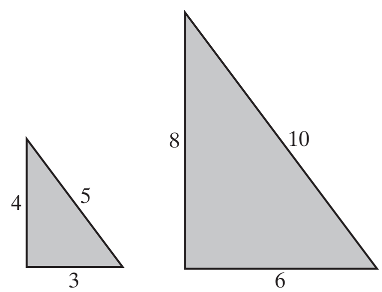
$$\begin{aligned} x\left(\frac{5}{x}+1\right) &= x\left(\frac{11}{x}\right)\\ x\cdot\frac{5}{x}+x\cdot 1 &= x\cdot\frac{11}{x}\\ 5+x &= 11\\ x &= 6 \end{aligned}$$

La respuesta es correcta.

Las **proporciones** son ecuaciones de la forma $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$.

$\dfrac{2}{7}=\dfrac{9}{x}$ es una proporción.

Figuras semejantes son figuras cuyos ángulos correspondientes son iguales y cuyos lados correspondientes son proporcionales.



son figuras semejantes.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 6.5	
Aplicaciones **Problemas de trabajo:** Un problema de trabajo es aquél en donde dos o más máquinas o personas trabajan juntas para completar una tarea.	Carlos y Alí plantan flores en un jardín. Carlos puede plantar una maceta de flores en 30 minutos. Alí puede plantar la misma maceta en 20 minutos. ¿Cuánto tardarán en plantar la maceta de flores si trabajan juntos?
Problemas numéricos: Un problema numérico es un problema en donde un número está relacionado con otro número.	Cuando el recíproco de un número se resta de 5, el resultado es el recíproco del doble del número, Determine el número.
Problemas de movimiento: Un problema de movimiento es un problema que incluye tiempo, velocidad y distancia.	Tom parte en un viaje en canoa a mediodía. Él puede remar a 5 millas por hora en aguas tranquilas. ¿A qué distancia puede ir río abajo, si la corriente es de 2 millas por hora y el va y regresa en 4 horas?
Sección 6.6	
Variación directa Si una variable y varía directamente con una variable x, entonces $y = kx$, en donde k es la constante de proporcionalidad.	$y = 3x$
Variación inversa Si una variable y varía inversamente con una variable x, entonces $y = \frac{k}{x}$ (o $xy = k$) en donde k es la constante de proporcionalidad.	$y = \frac{3}{x}$
Variación conjunta Si y varía conjuntamente con x y z, entonces $y = kxz$ en donde k es la constante de proporcionalidad	$y = 3xz$

Ejercicios de repaso del capítulo 6

[6.1] *Determine el valor o valores de la variable que debe excluirse en cada expresión racional.*

1. $\dfrac{3}{x-5}$ **2.** $\dfrac{x}{x+1}$ **3.** $\dfrac{-2x}{x^2+9}$

Determine el dominio de cada función racional.

4. $y = \dfrac{5}{(x+3)^2}$ **5.** $f(x) = \dfrac{x+6}{x^2}$ **6.** $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2+4x-12}$

Simplifique cada expresión.

7. $\dfrac{x^2+xy}{x+y}$ **8.** $\dfrac{x^2-36}{x+6}$ **9.** $\dfrac{7-5x}{5x-7}$ **10.** $\dfrac{x^2+5x-6}{x^2+4x-12}$

11. $\dfrac{2x^2-6x+5x-15}{2x^2+7x+5}$ **12.** $\dfrac{a^3-8b^3}{a^2-4b^2}$ **13.** $\dfrac{27x^3+y^3}{9x^2-y^2}$ **14.** $\dfrac{2x^2+x-6}{x^3+8}$

[6.2] *Determine el mínimo común denominador de cada expresión.*

15. $\dfrac{6x}{x+4} - \dfrac{3}{x}$

16. $\dfrac{3x+1}{x+2y} + \dfrac{7x-2y}{x^2-4y^2}$

17. $\dfrac{19x-5}{x^2+2x-35} + \dfrac{3x-2}{x^2-3x-10}$

18. $\dfrac{3}{(x+2)^2} - \dfrac{6(x+3)}{x^2-4} - \dfrac{4x}{x+3}$

[6.1, 6.2] *Realice la operación indicada.*

19. $\dfrac{30x^2y^3}{3z}\cdot\dfrac{6z^3}{5xy^3}$

20. $\dfrac{x}{x-9}\cdot\dfrac{9-x}{6}$

21. $\dfrac{18x^2y^4}{xz^5} \div \dfrac{2x^2y^4}{x^4z^{10}}$

22. $\dfrac{11}{3x} + \dfrac{2}{x^2}$

23. $\dfrac{4x-4y}{x^2y}\cdot\dfrac{y^3}{16x}$

24. $\dfrac{4x^2-11x+4}{x-3} - \dfrac{x^2-4x+10}{x-3}$

25. $\dfrac{6}{xy} + \dfrac{3y}{5x^2}$

26. $\dfrac{x+2}{x-1}\cdot\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+6x+8}$

27. $\dfrac{3x^2-7x+4}{3x^2-14x-5} - \dfrac{x^2+2x+9}{3x^2-14x-5}$

28. $5 + \dfrac{a+2}{a+1}$

29. $7 - \dfrac{b+1}{b-1}$

30. $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}\cdot\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^3+a^2b}$

31. $\dfrac{1}{a^2+8a+15} \div \dfrac{3}{a+5}$

32. $\dfrac{a+c}{c} - \dfrac{a-c}{a}$

33. $\dfrac{4x^2+8x-5}{2x+5}\cdot\dfrac{x+1}{4x^2-4x+1}$

34. $(a+b) \div \dfrac{a^2-2ab-3b^2}{a-3b}$

35. $\dfrac{x^2-3xy-10y^2}{6x} \div \dfrac{x+2y}{24x^2}$

36. $\dfrac{a+1}{2a} + \dfrac{3}{4a+8}$

37. $\dfrac{x-2}{x-5} - \dfrac{3}{x+5}$

38. $\dfrac{x+4}{x^2-4} - \dfrac{3}{x-2}$

39. $\dfrac{x+1}{x-3}\cdot\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+7x+6}$

40. $\dfrac{2}{x^2-x-6} - \dfrac{3}{x^2-4}$

41. $\dfrac{4x^2-16y^2}{9} \div \dfrac{(x+2y)^2}{12}$

42. $\dfrac{a^2+5a+6}{a^2+4a+4}\cdot\dfrac{3a+6}{a^4+3a^3}$

43. $\dfrac{x+5}{x^2-15x+50} - \dfrac{x-2}{x^2-25}$

44. $\dfrac{x+2}{x^2-x-6} + \dfrac{x-3}{x^2-8x+15}$

45. $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{6}{x^2-9}$

46. $\dfrac{a-4}{a-5} - \dfrac{3}{a+5} - \dfrac{10}{a^2-25}$

47. $\dfrac{x^3+64}{2x^2-32} \div \dfrac{x^2-4x+16}{2x+12}$

48. $\dfrac{a^2-b^4}{a^2+2ab^2+b^4} \div \dfrac{3a-3b^2}{a^2+3ab^2+2b^4}$

49. $\left(\dfrac{x^2-x-56}{x^2+14x+49}\cdot\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-9x+8}\right) + \dfrac{3}{x^2+8x-9}$

50. $\left(\dfrac{x^2-8x+16}{2x^2-x-6}\cdot\dfrac{2x^2-7x-15}{x^2-2x-24}\right) \div \dfrac{x^2-9x+20}{x^2+2x-8}$

51. Si $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ y $g(x) = \dfrac{x}{x+4}$, determine

a) el dominio de $f(x)$.

b) el dominio de $g(x)$.

c) $(f+g)(x)$.

d) el dominio de $(f+g)(x)$.

52. Si $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$ y $g(x) = \dfrac{x+4}{x-3}$, determine

a) el dominio de $f(x)$.

b) el dominio de $g(x)$.

c) $(f+g)(x)$.

d) el dominio de $(f+g)(x)$.

[6.3] *Simplifique cada fracción compleja.*

53. $\dfrac{\dfrac{9a^2b}{2c}}{\dfrac{6ab^4}{4c^3}}$

54. $\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}}{\dfrac{x}{y}+y^2}$

55. $\dfrac{\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{y^2}}{7+\dfrac{1}{y^2}}$

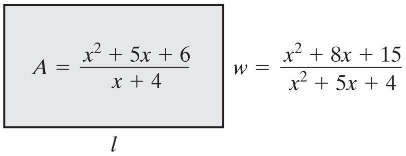
56. $\dfrac{a^{-1}+5}{a^{-1}+\dfrac{1}{a}}$

57. $\dfrac{x^{-2}+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}$

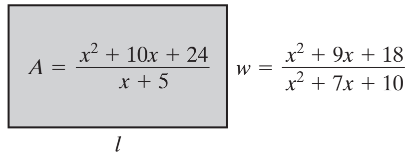
58. $\dfrac{\dfrac{1}{x^2-3x-18}+\dfrac{2}{x^2-2x-15}}{\dfrac{3}{x^2-11x+30}+\dfrac{1}{x^2-9x+20}}$

Área *En los ejercicios 59 y 60 se indica el área y el ancho de cada rectángulo. Determine la longitud, l, dividiendo el área, A, entre el ancho, w.*

59.



60.



[6.4] *En los ejercicios 61 a 70, resuelva cada ecuación.*

61. $\frac{2}{x} = \frac{5}{9}$

62. $\frac{x}{1.5} = \frac{x - 4}{4.5}$

63. $\frac{3x + 4}{5} = \frac{2x - 8}{3}$

64. $\frac{x}{4.8} + \frac{x}{2} = 1.7$

65. $\frac{2}{y} + \frac{1}{5} = \frac{3}{y}$

66. $\frac{2}{x + 4} - \frac{3}{x - 4} = \frac{-11}{x^2 - 16}$

67. $\frac{x}{x^2 - 9} + \frac{2}{x + 3} = \frac{4}{x - 3}$

68. $\frac{7}{x^2 - 5} + \frac{3}{x + 5} = \frac{4}{x - 5}$

69. $\frac{x - 3}{x - 2} + \frac{x + 1}{x + 3} = \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 + x - 6}$

70. $\frac{x + 1}{x + 3} + \frac{x + 2}{x - 4} = \frac{2x^2 - 18}{x^2 - x - 12}$

71. Despeje b de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

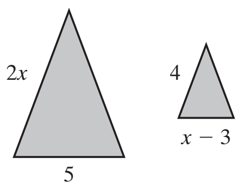
72. De la ecuación $z = \frac{x - \overline{x}}{s}$ despeje $\overline{x}$.

73. Resistores Tres resistores de 100, 200 y 600 ohms se conectan en paralelo. Determine la resistencia total del circuito. Utilice la fórmula $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.

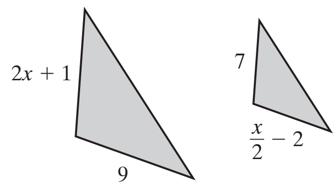
74. Longitud focal ¿Cuál es la longitud focal, f, de un espejo curvo, si la distancia respecto del objeto, p, es 6 centímetros y la distancia respecto de la imagen, q, es 3 centímetros? Utilice la fórmula $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$.

Triángulos *En los ejercicios 75 y 76, cada par de triángulos son semejantes. Determine las longitudes de los lados desconocidos.*

75.



76.



[6.5] *En los ejercicios 77 a 82, responda la pregunta. Cuando sea necesario, redondee las respuestas al centésimo más cercano.*

77. Recolección de frijol Sanford y Jerome trabajan en una granja. Sanford puede recolectar una canasta de frijol en 40 minutos, mientras que Jerome puede hacer la misma tarea en 30 minutos. Si trabajan juntos, ¿en cuánto tiempo recolectarán una canasta de frijol?

78. Jardín Sam y Fran quieren plantar un jardín de flores. Juntos pueden hacerlo en 4.2 horas. Si Sam puede plantar solo el mismo jardín en 6 horas, ¿cuánto tiempo le tomará a Fran hacerlo sola?

79. Fracciones ¿Qué número sumado al numerador y restado al denominador de la fracción $\frac{1}{11}$ da por resultado $\frac{1}{2}$?

80. Fracciones Cuando el recíproco del doble de un número se resta de 1, el resultado es el recíproco del triple del número. Determine el número.

81. Recorrido en bote El bote de motor de Paul Webster puede viajar a 15 millas por hora en aguas tranquilas. Viajando con la corriente de un río, el bote puede viajar 20 millas en el mismo tiempo que necesita para recorrer 10 millas en contra de la corriente. Determine la velocidad de la corriente.

82. Vuelo en un aeroplano Un pequeño aeroplano y un automóvil inician su recorrido hacia la misma ciudad, que está a 450 millas de distancia, desde la misma posición y al mismo tiempo. La velocidad del aeroplano es el triple de la velocidad del automóvil, así que llega a la ciudad 6 horas antes que el automóvil. Determine la velocidad del automóvil y del aeroplano.

[6.6] *Determine cada cantidad solicitada.*

83. x es directamente proporcional al cuadrado de y. Si $x = 45$ cuando $y = 3$, determine x cuando $y = 2$.

84. W es directamente proporcional al cuadrado de L e inversamente proporcional a A. Si $W = 4$ cuando $L = 2$ y $A = 10$, determine W cuando $L = 5$ y $A = 20$.

85. z es conjuntamente proporcional a x y y e inversamente proporcional al cuadrado de r. Si $z = 12$ cuando $x = 20$, $y = 8$, y $r = 8$, determine z cuando $x = 10$, $y = 80$ y $r = 3$.

86. Cargo extra En sus facturas de electricidad, una compañía de energía eléctrica coloca un espacio para el cargo extra, s; dicho cargo es directamente proporcional a la cantidad de energía usada, e. Si el cargo extra es de $7.20 cuando se usan 3600 kilowatt-hora, ¿cuál es el cargo extra cuando se usan 4200?

87. Caída libre La distancia, d, que recorre un objeto durante una caída libre es directamente proporcional al cuadrado del tiempo, t. Si una persona cae 16 pies en 1 segundo, ¿qué distancia caerá en 10 segundos? No tome en cuenta la resistencia del viento.

88. Área El área, A, de un círculo varía directamente con el cuadrado de su radio, r. Si el área es 78.5 cuando el radio es 5, determine el área cuando el radio es 8.

89. Fusión de un cubo de hielo El tiempo, t, para que un cubo de hielo se derrita es inversamente proporcional a la temperatura del agua en que se le sumerge. Si un cubo de hielo tarda 1.7 minutos en derretirse en agua con una temperatura de 70°F, ¿cuánto tardará en derretirse un cubo de hielo del mismo tamaño en agua a 50°F?

Examen de práctica del capítulo 6

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección en donde se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en el ***Chapter Test Prep Video CD.*** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. Determine los valores que deben excluirse en la expresión $\dfrac{x+4}{x^2+3x-28}$.

2. Determine el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x^2+7}{2x^2+7x-4}$.

Simplifique cada expresión.

3. $\dfrac{10x^7y^2 + 16x^2y + 22x^3y^3}{2x^2y}$

4. $\dfrac{x^2 - 4xy - 12y^2}{x^2 + 3xy + 2y^2}$

En los ejercicios 5 a 14, realice la operación indicada.

5. $\dfrac{3xy^4}{6x^2y^3} \cdot \dfrac{2x^2y^4}{x^5y^7}$

6. $\dfrac{x+1}{x^2-7x-8} \cdot \dfrac{x^2-x-56}{x^2+9x+14}$

7. $\dfrac{7a+14b}{a^2-4b^2} \div \dfrac{a^3+a^2b}{a^2-2ab}$

8. $\dfrac{x^3+y^3}{x+y} \div \dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2}$

9. $\dfrac{5}{x+1} + \dfrac{2}{x^2}$

10. $\dfrac{x-1}{x^2-9} - \dfrac{x}{x^2-2x-3}$

11. $\dfrac{m}{12m^2+4mn-5n^2} + \dfrac{2m}{12m^2+28mn+15n^2}$

12. $\dfrac{x+1}{4x^2-4x+1} + \dfrac{3}{2x^2+5x-3}$

13. $\dfrac{x^3-8}{x^2+5x-14} \div \dfrac{x^2+2x+4}{x^2+10x+21}$

14. Si $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$ y $g(x) = \dfrac{x}{2x+3}$, determine

a) $(f+g)(x)$.

b) el dominio de $(f+g)(x)$.

15. Área Si el área de un rectángulo es $\dfrac{x^2+11x+30}{x+2}$ y su longitud es $\dfrac{x^2+9x+18}{x+3}$, determine su ancho.

Para los ejercicios del 16 al 18, simplifique.

16. $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}}$

17. $\dfrac{\dfrac{a^2-b^2}{ab}}{\dfrac{a+b}{b^2}}$

18. $\dfrac{\dfrac{7}{x} - \dfrac{6}{x^2}}{4 - \dfrac{1}{x}}$

Resuelva cada ecuación.

19. $\dfrac{x}{5} - \dfrac{x}{4} = -1$

20. $\dfrac{x}{x - 8} + \dfrac{6}{x - 2} = \dfrac{x^2}{x^2 - 10x + 16}$

21. Despeje C de $A = \dfrac{2b}{C - d}$.

22. **Consumo de energía** El consumo de energía, en watts, de un aparato, W, varía conjuntamente respecto del cuadrado de la corriente, I, y la resistencia, R. Si el consumo es de 10 watts cuando la corriente es de 1 ampere y la resistencia es de 1000 ohms, determine el consumo de energía cuando la corriente es de 0.5 amperes y la resistencia es de 300 ohms.

23. R varía directamente con P e inversamente con el cuadrado de T. Si $R = 30$ cuando $P = 40$ y $T = 2$, determine R cuando $P = 50$ y $T = 5$.

24. **Lavado de ventanas** Paul Weston puede lavar las ventanas de una casa en 10 horas. Su amiga, Nancy Delaney, puede hacer el mismo trabajo en 7 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán si lavan juntos las ventanas de la casa?

25. **Paseo en patines** Cameron Barnette y Ashley Elliot, comienzan su recorrido en patines por un camino al mismo tiempo. Cameron promedia 8 millas por hora, mientras que Ashley promedia 5 millas por hora. Si Mónica necesita $\frac{1}{2}$ hora más que Cameron para llegar al final del camino, ¿cuál es la longitud del camino?

Examen de repaso acumulativo

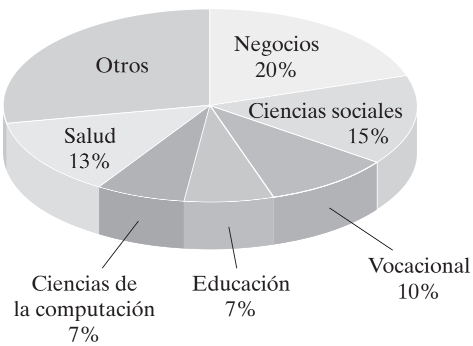
Resuelva el examen siguiente y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revise las preguntas que haya respondido en forma incorrecta. La sección y objetivo en donde se estudia el material está indicado después de la respuesta.

1. Ilustre el conjunto $\left\{x \,\middle|\, -\dfrac{5}{3} < x \le \dfrac{19}{4}\right\}$ en la recta numérica.

2. Evalúe $-3x^3 - 2x^2y + \frac{1}{2}xy^2$ cuando $x = 2$ y $y = \frac{1}{2}$.

3. Resuelva la ecuación $2(x + 1) = \frac{1}{2}(x - 5)$

4. **Aprendizaje a distancia** Internet ha hecho posible la educación a distancia. El siguiente diagrama muestra los tipos de cursos que más se ofrecen en línea en 2003.



Fuente: Foro CEO e Investigación de datos de mercado.

a) ¿Qué porcentaje corresponde a la categoría "Otros"?

b) Si se ofrecieron aproximadamente 220,000 cursos a través de programas en línea, ¿cuántos correspondieron a la categoría "Negocios"?

5. Evalúe $4x^2 - 3y - 8$ cuando $x = 4$ y $y = -2$.

6. Simplifique $\left(\dfrac{6x^5y^6}{12x^4y^7}\right)^3$.

7. Despeje m de $F = \dfrac{mv^2}{r}$.

8. **Interés simple** Carmalla Banjanie invirtió \$3000 en un certificado de depósito por 1 año. Cuando redimió el certificado, recibió \$3180; ¿cuál fue la tasa de interés simple?

9. **Reunión para un día de campo** Dawn y Paula hicieron una cita para pasar un día de campo en un punto intermedio respecto de sus casas, para lo cual salieron, cada uno por su lado, a las 8 a.m. Si Dawn viaja a 60 millas por hora y Paula a 50 millas por hora, y viven a 330 millas de distancia uno del otro, ¿en cuánto tiempo se encontrarán?

10. Resuelva $\left|\dfrac{3x + 5}{3}\right| - 3 = 6$.

11. Grafique $y = x^2 - 2$.

12. Sea $f(x) = \sqrt{2x + 7}$. Evalúe $f(9)$.

13. Determine la pendiente de la recta que pasa por $(2, -4)$ y $(-5, -3)$.

14. Determine una ecuación de la recta que pasa por $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y que es paralela a la recta que resulta al graficar $2x + 3y - 9 = 0$. Escriba la ecuación en la forma general.

15. Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 10x - y &= 2 \\ 4x + 3y &= 11 \end{aligned}$$

16. Multiplique $(3x^2 - 5y)(3x^2 + 5y)$.

17. Factorice $3x^2 - 30x + 75$.

18. Grafique $y = |x| + 2$.

19. Sume $\dfrac{7}{3x^2 + x - 4} + \dfrac{9x + 2}{3x^2 - 2x - 8}$.

20. Resuelva $\dfrac{3y - 2}{y + 1} = 4 - \dfrac{y + 2}{y - 1}$.

Raíces, radicales y números complejos

7

OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En este capítulo explicaremos cómo sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones con radicales. También graficamos funciones con radicales y damos una introducción a los números imaginarios y números complejos.

Asegúrese de entender los tres requisitos para simplificar expresiones con radicales que se analizan en la sección 7.5.

MUCHAS FÓRMULAS CIENTÍFICAS, INCLUYENDO gran parte de aquellas que tienen que ver con situaciones de la vida real, incluyen expresiones con radicales. En el ejercicio 135 de la página 487 veremos cómo se utiliza un radical para determinar la relación entre la iluminación sobre un objeto y la distancia del objeto a la fuente luminosa.

7.1 Raíces y radicales

1. Determinar raíces cuadradas.
2. Determinar raíces cúbicas.
3. Entender raíces pares e impares.
4. Evaluar radicales mediante el valor absoluto.

En este capítulo analizamos con más detalle el concepto de radicales que se presentó en el capítulo 1. En la expresión $\sqrt{x}$, el $\sqrt{\ }$ es el **signo radical**. La expresión que está dentro del signo radical recibe el nombre de **radicando**.

Signo radical

$$\sqrt{x}$$

Radicando

La expresión, con el signo radical y el radicando, se denomina **expresión radical**. Otra parte de la expresión radical es el **índice**, o "raíz" de la expresión. Las raíces cuadradas tienen un índice de 2. Por lo general, el índice de las raíces cuadradas no se escribe. Por lo tanto,

$$\sqrt{x} \quad \text{significa} \quad \sqrt[2]{x}$$

1 Determinar raíces cuadradas

Todos los números positivos tienen dos raíces cuadradas: una positiva o principal, y una negativa. Para cualquier número positivo x, escribimos la raíz cuadrada positiva como $\sqrt{x}$, y la raíz cuadrada negativa como $-\sqrt{x}$.

Número	Raíz cuadrada principal o positiva	Raíz cuadrada negativa
25	$\sqrt{25}$	$-\sqrt{25}$
19	$\sqrt{19}$	$-\sqrt{19}$

Raíz cuadrada principal

La **raíz cuadrada principal** de un número positivo a, escrita como $\sqrt{a}$, es el número *positivo* b tal que $b^2 = a$.

Ejemplos

$$\sqrt{25} = 5 \qquad \text{ya que } 5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

$$\sqrt{0.49} = 0.7 \qquad \text{ya que } (0.7)^2 = (0.7)(0.7) = 0.49$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \qquad \text{ya que } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

Recuerde que $-\sqrt{25}$ significa el opuesto de $\sqrt{25}$. Ya que $\sqrt{25} = 5$, $-\sqrt{25} = -5$.

En este libro, siempre que se haga referencia al concepto *raíz cuadrada* nos estaremos refiriendo a la raíz cuadrada principal o positiva. Así, si se le pide determinar el valor de $\sqrt{25}$, su respuesta deberá ser 5.

En el capítulo 1 se mencionó que un número racional es aquel que puede representarse como un número decimal finito o cuyos dígitos se repiten en series. Si utiliza la tecla de raíz cuadrada de su calculadora $\boxed{\sqrt{\ }}$, para evaluar las soluciones de los tres ejemplos anteriores, descubrirá que todos son números decimales finitos o con series de dígitos que se repiten. Por lo tanto, son *números racionales*. Muchos radicales, como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{19}$, no son números racionales. Cuando en una calculadora se evalúan $\sqrt{2}$ y $\sqrt{19}$ los resultados son números decimales que no son finitos y que no repiten series de dígitos. Así, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{19}$ son *números irracionales*.

Radical	Resultados en la calculadora	
$\sqrt{2}$	1.414213562	*Decimales que no son finitos y que no repiten series de dígitos*
$\sqrt{19}$	4.35889894	*Decimales que no son finitos y que no repiten series de dígitos*

Ahora piense en la expresión radical $\sqrt{-25}$. Como el cuadrado de cualquier número real siempre será mayor o igual a 0, no existe número real tal que, elevado al cuadrado, sea igual a -25. Por esta razón, $\sqrt{-25}$ *no es un número real*. Ya que ningún número real elevado al cuadrado puede dar por resultado un número negativo, *la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real*. Si en una calculadora evalúa $\sqrt{-25}$ obtendrá un mensaje de error. Analizaremos las expresiones como $\sqrt{-25}$ más adelante en este capítulo.

Radical	Resultados en la calculadora	
$\sqrt{-25}$	Error	*$\sqrt{-25}$ no es un número real.*
$\sqrt{-3}$	Error	*$\sqrt{-3}$ no es un número real.*

Sugerencia útil

No confunda $-\sqrt{36}$ con $\sqrt{-36}$. Ya que $\sqrt{36} = 6$, $-\sqrt{36} = -6$. Sin embargo, $\sqrt{-36}$ no es un número real y, tal como se mencionó antes, la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real.

$$\sqrt{36} = 6$$
$$-\sqrt{36} = -6$$
$\sqrt{-36}$ no es un número real.

La función raíz cuadrada

Cuando representemos gráficamente funciones raíz cuadrada, es decir, funciones con la forma $f(x) = \sqrt{x}$, debemos recordar siempre que el radicando, x, no puede ser negativo. Así, en notación de intervalo el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $\{x|x \geq 0\}$, o, en la notación de intervalo, $[0, \infty)$ Para graficar $f(x) = \sqrt{x}$, podemos seleccionar algunos valores convenientes de x y determinar los valores correspondientes de $f(x)$ o y, para luego trazar los puntos determinados por los pares ordenados, como se muestra en la **figura 7.1**.

x	y
0	0
1	1
4	2
6	≈ 2.4
9	3

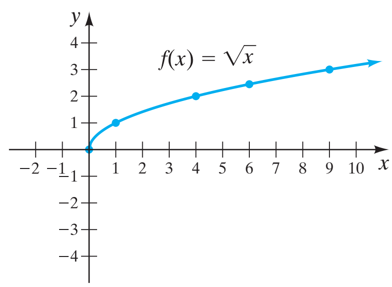


FIGURA 7.1

Como el valor de $f(x)$ nunca puede ser negativo, el rango de $f(x) = \sqrt{x}$ es $\{y|y \geq 0\}$, o, en notación de intervalo, $[0, \infty)$.

Analice la **figura 7.1**; ¿cree que pueda graficar $g(x) = -\sqrt{x}$? La gráfica de $g(x) = -\sqrt{x}$ sería similar a la gráfica de la **figura 7.1**, pero la gráfica resultante estaría debajo del eje x. ¿Puede explicar por qué? ¿Qué ocurriría al graficar la expresión $h(x) = \sqrt{x - 4}$? Para graficar $h(x) = \sqrt{x - 4}$, sólo seleccionaría valores de $x \geq 4$ ya que el radicando no puede ser negativo. El dominio de $h(x) = \sqrt{x - 4}$ es $\{x|x \geq 4\}$ o $[4, \infty)$.

Para evaluar funciones con radicales podría ser necesario utilizar una calculadora.

EJEMPLO 1 Determine el o los valores que se indican en cada función.

a) $f(x) = \sqrt{11x - 2}$, $f(6)$ **b)** $g(r) = -\sqrt{-3r + 1}$, $g(-5)$ y $g(7)$

Solución

a)
$$\begin{aligned} f(6) &= \sqrt{11(6) - 2} && \textit{Sustituir x por 6.} \\ &= \sqrt{64} \\ &= 8 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} g(-5) &= -\sqrt{-3(-5) + 1} && \textit{Sustituir r por -5.} \\ &= -\sqrt{16} \\ &= -4 \\ g(7) &= -\sqrt{-3(7) + 1} && \textit{Sustituir r por 7.} \\ &= -\sqrt{-20} && \textit{No es un número real.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g(7)$ no es un número real.

Ahora resuelva el ejercicio 77

2 Determinar raíces cúbicas

El índice de una raíz cúbica es 3. En la sección 1.4 se habló de las raíces cúbicas, y se explicó cómo determinarlas con ayuda de una calculadora. Si lo considera conveniente, revise ese material ahora.

Raíz cúbica

La **raíz cúbica** de un número a, escrita $\sqrt[3]{a}$, es el número b tal que $b^3 = a$.

Ejemplos

$\sqrt[3]{8} = 2$ ya que $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{-27} = -3$ ya que $(-3)^3 = -27$

Sólo existe una raíz cúbica para cada número real. La raíz cúbica de un número positivo es positiva, y la raíz cúbica de un número negativo es negativa. La función raíz cúbica, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, tiene a todos los números reales como su dominio.

EJEMPLO 2 Determine el o los valores que se indican en cada función.

a) $f(x) = \sqrt[3]{10x + 34}$, $f(3)$ **b)** $g(r) = \sqrt[3]{12r - 20}$, $g(-4)$ y $g(1)$

Solución

a) $f(3) = \sqrt[3]{10(3) + 34}$ *Sustituir x por 3.*

$= \sqrt[3]{64} = 4$

b) $g(-4) = \sqrt[3]{12(-4) - 20}$ *Sustituir r por −4.*

$= \sqrt[3]{-68}$

≈ -4.081655102 *Resultado con una calculadora.*

$g(1) = \sqrt[3]{12(1) - 20}$ *Sustituir r por 1.*

$= \sqrt[3]{-8}$

$= -2$

Ahora resuelva el ejercicio 83

La función raíz cúbica

En la **figura 7.2** se muestra la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$. Para obtenerla sustituimos los valores para x y determinamos los valores correspondientes de $f(x)$ o y.

x	y
-8	-2
-1	-1
0	0
1	1
8	2

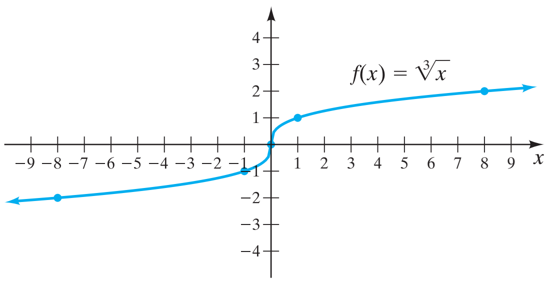


FIGURA 7.2

Observe que tanto el dominio como el rango están compuestos por números reales, ℝ. En el conjunto de ejercicios se le pedirá que grafique funciones raíz cúbica en su calculadora graficadora.

3 Entender raíces pares e impares

Hasta el momento hemos analizado raíces cuadradas y cúbicas, pero las expresiones radicales pueden tener otros índices. Por ejemplo, en la expresión $\sqrt[5]{xy}$, (se lee "raíz quinta de xy"), el índice es 5 y el radicando es xy.

Las expresiones radicales que tienen índices 2, 4, 6,... o cualquier número entero par, reciben el nombre de **raíces pares**. Las raíces cuadradas son raíces pares, ya que su índice es 2. Las expresiones radicales que tienen índices 3, 5, 7,... o cualquier número entero impar, se denominan **raíces impares**.

Índices pares

La raíz n-ésima de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un *índice par* y a es un número real no negativo, es un número real no negativo b tal que $b^n = a$.

Ejemplos de raíces pares

$\sqrt{9} = 3$ ya que $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$\sqrt[4]{16} = 2$ ya que $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$\sqrt[6]{729} = 3$ ya que $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$

$\sqrt[4]{\frac{1}{256}} = \frac{1}{4}$ ya que $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{256}$

Cualquier número real elevado a una potencia par, da por resultado un número real no negativo. Así, *cuando un radical tiene índice par*, *el radicando debe ser no negativo para que el resultado sea un número real.*

Sugerencia útil

Existe una diferencia importante entre $-\sqrt[4]{16}$ y $\sqrt[4]{-16}$. El número $-\sqrt[4]{16}$ es el opuesto de $\sqrt[4]{16}$. Ya que $\sqrt[4]{16} = 2$, $-\sqrt[4]{16} = -2$. Sin embargo, $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real, puesto que ningún número real elevado a la cuarta potencia da por resultado -16.

$$-\sqrt[4]{16} = -(\sqrt[4]{16}) = -2$$

$\sqrt[4]{-16}$ no es un número real.

Índices impares

La raíz n-ésima de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un *índice impar* y *a es cualquier número real*, es el número real b tal que $b^n = a$.

Ejemplos de raíces impares

$\sqrt[3]{8} = 2$ ya que $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$\sqrt[3]{-8} = -2$ ya que $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

$\sqrt[5]{243} = 3$ ya que $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

$\sqrt[5]{-243} = -3$ ya que $(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = -243$

La raíz impar de un número positivo es un número positivo, y la raíz impar de un número negativo es un número negativo.

Es importante tener en cuenta que los radicales con índice par deben tener radicandos no negativos para que dé por resultado un número real. Un radical con un índice impar será un número real con cualquier número real como radicando. Observe que $\sqrt[n]{0} = 0$, sin importar si n es un índice par o impar.

EJEMPLO 3 Indique si la expresión radical es o no un número real. Si el número es un número real, determine su valor.

a) $\sqrt[4]{-81}$ **b)** $-\sqrt[4]{81}$ **c)** $\sqrt[5]{-32}$ **d)** $-\sqrt[5]{-32}$

Solución

a) No es un número real. Las raíces pares de números negativos no son números reales.

b) Número real, $-\sqrt[4]{81} = -(\sqrt[4]{81}) = -(3) = -3$

c) Número real, $\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = -32$

d) Número real, $-\sqrt[5]{-32} = -(-2) = 2$

Ahora resuelva el ejercicio 21

En la **tabla 7.1** se resume la información acerca de las raíces pares e impares.

Tabla 7.1

	n es par	*n* es impar
$a > 0$	$\sqrt[n]{a}$ es un número real positivo.	$\sqrt[n]{a}$ es un número real positivo.
$a < 0$	$\sqrt[n]{a}$ no es un número real.	$\sqrt[n]{a}$ es un número real negativo.
$a = 0$	$\sqrt[n]{0} = 0$	$\sqrt[n]{0} = 0$

4 Evaluar radicales mediante el valor absoluto

Se podría pensar que $\sqrt{a^2} = a$, pero esto no necesariamente es cierto. A continuación evaluamos $\sqrt{a^2}$ para $a = 2$ y $a = -2$. Verá que cuando $a = -2$, $\sqrt{a^2} \neq a$.

$a = 2$: $\quad \sqrt{a^2} = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2 \quad$ *Observe que* $\sqrt{2^2} = 2$.

$a = -2$: $\quad \sqrt{a^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \quad$ *Observe que* $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$.

Al analizar éste y otros ejemplos, podemos concluir que $\sqrt{a^2}$ *siempre será un número real positivo* para cualquier número real, a, distinto de cero. Recuerde que en la sección 1.3 se mencionó que el *valor absoluto* de cualquier número real a, o $|a|$, es también un número real positivo para cualquier número real distinto de cero. Utilizamos estos hechos para concluir que,

Radicales y valor absoluto

Para cualquier número real a,

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Esto indica que la raíz cuadrada principal de a^2 es el valor absoluto de a.

EJEMPLO 4 ▸ Utilice el valor absoluto para evaluar.

a) $\sqrt{9^2}$ **b)** $\sqrt{0^2}$ **c)** $\sqrt{(15.7)^2}$

Solución

a) $\sqrt{9^2} = |9| = 9$ **b)** $\sqrt{0^2} = |0| = 0$ **c)** $\sqrt{(15.7)^2} = |15.7| = 15.7$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 41**

Cuando se simplifica una raíz cuadrada, si el radicando contiene una variable y no estamos seguros de que su valor sea positivo, deberemos utilizar los signos de valor absoluto para simplificar.

EJEMPLO 5 ▸ Simplifique.

a) $\sqrt{(x + 8)^2}$ **b)** $\sqrt{16x^2}$ **c)** $\sqrt{25y^6}$ **d)** $\sqrt{a^2 - 6a + 9}$

Solución Los radicandos de todas estas raíces cuadradas incluyen una variable. Como no conocemos el valor de la variable, ignoramos si ésta es positiva o negativa. Por lo tanto, debemos utilizar los signos de valor absoluto para simplificar.

a) $\sqrt{(x + 8)^2} = |x + 8|$

b) Escriba $16x^2$ como $(4x)^2$, y luego simplifique.

$$\sqrt{16x^2} = \sqrt{(4x)^2} = |4x|$$

c) Escriba $25y^6$ como $(5y^3)^2$, y luego simplifique.

$$\sqrt{25y^6} = \sqrt{(5y^3)^2} = |5y^3|$$

d) Observe que $a^2 - 6a + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto. Escriba el trinomio como el cuadrado de un binomio; después simplifique.

$$\sqrt{a^2 - 6a + 9} = \sqrt{(a - 3)^2} = |a - 3|$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 63**

Si tiene una raíz cuadrada cuyo radicando contiene una variable, y se le da una instrucción como: "Suponga que todas las variables representan valores positivos y que el radicando es no negativo", no será necesario que utilice el signo de valor absoluto para simplificar.

EJEMPLO 6 Simplifique. Suponga que todas las variables representan valores positivos y que el radicando es no negativo.

a) $\sqrt{64x^2}$ **b)** $\sqrt{81p^4}$ **c)** $\sqrt{49x^6}$ **d)** $\sqrt{4x^2 - 12xy + 9y^2}$

Solución

a) $\sqrt{64x^2} = \sqrt{(8x)^2} = 8x$ *Escriba $64x^2$ como $(8x)^2$.*

b) $\sqrt{81p^4} = \sqrt{(9p^2)^2} = 9p^2$ *Escriba $81p^4$ como $(9p^2)^2$.*

c) $\sqrt{49x^6} = \sqrt{(7x^3)^2} = 7x^3$ *Escriba $49x^6$ como $(7x^3)^2$.*

d) $\sqrt{4x^2 - 12xy + 9y^2} = \sqrt{(2x - 3y)^2}$ *Escriba $4x^2 - 12xy + 9y^2$ como $(2x - 3y)^2$.*

$= 2x - 3y$

Ahora resuelva el ejercicio 67

Sólo nos preocupamos de agregar signos de valor absoluto cuando se trabaja con raíces cuadradas (y otras raíces pares), pero no cuando el índice es impar.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. **a)** ¿Cuántas raíces cuadradas tienen los números reales positivos?
   b) Determine todas las raíces cuadradas del número 49.
   c) Cuando se mencione el concepto "raíz cuadrada" en este libro, ¿a qué se estará haciendo referencia?
   d) Determine la raíz cuadrada de 49.
2. **a)** ¿Qué son las raíces pares? Dé un ejemplo.
   b) ¿Qué son las raíces impares? Proporcione un ejemplo.
3. Explique por qué $\sqrt{-81}$ no es un número real.
4. Una expresión radical con índice impar y un número real como radicando, ¿siempre será un número real? Explique su respuesta.
5. Una expresión radical con índice par y un número real como radicando, ¿siempre será un número real? Explique su respuesta.
6. **a)** ¿A qué es igual $\sqrt{a^2}$?
   b) ¿A qué es igual $\sqrt{a^2}$ si sabemos que $a \geq 0$?
7. **a)** Evalúe $\sqrt{a^2}$ para $a = 1.3$.
   b) Evalúe $\sqrt{a^2}$ para $a = -1.3$.
8. **a)** Evalúe $\sqrt{a^2}$ para $a = 5.72$.
   b) Evalúe $\sqrt{a^2}$ para $a = -5.72$.
9. **a)** Evalúe $\sqrt[3]{27}$.
   b) Evalúe $-\sqrt[3]{27}$.
   c) Evalúe $\sqrt[3]{-27}$.
10. **a)** Evalúe $\sqrt[4]{16}$
    b) Evalúe $-\sqrt[4]{16}$
    c) Evalúe $\sqrt[4]{-16}$.

Práctica de habilidades

Evalúe si cada expresión radical es un número real. Utilice una calculadora para redondear los números irracionales hasta el centésimo más cercano. Si la expresión no es un número real, indíquelo.

11. $\sqrt{36}$ **12.** $-\sqrt{36}$ **13.** $\sqrt[3]{-64}$ **14.** $\sqrt[3]{125}$

15. $\sqrt[3]{-125}$ **16.** $-\sqrt[3]{-125}$ **17.** $\sqrt[5]{-1}$ **18.** $-\sqrt[5]{-1}$

19. $\sqrt[5]{1}$ **20.** $\sqrt[6]{64}$ **21.** $\sqrt[6]{-64}$ **22.** $\sqrt[4]{-81}$

23. $\sqrt[3]{-343}$ **24.** $\sqrt{121}$ **25.** $\sqrt{-36}$ **26.** $\sqrt{45.3}$

27. $\sqrt{-45.3}$ **28.** $\sqrt{53.9}$ **29.** $\sqrt{\dfrac{1}{25}}$ **30.** $\sqrt{-\dfrac{1}{25}}$

31. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$ **32.** $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}}$ **33.** $\sqrt{\dfrac{4}{49}}$ **34.** $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$

35. $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}$ **36.** $\sqrt[4]{-8.9}$ **37.** $-\sqrt[4]{18.2}$ **38.** $\sqrt[5]{93}$

Utilice el valor absoluto para evaluar.

39. $\sqrt{7^2}$ **40.** $\sqrt{(-7)^2}$ **41.** $\sqrt{19^2}$ **42.** $\sqrt{(-19)^2}$

43. $\sqrt{119^2}$ **44.** $\sqrt{(-119)^2}$ **45.** $\sqrt{(235.23)^2}$ **46.** $\sqrt{(-201.5)^2}$

47. $\sqrt{(0.06)^2}$ **48.** $\sqrt{(-0.19)^2}$ **49.** $\sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2}$ **50.** $\sqrt{\left(-\frac{101}{319}\right)^2}$

Escriba como un valor absoluto.

51. $\sqrt{(x-4)^2}$ **52.** $\sqrt{(a+10)^2}$ **53.** $\sqrt{(x-3)^2}$ **54.** $\sqrt{(7a-11b)^2}$

55. $\sqrt{(3x^2-1)^2}$ **56.** $\sqrt{(7y^2-3y)^2}$ **57.** $\sqrt{(6a^3-5b^4)^2}$ **58.** $\sqrt{(9y^4-2z^3)^2}$

Utilice el valor absoluto para simplificar. Tal vez necesite factorizar primero.

59. $\sqrt{a^{14}}$ **60.** $\sqrt{y^{22}}$ **61.** $\sqrt{z^{32}}$ **62.** $\sqrt{x^{200}}$

63. $\sqrt{a^2-8a+16}$ **64.** $\sqrt{x^2-12x+36}$ **65.** $\sqrt{9a^2+12ab+4b^2}$ **66.** $\sqrt{4x^2+20xy+25y^2}$

Simplifique. Suponga que todas las variables representan valores positivos y que el radicando es no negativo.

67. $\sqrt{49x^2}$ **68.** $\sqrt{100a^4}$ **69.** $\sqrt{16c^6}$ **70.** $\sqrt{121z^8}$

71. $\sqrt{x^2+4x+4}$ **72.** $\sqrt{9a^2-6a+1}$ **73.** $\sqrt{4x^2+4xy+y^2}$ **74.** $\sqrt{16b^2-40bc+25c^2}$

Determine el valor indicado en cada función. Utilice su calculadora para aproximar los números irracionales. Redondéelos al milésimo más cercano.

75. $f(x)=\sqrt{5x-6}, f(2)$ **76.** $f(c)=\sqrt{7c+1}, f(5)$ **77.** $q(x)=\sqrt{76-3x}, q(4)$

78. $q(b)=\sqrt{9b+34}, q(-1)$ **79.** $t(a)=\sqrt{-15a-9}, t(-6)$ **80.** $f(a)=\sqrt{14a-36}, f(4)$

81. $g(x)=\sqrt{64-8x}, g(-3)$ **82.** $p(x)=\sqrt[3]{8x+9}, p(2)$ **83.** $h(x)=\sqrt[3]{9x^2+4}, h(4)$

84. $k(c)=\sqrt[4]{16c-5}, k(6)$ **85.** $f(x)=\sqrt[3]{-2x^2+x-6}, f(-3)$ **86.** $t(x)=\sqrt[4]{2x^3-3x^2+6x}, t(2)$

Resolución de problemas

87. Determine $f(81)$ si $f(x)=x+\sqrt{x}+7$.

88. Determine $g(25)$ si $g(x)=x^2+\sqrt{x}-13$.

89. Determine $t(18)$ si $t(x)=\frac{x}{2}+\sqrt{2x}-4$.

90. Determine $m(36)$ si $m(x)=\frac{x}{3}+\sqrt{4x}+10$.

91. Determine $k(8)$ si $k(x)=x^2+\sqrt{\frac{x}{2}}-21$.

92. Determine $r(45)$ si $r(x)=\frac{x}{9}+\sqrt{\frac{x}{5}}+13$.

93. Seleccione un valor para x, de modo que $\sqrt{(2x+1)^2}\neq 2x+1$.

94. Seleccione un valor para x, de modo que $\sqrt{(5x-3)^2}\neq 5x-3$.

95. ¿Para qué valores de x, será $\sqrt{(x-1)^2}=x-1$? Explique cómo determinó su respuesta.

96. ¿Para qué valores de x, será $\sqrt{(x+3)^2}=x+3$? Explique cómo determinó su respuesta.

97. ¿Para qué valores de x, será $\sqrt{(2x-6)^2}=2x-6$? Explique cómo determinó su respuesta.

98. ¿Para qué valores de x, será $\sqrt{(3x-8)^2}=3x-8$? Explique cómo determinó su respuesta.

99. **a)** ¿Para qué valores de a es $\sqrt{a^2}=|a|$?

b) ¿Para qué valores de a es $\sqrt{a^2}=a$?

c) ¿Para qué valores de a es $\sqrt[3]{a^3}=a$?

100. ¿En qué circunstancias la expresión $\sqrt[n]{x}$ no es un número real?

101. Explique por qué la expresión $\sqrt[n]{x^n}$ es un número real para cualquier número real x.

102. ¿En qué circunstancias la expresión $\sqrt[n]{x^m}$ no es un número real?

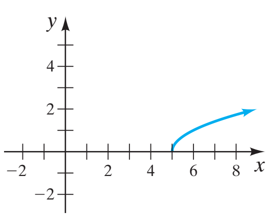
103. Determine el dominio de $\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}}$. Explique cómo determinó su respuesta.

104. Determine el dominio de $\frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[6]{x+1}}$. Explique cómo determinó su respuesta.

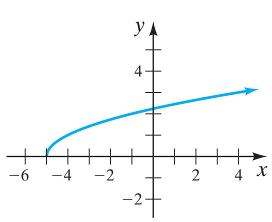
Considere los dominios de las funciones de los ejercicios 105 a 108, y relacione cada función con su gráfica correspondiente.

105. $f(x)=\sqrt{x}$ **106.** $f(x)=\sqrt{x^2}$ **107.** $f(x)=\sqrt{x-5}$ **108.** $f(x)=\sqrt{x+5}$

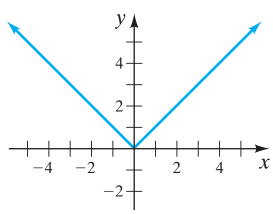
a)



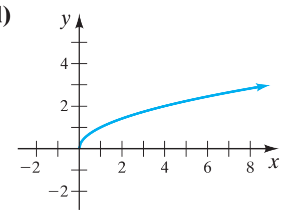
b)



c)



d)



109. Proporcione una función radical cuyo dominio sea $\{x|x \geq 8\}$.

110. Proporcione una función radical cuyo dominio sea $\{x|x \leq 5\}$.

111. Si $f(x) = -\sqrt{x}$, ¿puede $f(x)$ ser

a) mayor que 0,

b) igual a 0,

c) menor que 0?

Explique sus respuestas.

112. Si $f(x) = \sqrt{x + 5}$, ¿puede $f(x)$ ser

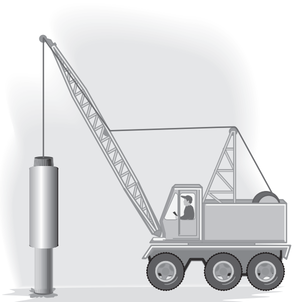
a) menor que 0,

b) igual a 0,

c) mayor que 0?

Explique sus respuestas.

113. **Velocidad de un objeto** La velocidad, V, que alcanza un objeto, en pies por segundo, después de que ha caído cierta distancia, h en pies, puede determinarse mediante la fórmula $V = \sqrt{64.4h}$. Una grúa de percusión cuenta con un gran mazo que se usa como martillo para enterrar pilotes en una superficie suave, a fin de que sirvan de soporte para edificios u otras estructuras.



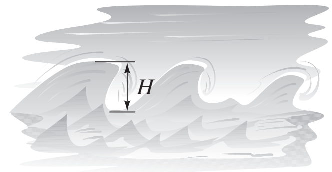
¿A qué velocidad golpeará el mazo al pilote si cae desde una altura de

a) 20 pies?

b) 40 pies?

114. **Oleaje** El instituto de oceanografía Scripps en La Jolla, California, desarrolló una fórmula para relacionar la velocidad del viento, u, en nudos, con la altura H, en pies, de las olas que se producen en ciertas áreas del océano. Esta fórmula es

$$u = \sqrt{\frac{H}{0.026}}$$



Si las olas que produce una tormenta alcanzan una altura de 15 pies, ¿cuál es la velocidad del viento?

115. Grafique $f(x) = \sqrt{x + 1}$.

116. Grafique $g(x) = -\sqrt{x}$.

117. Grafique $g(x) = \sqrt{x} + 1$.

118. Grafique $f(x) = \sqrt{x - 2}$.

Utilice su calculadora graficadora para resolver los ejercicios 119 a 124.

119. Compruebe la gráfica que trazó en el ejercicio 115.

120. Compruebe la gráfica que trazó en el ejercicio 117.

121. Determine si el dominio que dio en el ejercicio 103 es correcto.

122. Determine si el dominio que dio en el ejercicio 104 es correcto.

123. Grafique $y = \sqrt[3]{x} + 4$.

124. Grafique $f(x) = \sqrt[3]{2x - 3}$.

Actividad en grupo

En esta actividad determinarán las condiciones en que ciertas propiedades de los radicales son verdaderas. Estudiaremos estas propiedades más adelante en este capítulo. Analice y responda en grupo los ejercicios siguientes.

125. La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, denominada *propiedad de multiplicación para radicales*, es verdadera para ciertos números reales a y b. Por medio de sustitución de valores para a y b, determine en qué condiciones esta propiedad es verdadera.

126. La propiedad $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, denominada *propiedad de división para radicales*, es verdadera para ciertos números reales a y b. Por medio de sustitución de valores para a y b, determine en qué condiciones esta propiedad es verdadera.

Ejercicios de repaso acumulativo

Factorice.

[5.4] **127.** $9ax - 3bx + 12ay - 4by$

[5.5] **128.** $3x^3 - 18x^2 + 24x$

129. $8x^4 + 10x^2 - 3$

[5.6] **130.** $x^3 - \dfrac{8}{27}y^3$

7.2 Exponentes racionales

1 Convertir una expresión radical en una expresión exponencial.
2 Simplificar expresiones radicales.
3 Aplicar las reglas de los exponentes a los exponentes racionales y a los exponentes negativos.
4 Factorizar expresiones con exponentes racionales.

1 Convertir una expresión radical en una expresión exponencial

En esta sección analizaremos la conversión de las expresiones radicales en expresiones exponenciales, y viceversa. Cuando vea un exponente racional, debe darse cuenta que la expresión puede escribirse como una expresión con radical mediante el procedimiento siguiente.

Forma exponencial de $\sqrt[n]{a}$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Cuando a es un número no negativo, n puede ser cualquier índice.
Cuando a es un número negativo, n debe ser un número impar.

A menos que se indique lo contrario, en el resto de este capítulo supondremos que todas las variables en el radicando representan números reales no negativos, y que el radicando es un número no negativo. De esta manera no será necesario establecer que la variable es no negativa siempre que tengamos un radical con índice par. Esto nos permitirá escribir muchas respuestas sin signos de valor absoluto.

EJEMPLO 1 Escriba cada expresión en forma exponencial (con exponentes racionales).

a) $\sqrt{7}$ **b)** $\sqrt[3]{15ab}$ **c)** $\sqrt[7]{-4x^2y^5}$ **d)** $\sqrt[8]{\dfrac{5x^7}{2z^{11}}}$

Solución

a) $\sqrt{7} = 7^{1/2}$ *Recuerde que el índice de cualquier raíz cuadrada es 2.*

b) $\sqrt[3]{15ab} = (15ab)^{1/3}$ **c)** $\sqrt[7]{-4x^2y^5} = (-4x^2y^5)^{1/7}$ **d)** $\sqrt[8]{\dfrac{5x^7}{2z^{11}}} = \left(\dfrac{5x^7}{2z^{11}}\right)^{1/8}$

Ahora resuelva el ejercicio 19

Las expresiones exponenciales pueden convertirse en expresiones radicales invirtiendo el procedimiento.

EJEMPLO 2 Escriba cada expresión en forma radical (sin exponentes racionales).

a) $9^{1/2}$ **b)** $(-8)^{1/3}$ **c)** $y^{1/4}$ **d)** $(10x^2y)^{1/7}$ **e)** $5rs^{1/2}$

Solución

a) $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$ **b)** $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

c) $y^{1/4} = \sqrt[4]{y}$ **d)** $(10x^2y)^{1/7} = \sqrt[7]{10x^2y}$ **e)** $5rs^{1/2} = 5r\sqrt{s}$

Ahora resuelva el ejercicio 33

2 Simplificar expresiones radicales

Podemos ampliar la regla anterior, de modo que los radicales con la forma $\sqrt[n]{a^m}$ puedan escribirse como expresiones exponenciales. Observe $a^{2/3}$. Podemos escribir $a^{2/3}$ como $(a^{1/3})^2$ o $(a^2)^{1/3}$. Esto sugiere que $a^{2/3} = (\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}$.

Forma exponencial de $\sqrt[n]{a^m}$

Para cualquier número a no negativo, y enteros m y n,

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\overset{\text{Potencia}}{m}/n} \leftarrow \text{Índice}$$

Podemos usar esta regla para cambiar una expresión de la forma radical a la forma exponencial, y viceversa. Cuando cambiamos una expresión radical a forma exponencial, la *potencia* se coloca en el *numerador* y el *índice o raíz* en el *denominador* del exponente racional. Así, por ejemplo, $\sqrt[3]{x^4}$ puede escribirse como $x^{4/3}$. También $(\sqrt[5]{y})^2$ puede escribirse como $y^{2/5}$. A continuación se dan algunos ejemplos más.

Ejemplos

$$\sqrt{y^3} = y^{3/2} \qquad \sqrt[3]{z^2} = z^{2/3} \qquad \sqrt[5]{2^8} = 2^{8/5}$$
$$(\sqrt{p})^3 = p^{3/2} \qquad (\sqrt[4]{x})^3 = x^{3/4} \qquad (\sqrt[4]{7})^3 = 7^{3/4}$$

De acuerdo con esta regla, para valores no negativos de la variable podemos escribir

$$\sqrt{x^5} = (\sqrt{x})^5 \qquad (\sqrt[4]{p})^3 = \sqrt[4]{p^3}$$

EJEMPLO 3 ▸ Escriba cada expresión en forma exponencial (con exponentes racionales) y después simplifique.

a) $\sqrt[4]{x^{12}}$ **b)** $(\sqrt[3]{y})^{15}$ **c)** $(\sqrt[6]{x})^{12}$

Solución

a) $\sqrt[4]{x^{12}} = x^{12/4} = x^3$ **b)** $(\sqrt[3]{y})^{15} = y^{15/3} = y^5$

c) $(\sqrt[6]{x})^{12} = x^{12/6} = x^2$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 45**

Las expresiones exponenciales con exponentes racionales pueden convertirse en expresiones radicales invirtiendo el procedimiento. El *numerador* del exponente racional es la *potencia*, y el *denominador* del exponente racional es el *índice o raíz* de la expresión radical. Éstos son algunos ejemplos.

Ejemplos

$$x^{1/2} = \sqrt{x} \qquad 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$$
$$7^{2/3} = \sqrt[3]{7^2} \text{ o } (\sqrt[3]{7})^2 \qquad y^{3/10} = \sqrt[10]{y^3} \text{ o } (\sqrt[10]{y})^3$$
$$x^{9/5} = \sqrt[5]{x^9} \text{ o } (\sqrt[5]{x})^9 \qquad z^{10/3} = \sqrt[3]{z^{10}} \text{ o } (\sqrt[3]{z})^{10}$$

Observe que puede seleccionar, por ejemplo, escribir $6^{2/3}$ como $\sqrt[3]{6^2}$ o $(\sqrt[3]{6})^2$.

EJEMPLO 4 ▸ Escriba cada expresión en forma radical (sin exponentes racionales).

a) $x^{2/5}$ **b)** $(3ab)^{5/4}$

Solución

a) $x^{2/5} = \sqrt[5]{x^2}$ o $(\sqrt[5]{x})^2$ **b)** $(3ab)^{5/4} = \sqrt[4]{(3ab)^5}$ o $(\sqrt[4]{3ab})^5$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 35**

EJEMPLO 5 ▸ Simplifique.

a) $4^{3/2}$ **b)** $\sqrt[6]{(49)^3}$ **c)** $\sqrt[4]{(xy)^{20}}$ **d)** $(\sqrt[15]{z})^5$

Solución

a) Algunas veces una expresión con un exponente racional puede simplificarse con más facilidad escribiéndola como un radical, como se ilustra.

$$\begin{aligned} 4^{3/2} &= (\sqrt{4})^3 && \textit{Escribir como un radical.} \\ &= (2)^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

b) A veces una expresión radical puede simplificarse con más facilidad escribiéndola con exponentes racionales, como se ilustra en las partes **b)** a **d)**.

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{(49)^3} &= 49^{3/6} && \text{Escribir con un exponente racional.} \\ &= 49^{1/2} && \text{Reducir el exponente.} \\ &= \sqrt{49} && \text{Escribirlo como un radical.} \\ &= 7 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

c) $\sqrt[4]{(xy)^{20}} = (xy)^{20/4} = (xy)^5$

d) $(\sqrt[15]{z})^5 = z^{5/15} = z^{1/3}$ o $\sqrt[3]{z}$

Ahora resuelva el ejercicio 51

Veamos ahora la expresión $\sqrt[5]{x^5}$. Al escribirla en forma exponencial, se obtiene $x^{5/5} = x^1 = x$. Esto conduce a la regla siguiente.

Forma exponencial de $\sqrt[n]{a^n}$

Para cualquier número real no negativo a,

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a^{n/n} = a$$

En el recuadro anterior se especificaba que a era no negativo. Si n es un índice par y a es un número real negativo, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ y no a. Por ejemplo, $\sqrt[6]{(-5)^6} = |-5| = 5$. *De acuerdo con lo que se dijo antes en el sentido de que, a menos que se indique lo contrario, las variables en los radicandos representan números reales no negativos*, podemos escribir $\sqrt[6]{x^6} = x$ y no $|x|$. Esta suposición también nos permite escribir $\sqrt{x^2} = x$ y $(\sqrt[4]{z})^4 = z$.

Ejemplos

$$\sqrt{3^2} = 3 \qquad \sqrt[4]{y^4} = y$$

$$\sqrt[6]{(xy)^6} = xy \qquad (\sqrt[5]{z})^5 = z$$

3 Aplicar las reglas de los exponentes a los exponentes racionales y a los exponentes negativos

En la sección 1.5 se analizaron las reglas de los exponentes. En esa sección utilizamos como exponentes sólo números enteros no negativos. No obstante, éstas siguen siendo válidas cuando los exponentes son números racionales. Demos un repaso a dichas reglas.

Reglas de los exponentes

Para todos los números reales a y b y todos los números racionales m y n,

Regla del producto	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Regla del cociente	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$
Regla del exponente negativo	$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}, \quad a \neq 0$
Regla del exponente cero	$a^0 = 1, \quad a \neq 0$
Elevar una potencia a una potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Elevar un producto a una potencia	$(ab)^m = a^m b^m$
Elevar un cociente a una potencia	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$

Ahora utilizaremos estas reglas para resolver algunos problemas donde los exponentes son números racionales.

EJEMPLO 6 ▸ Evalúe. **a)** $8^{-2/3}$ **b)** $(-27)^{-5/3}$ **c)** $(-32)^{-6/5}$

Solución

a) Comience por utilizar la regla del exponente negativo.

$$\begin{aligned} 8^{-2/3} &= \frac{1}{8^{2/3}} && \textit{Regla del exponente negativo.} \\ &= \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} && \textit{Escribir el denominador como un radical.} \\ &= \frac{1}{2^2} && \textit{Simplificar el denominador.} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

b) $(-27)^{-5/3} = \dfrac{1}{(-27)^{5/3}} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{-27})^5} = \dfrac{1}{(-3)^5} = -\dfrac{1}{243}$

c) $(-32)^{-6/5} = \dfrac{1}{(-32)^{6/5}} = \dfrac{1}{(\sqrt[5]{-32})^6} = \dfrac{1}{(-2)^6} = \dfrac{1}{64}$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 81**

Observe que podríamos haber resuelto el ejemplo 6 **a)** como sigue:

$$8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$$

Sin embargo, por lo general es más fácil evaluar la raíz antes de aplicar la potencia.

Considere la expresión $(-16)^{3/4}$; esta expresión puede reescribirse como $(\sqrt[4]{-16})^3$. Ya que $(\sqrt[4]{-16})^3$ no es un número real, la expresión $(-16)^{3/4}$ no es un número real.

En el capítulo 1 se mencionó que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Utilizaremos esto en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 ▸ Evalúe. **a)** $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{-1/2}$ **b)** $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-1/3}$

Solución

a) $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{-1/2} = \left(\dfrac{25}{9}\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{5}{3}$

b) $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-1/3} = \left(\dfrac{8}{27}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{2}{3}$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 83**

Sugerencia útil

¿En qué difieren las expresiones $-25^{1/2}$ y $(-25)^{1/2}$?
Recuerde que $-x^2$ significa $-(x^2)$. El mismo principio se aplica aquí.

$$-25^{1/2} = -(25)^{1/2} = -\sqrt{25} = -5$$

$(-25)^{1/2} = \sqrt{-25}$, el cual no es un número real.

EJEMPLO 8 ▸ Simplifique cada expresión y escriba la respuesta sin exponentes negativos.

a) $a^{1/2} \cdot a^{-2/3}$ **b)** $(6x^2y^{-4})^{-1/2}$ **c)** $3.2x^{1/3}(2.4x^{1/2} + x^{-1/4})$ **d)** $\left(\dfrac{9x^{-4}z^{2/5}}{z^{-3/5}}\right)^{1/8}$

Solución

a)
$$\begin{aligned} a^{1/2} \cdot a^{-2/3} &= a^{(1/2)-(2/3)} && \textit{Regla del producto.}\\ &= a^{-1/6} && \textit{Determinar el MCD y restar los exponentes.}\\ &= \frac{1}{a^{1/6}} && \textit{Regla del exponente negativo.} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} (6x^2y^{-4})^{-1/2} &= 6^{-1/2}x^{2(-1/2)}y^{-4(-1/2)} && \textit{Elevar el producto a una potencia.}\\ &= 6^{-1/2}x^{-1}y^2 && \textit{Multiplicar los exponentes.}\\ &= \frac{y^2}{6^{1/2}x}\left(\text{o } \frac{y^2}{x\sqrt{6}}\right) && \textit{Regla del exponente negativo.} \end{aligned}$$

c) Comience aplicando la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} 3.2x^{1/3}(2.4x^{1/2} + x^{-1/4}) &= (3.2x^{1/3})(2.4x^{1/2}) + (3.2x^{1/3})(x^{-1/4}) && \textit{Propiedad distributiva.}\\ &= (3.2)(2.4)(x^{(1/3)+(1/2)}) + 3.2x^{(1/3)-(1/4)} && \textit{Regla del producto.}\\ &= 7.68x^{5/6} + 3.2x^{1/12} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \left(\frac{9x^{-4}z^{2/5}}{z^{-3/5}}\right)^{1/8} &= (9x^{-4}z^{(2/5)-(-3/5)})^{1/8} && \textit{Regla del cociente.}\\ &= (9x^{-4}z)^{1/8} && \textit{Restar los exponentes.}\\ &= 9^{1/8}x^{-4(1/8)}z^{1/8} && \textit{Elevar el producto a una potencia.}\\ &= 9^{1/8}x^{-4/8}z^{1/8} && \textit{Multiplicar los exponentes.}\\ &= 9^{1/8}x^{-1/2}z^{1/8} && \textit{Simplificar el exponente.}\\ &= \frac{9^{1/8}z^{1/8}}{x^{1/2}} && \textit{Regla del exponente negativo.} \end{aligned}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 105**

EJEMPLO 9 ▸ Simplifique. **a)** $\sqrt[15]{(7y)^5}$ **b)** $\left(\sqrt[4]{a^2b^3c}\right)^{20}$ **c)** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$

Solución

a)
$$\begin{aligned} \sqrt[15]{(7y)^5} &= (7y)^{5/15} && \textit{Escribir con un exponente racional.}\\ &= (7y)^{1/3} && \textit{Simplificar el exponente.}\\ &= \sqrt[3]{7y} && \textit{Escribir como un radical.} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \left(\sqrt[4]{a^2b^3c}\right)^{20} &= (a^2b^3c)^{20/4} && \textit{Escribir con un exponente racional.}\\ &= (a^2b^3c)^5 \\ &= a^{10}b^{15}c^5 && \textit{Elevar el producto a una potencia.} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} &= \sqrt[4]{x^{1/3}} && \textit{Escribir } \sqrt[3]{x} \textit{ como } x^{1/3}.\\ &= (x^{1/3})^{1/4} && \textit{Escribir con un exponente racional.}\\ &= x^{1/12} && \textit{Elevar la potencia a una potencia.}\\ &= \sqrt[12]{x} && \textit{Escribir como radical.} \end{aligned}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 53**

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA Determinación de raíces o expresiones con exponentes racionales en una calculadora graficadora o en una calculadora científica

En general hay muchas formas de evaluar una expresión como $(\sqrt[5]{845})^3$ u $845^{3/5}$ en una calculadora. El procedimiento varía según el modelo. Un método general consiste en escribir la expresión con un exponente racional y utilizar las teclas $\boxed{y^x}$ o $\boxed{a^x}$ o $\boxed{\wedge}$ junto con las teclas de paréntesis, como se muestra a continuación.*

Calculadora científica

Para evaluar $845^{3/5}$, presione

Respuesta que se obtiene

$$845\ \boxed{y^x}\ \boxed{(}\ 3\ \boxed{\div}\ 5\ \boxed{)}\ \boxed{=}\ 57.03139903$$

Para evaluar $845^{-3/5}$, presione

Respuesta que se obtiene

$$845\ \boxed{y^x}\ \boxed{(}\ 3\ \boxed{^+/_-}\ \boxed{\div}\ 5\ \boxed{)}\ \boxed{=}\ 0.017534201$$

Calculadora graficadora

Para evaluar $845^{3/5}$, presione las teclas siguientes.

Respuesta que se obtiene

$$845\ \boxed{\wedge}\ \boxed{(}\ 3\ \boxed{\div}\ 5\ \boxed{)}\ \boxed{\text{ENTER}}\ 57.03139903$$

Para evaluar $845^{-3/5}$, presione las siguientes teclas.

Respuesta que se obtiene

$$845\ \boxed{\wedge}\ \boxed{(}\ \boxed{(-)}\ 3\ \boxed{\div}\ 5\ \boxed{)}\ \boxed{\text{ENTER}}\ .0175342008$$

*La secuencia de teclas que se utiliza varía según el modelo de cada calculadora. Lea el manual de su calculadora para aprender a evaluar expresiones exponenciales con ella.

4 Factorizar expresiones con exponentes racionales

En cursos de matemáticas de nivel superior quizá tenga que factorizar variables con exponentes racionales. Para factorizar una expresión racional, factorice el término con el exponente más pequeño (o más negativo).

EJEMPLO 10 Factorice $x^{2/5} + x^{-3/5}$.

Solución El más pequeño de los dos exponentes es $-3/5$. Por lo tanto, factorizaremos $x^{-3/5}$ en ambos términos. Para determinar el nuevo exponente en la variable que tenía el exponente más grande, restamos el exponente que se factorizó del exponente original.

Exponente original

Exponente factorizado

$$\begin{aligned} x^{2/5} + x^{-3/5} &= x^{-3/5}\left(x^{2/5-(-3/5)} + 1\right) \\ &= x^{-3/5}(x^1 + 1) \\ &= x^{-3/5}(x + 1) \\ &= \frac{x+1}{x^{3/5}} \end{aligned}$$

Podemos comprobar nuestra factorización por medio de la multiplicación.

$$\begin{aligned} x^{-3/5}(x + 1) &= x^{-3/5} \cdot x + x^{-3/5} \cdot 1 \\ &= x^{(-3/5)+1} + x^{-3/5} \\ &= x^{2/5} + x^{-3/5} \end{aligned}$$

Como obtuvimos la expresión original, la factorización es correcta.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 135

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. **a)** ¿En qué condiciones $\sqrt[n]{a}$ es un número real?
   b) Cuando $\sqrt[n]{a}$ es un número real, ¿cómo puede expresarse con exponentes racionales?
2. **a)** ¿En qué condiciones $\sqrt[n]{a^m}$ es un número real?
   b) ¿En qué condiciones $(\sqrt[n]{a})^m$ es un número real?
   c) Cuando $\sqrt[n]{a^m}$ es un número real, ¿cómo puede expresarse con exponentes racionales?
3. **a)** ¿En qué condiciones $\sqrt[n]{a^n}$ es un número real?
   b) Cuando n es un número par y $a \geq 0$, ¿a qué es igual $\sqrt[n]{a^n}$?
   c) Cuando n es un número impar, ¿a qué es igual $\sqrt[n]{a^n}$?
   d) Cuando n es un número par y a es cualquier número real, ¿a qué es igual $\sqrt[n]{a^n}$?
4. **a)** Explique la diferencia entre $-16^{1/2}$ y $(-16)^{1/2}$.
   b) Evalúe cada expresión de la parte **a)**, si esto es posible.
5. **a)** ¿$(xy)^{1/2} = xy^{1/2}$? Explique.
   b) ¿Es $(xy)^{-1/2} = \dfrac{x^{1/2}}{y^{-1/2}}$? Explique.
6. **a)** ¿Es $\sqrt[6]{(3y)^3} = (3y)^{6/3}$? Explique.
   b) ¿Es $\sqrt{(ab)^4} = (ab)^2$? Explique.

Práctica de habilidades

En este conjunto de ejercicios supondremos que todas las variables representan números reales positivos. Escriba cada expresión en forma exponencial.

7. $\sqrt{a^3}$ **8.** $\sqrt{y^7}$ **9.** $\sqrt{9^5}$ **10.** $\sqrt[3]{y}$
11. $\sqrt[3]{z^5}$ **12.** $\sqrt[3]{x^{11}}$ **13.** $\sqrt[3]{7^{10}}$ **14.** $\sqrt[5]{9^{11}}$
15. $\sqrt[4]{9^7}$ **16.** $(\sqrt{x})^9$ **17.** $(\sqrt[3]{y})^{14}$ **18.** $\sqrt{ab^5}$
19. $\sqrt[4]{a^3b}$ **20.** $\sqrt[3]{x^4y}$ **21.** $\sqrt[4]{x^9z^5}$ **22.** $\sqrt[6]{y^{11}z}$
23. $\sqrt[6]{3a+8b}$ **24.** $\sqrt[9]{3x+5z^4}$ **25.** $\sqrt[5]{\dfrac{2x^6}{11y^7}}$ **26.** $\sqrt[4]{\dfrac{3a^8}{11b^5}}$

Escriba cada expresión en forma radical.

27. $a^{1/2}$ **28.** $b^{2/3}$ **29.** $c^{5/2}$ **30.** $19^{1/2}$
31. $18^{5/3}$ **32.** $y^{17/6}$ **33.** $(24x^3)^{1/2}$ **34.** $(85a^3)^{5/2}$
35. $(11b^2c)^{3/5}$ **36.** $(8x^3y^2)^{7/4}$ **37.** $(6a+5b)^{1/5}$ **38.** $(8x^2+9y)^{7/3}$
39. $(b^3-d)^{-1/3}$ **40.** $(7x^2-2y^3)^{-1/6}$

Simplifique cada expresión radical, cambiándola a forma exponencial. Cuando sea apropiado, escriba la respuesta en forma radical.

41. $\sqrt{a^6}$ **42.** $\sqrt[4]{a^8}$ **43.** $\sqrt[3]{x^9}$ **44.** $\sqrt[4]{x^{12}}$
45. $\sqrt[6]{y^2}$ **46.** $\sqrt[8]{b^4}$ **47.** $\sqrt[6]{y^3}$ **48.** $\sqrt[12]{z^4}$
49. $(\sqrt{19.3})^2$ **50.** $\sqrt[4]{(6.83)^4}$ **51.** $(\sqrt[3]{xy^2})^{15}$ **52.** $(\sqrt[4]{a^4bc^3})^{40}$
53. $(\sqrt[8]{xyz})^4$ **54.** $(\sqrt[9]{a^2bc^4})^3$ **55.** $\sqrt{\sqrt{x}}$ **56.** $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$
57. $\sqrt{\sqrt[4]{y}}$ **58.** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b}}$ **59.** $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^2y}}$ **60.** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{7y}}$
61. $\sqrt{\sqrt[5]{a^9}}$ **62.** $\sqrt[5]{\sqrt[4]{ab}}$

Evalúe, si es posible. Si la expresión no es un número real, indíquelo.

63. $25^{1/2}$ **64.** $121^{1/2}$ **65.** $64^{1/3}$ **66.** $81^{1/4}$
67. $64^{2/3}$ **68.** $27^{2/3}$ **69.** $(-49)^{1/2}$ **70.** $(-64)^{1/4}$
71. $\left(\dfrac{25}{9}\right)^{1/2}$ **72.** $\left(\dfrac{100}{49}\right)^{1/2}$ **73.** $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{1/3}$ **74.** $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{1/5}$
75. $-81^{1/2}$ **76.** $(-81)^{1/2}$ **77.** $-64^{1/3}$ **78.** $(-64)^{1/3}$
79. $64^{-1/3}$ **80.** $49^{-1/2}$ **81.** $16^{-3/2}$ **82.** $64^{-2/3}$
83. $\left(\dfrac{64}{27}\right)^{-1/3}$ **84.** $(-81)^{3/4}$ **85.** $(-100)^{3/2}$ **86.** $-\left(\dfrac{25}{49}\right)^{-1/2}$
87. $121^{1/2}+169^{1/2}$ **88.** $49^{-1/2}+36^{-1/2}$ **89.** $343^{-1/3}+16^{-1/2}$ **90.** $16^{-1/2}-256^{-3/4}$

Simplifique. Escriba la respuesta en forma exponencial sin exponentes negativos.

91. $x^4 \cdot x^{1/2}$ **92.** $x^6 \cdot x^{1/2}$ **93.** $\dfrac{x^{1/2}}{x^{1/3}}$ **94.** $x^{-6/5}$

95. $(x^{1/2})^{-2}$ **96.** $(a^{-1/3})^{-1/2}$ **97.** $(9^{-1/3})^0$ **98.** $\dfrac{x^4}{x^{-1/2}}$

99. $\dfrac{5y^{-1/3}}{60y^{-2}}$ **100.** $x^{-1/2}x^{-2/5}$ **101.** $4x^{5/3}3x^{-7/2}$ **102.** $(x^{-4/5})^{1/3}$

103. $\left(\dfrac{3}{24x}\right)^{1/3}$ **104.** $\left(\dfrac{52}{2x^4}\right)^{1/3}$ **105.** $\left(\dfrac{22x^{3/7}}{2x^{1/2}}\right)^2$ **106.** $\left(\dfrac{x^{-1/3}}{x^{-2}}\right)^2$

107. $\left(\dfrac{a^4}{4a^{-2/5}}\right)^{-3}$ **108.** $\left(\dfrac{27z^{1/4}y^3}{3z^{1/4}}\right)^{1/2}$ **109.** $\left(\dfrac{x^{3/4}y^{-3}}{x^{1/2}y^2}\right)^4$ **110.** $\left(\dfrac{250a^{-3/4}b^5}{2a^{-2}b^2}\right)^{2/3}$

Multiplique.

111. $4z^{-1/2}(2z^4 - z^{1/2})$ **112.** $-3a^{-4/9}(5a^{1/9} - a^2)$ **113.** $5x^{-1}(x^{-4} + 4x^{-1/2})$

114. $-9z^{3/2}(z^{3/2} - z^{-3/2})$ **115.** $-6x^{5/3}(-2x^{1/2} + 3x^{1/3})$ **116.** $\dfrac{1}{2}x^{-2}(10x^{4/3} - 38x^{-1/2})$

Utilice una calculadora para evaluar cada expresión. Redondee la respuesta al centésimo más cercano.

117. $\sqrt{180}$ **118.** $\sqrt[3]{168}$ **119.** $\sqrt[5]{402.83}$ **120.** $\sqrt[4]{1096}$

121. $93^{2/3}$ **122.** $38.2^{3/2}$ **123.** $1000^{-1/2}$ **124.** $8060^{-3/2}$

Resolución de problemas

125. ¿En qué condiciones se cumplirá $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$?

126. Elija valores para a y b para demostrar que $(a^2 + b^2)^{1/2}$ *no es igual a* $a + b$.

127. Elija valores para a y b para demostrar que $(a^{1/2} + b^{1/2})^2$ *no es igual a* $+ b$.

128. Elija valores para a y b para demostrar que $(a^3 + b^3)^{1/3}$ *no es igual a* $a + b$.

129. Elija valores para a y b para demostrar que $(a^{1/3} + b^{1/3})^3$ *no es igual* $a + b$.

130. Determine si $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt[3]{x}}$, $x \geq 0$.

Factorice. Escriba la respuesta sin exponentes negativos.

131. $x^{3/2} + x^{1/2}$ **132.** $x^{1/4} - x^{5/4}$ **133.** $y^{1/3} - y^{7/3}$

134. $x^{-1/2} + x^{1/2}$ **135.** $y^{-2/5} + y^{8/5}$ **136.** $a^{6/5} + a^{-4/5}$

En los ejercicios 137 a 142, utilice una calculadora donde sea apropiado.

137. **Cultivo de bacterias** La función $B(t) = 2^{10} \cdot 2^t$, sirve para aproximar el número de bacterias que hay en cultivo después de t horas.

a) El número inicial de bacterias se determinó cuando $t = 0$. ¿Cuál es el número inicial de bacterias?

b) ¿Cuántas bacterias hay después de $\dfrac{1}{2}$ hora?

138. **Determinación de antigüedad** Los científicos emplean un método denominado "fechado con carbono" para determinar la antigüedad de fósiles, huesos y otros objetos. La fórmula que se usa es $P = P_0 2^{-t/5600}$, donde P_0 representa la cantidad original de carbono 14 (C_{14}) presente en un objeto, y P representa la cantidad de C_{14} que hay en él después de t años. Si en un hueso de un animal recientemente desenterrado están presentes 10 mg de C_{14}, ¿cuántos mg estarán presentes dentro de 5000 años?

139. **Planes de retiro** Cada año es mayor el número de estadounidenses que contribuyen al plan de retiro denominado 401(k). El total de activos, $A(t)$, de los planes 401(k), en miles de millones de dólares, puede aproximarse mediante la función $A(t) = 2.69t^{3/2}$, donde t es años desde 1993, y $1 \leq t \leq 16$. (Por lo tanto, esta función aplica para los años 1994 a 2009.) Estime el total de activos que habrá en los planes 401(k) en **a)** 2000 y **b)** 2009.

140. **Ventas por Internet** Las ventas por Internet han aumentado cada año. La cantidad total, $I(t)$, en miles de millones de dólares, de ventas realizadas por Internet, puede aproximarse mediante la función $I(t) = 0.25t^{5/3}$, donde t son los años desde 1999, y $1 \leq t \leq 9$. Determine la cantidad total en ventas realizadas por Internet en **a)** 2000 y **b)** 2008.

141. Evalúe $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$. Explique cómo determinó su respuesta.

142. **a)** Evalúe en su calculadora 3^{π}.
b) Explique por qué el valor que indicó en la parte **a)** tiene sentido o no.

143. Determine el dominio de $f(x) = (x - 7)^{1/2}(x + 3)^{-1/2}$.

144. Determine el dominio de $f(x) = (x + 4)^{1/2}(x - 3)^{-1/2}$.

145. Suponga que x puede ser cualquier número real. Simplifique $\sqrt[n]{(x - 6)^{2n}}$
a) n es un número par.
b) n es un número impar.

Determine el índice que debe colocarse en el área sombreada para que la expresión sea verdadera. Explique cómo determinó su respuesta.

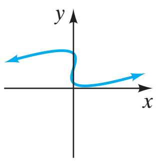
146. $\sqrt[4]{\sqrt[\square]{\sqrt{x}}} = x^{1/24}$

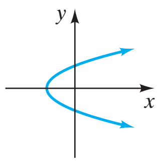
147. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt[\square]{\sqrt[3]{z}}}} = z^{1/120}$

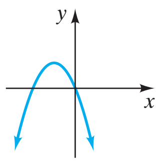
148. **a)** Escriba $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ en forma exponencial.
b) Utilizando su calculadora graficadora, compruebe que la respuesta que dio en la parte **a)** es correcta; para ello, grafique $f(x)$ tanto en su forma original como en la forma exponencial que usted determinó.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.2] **149.** Determine cuáles de las relaciones siguientes también son funciones.

a)


b)


c)


[6.3] **150.** Simplifique $\dfrac{a^{-2} + ab^{-1}}{ab^{-2} - a^{-2}b^{-1}}$.

[6.4] **151.** Resuelva la ecuación $\dfrac{3x - 2}{x + 4} = \dfrac{2x + 1}{3x - 2}$.

[6.5] **152.** **Piloteando un avión** Amy Mayfiel puede pilotear su aeroplano en un trayecto de 500 millas con el viento en contra, en el mismo tiempo que le toma pilotearlo en un trayecto de 560 millas con el viento a favor. Si el viento sopla a 25 millas por hora, determine la velocidad del aeroplano con viento en calma.

7.3 Simplificación de radicales

1. Entender potencias perfectas.
2. Simplificar radicales mediante la regla del producto para radicales.
3. Simplificar radicales mediante la regla del cociente para radicales.

1 Entender potencias perfectas

En esta sección simplificaremos radicales mediante la **regla del producto para radicales** y la **regla del cociente para radicales**, pero antes se presentará un concepto que nos ayudará a comprenderlas: las **potencias perfectas**.

Un número o expresión es un **cuadrado perfecto** si es el cuadrado de una expresión. Los siguientes son ejemplos de cuadrados perfectos.

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Cuadrados perfectos} & 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 36, \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Cuadrado de un número} & 1^2, & 2^2, & 3^2, & 4^2, & 5^2, & 6^2, \ldots \end{array}$$

Tal como se ilustra a continuación, las variables con exponentes también pueden ser cuadrados perfectos.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Cuadrados perfectos} & x^2, & x^4, & x^6, & x^8, & x^{10}, \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Cuadrado de una expresión} & (x)^2, & (x^2)^2, & (x^3)^2, & (x^4)^2, & (x^5)^2, \ldots \end{array}$$

Observe que todos los exponentes de las variables de los cuadrados perfectos son múltiplos de 2.

Al igual que existen cuadrados perfectos, también hay cubos perfectos. Un número o expresión es un **cubo perfecto** si puede escribirse como el cubo de una expresión. Los siguientes son algunos ejemplos.

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Cubos perfectos} & 1, & 8, & 27, & 64, & 125, & 216, \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Cubo de un número} & 1^3, & 2^3, & 3^3, & 4^3, & 5^3, & 6^3, \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccc} \text{Cubos perfectos} & x^3, & x^6, & x^9, & x^{12}, & x^{15}, \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Cubo de una expresión} & (x)^3, & (x^2)^3, & (x^3)^3, & (x^4)^3, & (x^5)^3, \ldots \end{array}$$

Observe que todos los exponentes de las variables de los cubos perfectos son múltiplos de 3.

Podemos ampliar nuestro análisis respecto de potencias perfectas de una variable para cualquier radicando. En general, el radicando x^n es una potencia perfecta *cuando n es un múltiplo del índice* del radicando (o donde n es divisible entre el índice).

Ejemplo

Potencias perfectas de x^n para el índice n $\quad x^n, \quad x^{2n}, \quad x^{3n}, \quad x^{4n}, \quad x^{5n}, \ldots$

Por ejemplo, si el índice de una expresión radical es 5, entonces $x^5, x^{10}, x^{15}, x^{20}$, etcétera, son potencias perfectas del índice.

Sugerencia útil

Un método rápido para saber si un radicando x^n es una potencia perfecta para un índice, consiste en determinar si el exponente n es divisible entre el índice del radical. Por ejemplo, en $\sqrt[5]{x^{20}}$. Como el exponente, 20, es divisible entre el índice, 5, x^{20} es una quinta potencia perfecta. En cambio, en $\sqrt[6]{x^{20}}$. El exponente, 20, no es divisible entre el índice, 6; entonces, x^{20} no es una sexta potencia perfecta. Sin embargo, x^{18} y x^{24} sí lo son, ya que 6 divide a 18 y a 24.

Observe que la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto se simplifica a una expresión sin signo radical; la raíz cúbica de un cubo perfecto se simplifica a una expresión sin signo radical, y así sucesivamente.

Ejemplos

$$\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6^{2/2} = 6$$
$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{3/3} = 3$$
$$\sqrt{x^6} = x^{6/2} = x^3$$
$$\sqrt[3]{z^{12}} = z^{12/3} = z^4$$
$$\sqrt[5]{n^{35}} = n^{35/5} = n^7$$

Estamos listos para analizar la regla del producto para radicales.

2 Simplificar radicales mediante la regla del producto para radicales

Para introducir la **regla del producto para radicales**, observe que $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9} = 2\cdot 3 = 6$. También $\sqrt{4\cdot 9} = \sqrt{36} = 6$. Vemos que $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9} = \sqrt{4\cdot 9}$. Éste es un ejemplo de la regla del producto para radicales.

Regla del producto para radicales

Para números reales no negativos a y b,

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Ejemplos de la regla del producto para radicales

$$\sqrt{20} = \begin{cases} \sqrt{1}\cdot\sqrt{20} \\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{10} \\ \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} \end{cases} \qquad \sqrt[3]{20} = \begin{cases} \sqrt[3]{1}\cdot\sqrt[3]{20} \\ \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{10} \\ \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{5} \end{cases}$$

$\sqrt{20}$ puede factorizarse en cualquiera de estas formas. $\qquad$ $\sqrt[3]{20}$ puede factorizarse en cualquiera de estas formas.

$$\sqrt{x^7} = \begin{cases} \sqrt{x}\cdot\sqrt{x^6} \\ \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x^5} \\ \sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x^4} \end{cases} \qquad \sqrt[3]{x^7} = \begin{cases} \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^6} \\ \sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^5} \\ \sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4} \end{cases}$$

$\sqrt{x^7}$ puede factorizarse en cualquiera de estas formas. $\qquad$ $\sqrt[3]{x^7}$ puede factorizarse en cualquiera de estas formas.

Ahora que conocemos la regla del producto para radicales, la usaremos para simplificar radicales. A continuación mostramos un procedimiento general que puede usarse para simplificar radicales mediante la regla del producto.

Para simplificar radicales mediante la regla del producto

1. Si el radicando contiene un coeficiente distinto de 1, escríbalo como el producto de dos números, uno de los cuales es la máxima potencia perfecta del índice.
2. Escriba cada factor variable como el producto de dos factores, donde uno de los cuales sea la máxima potencia perfecta de la variable del índice.
3. Utilice la regla del producto para escribir la expresión radical como un producto de radicales. Coloque todas las potencias perfectas (números y variables) bajo el mismo radical.
4. Simplifique el radical que contiene las potencias perfectas.

Si simplificamos una *raíz cuadrada*, debemos escribir el radicando como el producto del *cuadrado perfecto* más grande por otro número. Si simplificamos una raíz *cúbica*, debemos escribir el radicando como el producto del *cubo perfecto* más grande por otro número, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1 Simplifique. **a)** $\sqrt{32}$ **b)** $\sqrt{60}$ **c)** $\sqrt[3]{54}$ **d)** $\sqrt[4]{96}$

Solución En este ejemplo, los radicandos no tienen variables. Seguiremos el paso 1 del procedimiento.

a) Como estamos evaluando una raíz cuadrada, buscamos el cuadrado perfecto más grande que divida a (o sea un factor de) 32, en este caso, 16.

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16}\,\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

b) El cuadrado perfecto más grande que es factor de 60 es 4.

$$\sqrt{60} = \sqrt{4 \cdot 15} = \sqrt{4}\,\sqrt{15} = 2\sqrt{15}$$

c) El cubo perfecto más grande que es factor de 54 es 27.

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

d) La cuarta potencia perfecta más grande que es factor de 96 es 16.

$$\sqrt[4]{96} = \sqrt[4]{16 \cdot 6} = \sqrt[4]{16}\,\sqrt[4]{6} = 2\sqrt[4]{6}$$

Ahora resuelva el ejercicio 19

Sugerencia útil

En el ejemplo 1 **a)**, si primero pensó que 4 era el cuadrado perfecto más grande que dividía a 32, podría proceder como sigue

$$\sqrt{32} = \sqrt{4 \cdot 8} = \sqrt{4}\,\sqrt{8} = 2\sqrt{8}$$
$$= 2\sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{4}\,\sqrt{2} = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Observe que el resultado final es el mismo, pero debe realizar más pasos. La explicación de potencias perfectas de la página 465 puede ayudarle a determinar el cuadrado perfecto o el cubo perfecto más grandes que son factores de un radicando.

El ejemplo 1 **b)** también $\sqrt{15}$ puede tener factores como $\sqrt{5 \cdot 3}$; sin embargo, como ni 5 ni 3 son cuadrados perfectos, $\sqrt{15}$ no puede simplificarse.

Cuando el radicando es una potencia perfecta del índice, el radical puede simplificarse escribiéndolo en forma exponencial, como en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Simplifique. **a)** $\sqrt{x^4}$ **b)** $\sqrt[3]{x^{12}}$ **c)** $\sqrt[5]{z^{40}}$

Solución

a) $\sqrt{x^4} = x^{4/2} = x^2$ **b)** $\sqrt[3]{x^{12}} = x^{12/3} = x^4$ **c)** $\sqrt[5]{z^{40}} = z^{40/5} = z^8$

Ahora resuelva el ejercicio 33

EJEMPLO 3 Simplifique. **a)** $\sqrt{x^9}$ **b)** $\sqrt[5]{x^{23}}$ **c)** $\sqrt[4]{y^{33}}$

Solución Como los radicandos tienen coeficiente 1, iniciamos con el paso 2 del procedimiento.

a) El cuadrado perfecto más grande menor o igual a x^9 es x^8.

$$\sqrt{x^9} = \sqrt{x^8 \cdot x} = \sqrt{x^8} \cdot \sqrt{x} = x^{8/2}\sqrt{x} = x^4\sqrt{x}$$

b) La quinta potencia perfecta más grande menor o igual a x^{23} es x^{20}.

$$\sqrt[5]{x^{23}} = \sqrt[5]{x^{20} \cdot x^3} = \sqrt[5]{x^{20}}\,\sqrt[5]{x^3} = x^{20/5}\sqrt[5]{x^3} = x^4\sqrt[5]{x^3}$$

c) La cuarta potencia más grande menor o igual a y^{33} es y^{32}.

$$\sqrt[4]{y^{33}} = \sqrt[4]{y^{32} \cdot y} = \sqrt[4]{y^{32}}\,\sqrt[4]{y} = y^{32/4}\sqrt[4]{y} = y^8\sqrt[4]{y}$$

Ahora resuelva el ejercicio 39

Si observa las respuestas al ejemplo 3, verá que el exponente de la variable del radicando siempre es menor que el índice. **Cuando un radical se simplifica, el radicando no tiene una variable con un exponente mayor o igual al índice.**

En el ejemplo 3 **b)** simplificamos $\sqrt[5]{x^{23}}$. Si dividimos 23, el exponente en el radicando, entre 5, el índice, obtenemos

$$\begin{array}{r l} 4 & \longleftarrow \text{Cociente} \\ 5\overline{)23} & \\ \underline{20} & \\ 3 & \longleftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

Observe que $\sqrt[5]{x^{23}}$ se simplifica a $x^4\sqrt[5]{x^3}$ y

$$\text{Cociente} \longrightarrow x^4\sqrt[5]{x^3} \longleftarrow \text{Residuo}$$

Cuando simplificamos un radical, si dividimos el exponente dentro del radical entre el índice, el cociente será el exponente de la variable fuera del signo radical, y el residuo será el exponente de la variable dentro del signo radical. Ahora, simplifique el ejemplo 3 **c)** mediante esta técnica.

EJEMPLO 4 Simplifique. **a)** $\sqrt{x^{12}y^{17}}$ **b)** $\sqrt[4]{x^6y^{23}}$

Solución

a) x^{12} es un cuadrado perfecto. El cuadrado perfecto más grande que es factor de y^{17} es y^{16}. Escriba y^{17} como $y^{16} \cdot y$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^{12}y^{17}} &= \sqrt{x^{12} \cdot y^{16} \cdot y} = \sqrt{x^{12}y^{16}}\,\sqrt{y} \\ &= \sqrt{x^{12}}\sqrt{y^{16}}\,\sqrt{y} \\ &= x^{12/2}y^{16/2}\sqrt{y} \\ &= x^6y^8\sqrt{y} \end{aligned}$$

b) Empezamos por encontrar la cuarta potencia perfecta más grande que sea factor de x^6 y y^{23}. Para un índice de 4, la potencia perfecta más grande que es factor de x^6 es x^4. La potencia perfecta más grande que es factor de y^{23} es y^{20}.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^6y^{23}} &= \sqrt[4]{x^4 \cdot x^2 \cdot y^{20} \cdot y^3} \\ &= \sqrt[4]{x^4y^{20} \cdot x^2y^3} \\ &= \sqrt[4]{x^4y^{20}}\,\sqrt[4]{x^2y^3} \\ &= xy^5\sqrt[4]{x^2y^3} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 51

Con frecuencia los pasos donde cambiamos la expresión radical a forma exponencial se realizan de forma mental y, por lo tanto, esos pasos no se ilustran. Por ejemplo, en el ejemplo 4 **b)** cambiamos $\sqrt[4]{x^4y^{20}}$ a xy^5 mentalmente, así que no se mostraron los pasos intermedios.

EJEMPLO 5 Simplifique. **a)** $\sqrt{80x^5y^{12}z^3}$ **b)** $\sqrt[3]{54x^{17}y^{25}}$

Solución

a) El cuadrado perfecto más grande que es factor de 80 es 16. El cuadrado perfecto más grande que es un factor de x^5 es x^4. La expresión y^{12} es un cuadrado perfecto. El cuadrado perfecto más grande que es factor de z^3 es z^2. Coloque todos los cuadrados perfectos bajo el mismo radical y luego simplifique.

$$\begin{aligned}\sqrt{80x^5y^{12}z^3} &= \sqrt{16\cdot 5\cdot x^4\cdot x\cdot y^{12}\cdot z^2\cdot z}\\ &= \sqrt{16x^4y^{12}z^2\cdot 5xz}\\ &= \sqrt{16x^4y^{12}z^2}\cdot\sqrt{5xz}\\ &= 4x^2y^6z\sqrt{5xz}\end{aligned}$$

b) El cubo perfecto más grande que es factor de 54 es 27. El cubo perfecto más grande que es factor de x^{17} es x^{15}. El cubo perfecto más grande que es factor de y^{25} es y^{24}.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{54x^{17}y^{25}} &= \sqrt[3]{27\cdot 2\cdot x^{15}\cdot x^2\cdot y^{24}\cdot y}\\ &= \sqrt[3]{27x^{15}y^{24}\cdot 2x^2y}\\ &= \sqrt[3]{27x^{15}y^{24}}\cdot\sqrt[3]{2x^2y}\\ &= 3x^5y^8\sqrt[3]{2x^2y}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 57

Sugerencia útil

En el ejemplo 4 **b)**, mostramos que

$$\sqrt[4]{x^6y^{23}} = xy^5\sqrt[4]{x^2y^3}$$

Como se mencionó en la página 468, este radical también puede simplificarse dividiendo los exponentes de las variables dentro del radicando, 6 y 23, entre el índice, 4, y observando los cocientes y los residuos.

Cociente	Cociente	Residuo	Residuo
$6 \div 4$	$23 \div 4$	$6 \div 4$	$23 \div 4$

$$\sqrt[4]{x^6y^{23}} = x^1y^5\sqrt[4]{x^2y^3}$$

¿Puede explicar por qué este procedimiento también funciona? Tal vez quiera usar este procedimiento para resolver o comprobar ciertos problemas.

A continuación se presentan las reglas del cociente para radicales.

3 Simplificar radicales mediante la regla del cociente para radicales

A veces en matemáticas es necesario simplificar un cociente de dos radicales; para hacerlo se utiliza la **regla del cociente para radicales**.

Regla del cociente para radicales

Para números reales no negativos a y b,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},\quad b \neq 0$$

Ejemplos de la regla del cociente para radicales

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{18}{3}} \qquad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$$

$$\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x^3}{x}} \qquad \sqrt{\frac{x^4}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{y^2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{y^5}}{\sqrt[3]{y^2}} = \sqrt[3]{\frac{y^5}{y^2}} \qquad \sqrt[3]{\frac{z^9}{27}} = \frac{\sqrt[3]{z^9}}{\sqrt[3]{27}}$$

Los ejemplos 6 y 7 ilustran cómo utilizar la regla del cociente para simplificar expresiones radicales.

EJEMPLO 6 Simplifique. **a)** $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{\sqrt[3]{24x}}{\sqrt[3]{3x}}$ **c)** $\frac{\sqrt[3]{x^4y^7}}{\sqrt[3]{xy^{-5}}}$

Solución En cada parte utilizamos la regla del cociente para escribir el cociente de radicales como un solo radical. Luego simplificamos.

a) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$

b) $\frac{\sqrt[3]{24x}}{\sqrt[3]{3x}} = \sqrt[3]{\frac{24x}{3x}} = \sqrt[3]{8} = 2$

c) $\frac{\sqrt[3]{x^4y^7}}{\sqrt[3]{xy^{-5}}} = \sqrt[3]{\frac{x^4y^7}{xy^{-5}}}$ *Regla del cociente para radicales.*

$= \sqrt[3]{x^3y^{12}}$ *Simplificar el radicando.*

$= xy^4$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 93**

Cuando se presentaron los radicales en la sección 7.1, se indicó que $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ ya que $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. La regla del cociente puede ser útil en la evaluación de raíces cuadradas que tienen fracciones, como se ilustra en el ejemplo 7 **a)**.

EJEMPLO 7 Simplifique. **a)** $\sqrt{\frac{121}{25}}$ **b)** $\sqrt[3]{\frac{8x^4y}{27xy^{10}}}$ **c)** $\sqrt[4]{\frac{18xy^5}{3x^9y}}$

Solución En cada parte, primero simplificamos el radicando, si esto es posible. Luego utilizamos la regla del cociente para escribir el radical dado como cociente de radicales.

a) $\sqrt{\frac{121}{25}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$

b) $\sqrt[3]{\frac{8x^4y}{27xy^{10}}} = \sqrt[3]{\frac{8x^3}{27y^9}} = \frac{\sqrt[3]{8x^3}}{\sqrt[3]{27y^9}} = \frac{2x}{3y^3}$

c) $\sqrt[4]{\frac{18xy^5}{3x^9y}} = \sqrt[4]{\frac{6y^4}{x^8}} = \frac{\sqrt[4]{6y^4}}{\sqrt[4]{x^8}} = \frac{\sqrt[4]{y^4}\,\sqrt[4]{6}}{x^2} = \frac{y\sqrt[4]{6}}{x^2}$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 97**

Cómo evitar errores comunes

Las simplificaciones siguientes son correctas, ya que los números y variables cancelados no están dentro de raíces cuadradas.

CORRECTO

$$\frac{\overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 2\sqrt{2}$$

CORRECTO

$$\frac{\cancel{x}\sqrt{2}}{\cancel{x}} = \sqrt{2}$$

Cuando una expresión está dentro de una raíz cuadrada, no puede dividirse entre una expresión que está fuera de ella.

CORRECTO

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$ *No puede simplificarse más*

$$\frac{\sqrt{x^3}}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{x}}{x} = \frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}} = \sqrt{x}$$

INCORRECTO

$$\frac{\sqrt{\cancel{2}^{1}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\frac{\sqrt{x^{\cancel{3}^{2}}}}{\cancel{x}} = \sqrt{x^2} = x$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) ¿Cómo se obtienen los números que son cuadrados perfectos?
   b) Liste los primeros seis cuadrados perfectos.
2. a) ¿Cómo se obtienen los números que son cubos perfectos?
   b) Liste los primeros seis cubos perfectos.
3. a) ¿Cómo se obtienen números que sean quintas potencias perfectas?
   b) Liste los primeros cinco números que son quintas potencias perfectas.
4. Establezca la regla del producto para radicales.
5. Cuando proporcionamos la regla del producto, mencionamos que para números reales no negativos a y b, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. ¿Por qué es necesario especificar que a y b son números reales no negativos?
6. Establezca, con sus propias palabras, la regla del cociente para radicales.
7. Al establecer la regla del cociente, mencionamos que para números reales no negativos a y b, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $b \neq 0$. ¿Por qué es necesario especificar que a y b son números reales no negativos?
8. En la regla del cociente que se analizó en el ejercicio 7, ¿por qué el denominador nunca puede ser igual a cero?

Práctica de habilidades

En este conjunto de ejercicios, suponga que todas las variables representan números reales positivos.

Simplifique.

9. $\sqrt{8}$	**10.** $\sqrt{28}$	**11.** $\sqrt{24}$	**12.** $\sqrt{18}$
13. $\sqrt{32}$	**14.** $\sqrt{12}$	**15.** $\sqrt{50}$	**16.** $\sqrt{72}$
17. $\sqrt{75}$	**18.** $\sqrt{300}$	**19.** $\sqrt{40}$	**20.** $\sqrt{600}$
21. $\sqrt[3]{16}$	**22.** $\sqrt[3]{24}$	**23.** $\sqrt[3]{54}$	**24.** $\sqrt[3]{81}$
25. $\sqrt[3]{32}$	**26.** $\sqrt[3]{108}$	**27.** $\sqrt[3]{40}$	**28.** $\sqrt[4]{80}$
29. $\sqrt[4]{48}$	**30.** $\sqrt[4]{162}$	**31.** $-\sqrt[5]{64}$	**32.** $-\sqrt[5]{243}$
33. $\sqrt[3]{b^9}$	**34.** $6\sqrt{y^{12}}$	**35.** $\sqrt[3]{x^6}$	**36.** $\sqrt[5]{y^{20}}$
37. $\sqrt{x^3}$	**38.** $-\sqrt{x^5}$	**39.** $\sqrt{a^{11}}$	**40.** $\sqrt[3]{b^{13}}$
41. $8\sqrt[3]{z^{32}}$	**42.** $\sqrt[3]{a^7}$	**43.** $\sqrt[4]{b^{23}}$	**44.** $\sqrt[5]{z^7}$
45. $\sqrt[6]{x^9}$	**46.** $\sqrt[7]{y^{15}}$	**47.** $3\sqrt[5]{y^{23}}$	**48.** $\sqrt{24x^3}$
49. $2\sqrt{50y^9}$	**50.** $\sqrt{75a^7b^{11}}$	**51.** $\sqrt[3]{x^3y^7}$	**52.** $\sqrt{x^5y^9}$
53. $\sqrt[5]{a^6b^{23}}$	**54.** $-\sqrt{20x^6y^7z^{12}}$	**55.** $\sqrt{24x^{15}y^{20}z^{27}}$	**56.** $\sqrt[3]{16x^3y^6}$
57. $\sqrt[3]{81a^6b^8}$	**58.** $\sqrt[3]{128a^{10}b^{11}c^{12}}$	**59.** $\sqrt[4]{32x^8y^9z^{19}}$	**60.** $\sqrt[4]{48x^{11}y^{21}}$
61. $\sqrt[4]{81a^8b^9}$	**62.** $-\sqrt[4]{32x^{18}y^{31}}$	**63.** $\sqrt[5]{32a^{10}b^{12}}$	**64.** $\sqrt[6]{64x^{12}y^{23}z^{50}}$

Simplifique.

65. $\sqrt{\dfrac{75}{3}}$
66. $\sqrt{\dfrac{36}{4}}$
67. $\sqrt{\dfrac{81}{100}}$
68. $\sqrt{\dfrac{8}{50}}$
69. $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$
70. $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$
71. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$
72. $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{60}}$
73. $\sqrt[3]{\dfrac{3}{24}}$
74. $\sqrt[3]{\dfrac{2}{54}}$
75. $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$
76. $\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}$
77. $\sqrt[4]{\dfrac{3}{48}}$
78. $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$
79. $\sqrt[5]{\dfrac{96}{3}}$
80. $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{64}}$
81. $\sqrt{\dfrac{r^4}{4}}$
82. $\sqrt{\dfrac{100a^8}{49b^6}}$
83. $\sqrt{\dfrac{16x^4}{25y^{10}}}$
84. $\sqrt{\dfrac{49a^8b^{10}}{121c^{14}}}$
85. $\sqrt[3]{\dfrac{c^6}{64}}$
86. $\sqrt[3]{\dfrac{27x^6}{y^{12}}}$
87. $\sqrt[3]{\dfrac{a^8b^{12}}{b^{-8}}}$
88. $\sqrt[4]{\dfrac{16x^{16}y^{32}}{81x^{-4}}}$
89. $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$
90. $\dfrac{\sqrt{64x^5}}{\sqrt{2x^3}}$
91. $\dfrac{\sqrt{27x^6}}{\sqrt{3x^2}}$
92. $\dfrac{\sqrt{72x^3y^5}}{\sqrt{8x^3y^7}}$
93. $\dfrac{\sqrt{48x^6y^9}}{\sqrt{6x^2y^6}}$
94. $\dfrac{\sqrt{300a^{10}b^{11}}}{\sqrt{2ab^4}}$
95. $\sqrt[3]{\dfrac{5xy}{8x^{13}}}$
96. $\sqrt[3]{\dfrac{64a^5b^{12}}{27a^{14}b^5}}$
97. $\sqrt[3]{\dfrac{25x^2y^9}{5x^8y^2}}$
98. $\sqrt[3]{\dfrac{54xy^4z^{17}}{18x^{13}z^4}}$
99. $\sqrt[4]{\dfrac{10x^4y}{81x^{-8}}}$
100. $\sqrt[4]{\dfrac{3a^6b^5}{16a^{-6}b^{13}}}$

Resolución de problemas

101. Pruebe que $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$ convirtiendo $\sqrt{a \cdot b}$ a forma exponencial.

102. El producto de dos radicales, ¿siempre será un radical? Proporcione un ejemplo para apoyar su respuesta.

103. El cociente de dos radicales, ¿siempre será un radical? Proporcione un ejemplo para apoyar su respuesta.

104. Pruebe que $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ convirtiendo $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ a forma exponencial.

105. **a)** La expresión $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}$ ¿siempre será igual a 1?

b) Si su respuesta a la parte **a)** fue no, ¿en qué condiciones $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}$ será igual a 1?

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **106.** Despeje C de la fórmula $F = \dfrac{9}{5}C + 32$.

[2.6] **107.** Resuelva para x: $\left|\dfrac{2x - 4}{5}\right| = 12$

[5.3] **108.** Divida $\dfrac{15x^{12} - 5x^9 + 20x^6}{5x^6}$.

[5.6] **109.** Factorice $(x - 3)^3 + 8$.

7.4 Suma, resta y multiplicación de radicales

1 Sumar y restar radicales.

2 Multiplicar radicales.

1 Sumar y restar radicales

Los **radicales semejantes** son aquellos que tienen el mismo radicando y el mismo índice. Los **radicales no semejantes** son los que difieren en el radicando o en el índice.

Ejemplos de radicales semejantes	Ejemplos de radicales no semejantes	
$\sqrt{5},\ 3\sqrt{5}$	$\sqrt{5},\ \sqrt[3]{5}$	*Los índices difieren.*
$6\sqrt{7},\ -2\sqrt{7}$	$\sqrt{6},\ \sqrt{7}$	*Los radicandos difieren.*
$\sqrt{x},\ 5\sqrt{x}$	$\sqrt{x},\ \sqrt{2x}$	*Los radicandos difieren.*
$\sqrt[3]{2x},\ -4\sqrt[3]{2x}$	$\sqrt{x},\ \sqrt[3]{x}$	*Los índices difieren.*
$\sqrt[4]{x^2y^5},\ -\sqrt[4]{x^2y^5}$	$\sqrt[3]{xy},\ \sqrt[3]{x^2y}$	*Los radicandos difieren.*

Los radicales semejantes se suman y restan de manera similar a como se suman y restan los términos semejantes. Para sumar o restar radicales semejantes, se suman o restan sus coeficientes numéricos y se multiplica el resultado por el radical semejante.

Ejemplos de sumas y restas de radicales semejantes

$$3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = (3 + 2)\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$
$$5\sqrt{x} - 7\sqrt{x} = (5 - 7)\sqrt{x} = -2\sqrt{x}$$
$$\sqrt[3]{4x^2} + 5\sqrt[3]{4x^2} = (1 + 5)\sqrt[3]{4x^2} = 6\sqrt[3]{4x^2}$$
$$4\sqrt{5x} - y\sqrt{5x} = (4 - y)\sqrt{5x}$$

EJEMPLO 1 ▸ Simplifique.

a) $6 + 4\sqrt{2} - \sqrt{2} + 7$ **b)** $2\sqrt[3]{x} + 8x + 4\sqrt[3]{x} - 3$

Solución

a) $6 + 4\sqrt{2} - \sqrt{2} + 7 = 6 + 7 + 4\sqrt{2} - \sqrt{2}$ *Coloque juntos los términos semejantes.*

$= 13 + (4 - 1)\sqrt{2}$

$= 13 + 3\sqrt{2} \quad (\text{o } 3\sqrt{2} + 13)$

b) $2\sqrt[3]{x} + 8x + 4\sqrt[3]{x} - 3 = 6\sqrt[3]{x} + 8x - 3$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 15**

Como se mencionó en la sección 7.3, a veces es posible convertir radicales no semejantes en radicales semejantes simplificando uno o más de ellos.

EJEMPLO 2 ▸ Simplifique. $\sqrt{3} + \sqrt{27}$.

Solución Como $\sqrt{3}$ y $\sqrt{27}$ son radicales no semejantes, no se pueden sumar como están ahora. Sin embargo, podemos simplificar $\sqrt{27}$ para obtener radicales semejantes.

$$\sqrt{3} + \sqrt{27} = \sqrt{3} + \sqrt{9}\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 19**

Para sumar o restar radicales

1. Simplifique cada expresión radical.
2. Combine (sume o reste) los radicales semejantes (si existen).

EJEMPLO 3 ▸ Simplifique.

a) $5\sqrt{24} + \sqrt{54}$ **b)** $2\sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{20}$ **c)** $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{81} - 7\sqrt[3]{3}$

Solución

a) $5\sqrt{24} + \sqrt{54} = 5 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{6}$

$= 5 \cdot 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$

$= 10\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 13\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$

$= 2 \cdot 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$

$= 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{81} - 7\sqrt[3]{3} = 3 + \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{3}$

$= 3 + 3\sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{3} = 3 - 4\sqrt[3]{3}$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 23**

EJEMPLO 4 Simplifique. **a)** $\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2y} + x\sqrt{y}$ **b)** $\sqrt[3]{x^{13}y^2} - \sqrt[3]{x^4y^8}$

Solución

a) $\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2y} + x\sqrt{y} = x - \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{y} + x\sqrt{y}$

$$= x - x\sqrt{y} + x\sqrt{y}$$

$$= x$$

b) $\sqrt[3]{x^{13}y^2} - \sqrt[3]{x^4y^8} = \sqrt[3]{x^{12}}\cdot\sqrt[3]{xy^2} - \sqrt[3]{x^3y^6}\cdot\sqrt[3]{xy^2}$

$$= x^4\sqrt[3]{xy^2} - xy^2\sqrt[3]{xy^2}$$

Ahora factorice el factor común, $\sqrt[3]{xy^2}$.

$$= (x^4 - xy^2)\sqrt[3]{xy^2}$$

Ahora resuelva el ejercicio 35

Sugerencia útil

La regla del producto y la regla del cociente para radicales que se presentaron en la sección 7.3 son

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Con frecuencia los estudiantes suponen, erróneamente, que existen propiedades semejantes para la suma y la resta, pero esto no es así. Para comprobarlo, sea n una raíz cuadrada (índice 2), $a = 9$ y $b = 16$.

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$$
$$\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16}$$
$$3 + 4 \neq \sqrt{25}$$
$$7 \neq 5$$

A continuación se analiza la multiplicación de radicales.

2 Multiplicar radicales

Para multiplicar radicales se utiliza la regla del producto que se indicó anteriormente. Después de la multiplicación, con frecuencia se simplifica el nuevo radical (vea los ejemplos 5 y 6).

EJEMPLO 5 Multiplique y simplifique.

a) $\sqrt{6x^3}\,\sqrt{8x^6}$ **b)** $\sqrt[3]{2x}\,\sqrt[3]{4x^2}$ **c)** $\sqrt[4]{4x^{11}y}\,\sqrt[4]{16x^6y^{22}}$

Solución

a) $\sqrt{6x^3}\,\sqrt{8x^6} = \sqrt{6x^3\cdot 8x^6}$ *Regla del producto para radicales.*

$$= \sqrt{48x^9}$$

$= \sqrt{16x^8}\,\sqrt{3x}$ *$16x^8$ es un cuadrado perfecto.*

$$= 4x^4\sqrt{3x}$$

b) $\sqrt[3]{2x}\,\sqrt[3]{4x^2} = \sqrt[3]{2x\cdot 4x^2}$ *Regla del producto para radicales.*

$= \sqrt[3]{8x^3}$ *$8x^3$ es un cubo perfecto.*

$$= 2x$$

c) $\sqrt[4]{4x^{11}y}\,\sqrt[4]{16x^6y^{22}} = \sqrt[4]{4x^{11}y\cdot 16x^6y^{22}}$ *Regla del producto para radicales.*

$$= \sqrt[4]{64x^{17}y^{23}}$$

$= \sqrt[4]{16x^{16}y^{20}}\,\sqrt[4]{4xy^3}$ *Las raíces cuartas perfectas más grandes que son factores, son 16, x^{16} y y^{20}.*

$$= 2x^4y^5\sqrt[4]{4xy^3}$$

Ahora resuelva el ejercicio 47

Recuerde que, como se indicó antes, cuando un radical está simplificado, el radicando no tiene ninguna variable con un exponente mayor o igual al índice.

EJEMPLO 6 Multiplique y simplifique. $\sqrt{2x}(\sqrt{8x} - \sqrt{50})$.

Solución Empiece por utilizar la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x}(\sqrt{8x} - \sqrt{50}) &= (\sqrt{2x})(\sqrt{8x}) + (\sqrt{2x})(-\sqrt{50})\\ &= \sqrt{16x^2} - \sqrt{100x}\\ &= 4x - \sqrt{100}\,\sqrt{x}\\ &= 4x - 10\sqrt{x}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 53

En el ejemplo 6, observe que podría haberse obtenido el mismo resultado simplificando primero $\sqrt{8x}$ y $\sqrt{50}$ y después multiplicando. Intente resolver dicho ejemplo de esta manera.

A continuación multiplicaremos dos factores que son binomios. Para multiplicar factores que son binomios, cada término de un factor debe multiplicarse por cada término del otro. Esto puede lograrse mediante el método PIES que analizamos con anterioridad.

EJEMPLO 7 Multiplique $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - y)$.

Solución Multiplicaremos utilizando el método PIES.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{P} & & \text{I} & & \text{E} & & \text{S}\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ (\sqrt{x})(\sqrt{x}) & + & (-\sqrt{y})(\sqrt{x}) & + & (\sqrt{x})(-y) & + & (-\sqrt{y})(-y)\\ = \sqrt{x^2} & - & \sqrt{xy} & - & y\sqrt{x} & + & y\sqrt{y}\end{array}$$

$$= x - y\sqrt{x} - \sqrt{xy} + y\sqrt{y}$$

Ahora resuelva el ejercicio 63

EJEMPLO 8 Simplifique. **a)** $(2\sqrt{6} - \sqrt{3})^2$ **b)** $\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2y^2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{8y}\right)$

Solución

a) $(2\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = (2\sqrt{6} - \sqrt{3})(2\sqrt{6} - \sqrt{3})$

Ahora multiplique los factores usando el método PIES.

$$\begin{aligned} &\overset{\text{P}}{(2\sqrt{6})(2\sqrt{6})} + \overset{\text{I}}{(-\sqrt{3})(2\sqrt{6})} + \overset{\text{E}}{(2\sqrt{6})(-\sqrt{3})} + \overset{\text{S}}{(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})}\\ &= 4(6) - 2\sqrt{18} - 2\sqrt{18} + 3\\ &= 24 - 2\sqrt{18} - 2\sqrt{18} + 3\\ &= 27 - 4\sqrt{18}\\ &= 27 - 4\sqrt{9}\,\sqrt{2}\\ &= 27 - 12\sqrt{2}\end{aligned}$$

b) Multiplique los factores mediante el método PIES.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2y^2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{8y}\right) &= \overset{\text{P}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}\right)} + \overset{\text{I}}{\left(-\sqrt[3]{2y^2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}\right)} + \overset{\text{E}}{(\sqrt[3]{x})(-\sqrt[3]{8y})} + \overset{\text{S}}{\left(-\sqrt[3]{2y^2}\right)(-\sqrt[3]{8y})}\\ &= \sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{2x^2y^2} - \sqrt[3]{8xy} + \sqrt[3]{16y^3}\\ &= \sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{2x^2y^2} - \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{8y^3}\,\sqrt[3]{2}\\ &= x - \sqrt[3]{2x^2y^2} - 2\sqrt[3]{xy} + 2y\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 99

EJEMPLO 9 Multiplique $(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})$.

Solución Podemos multiplicar mediante el método PIES.

$$\begin{aligned}(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6}) &= \overset{\text{P}}{3(3)} + \overset{\text{I}}{(\sqrt{6})(3)} + \overset{\text{E}}{3(-\sqrt{6})} + \overset{\text{S}}{(\sqrt{6})(-\sqrt{6})}\\ &= 9 + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{6} - \sqrt{36}\\ &= 9 - \sqrt{36}\\ &= 9 - 6 = 3\end{aligned}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 59**

En el ejemplo 9, observe que multiplicamos *la suma y la diferencia de los mismos dos términos*. Recuerde que en la sección 5.6 se dijo que $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Si hacemos $a=3$ y $b=\sqrt{6}$, podemos multiplicar como sigue.

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\\ (3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6}) &= 3^2 - (\sqrt{6})^2\\ &= 9 - 6\\ &= 3\end{aligned}$$

Cuando multiplicamos la suma y la diferencia de los mismos dos términos, podemos obtener la respuesta mediante la diferencia de los cuadrados de los dos términos. Veremos multiplicaciones de este tipo en la sección 7.5.

EJEMPLO 10 Si $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ y $g(x)=\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}$, determine **a)** $(f \cdot g)(x)$ y **b)** $(f \cdot g)(6)$.

Solución

a) A partir de lo que se analizó en la sección 3.6, sabemos que $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\ &= \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}\right) && \textit{Sustituir los valores dados.}\\ &= \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x^2} && \textit{Propiedad distributiva.}\\ &= \sqrt[3]{x^6}+\sqrt[3]{x^4} && \textit{Regla del producto para radicales.}\\ &= x^2 + x\sqrt[3]{x} && \textit{Simplificar radicales.}\end{aligned}$$

b) Para calcular $(f \cdot g)(6)$, sustituya x por 6 en la respuesta que obtuvo en la parte **a)**.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= x^2 + x\sqrt[3]{x}\\ (f \cdot g)(6) &= 6^2 + 6\sqrt[3]{6} && \textit{Sustituir } x \textit{ por 6.}\\ &= 36 + 6\sqrt[3]{6}\end{aligned}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 77**

EJEMPLO 11 Simplifique $f(x)$ si **a)** $f(x)=\sqrt{x+3}\,\sqrt{x+3}$, $x \geq -3$ y **b)** $f(x)=\sqrt{3x^2-30x+75}$; suponga que las variables pueden ser cualesquiera números reales.

Solución

a)
$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x+3}\,\sqrt{x+3}\\ &= \sqrt{(x+3)(x+3)} && \textit{Regla del producto para radicales.}\\ &= \sqrt{(x+3)^2}\\ &= x+3\end{aligned}$$

Como se nos dijo que $x \geq -3$, podemos utilizar la regla del producto. Observe que el radicando será un número no negativo para cualquier $x \geq -3$, y podemos escribir la respuesta como $x+3$ en lugar de $|x+3|$.

b) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 30x + 75}$

$= \sqrt{3(x^2 - 10x + 25)}$ *Factorizar 3.*

$= \sqrt{3(x - 5)^2}$ *Escribir como el cuadrado de un binomio.*

$= \sqrt{3}\sqrt{(x - 5)^2}$ *Regla del producto para radicales.*

$= \sqrt{3}|x - 5|$

Como las variables podrían ser cualquier número real, escribimos nuestra respuesta con signos de valor absoluto. Si nos hubieran dicho que $x - 5$ era no negativo, entonces podríamos haber escrito nuestra respuesta como $\sqrt{3}(x - 5)$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 105**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué son los radicales semejantes?
2. **a)** Explique cómo sumar radicales semejantes.

   b) Mediante el procedimiento indicado en la parte **a)**, sume $\frac{3}{5}\sqrt{5} + \frac{5}{4}\sqrt{5}$.
3. Utilice una calculadora para determinar $\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$.
4. Utilice una calculadora para determinar $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$.
5. ¿Puede ser $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$? Explique su respuesta y proporcione un ejemplo que la apoye.
6. Como $64 + 36 = 100$, ¿puede ser $\sqrt{64} + \sqrt{36} = \sqrt{100}$? Explique su respuesta.

Práctica de habilidades

En este conjunto de ejercicios, suponga que todas las variables representan números reales positivos.

Simplifique.

7. $\sqrt{3} - \sqrt{3}$
8. $2\sqrt{6} - \sqrt{6}$
9. $6\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$
10. $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 11$
11. $2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 5$
12. $6\sqrt[3]{7} - 8\sqrt[3]{7}$
13. $2\sqrt[4]{y} - 9\sqrt[4]{y}$
14. $3\sqrt[5]{a} + 7 + 5\sqrt[5]{a} - 2$
15. $3\sqrt{5} - \sqrt[3]{x} + 6\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{x}$
16. $9 + 4\sqrt[4]{a} - 7\sqrt[4]{a} + 5$
17. $5\sqrt{x} - 8\sqrt{y} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - \sqrt{x}$
18. $8\sqrt{a} + 4\sqrt[3]{b} + 7\sqrt{a} - 12\sqrt[3]{b}$

Simplifique.

19. $\sqrt{5} + \sqrt{20}$
20. $\sqrt{75} + \sqrt{108}$
21. $-6\sqrt{75} + 5\sqrt{125}$
22. $3\sqrt{250} + 4\sqrt{160}$
23. $-4\sqrt{90} + 3\sqrt{40} + 2\sqrt{10}$
24. $3\sqrt{40x^2y} + 2x\sqrt{490y}$
25. $\sqrt{500xy^2} + y\sqrt{320x}$
26. $5\sqrt{8} + 2\sqrt{50} - 3\sqrt{72}$
27. $2\sqrt{5x} - 3\sqrt{20x} - 4\sqrt{45x}$
28. $3\sqrt{27c^2} - 2\sqrt{108c^2} - \sqrt{48c^2}$
29. $3\sqrt{50a^2} - 3\sqrt{72a^2} - 8a\sqrt{18}$
30. $4\sqrt[3]{5} - 5\sqrt[3]{40}$
31. $\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{32}$
32. $3\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$
33. $\sqrt[3]{27} - 5\sqrt[3]{8}$
34. $3\sqrt{45x^3} + \sqrt{5x}$
35. $2\sqrt[3]{a^4b^2} + 4a\sqrt[3]{ab^2}$
36. $5y\sqrt[4]{48x^5} - x\sqrt[4]{3x^5y^4}$
37. $\sqrt{4r^7s^5} + 3r^2\sqrt{r^3s^5} - 2rs\sqrt{r^5s^3}$
38. $x\sqrt[3]{27x^5y^2} - x^2\sqrt[3]{x^2y^2} + 4\sqrt[3]{x^8y^2}$
39. $\sqrt[3]{128x^8y^{10}} - 2x^2y\sqrt[3]{16x^2y^7}$
40. $5\sqrt[3]{320x^5y^8} + 3x\sqrt[3]{135x^2y^8}$

Simplifique.

41. $\sqrt{3}\sqrt{27}$
42. $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$
43. $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{14}$
44. $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{54}$
45. $\sqrt{9m^3n^7}\sqrt{3mn^4}$
46. $\sqrt[3]{5ab^2}\sqrt[3]{25a^4b^{12}}$
47. $\sqrt[3]{9x^7y^{10}}\sqrt[3]{6x^4y^3}$
48. $\sqrt[4]{3x^9y^{12}}\sqrt[4]{54x^4y^7}$
49. $\sqrt[5]{x^{24}y^{30}z^9}\sqrt[5]{x^{13}y^8z^7}$
50. $\sqrt[4]{8x^4yz^3}\sqrt[4]{2x^2y^3z^7}$
51. $\left(\sqrt[3]{2x^3y^4}\right)^2$
52. $\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{18})$
53. $\sqrt{5}(\sqrt{5} - \sqrt{3})$
54. $\sqrt{3}(\sqrt{12} + \sqrt{8})$
55. $\sqrt[3]{y}\left(2\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y^8}\right)$
56. $\sqrt{3y}\left(\sqrt{27y^2} - \sqrt{y}\right)$
57. $2\sqrt[3]{x^4y^5}\left(\sqrt[3]{8x^{12}y^4} + \sqrt[3]{16xy^9}\right)$
58. $\sqrt[5]{16x^7y^6}\left(\sqrt[5]{2x^6y^9} - \sqrt[5]{10x^3y^7}\right)$
59. $(8 + \sqrt{5})(8 - \sqrt{5})$
60. $(9 - \sqrt{5})(9 + \sqrt{5})$
61. $(\sqrt{6} + x)(\sqrt{6} - x)$
62. $(\sqrt{x} + y)(\sqrt{x} - y)$
63. $(\sqrt{7} - \sqrt{z})(\sqrt{7} + \sqrt{z})$
64. $(3\sqrt{a} - 5\sqrt{b})(3\sqrt{a} + 5\sqrt{b})$

65. $(\sqrt{3}+4)(\sqrt{3}+5)$
66. $(1+\sqrt{5})(8+\sqrt{5})$
67. $(3-\sqrt{2})(4-\sqrt{8})$
68. $(5\sqrt{6}+3)(4\sqrt{6}-1)$
69. $(4\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
70. $(\sqrt{3}+7)^2$
71. $(2\sqrt{5}-3)^2$
72. $(\sqrt{y}+\sqrt{6z})(\sqrt{2z}-\sqrt{8y})$
73. $(2\sqrt{3x}-\sqrt{y})(3\sqrt{3x}+\sqrt{y})$
74. $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4})$
75. $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6})(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{36})$
76. $(\sqrt[3]{4x}-\sqrt[3]{2y})(\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{10})$

En los ejercicios 77 a 82, están dadas $f(x)$ y $g(x)$. Determine $(f \cdot g)(x)$.

77. $f(x)=\sqrt{2x},\ g(x)=\sqrt{8x}-\sqrt{32}$
78. $f(x)=\sqrt{6x},\ g(x)=\sqrt{6x}-\sqrt{10x}$
79. $f(x)=\sqrt[3]{x},\ g(x)=\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^4}$
80. $f(x)=\sqrt[3]{2x^2},\ g(x)=\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{32x^2}$
81. $f(x)=\sqrt[4]{3x^2},\ g(x)=\sqrt[4]{9x^4}-\sqrt[4]{x^7}$
82. $f(x)=\sqrt[4]{2x^3},\ g(x)=\sqrt[4]{8x^5}-\sqrt[4]{5x^6}$

Simplifique. Estos ejercicios son una combinación de los que se presentaron antes en esta sección.

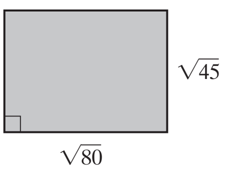
83. $\sqrt{24}$
84. $\sqrt{300}$
85. $\sqrt{125}-\sqrt{20}$
86. $4\sqrt{7}+2\sqrt{63}-2\sqrt{28}$
87. $(3\sqrt{2}-4)(\sqrt{2}+5)$
88. $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{20})$
89. $\sqrt{6}(5-\sqrt{2})$
90. $3\sqrt[3]{81}+4\sqrt[3]{24}$
91. $\sqrt{150}\sqrt{3}$
92. $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{40}$
93. $\sqrt[3]{80x^{11}}$
94. $\sqrt[3]{x^9y^{11}z}$
95. $\sqrt[6]{128ab^{17}c^9}$
96. $\sqrt[5]{14x^4y^2}\sqrt[5]{3x^4y^3}$
97. $2b\sqrt[4]{a^4b}+ab\sqrt[4]{16b}$
98. $2\sqrt[3]{24a^3y^4}+4a\sqrt[3]{81y^4}$
99. $\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y^2}\right)$
100. $(\sqrt[3]{a}+5)\left(\sqrt[3]{a^2}-6\right)$
101. $\sqrt[3]{3ab^2}\left(\sqrt[3]{4a^4b^3}-\sqrt[3]{8a^5b^4}\right)$
102. $\sqrt[4]{4st^2}\left(\sqrt[4]{2s^5t^6}+\sqrt[4]{5s^9t^2}\right)$

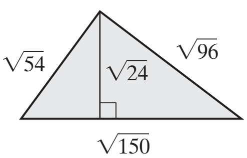
Simplifique las expresiones siguientes. En los ejercicios 105 y 106, suponga que las variables pueden ser cualesquiera números reales. Vea el ejemplo 11.

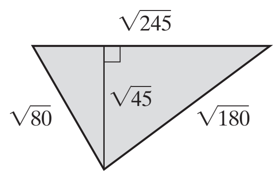
103. $f(x)=\sqrt{2x-5}\sqrt{2x-5},\ x \geq -\dfrac{5}{2}$
104. $g(a)=\sqrt{3a+7}\sqrt{3a+7},\ a \geq -\dfrac{7}{3}$
105. $h(r)=\sqrt{4r^2-32r+64}$
106. $f(b)=\sqrt{20b^2+60b+45}$

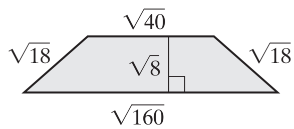
Resolución de problemas

Determine el perímetro y el área de las figuras siguientes. Dé su respuesta en forma radical con los radicales simplificados.

107.


108.


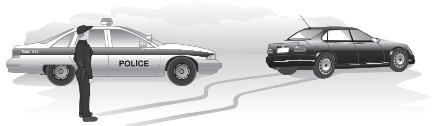
109.


110.


111. ¿La suma de dos radicales siempre dará por resultado un radical? Proporcione un ejemplo para apoyar su respuesta.

112. ¿La resta de dos radicales siempre dará por resultado un radical? Proporcione un ejemplo para apoyar su respuesta.

113. **Marca de derrape** A veces los agentes de tránsito utilizan la fórmula $s=\sqrt{30FB}$ para determinar la velocidad a que circulaba un automóvil, s, en millas por hora, con base en las marcas de derrape que dejó sobre el camino. En la fórmula, la letra F representa "el factor del camino", que se determina según el material y las condiciones de la superficie del camino, y la letra B representa la distancia de frenado, en pies. El oficial Jenkins investiga un accidente. Determine la velocidad del automóvil si las marcas de derrape son de 80 pies de longitud, y **a)** el camino era asfalto seco, cuyo factor de camino es 0.85, y **b)** el camino era grava mojada, cuyo factor de camino es 0.52.

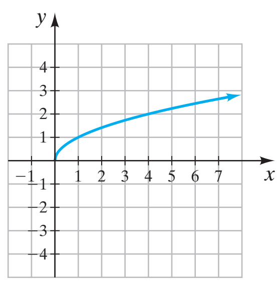


114. **Manguera contra incendios** La velocidad a que fluye el agua a través de una manguera contra incendios, R, en galones por minuto, puede calcularse mediante la fórmula $R=28d^2\sqrt{P}$, donde d es el diámetro de la boquilla de la manguera, en pulgadas, y P es la presión de salida, en libras por pulgada cuadrada. Si la boquilla de una manguera tiene un diámetro de 2.5 pulgadas y la presión de salida es de 80 libras por pulgada, determine la velocidad del flujo de agua.

115. Altura de niñas La función $f(t) = 3\sqrt{t} + 19$ puede usarse para calcular la altura media, $f(t)$, en pulgadas, de niñas de edad t, en meses, donde $1 \le t \le 60$. Calcule la altura promedio de niñas de **a)** 36 meses, **b)** 40 meses.

116. Desviación estándar En estadística, la desviación estándar de la población, σ, se lee "sigma", es una medida de la dispersión de un conjunto de datos respecto de su valor medio. Cuanto mayor sea la dispersión, mayor será la desviación estándar. Una fórmula que se utiliza para determinar sigma es $\sigma = \sqrt{npq}$, donde n representa el tamaño de la muestra, p representa el porcentaje (o probabilidad) de que algo específico ocurra, y q el porcentaje (o probabilidad) de que no ocurra. En una muestra de 600 personas que compraron boletos para viajar en avión, el porcentaje que se presentó a su vuelo, p, fue 0.93, y el porcentaje que no lo hizo, q, fue 0.07. Utilice esta información para determinar σ.

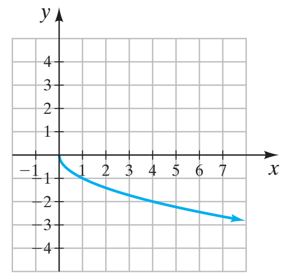
117. A continuación se muestra la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.



a) Si $g(x) = 2$, trace la gráfica de $(f + g)(x)$.

b) ¿Qué sucede si se suma 2 a la gráfica de $f(x)$?

118. La gráfica de $f(x) = -\sqrt{x}$ es la siguiente.



a) Si $g(x) = 3$, trace la gráfica de $(f + g)(x)$.

b) ¿Qué sucede si se suma 3 a la gráfica de $f(x)$?

119. Si le indican que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{x} - 2$.

a) Trace la gráfica de $(f - g)(x)$. Explique cómo determinó su respuesta.

b) ¿Cuál es el dominio de $(f - g)(x)$?

120. Si le dicen que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = -\sqrt{x} - 3$.

a) Trace la gráfica de $(f + g)(x)$. Explique cómo determinó su respuesta.

b) ¿Cuál es el dominio de $(f + g)(x)$?

121. Grafique la función $f(x) = \sqrt{x^2}$.

122. Grafique la función $f(x) = \sqrt{x^2} - 4$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **123.** ¿Qué es un número racional?

[1.3] **124.** ¿Qué es un número real?

125. ¿Qué es un número irracional?

126. ¿Cuál es la definición de $|a|$?

[2.2] **127.** Despeje m de la fórmula $E = \frac{1}{2}mv^2$.

[2.5] **128.** Resuelva la desigualdad $-4 < 2x - 3 \le 7$ e indique la solución **a)** en la recta numérica; **b)** en notación de intervalos; **c)** en notación constructiva de conjuntos.

Examen de mitad de capítulo: 7.1-7.4

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en que se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

Determine la raíz que se indica.

1. $\sqrt{121}$

2. $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$

Utilice valor absoluto para evaluar.

3. $\sqrt{(-16.3)^2}$

4. $\sqrt{(3a^2 - 4b^3)^2}$

5. Determine $g(16)$, si $g(x) = \frac{x}{8} + \sqrt{4x} - 7$.

6. Escriba $\sqrt[5]{7a^4b^3}$ en forma exponencial.

7. Evalúe $-49^{1/2} + 81^{3/4}$.

Simplifique cada expresión.

8. $\left(\sqrt[4]{a^2b^3c}\right)^{20}$

9. $7x^{-5/2} \cdot 2x^{3/2}$

10. Multiplique $8x^{-2}(x^3 + 2x^{-1/2})$.

Simplifique cada radical.

11. $\sqrt{32x^4y^9}$

12. $\sqrt[6]{64a^{13}b^{23}c^{15}}$

13. $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$

14. $\dfrac{\sqrt{20x^5y^{12}}}{\sqrt{180x^{15}y^7}}$

Simplifique

15. $2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} + 9\sqrt{x} + 15\sqrt{y}$

16. $2\sqrt{90x^2y} + 3x\sqrt{490y}$

17. $(x + \sqrt{5})(2x - 3\sqrt{5})$

18. $2\sqrt{3a}\left(\sqrt{27a^2} - 5\sqrt{4a}\right)$

19. $3b\sqrt[4]{a^5b} + 2ab\sqrt[4]{16ab}$

20. Al simplificar las raíces cuadradas siguientes, ¿en qué partes la respuesta tiene un valor absoluto? Explique su respuesta y simplifique las partes **a)** y **b)**.

a) $\sqrt{(x-3)^2}$

b) $\sqrt{64x^2}$, $x \geq 0$

7.5 División de radicales

1 Racionalizar denominadores.

2 Racionalizar un denominador mediante el conjugado.

3 Entender cuando un radical está simplificado.

4 Utilizar la racionalización del denominador en un problema de adición.

5 Dividir expresiones radicales con índices diferentes.

1 Racionalizar denominadores

En la sección 7.3 se presentó la regla del cociente para radicales; ahora la usaremos para resolver otros problemas de división y para racionalizar denominadores.

Cuando el denominador de una fracción contiene un radical, por lo común simplificamos la expresión **racionalizando el denominador**. Racionalizar un denominador es eliminar todos los radicales del denominador. Cuando se suman radicales, podría ser necesario racionalizar los denominadores, como se ilustra en el ejemplo 6.

Para racionalizar un denominador

Multiplique el numerador y el denominador de la fracción por un radical, de tal manera que el radicando del denominador se convierta en una potencia perfecta.

Cuando el numerador y el denominador se multiplican por la misma expresión radical, en realidad se está multiplicando la fracción por 1, con lo cual no se modifica su valor.

EJEMPLO 1 Simplifique. **a)** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **b)** $\dfrac{x}{4\sqrt{3}}$ **c)** $\dfrac{11}{\sqrt{2x}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[3]{16a^4}}{\sqrt[3]{b}}$

Solución Para simplificar cada expresión debemos racionalizar los denominadores. Para ello, multiplicamos el numerador y el denominador por un radical que haga que el denominador se convierta en una potencia perfecta para el índice dado.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{x}{4\sqrt{3}} = \dfrac{x}{4\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{x\sqrt{3}}{4 \cdot 3} = \dfrac{x\sqrt{3}}{12}$

c) Hay dos factores en el radicando, 2 y x. Debemos hacer que cada factor sea un cuadrado perfecto. Como 2^2 o 4 es un cuadrado perfecto, y x^2 también, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{2x}$.

$$\begin{aligned}\frac{11}{\sqrt{2x}} &= \frac{11}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} \\ &= \frac{11\sqrt{2x}}{\sqrt{4x^2}} \\ &= \frac{11\sqrt{2x}}{2x}\end{aligned}$$

d) El numerador y el denominador carecen de factores comunes. Antes de racionalizar el denominador, simplifiquemos el numerador.

$$\frac{\sqrt[3]{16a^4}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{8a^3}\,\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{b}} \qquad \text{Regla del producto para radicales.}$$

$$= \frac{2a\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{b}} \qquad \text{Simplificar el numerador.}$$

Ahora racionalicemos el denominador. Como el denominador es una raíz cúbica, necesitamos convertir el radicando en un cubo perfecto. En vista de que el denominador contiene b y necesitamos b^3, necesitamos dos factores de b. Por lo tanto, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{b^2}$.

$$= \frac{2a\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^2}}$$

$$= \frac{2a\sqrt[3]{2ab^2}}{\sqrt[3]{b^3}}$$

$$= \frac{2a\sqrt[3]{2ab^2}}{b}$$

▶ **Ahora resuelva el ejercicio 15**

EJEMPLO 2 ▶ Simplifique. **a)** $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$ **b)** $\sqrt[3]{\dfrac{x}{2y^2}}$ **c)** $\sqrt[4]{\dfrac{32x^9y^6}{3z^2}}$

Solución En cada parte, utilizaremos la regla del cociente para escribir el radical como un cociente de dos radicales.

a) $\sqrt{\dfrac{5}{7}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \dfrac{\sqrt{35}}{7}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{2y^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2y^2}}$

El denominador es $\sqrt[3]{2y^2}$ y queremos cambiarlo a $\sqrt[3]{2^3y^3}$. Ahora multiplicamos el numerador y el denominador por la raíz cúbica de una expresión que haga que el radicando del denominador sea $\sqrt[3]{2^3y^3}$. Como $2 \cdot 2^2 = 2^3$ y $y^2 \cdot y = y^3$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{2^2y}$.

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2y^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2y}}{\sqrt[3]{2^2y}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{4y}}{\sqrt[3]{2^3y^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4xy}}{2y}$$

c) Después de usar la regla del cociente, simplificamos el numerador.

$$\sqrt[4]{\frac{32x^9y^6}{3z^2}} = \frac{\sqrt[4]{32x^9y^6}}{\sqrt[4]{3z^2}} \qquad \text{Regla del cociente para radicales.}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{16x^8y^4}\,\sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{3z^2}} \qquad \text{Regla del producto para radicales.}$$

$$= \frac{2x^2y\sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{3z^2}} \qquad \text{Simplificar el numerador.}$$

Ahora racionalizaremos el denominador. Para que el radicando del denominador sea una cuarta potencia perfecta, necesitamos convertir cada factor en una potencia de 4. Como el denominador contiene un factor de 3, necesitamos tres factores de 3, o 3^3. Ya que hay dos factores de z, necesitamos dos factores más de z, o z^2. Por lo tanto, multiplicaremos el numerador y el denominador por $\sqrt[4]{3^3z^2}$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2x^2y\sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{3z^2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^3z^2}}{\sqrt[4]{3^3z^2}} \\
&= \frac{2x^2y\sqrt[4]{2xy^2}\sqrt[4]{27z^2}}{\sqrt[4]{3z^2}\sqrt[4]{3^3z^2}} \\
&= \frac{2x^2y\sqrt[4]{54xy^2z^2}}{\sqrt[4]{3^4z^4}} \qquad \text{Regla del producto para radicales.} \\
&= \frac{2x^2y\sqrt[4]{54xy^2z^2}}{3z}
\end{aligned}
$$

Nota: No hay factores de 54 que sean cuartas potencias perfectas, y cada exponente del radicando es menor que el índice.

Ahora resuelva el ejercicio 53

2 Racionalizar un denominador mediante el conjugado

Cuando el denominador de una expresión racional es un binomio que contiene un radical, racionalizamos el denominador. Para hacerlo, multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción por el **conjugado** del denominador. El conjugado de un binomio es un binomio que tiene los mismos dos términos, pero con el signo del segundo término cambiado.

Expresión	Conjugado
$9 + \sqrt{2}$	$9 - \sqrt{2}$
$8\sqrt{3} - \sqrt{5}$	$8\sqrt{3} + \sqrt{5}$
$\sqrt{x} + \sqrt{y}$	$\sqrt{x} - \sqrt{y}$
$6a - \sqrt{b}$	$6a + \sqrt{b}$

Cuando un binomio se multiplica por su conjugado, los productos externo e interno sumarán 0. En la sección 7.4 se multiplicaron radicales con factores binomiales. Resolveremos un ejemplo más de multiplicación de expresiones radicales en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Multiplique $(6 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{3})$.

Solución Multiplique utilizando el método PIES.

$$
\begin{aligned}
(6 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{3}) &= \overset{\text{P}}{6(6)} + \overset{\text{I}}{6(\sqrt{3})} + \overset{\text{E}}{6(-\sqrt{3})} + \overset{\text{S}}{\sqrt{3}(-\sqrt{3})} \\
&= 36 + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - \sqrt{9} \\
&= 36 - \sqrt{9} \\
&= 36 - 3 \\
&= 33
\end{aligned}
$$

Ahora resuelva el ejercicio 57

En el ejemplo 3 se obtendría el mismo resultado utilizando la fórmula para el producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos. El producto resulta en la diferencia de dos cuadrados, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Si hacemos $a = 6$ y $b = \sqrt{3}$, usando la fórmula obtenemos lo siguiente.

$$\begin{array}{ccl} (a + b)(a - b) & = & a^2 - b^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (6 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{3}) & = & 6^2 - (\sqrt{3})^2 \\ & = & 36 - 3 \\ & = & 33 \end{array}$$

Ahora resolvamos un ejemplo en el que racionalizaremos un denominador con dos términos.

EJEMPLO 4 Simplifique. **a)** $\dfrac{13}{4 + \sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}}$

Solución Racionalizamos el denominador de cada expresión multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

a)
$$\begin{aligned} \frac{13}{4 + \sqrt{3}} &= \frac{13}{4 + \sqrt{3}} \cdot \boxed{\frac{4 - \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}}} \\ &= \frac{13(4 - \sqrt{3})}{(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{13(4 - \sqrt{3})}{16 - 3} \\ &= \frac{\overset{1}{\cancel{13}}(4 - \sqrt{3})}{\underset{1}{\cancel{13}}} \text{ o } 4 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} &= \frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \boxed{\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}} \\ &= \frac{6(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} \\ &= \frac{\overset{2}{\cancel{6}}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{\underset{1}{\cancel{3}}} \\ &= 2(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \quad \text{o} \quad 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} &= \frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \cdot \boxed{\frac{a - \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}}} \\ &= \frac{a^2 - a\sqrt{b} - a\sqrt{b} + \sqrt{b^2}}{a^2 - b} \\ &= \frac{a^2 - 2a\sqrt{b} + b}{a^2 - b} \end{aligned}$$

Recuerde que no se puede dividir a^2 o b, ya que se trata de términos, no de factores.

Ahora resuelva el ejercicio 75

Ahora que se ha mostrado cómo racionalizar denominadores, analicemos los criterios que debe cumplir un radical para considerar que está simplificado.

3 Entender cuando un radical está simplificado

Después de simplificar una expresión radical, usted deberá comprobar que la ha simplificado tanto como haya sido posible.

Una expresión radical está simplificada cuando se cumplen por completo estas tres condiciones

1. No hay potencias perfectas que sean factores del radicando, y todos los exponentes del radicando son menores que el índice.
2. Ningún radicando tiene una fracción.
3. Ningún denominador tiene radicales.

EJEMPLO 5 Determine si las siguientes expresiones están simplificadas. Si es así, explique por qué; de lo contrario, simplifíquelas.

a) $\sqrt{48x^5}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Solución

a) Esta expresión no está simplificada, ya que 16 es un cuadrado perfecto que es factor de 48, y x^4 es un cuadrado perfecto que es factor de x^5. Observe que el exponente de la variable del radicando, 5, es mayor que el índice, 2. Siempre que el exponente de la variable del radicando es mayor o igual que el índice, el radicando tiene una potencia perfecta que es factor de la variable y, por lo tanto, es necesario simplificar más el radical. Hagámoslo ahora.

$$\sqrt{48x^5} = \sqrt{16x^4 \cdot 3x} = \sqrt{16x^4} \cdot \sqrt{3x} = 4x^2\sqrt{3x}$$

b) Esta expresión no está simplificada, ya que el radicando contiene la fracción $\frac{1}{2}$. Esto viola la condición 2. Para simplificarla, utilizaremos primero la regla del cociente y luego racionalizamos el denominador.

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Esta expresión no está simplificada, ya que el denominador, $\sqrt{6}$, contiene un radical. Esto viola la condición 3. Para simplificarla racionalizaremos el denominador.

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Ahora resuelva el ejercicio 7

4 Utilizar la racionalización del denominador en un problema de adición

Resolvamos ahora un problema de adición que requiere racionalizar el denominador. En este ejemplo se utilizan los métodos para sumar y restar radicales que analizamos en las secciones 7.3 y 7.4.

EJEMPLO 6 Simplifique $4\sqrt{2} - \dfrac{3}{\sqrt{8}} + \sqrt{32}$.

Solución Empecemos por racionalizar el denominador y simplificar $\sqrt{32}$.

$$\begin{aligned}
4\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{8}} + \sqrt{32} &= 4\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{16}\,\sqrt{2} && \textit{Racionalizar el denominador.} \\
&= 4\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{16}} + 4\sqrt{2} && \textit{Regla del producto.} \\
&= 4\sqrt{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2} + 4\sqrt{2} && \textit{Escribir } \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{16}} \textit{ como } \frac{3}{4}\sqrt{2}. \\
&= \left(4 - \frac{3}{4} + 4\right)\sqrt{2} && \textit{Simplificar.} \\
&= \frac{29\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 115

5 Dividir expresiones radicales con índices diferentes

Ahora dividiremos expresiones radicales donde los radicales tienen índices diferentes. Para resolver este tipo de problemas, escriba cada radical en forma exponencial; luego, para simplificar la expresión, utilice las reglas de los exponentes como se explicó en la sección 7.2. El ejemplo 7 ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 7 Simplifique. **a)** $\dfrac{\sqrt[5]{(m+n)^7}}{\sqrt[3]{(m+n)^4}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{a^5b^4}}{\sqrt{a^2b}}$

Solución Empiece escribiendo el numerador y el denominador con exponentes racionales.

a)
$$\frac{\sqrt[5]{(m+n)^7}}{\sqrt[3]{(m+n)^4}} = \frac{(m+n)^{7/5}}{(m+n)^{4/3}} \qquad \text{Escribir con exponentes racionales.}$$
$$= (m+n)^{(7/5)-(4/3)} \qquad \text{Regla del cociente para exponentes.}$$
$$= (m+n)^{1/15}$$
$$= \sqrt[15]{m+n} \qquad \text{Escribir como un radical.}$$

b)
$$\frac{\sqrt[3]{a^5b^4}}{\sqrt{a^2b}} = \frac{(a^5b^4)^{1/3}}{(a^2b)^{1/2}} \qquad \text{Escribir con exponentes racionales.}$$
$$= \frac{a^{5/3}b^{4/3}}{ab^{1/2}} \qquad \text{Elevar el producto a una potencia.}$$
$$= a^{(5/3)-1}b^{(4/3)-(1/2)} \qquad \text{Regla del cociente para exponentes.}$$
$$= a^{2/3}b^{5/6}$$
$$= a^{4/6}b^{5/6} \qquad \text{Escribir las fracciones con denominador 6.}$$
$$= (a^4b^5)^{1/6} \qquad \text{Reescribir mediante las leyes de exponentes.}$$
$$= \sqrt[6]{a^4b^5} \qquad \text{Escribir como un radical.}$$

Ahora resuelva el ejercicio 133

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.5

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. **a)** ¿Qué es el conjugado de un binomio?
   b) ¿Cuál es el conjugado de $x - \sqrt{3}$?
2. ¿Qué significa racionalizar un denominador?
3. **a)** Explique cómo racionalizar un denominador que contiene una expresión radical de un término.
   b) Racionalice $\dfrac{4}{\sqrt{3y}}$ mediante el procedimiento que especificó en la parte **a)**.
4. **a)** Explique cómo racionalizar un denominador que contiene un binomio en el que uno de los términos (o ambos) es una expresión radical.
   b) Racionalice $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ mediante el procedimiento que especificó en la parte **a)**.
5. ¿Cuáles son las tres condiciones que debe cumplir una expresión radical para considerarla simplificada?
6. Explique por qué cada una de las expresiones siguientes no está simplificada.

   a) $\sqrt{x^5}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Simplifique. Suponga que todas las variables representan números reales positivos.

7. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 8. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ 9. $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ 10. $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$

11. $\dfrac{6}{\sqrt{6}}$ 12. $\dfrac{17}{\sqrt{17}}$ 13. $\dfrac{1}{\sqrt{z}}$ 14. $\dfrac{y}{\sqrt{y}}$

15. $\dfrac{p}{\sqrt{2}}$
16. $\dfrac{m}{\sqrt{13}}$
17. $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{7}}$
18. $\dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{q}}$
19. $\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$
20. $\dfrac{15x}{\sqrt{x}}$
21. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$
22. $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a}}$
23. $\sqrt{\dfrac{5m}{8}}$
24. $\dfrac{9\sqrt{3}}{\sqrt{y^3}}$
25. $\dfrac{2n}{\sqrt{18n}}$
26. $\sqrt{\dfrac{120x}{4y^3}}$
27. $\sqrt{\dfrac{18x^4y^3}{2z^3}}$
28. $\sqrt{\dfrac{7pq^4}{2r}}$
29. $\sqrt{\dfrac{20y^4z^3}{3xy^{-4}}}$
30. $\sqrt{\dfrac{5xy^6}{3z}}$
31. $\sqrt{\dfrac{48x^6y^5}{3z^3}}$
32. $\sqrt{\dfrac{45y^{12}z^{10}}{2x}}$

Simplifique.

33. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$
34. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$
35. $\dfrac{8}{\sqrt[3]{y}}$
36. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{a^2}}$
37. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$
38. $\dfrac{z}{\sqrt[4]{4}}$
39. $\dfrac{a}{\sqrt[4]{8}}$
40. $\dfrac{8}{\sqrt[4]{z}}$
41. $\dfrac{5}{\sqrt[4]{z^2}}$
42. $\dfrac{13}{\sqrt[4]{z^3}}$
43. $\dfrac{10}{\sqrt[5]{y^3}}$
44. $\dfrac{x}{\sqrt[5]{y^4}}$
45. $\dfrac{2}{\sqrt[7]{a^4}}$
46. $\sqrt[3]{\dfrac{4x}{y}}$
47. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2x}}$
48. $\sqrt[3]{\dfrac{7c}{9y^2}}$
49. $\dfrac{5m}{\sqrt[4]{2}}$
50. $\dfrac{3}{\sqrt[4]{a}}$
51. $\sqrt[4]{\dfrac{5}{3x^3}}$
52. $\sqrt[4]{\dfrac{2x^3}{4y^2}}$
53. $\sqrt[3]{\dfrac{3x^2}{2y^2}}$
54. $\sqrt[3]{\dfrac{15x^6y^7}{2z^2}}$
55. $\sqrt[3]{\dfrac{14xy^2}{2z^2}}$
56. $\sqrt[6]{\dfrac{r^4s^9}{2r^5}}$

Multiplique.

57. $(5-\sqrt{6})(5+\sqrt{6})$
58. $(7+\sqrt{3})(7-\sqrt{3})$
59. $(8+\sqrt{2})(8-\sqrt{2})$
60. $(6-\sqrt{7})(6+\sqrt{7})$
61. $(2-\sqrt{10})(2+\sqrt{10})$
62. $(3+\sqrt{17})(3-\sqrt{17})$
63. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$
64. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$
65. $(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})$
66. $(5\sqrt{c}-4\sqrt{d})(5\sqrt{c}+4\sqrt{d})$

Simplifique mediante la racionalización del denominador.

67. $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$
68. $\dfrac{4}{\sqrt{2}+1}$
69. $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$
70. $\dfrac{3}{5-\sqrt{7}}$
71. $\dfrac{5}{\sqrt{2}-7}$
72. $\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
73. $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-\sqrt{6}}$
74. $\dfrac{1}{\sqrt{17}-\sqrt{8}}$
75. $\dfrac{3}{6+\sqrt{x}}$
76. $\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{a}-3}$
77. $\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-y}$
78. $\dfrac{\sqrt{8x}}{x+\sqrt{y}}$
79. $\dfrac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+4\sqrt{3}}$
80. $\dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{2d}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}$
81. $\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{a^7}}{\sqrt{a}}$
82. $\dfrac{2\sqrt{xy}-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$
83. $\dfrac{4}{\sqrt{x+2}-3}$
84. $\dfrac{8}{\sqrt{y-3}+6}$

Simplifique. Estos ejercicios son una combinación de los que ya se presentaron antes en esta sección.

85. $\sqrt{\dfrac{x}{16}}$
86. $\sqrt[4]{\dfrac{x^4}{16}}$
87. $\sqrt{\dfrac{2}{9}}$
88. $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
89. $(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})$
90. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}$
91. $\sqrt{\dfrac{24x^3y^6}{5z}}$
92. $\dfrac{5}{4-\sqrt{y}}$
93. $\sqrt{\dfrac{28xy^4}{2x^3y^4}}$
94. $\dfrac{8x}{\sqrt[3]{5y}}$
95. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+7}$
96. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6\sqrt{y}}$
97. $-\dfrac{7\sqrt{x}}{\sqrt{98}}$
98. $\sqrt{\dfrac{2xy^4}{50xy^2}}$
99. $\sqrt[4]{\dfrac{3y^2}{2x}}$
100. $\sqrt{\dfrac{49x^2y^5}{3z}}$

101. $\sqrt[3]{\dfrac{32y^{12}z^{10}}{2x}}$ **102.** $\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ **103.** $\dfrac{\sqrt{ar}}{\sqrt{a}-2\sqrt{r}}$ **104.** $\sqrt[4]{\dfrac{2}{9x}}$

105. $\dfrac{\sqrt[3]{6x}}{\sqrt[3]{5xy}}$ **106.** $\dfrac{\sqrt[3]{16m^2n}}{\sqrt[3]{2mn^2}}$ **107.** $\sqrt[4]{\dfrac{2x^7y^{12}z^4}{3x^9}}$ **108.** $\dfrac{9}{\sqrt{y+9}-\sqrt{y}}$

Simplifique.

109. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **110.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **111.** $\sqrt{5}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

112. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ **113.** $4\sqrt{\dfrac{1}{6}}+\sqrt{24}$ **114.** $5\sqrt{3}-\dfrac{3}{\sqrt{3}}+2\sqrt{18}$

115. $5\sqrt{2}-\dfrac{2}{\sqrt{8}}+\sqrt{50}$ **116.** $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{75}$ **117.** $\sqrt{\dfrac{1}{2}}+7\sqrt{2}+\sqrt{18}$

118. $\dfrac{1}{2}\sqrt{18}-\dfrac{3}{\sqrt{2}}-9\sqrt{50}$ **119.** $\dfrac{2}{\sqrt{50}}-3\sqrt{50}-\dfrac{1}{\sqrt{8}}$ **120.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{5}{\sqrt{3}}+\sqrt{12}$

121. $\sqrt{\dfrac{3}{8}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ **122.** $2\sqrt{\dfrac{8}{3}}-4\sqrt{\dfrac{100}{6}}$ **123.** $-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}+3\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

124. $-5x\sqrt{\dfrac{y}{y^2}}+9x\sqrt{\dfrac{1}{y}}$ **125.** $\dfrac{3}{\sqrt{a}}-\sqrt{\dfrac{9}{a}}+2\sqrt{a}$ **126.** $6\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

Simplifique.

127. $\dfrac{\sqrt{(a+b)^4}}{\sqrt[3]{a+b}}$ **128.** $\dfrac{\sqrt[3]{c+2}}{\sqrt[4]{(c+2)^3}}$ **129.** $\dfrac{\sqrt[5]{(a+2b)^4}}{\sqrt[3]{(a+2b)^2}}$ **130.** $\dfrac{\sqrt[6]{(r+3)^5}}{\sqrt[3]{(r+3)^5}}$

131. $\dfrac{\sqrt[3]{r^2s^4}}{\sqrt{rs}}$ **132.** $\dfrac{\sqrt{a^2b^4}}{\sqrt[3]{ab^2}}$ **133.** $\dfrac{\sqrt[5]{x^4y^6}}{\sqrt[3]{(xy)^2}}$ **134.** $\dfrac{\sqrt[6]{4m^8n^4}}{\sqrt[4]{m^4n^2}}$

Resolución de problemas

135. Iluminación En determinadas condiciones, la fórmula

$$d=\sqrt{\frac{72}{I}}$$

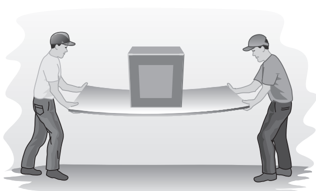
se usa para mostrar la relación entre la iluminación sobre un objeto I, en lúmenes por metro, y la distancia en metros, d, que hay entre el objeto y la fuente de luz. Si la iluminación sobre una persona que está cerca de una fuente de luz es de 5.3 lúmenes por metro, ¿a qué distancia de la fuente de luz se encuentra la persona?

136. Resistencia de una tabla Cuando se aplica suficiente presión sobre una tabla, ésta se rompe. Cuanto mayor sea el grosor de la tabla, mayor será la presión que se necesita para que se rompa. La fórmula

$$T=\sqrt{\frac{0.05\,LB}{M}}$$

relaciona el grosor de una tabla, T, en pulgadas, su longitud, L, en pulgadas, la presión que se ejerce sobre ella, B, en libras y el módulo de ruptura, M, en libras por pulgadas cuadradas. El módulo de ruptura es una constante que se determina de acuerdo con el tipo específico de tabla.

Determine el grosor de una tabla de 36 pulgadas de largo, si el módulo de ruptura es 2560 libras por pulgada cuadrada y la tabla se rompe cuando se le aplica una presión de 800 libras.



137. Volumen de una pecera Un restaurante quiere colocar una pecera esférica en su vestíbulo. El radio, r, en pulgadas, de un tanque esférico se determina mediante la fórmula

$$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

donde V es el volumen del tanque en pulgadas cúbicas. Determine el radio de un tanque esférico cuyo volumen es de 7238.23 pulgadas cúbicas.

138. Números consecutivos Si consideramos el conjunto de números naturales consecutivos $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ como la población, la desviación estándar, σ, que es una medida de dispersión de los datos respecto a la media, puede calcularse mediante la fórmula

$$\sigma=\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

donde n representa la cantidad de números naturales en la muestra. Determine la desviación estándar para los primeros 100 números naturales consecutivos.

139. Granjas en Estados Unidos El número de granjas en Estados Unidos está disminuyendo anualmente (aunque el tamaño de las que quedan ha aumentado). Una función que puede usarse para aproximar el número de granjas, $N(t)$, en millones, es

$$N(t) = \frac{6.21}{\sqrt[4]{t}}$$

donde t es años desde 1959 y $1 \le t \le 50$. Estime el número de granjas en Estados Unidos en **a)** 1960, y **b)** 2008.

140. Tasa de mortalidad infantil La tasa de mortalidad infantil, en Estados Unidos, ha disminuido de manera constante. La tasa de mortalidad infantil, $N(t)$, definida como muertes por 1000 niños nacidos vivos, puede aproximarse mediante la función

$$N(t) = \frac{28.46}{\sqrt[3]{t^2}}$$

donde t es años desde 1969 y $1 \le t \le 37$. Estime la tasa de mortalidad infantil en **a)** 1970, y **b)** 2006.

141. ¿Cuál es mayor, $\frac{2}{\sqrt{2}}$ or $\frac{3}{\sqrt{3}}$? Explique.

142. ¿Cuál es mayor, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ o $\frac{2}{\sqrt{3}}$? Explique.

143. ¿Cuál es mayor, $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$ o $2+\sqrt{3}$? (No utilice una calculadora). Explique cómo determinó su respuesta.

144. ¿Cuál es mayor, $\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{75}$ o $\frac{2}{\sqrt{12}} + \sqrt{48} + 2\sqrt{3}$? (No utilice calculadora.) Explique cómo determinó su respuesta.

145. Considere las funciones $f(x) = x^{a/2}$ y $g(x) = x^{b/3}$.

a) Liste tres valores para a, de tal manera que $x^{a/2}$ sea un cuadrado perfecto.

b) Liste tres valores para b, de tal manera que $x^{b/3}$ sea un cubo perfecto.

c) Si $x \ge 0$, determine $(f \cdot g)(x)$.

d) Si $x \ge 0$, determine $(f/g)(x)$.

Racionalice cada denominador.

146. $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$

147. $\dfrac{3}{\sqrt{2a-3b}}$

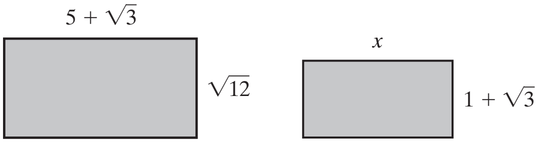
En cursos superiores de matemáticas, puede ser necesario racionalizar los numeradores de las expresiones radicales. Racionalice los numeradores de las expresiones siguientes. (Sus respuestas contendrán radicales en los denominadores.)

148. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ **149.** $\dfrac{5-\sqrt{5}}{6}$ **150.** $\dfrac{6\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x}$ **151.** $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

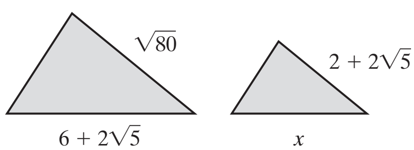
Actividad en grupo

Figuras semejantes *Los dos ejercicios siguientes reforzarán muchos de los conceptos que se han presentado en este capítulo. Resuélvalos en grupo. Asegúrese de que todos los miembros del equipo entiendan cada paso para obtener la solución. Las figuras de cada ejercicio son semejantes; utilice una proporción para determinar la longitud del lado x en cada caso. Escriba la respuesta en forma radical con un denominador racionalizado.*

152.



153.



Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **154.** Despeje b_2 de la ecuación $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.

[2.4] **155. Vehículos en movimiento** Dos automóviles comienzan un recorrido al mismo tiempo y desde el mismo punto, viajando en direcciones opuestas. Uno viaja 10 millas por hora más rápido que el otro. Si entre ambos automóviles hay 270 millas de distancia después de 3 horas, determine la velocidad de cada uno.

[5.2] **156.** Multiplique $(x-2)(4x^2+9x-2)$.

[6.4] **157.** Resuelva $\frac{x}{2} - \frac{4}{x} = -\frac{7}{2}$.

7.6 Resolución de ecuaciones con radicales

1 Resolver ecuaciones que contienen un radical.

2 Resolver ecuaciones que contienen dos radicales.

3 Resolver ecuaciones que contienen dos términos radicales y un término no radical.

4 Resolver problemas de aplicación mediante ecuaciones radicales.

5 Despejar una variable en un radicando.

1 Resolver ecuaciones que contienen un radical

Una **ecuación radical** es aquella que contiene una variable en un radicando.

Ejemplos de ecuaciones con radicales

$$\sqrt{x} = 5, \qquad \sqrt[3]{y+4} = 9, \qquad \sqrt{x-2} = 7 + \sqrt{x+8}$$

Para resolver ecuaciones radicales

1. Reescriba la ecuación de modo que el radical que contiene a la variable quede solo (aislado) en un lado de la ecuación.
2. Eleve cada lado de la ecuación a una potencia igual al índice del radical.
3. Combine (agrupe y sume) los términos semejantes.
4. Si la ecuación aún contiene un término con una variable en un radicando, repita los pasos 1 a 3.
5. Despeje la variable en la ecuación resultante.
6. Compruebe todas las soluciones en las ecuaciones originales, para detectar la presencia de soluciones extrañas, si las hay.

Recuerde que en la sección 6.4 se dijo que una solución extraña es un número que se obtiene al resolver una ecuación, pero que no es solución de la ecuación original.

Los ejemplos siguientes ilustran el procedimiento para resolver ecuaciones radicales.

EJEMPLO 1 ▸ Resuelva la ecuación $\sqrt{x} = 5$.

Solución La raíz cuadrada que contiene a la variable se encuentra sola en un lado de la ecuación. A continuación elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= 5 \\ (\sqrt{x})^2 &= (5)^2 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

Compruebe

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= 5 \\ \sqrt{25} &\stackrel{?}{=} 5 \\ 5 &= 5 \quad \textit{Verdadero} \end{aligned}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 11**

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva.

a) $\sqrt{x-4} - 6 = 0$ **b)** $\sqrt[3]{x} + 10 = 8$ **c)** $\sqrt{x} + 3 = 0$

Solución El primer paso en cada caso consistirá en aislar el término que contiene al radical.

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{x-4} - 6 &= 0 \\ \sqrt{x-4} &= 6 && \textit{Aislar el radical que contiene a la variable.} \\ (\sqrt{x-4})^2 &= 6^2 && \textit{Elevar al cuadrado ambos lados.} \\ x - 4 &= 36 && \textit{Despejar la variable.} \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Una verificación mostrará que 40 es la solución.

b)

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x} + 10 &= 8 \\ \sqrt[3]{x} &= -2 && \textit{Aislar el radical que contiene la variable.} \\ (\sqrt[3]{x})^3 &= (-2)^3 && \textit{Elevar al cubo ambos lados.} \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Una comprobación mostrará que −8 es la solución.

c)

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 3 &= 0 \\ \sqrt{x} &= -3 && \textit{Aislar el radical que contiene a la variable.} \\ (\sqrt{x})^2 &= (-3)^2 && \textit{Elevar ambos lados al cuadrado.} \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Compruebe
$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 3 &= 0 \\ \sqrt{9} + 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 3 + 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 6 &= 0 && \textit{Falso} \end{aligned}$$

Una comprobación mostrará que 9 no es una solución. La respuesta a la parte **c)** es "no hay solución real". Podría haberse dado cuenta de que no hay solución real para el problema cuando obtuvo la ecuación $\sqrt{x} = -3$, ya que $\sqrt{x}$ no puede ser igual a un número real negativo.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 17

Sugerencia útil

No olvide verificar sus soluciones en la ecuación original. Recuerde que cuando ambos lados de una ecuación se elevan a una potencia, es posible obtener soluciones extrañas.

Considere la ecuación $x = 2$. Observe lo que ocurre cuando usted eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ x^2 &= 2^2 \\ x^2 &= 4 \end{aligned}$$

Observe que la ecuación $x^2 = 4$ tiene dos soluciones, $+2$ y -2. Como la ecuación original $x = 2$ sólo tiene una solución, 2, hemos obtenido la solución extraña, -2.

EJEMPLO 3 ▸ Resuelva $\sqrt{2x - 3} = x - 3$.

Solución Como el radical ya está aislado, elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación. Luego resolvemos la ecuación cuadrática resultante.

$$\begin{aligned} (\sqrt{2x - 3})^2 &= (x - 3)^2 \\ 2x - 3 &= (x - 3)(x - 3) \\ 2x - 3 &= x^2 - 6x + 9 \\ 0 &= x^2 - 8x + 12 \end{aligned}$$

Ahora factorizamos y utilizamos la propiedad del factor nulo.

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 12 &= 0 \\ (x - 6)(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$x - 6 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = 6 \qquad\qquad x = 2$$

Compruebe

$$\begin{aligned} x &= 6 \\ \sqrt{2x - 3} &= x - 3 \\ \sqrt{2(6) - 3} &\stackrel{?}{=} 6 - 3 \\ \sqrt{9} &\stackrel{?}{=} 3 \\ 3 &= 3 && \textit{Verdadero} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ \sqrt{2x - 3} &= x - 3 \\ \sqrt{2(2) - 3} &\stackrel{?}{=} 2 - 3 \\ \sqrt{1} &\stackrel{?}{=} -1 \\ 1 &= -1 && \textit{Falso} \end{aligned}$$

Por lo tanto, 6 es una solución para la ecuación, pero 2 no lo es. El 2 es una solución extraña, pues satisface la ecuación $(\sqrt{2x - 3})^2 = (x - 3)^2$, pero no la ecuación original, $\sqrt{2x - 3} = x - 3$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 43

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

En el ejemplo 3 encontramos que la solución de $\sqrt{2x-3} = x - 3$ es 6. Si hacemos $Y_1 = \sqrt{2x-3}$ y $Y_2 = x - 3$ y graficamos Y_1 y Y_2 en una calculadora graficadora, obtendremos la **figura 7.3**. Observe que las gráficas parecen intersecarse en $x = 6$, tal como esperábamos.

La tabla de valores de la **figura 7.4** muestra que la coordenada y en el punto de intersección es 3. En la tabla aparece ERROR en la columna de Y_1 para los valores 0 y 1 de x. Para cualquier valor menor que $\frac{3}{2}$, el valor de $2x - 3$ es negativo y, por lo tanto, $\sqrt{2x-3}$ no es un número real. El dominio de la función Y_1 es $\left\{x \middle| x \geq \frac{3}{2}\right\}$, que puede encontrarse resolviendo la desigualdad $2x - 3 \geq 0$.

Puede utilizar su calculadora graficadora para resolver o comprobar ecuaciones radicales.

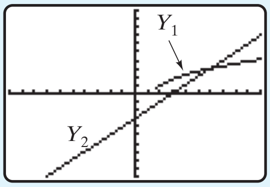
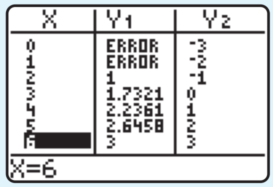


FIGURA 7.3



X	Y1	Y2
0	ERROR	-3
1	ERROR	-2
2	1	-1
3	1.7321	0
4	2.2361	1
5	2.6458	2
6	3	3

X=6

FIGURA 7.4

EJERCICIOS

Utilice su calculadora graficadora para determinar si el valor indicado es la solución para la ecuación radical. Si no es la solución, utilice su graficadora para determinar la respuesta correcta.

1. $\sqrt{2x+9} = 5(x-7), 8$

2. $\sqrt{3x+4} = \sqrt{x+12}, 6$

EJEMPLO 4 ▸ Resuelva $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$.

Solución En primer lugar, aislamos el término con el radical dejándolo solo en un lado de la ecuación.

$$\begin{aligned} x - 2\sqrt{x} - 3 &= 0 \\ -2\sqrt{x} &= -x + 3 \\ 2\sqrt{x} &= x - 3 \end{aligned}$$

Ahora elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} (2\sqrt{x})^2 &= (x-3)^2 \\ 4x &= x^2 - 6x + 9 \\ 0 &= x^2 - 10x + 9 \\ 0 &= (x-1)(x-9) \end{aligned}$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 9 = 0$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = 9$$

Compruebe

$x = 1$

$$\begin{aligned} x - 2\sqrt{x} - 3 &= 0 \\ 1 - 2\sqrt{1} - 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 1 - 2(1) - 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 1 - 2 - 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ -4 &= 0 \quad \textit{Falso} \end{aligned}$$

$x = 9$

$$\begin{aligned} x - 2\sqrt{x} - 3 &= 0 \\ 9 - 2\sqrt{9} - 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 9 - 2(3) - 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 9 - 6 - 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 3 - 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \textit{Verdadero} \end{aligned}$$

La solución es 9. El valor 1 es una solución extraña.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 41**

2 Resolver ecuaciones que contienen dos radicales

A continuación analizaremos algunas ecuaciones que contienen dos radicales.

EJEMPLO 5 Resuelva $\sqrt{9x^2+6} = 3\sqrt{x^2+x-2}$.

Solución Como los dos radicales aparecen en lados diferentes de la ecuación, elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\left(\sqrt{9x^2+6}\right)^2 = \left(3\sqrt{x^2+x-2}\right)^2 \quad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$
$$9x^2+6 = 9(x^2+x-2)$$
$$9x^2+6 = 9x^2+9x-18 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$
$$6 = 9x-18 \quad \text{se restó } 9x^2 \text{ de ambos lados.}$$
$$24 = 9x$$
$$\frac{8}{3} = x$$

Una comprobación mostrará que $\frac{8}{3}$ es la solución.

Ahora resuelva el ejercicio 27

En cursos superiores de matemáticas, en ocasiones las ecuaciones utilizan exponentes en lugar de radicales. El ejemplo 6 ilustra una de tales ecuaciones.

EJEMPLO 6 Para $f(x) = 3(x-2)^{1/3}$ y $g(x) = (17x-14)^{1/3}$, determine todos los valores de x para los que $f(x) = g(x)$.

Solución Debe darse cuenta que $f(x)$ y $g(x)$ también se pueden escribir $f(x) = 3\sqrt[3]{x-2}$ y $g(x) = \sqrt[3]{17x-14}$. Por consiguiente, podríamos resolver este ejemplo mediante radicales; sin embargo, lo haremos con exponentes racionales. Primero igualamos las dos funciones y despejamos x.

$$f(x) = g(x)$$
$$3(x-2)^{1/3} = (17x-14)^{1/3}$$
$$[3(x-2)^{1/3}]^3 = [(17x-14)^{1/3}]^3 \quad \text{Elevar al cubo ambos lados.}$$
$$3^3(x-2) = 17x-14$$
$$27(x-2) = 17x-14$$
$$27x-54 = 17x-14$$
$$10x-54 = -14$$
$$10x = 40$$
$$x = 4$$

Una comprobación mostrará que la solución es 4. Si sustituye 4 en $f(x)$ y en $g(x)$, descubrirá que ambas ecuaciones se simplifican a $3\sqrt[3]{2}$. Compruébelo.

Ahora resuelva el ejercicio 69

En el ejemplo 6, si resuelve la ecuación $3\sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{17x-14}$ obtendrá la solución 4. Ahora, para practicar, compruébelo.

3 Resolver ecuaciones que contienen dos términos radicales y un término no radical

Cuando una ecuación radical contiene dos términos radicales y un tercer término no radical, a veces es necesario elevar ambos lados de la ecuación a una determinada potencia dos veces para obtener la solución. En primer lugar, aísle un término radical.

Después eleve ambos lados de la ecuación a una potencia dada. Esto eliminará uno de los radicales. A continuación, aísle el radical restante en un lado de la ecuación; después eleve ambos lados de la ecuación a la potencia dada una segunda vez. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Resuelva $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} = 1$.

Solución Debemos aislar un término radical en un lado de la ecuación. Comenzaremos por sumar $\sqrt{3x-2}$ a ambos lados de la ecuación para aislar $\sqrt{5x-1}$. Después elevaremos al cuadrado ambos lados de la ecuación y reduciremos los términos semejantes.

$$\sqrt{5x-1} = 1 + \sqrt{3x-2} \qquad \text{Aislar } \sqrt{5x-1}.$$
$$(\sqrt{5x-1})^2 = (1 + \sqrt{3x-2})^2 \qquad \text{Elevar ambos lados al cuadrado.}$$
$$5x - 1 = (1 + \sqrt{3x-2})(1 + \sqrt{3x-2}) \qquad \text{Escribir como un producto.}$$
$$5x - 1 = 1 + \sqrt{3x-2} + \sqrt{3x-2} + (\sqrt{3x-2})^2 \qquad \text{Multiplicar.}$$
$$5x - 1 = 1 + 2\sqrt{3x-2} + 3x - 2 \qquad \text{Reducir términos semejantes; simplificar.}$$
$$5x - 1 = 3x - 1 + 2\sqrt{3x-2} \qquad \text{Reducir términos semejantes.}$$
$$2x = 2\sqrt{3x-2} \qquad \text{Aislar el término radical.}$$
$$x = \sqrt{3x-2} \qquad \text{Ambos lados se dividieron entre 2.}$$

Hemos aislado el término radical restante. Después de esto elevaremos al cuadrado ambos lados de la ecuación y despejaremos x.

$$x = \sqrt{3x-2}$$
$$x^2 = (\sqrt{3x-2})^2 \qquad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$
$$x^2 = 3x - 2$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$(x-2)(x-1) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = 1$$

Una comprobación mostrará que 2 y 1 son soluciones de la ecuación.

Ahora resuelva el ejercicio 61

EJEMPLO 8 Para $f(x) = \sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2}$, determine todos los valores de x para los que $f(x) = 1$.

Solución Sustituya $f(x)$ por 1. Esto da

$$1 = \sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2}$$

Como ésta es la misma ecuación que la que resolvimos en el ejemplo 7, las respuestas son $x = 2$ y $x = 1$. Verifique que $f(2) = 1$ y $f(1) = 1$.

Ahora resuelva el ejercicio 121

Cómo evitar errores comunes

En el capítulo 5 establecimos que $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$. Sea cuidadoso cuando eleve al cuadrado un binomio como $1 + \sqrt{x}$. Analice con atención los siguientes cálculos, para que no cometa el error que se muestra a la derecha.

CORRECTO	INCORRECTO
$(1 + \sqrt{x})^2 = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})$	~~$(1 + \sqrt{x})^2 = 1^2 + (\sqrt{x})^2$~~
P I E S	
$= 1 + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{x}$	~~$= 1 + x$~~
$= 1 + 2\sqrt{x} + x$	

4 Resolver problemas de aplicación mediante ecuaciones radicales

Ahora veremos algunas de las muchas aplicaciones de los radicales para resolver problemas.

EJEMPLO 9 ▸ **El Monstruo Verde** En el parque Fenway, donde juegan béisbol los Medias Rojas de Boston, la distancia de home a la pared del jardín izquierdo, por la línea de tercera base, es de 310 pies. En el jardín izquierdo al final de la línea existe una barda perpendicular al jardín que tiene una altura de 37 pies. A esta barda se le conoce como *El Monstruo Verde* (vea la fotografía). Determine la distancia del home a la parte superior del Monstruo Verde a lo largo de la línea de la tercera base.

Solución **Entienda el problema** En la **figura 7.5** se ilustra el problema. Necesitamos determinar la distancia que hay del home a la pared del jardín izquierdo.

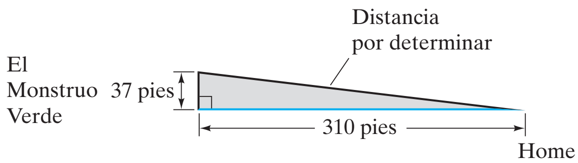


FIGURA 7.5

Traduzca Para resolver el problema utilizaremos el teorema de Pitágoras que se comentó anteriormente: cateto^2 + cateto^2 = hipotenusa^2, o $a^2 + b^2 = c^2$.

$$310^2 + 37^2 = c^2 \qquad \textit{Sustituir los valores conocidos.}$$

Realice los cálculos

$$96{,}100 + 1369 = c^2$$
$$97{,}469 = c^2$$
$$\sqrt{97{,}469} = \sqrt{c^2} \qquad \textit{Tomar la raíz cuadrada de ambos lados.}$$
$$\sqrt{97{,}469} = c \qquad \textit{* Vea la nota a pie de página.}$$
$$312.20 \approx c$$

Responda La distancia entre el home y la parte superior de la barda es de alrededor de 312.20 pies.

▸**Ahora resuelva el ejercicio 99**

EJEMPLO 10 ▸ **Periodo de un péndulo** El tiempo que tarda un péndulo en realizar una oscilación completa se denomina *periodo*. Vea la **figura 7.6**. El periodo de un péndulo, T, en segundos, puede calcularse mediante la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$, donde L es la longitud del péndulo, en pies. Determine el periodo de un péndulo si su longitud de 5 pies.

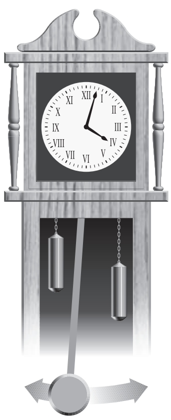


FIGURA 7.6

Solución Sustituya L por 5 y π por 3.14 en la fórmula. Si su calculadora tiene la tecla π utilícela para introducir π.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$$
$$\approx 2(3.14)\sqrt{\frac{5}{32}}$$
$$\approx 2(3.14)\sqrt{0.15625} \approx 2.48$$

Así, el periodo es de más o menos 2.48 segundos. Si tiene un reloj de pared con un péndulo de 5 pies, le tomará alrededor de 2.48 segundos dar una oscilación completa.

▸**Ahora resuelva el ejercicio 103**

*$c^2 = 97{,}469$ tiene dos soluciones: $c = \sqrt{97{,}469}$ y $c = -\sqrt{97{,}469}$. Como lo que estamos tratando de determinar es una longitud (que debe ser una cantidad positiva), utilizamos la raíz positiva.

5 Despejar una variable en un radicando

Es posible que le den una fórmula y le pidan que despeje una variable que está en un radicando. Para hacerlo, siga el mismo procedimiento general que usó para resolver una ecuación radical. Empiece por aislar la expresión radical; luego eleve ambos lados de la ecuación a la misma potencia que el índice del radical. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 11 **b)**.

EJEMPLO 11 **Error de estimación** Una fórmula estadística para determinar el error máximo de estimación es $E = Z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

a) Determine E si $Z = 1.28$, $\sigma = 10$ y $n = 36$.

b) Despeje n de esta ecuación.

Solución

a) $E = Z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.28\left(\dfrac{10}{\sqrt{36}}\right) = 1.28\left(\dfrac{10}{6}\right) \approx 2.13$

b) Primero multiplique ambos lados de la ecuación por $\sqrt{n}$ para eliminar las fracciones. Luego aísle $\sqrt{n}$. Por último, despeje n elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$E = Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n}(E) = \left(Z\frac{\sigma}{\cancel{\sqrt{n}}}\right)\cancel{\sqrt{n}} \qquad \textit{Eliminar fracciones.}$$

$$\sqrt{n}(E) = Z\sigma$$

$$\sqrt{n} = \frac{Z\sigma}{E} \qquad \textit{Aislar el término con radical.}$$

$$(\sqrt{n})^2 = \left(\frac{Z\sigma}{E}\right)^2 \qquad \textit{Elevar ambos lados al cuadrado.}$$

$$n = \left(\frac{Z\sigma}{E}\right)^2 \quad \text{o} \quad n = \frac{Z^2\sigma^2}{E^2}$$

Ahora resuelva el ejercicio 75

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.6

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. **a)** Explique cómo resolver una ecuación radical.
   b) Utilizando el procedimiento que indicó en la parte **a)**, resuelva $\sqrt{2x + 26} - 2 = 4$
2. Considere la ecuación $\sqrt{x + 3} = -\sqrt{2x - 1}$. Explique por qué esta ecuación no puede tener soluciones reales.
3. Analice la ecuación $-\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2}$. ¿puede determinar su solución? Explique.
4. Analice la ecuación $\sqrt[3]{x^2} = -\sqrt[3]{x^2}$. ¿puede determinar su solución? Explique.
5. Sin resolver la ecuación, explique cómo puede saber que $\sqrt{x - 3} + 4 = 0$ no tiene solución.
6. ¿Por qué es necesario comprobar las soluciones de las ecuaciones radicales?
7. La ecuación $\sqrt{x} = 5$ ¿tiene una o dos soluciones? Explique.
8. La ecuación $x^2 = 9$, ¿tiene una o dos soluciones? Explique.

Práctica de habilidades

Resuelva y compruebe su o sus soluciones. Si la ecuación no tiene soluciones reales, indíquelo.

9. $\sqrt{x} = 4$
10. $\sqrt{x} = 13$
11. $\sqrt{x} = -9$
12. $\sqrt[3]{x} = 4$
13. $\sqrt[3]{x} = -4$
14. $\sqrt{a} + 5 = 0$
15. $\sqrt{2x + 3} = 5$
16. $\sqrt[3]{7x - 6} = 4$
17. $\sqrt[3]{3x} + 4 = 7$
18. $2\sqrt{4x + 5} = 14$
19. $\sqrt[3]{2x + 29} = 3$
20. $\sqrt[3]{6x + 2} = -4$
21. $\sqrt[4]{x} = 3$
22. $\sqrt[4]{x} = -3$
23. $\sqrt[4]{x + 10} = 3$

24. $\sqrt[4]{3x-2}=2$
25. $\sqrt[4]{2x+1}+6=2$
26. $\sqrt{2x}+7=13$
27. $\sqrt{x+8}=\sqrt{x-8}$
28. $\sqrt{r+5}+7=10$
29. $2\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{x^2+2x}$
30. $\sqrt[3]{6t-1}=\sqrt[3]{2t+3}$
31. $\sqrt[4]{x+8}=\sqrt[4]{2x}$
32. $\sqrt[4]{3x-1}+4=0$
33. $\sqrt{5x+1}-6=0$
34. $\sqrt{x^2+12x+3}=-x$
35. $\sqrt{m^2+6m-4}=m$
36. $\sqrt{x^2+3x+12}=x$
37. $\sqrt{5c+1}-9=0$
38. $\sqrt{b^2-2}=b+4$
39. $\sqrt{z^2+5}=z+1$
40. $\sqrt{x}+6x=1$
41. $\sqrt{2y+5}+5-y=0$
42. $\sqrt{4x+1}=\frac{1}{2}x+2$
43. $\sqrt{5x+6}=2x-6$
44. $\sqrt{4b+5}+b=10$
45. $(2a+9)^{1/2}-a+3=0$
46. $(3x+4)^{1/2}-x=-2$
47. $(2x^2+4x+9)^{1/2}=(2x^2+9)^{1/2}$
48. $(2x+1)^{1/2}+7=x$
49. $(r+4)^{1/3}=(3r+10)^{1/3}$
50. $(7x+6)^{1/3}+4=0$
51. $(5x+7)^{1/4}=(9x+1)^{1/4}$
52. $(5b+3)^{1/4}=(2b+17)^{1/4}$
53. $\sqrt[4]{x+5}=-2$
54. $\sqrt{x^2+x-1}=-\sqrt{x+3}$

Resuelva. Tendrá que elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación dos veces para eliminar todos los radicales.

55. $\sqrt{4x+1}=\sqrt{2x}+1$
56. $3\sqrt{b}-1=\sqrt{b+21}$
57. $\sqrt{3a+1}=\sqrt{a-4}+3$
58. $\sqrt{x+1}=2-\sqrt{x}$
59. $\sqrt{x+3}=\sqrt{x}-3$
60. $\sqrt{y+1}=2+\sqrt{y-7}$
61. $\sqrt{x+7}=6-\sqrt{x-5}$
62. $\sqrt{b-3}=4-\sqrt{b+5}$
63. $\sqrt{4x-3}=2+\sqrt{2x-5}$
64. $\sqrt{r+10}+2+\sqrt{r-5}=0$
65. $\sqrt{y+1}=\sqrt{y+10}-3$
66. $3+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x+12}$

Determine todos los valores reales de x donde f(x) = g(x) en cada par de funciones.

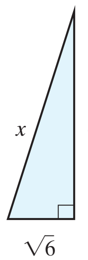
67. $f(x)=\sqrt{x+8},\ g(x)=\sqrt{2x+1}$
68. $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10},\ g(x)=\sqrt{x-2}$
69. $f(x)=\sqrt[3]{5x-19},\ g(x)=\sqrt[3]{6x-23}$
70. $f(x)=(14x-8)^{1/2},\ g(x)=2(3x+2)^{1/2}$
71. $f(x)=2(8x+24)^{1/3},\ g(x)=4(2x-2)^{1/3}$
72. $f(x)=2\sqrt{x+2},\ g(x)=8-\sqrt{x+14}$

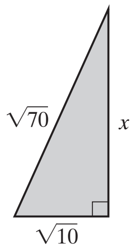
Despeje la variable indicada en cada fórmula.

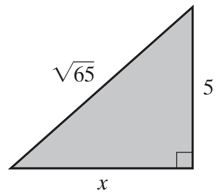
73. $p=\sqrt{2v}$, para v
74. $l=\sqrt{4r}$, para r
75. $v=\sqrt{2gh}$, para g
76. $v=\sqrt{\dfrac{2E}{m}}$, para E
77. $v=\sqrt{\dfrac{FR}{M}}$, para F
78. $w=\sqrt{\dfrac{a_0}{b_0}}$, para b_0
79. $x=\sqrt{\dfrac{m}{k}}V_0$, para m
80. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{L}{32}}$, para L
81. $r=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$, para A
82. $r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$, para V

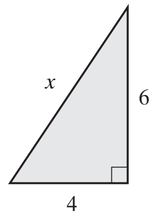
Resolución de problemas

Utilice el teorema de Pitágoras para determinar la longitud del lado desconocido de cada triángulo. Escriba la respuesta como un radical en forma simplificada.

83.


84.


85.


86.


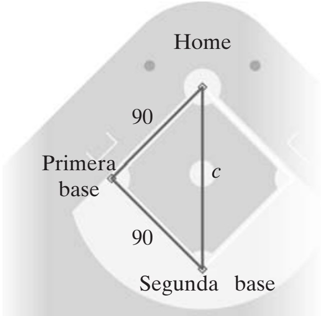
Resuelva. Necesitará elevar al cuadrado dos veces ambos lados de la ecuación.

87. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=\sqrt{x-3}$
88. $\sqrt{2x}-\sqrt{x-4}=\sqrt{12-x}$
89. $\sqrt{4y+6}+\sqrt{y+5}=\sqrt{y+1}$
90. $\sqrt{2b-2}+\sqrt{b-5}=\sqrt{4b}$
91. $\sqrt{c+1}+\sqrt{c-2}=\sqrt{3c}$
92. $\sqrt{2t-1}+\sqrt{t-4}=\sqrt{3t+1}$
93. $\sqrt{a+2}-\sqrt{a-3}=\sqrt{a-6}$
94. $\sqrt{r-1}-\sqrt{r+6}=\sqrt{r-9}$

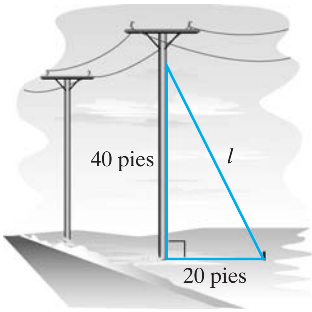
Resuelva. Necesitará elevar al cuadrado dos veces ambos lados de la ecuación.

95. $\sqrt{2-\sqrt{x}}=\sqrt{x}$
96. $\sqrt{6+\sqrt{x+4}}=\sqrt{2x-1}$
97. $\sqrt{2+\sqrt{x+1}}=\sqrt{7-x}$
98. $\sqrt{1+\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-6}$

99. Diamante de béisbol Un diamante regular de béisbol es un cuadrado con 90 pies de base a base. ¿A qué distancia está la segunda base del home?



100. Poste telefónico Como se muestra en la figura, un poste telefónico forma un ángulo recto o de 90° respecto del piso. Determine la longitud del alambre que conecta al poste a 40 pies del piso, y que está anclado al piso a 20 pies desde la base el poste.



101. Lado de un jardín Si conoce el área de un cuadrado, la longitud de cada uno de sus lados puede determinarse mediante la fórmula $s = \sqrt{A}$. Determine cuánto miden los lados del jardín cuadrado de Tom Kim, si su área mide 169 pies cuadrados.

102. Radio de un aro de baloncesto Si conoce el área de un círculo, es posible determinar su radio mediante la fórmula $r = \sqrt{A/\pi}$.

a) Determine el radio de un aro de baloncesto, si su área interior mide 254.47 pulgadas cuadradas.

b) Si un balón tiene 9 pulgadas de diámetro, ¿cuál es la distancia mínima posible entre el aro y el balón, cuando el centro de este último está en el centro de aro?

103. Periodo de un péndulo La fórmula para determinar el periodo de un péndulo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde T es el periodo en segundos, l es la longitud del péndulo en pies, y g es la aceleración provocada por la gravedad. En la Tierra, la gravedad es de 32 pies/segundo^2. La fórmula, cuando se utiliza para la Tierra, se convierte en

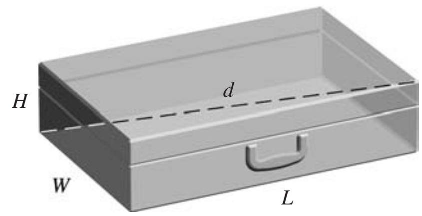
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{32}}$$

a) Determine el periodo de un péndulo que mide 8 pies de longitud.

b) Si la longitud de un péndulo se duplica, ¿qué efecto tiene en el periodo? Explique.

c) La gravedad en la Luna es 1/6 de la terrestre. Si un péndulo tiene un periodo de 2 segundos en la Tierra, ¿cuál será el periodo del mismo péndulo en la Luna?

104. Diagonal de un portafolio Una fórmula para determinar la longitud de la diagonal de una caja (es decir la distancia que hay entre su esquina superior y su esquina inferior opuesta) es $d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$, donde L, W y H son el largo, ancho y altura de la caja, respectivamente.



a) Determine la longitud de la diagonal de un portafolio que mide 22 pulgadas de largo, 15 pulgadas de ancho y 12 pulgadas de altura.

b) Si el largo, ancho y la altura se duplican, ¿cómo cambiará la diagonal?

c) Despeje W en la fórmula.

105. Flujo de sangre en una arteria La fórmula

$$r = \sqrt[4]{\frac{8\mu l}{\pi R}}$$

se utiliza para determinar el flujo de sangre que pasa a través de las arterias. En la fórmula, R representa la resistencia que ofrece la arteria al paso de la sangre, μ es la viscosidad de la sangre, l es la longitud de la arteria, y r es el radio de la arteria. Despeje R de esta ecuación.

106. Objeto que cae La fórmula

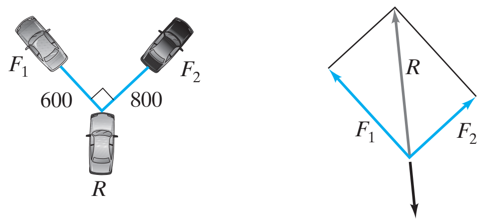
$$t = \frac{\sqrt{19.6s}}{9.8}$$

puede usarse para establecer el tiempo, t, en segundos, que un objeto ha estado cayendo, si ha caído s metros. Suponga que un objeto se ha dejado caer desde un helicóptero y ha caído 100 metros. ¿Cuánto tiempo ha estado en caída libre?

107. Días terrestres Un "año" es el tiempo que tarda cualquiera de los planetas de nuestro sistema solar en dar una vuelta completa alrededor del Sol. El número de días terrestres a que equivale un año de otro planeta, N, se calcula mediante la fórmula $N = 0.2(\sqrt{R})^3$, donde R es la distancia media que hay entre el planeta y el Sol, en millones de kilómetros. Determine el número de días terrestres que dura el año del planeta Tierra, cuya distancia media al Sol es de 149.4 millones de kilómetros.

108. **Días terrestres** Determine el número de días terrestres que dura el año del planeta Mercurio, cuya distancia media al Sol es de 58 millones de kilómetros. Vea el ejercicio 107.

109. **Fuerzas sobre un automóvil** Cuando dos fuerzas, F_1 y F_2, jalan formando un ángulo recto entre sí, como se muestra la siguiente figura, podemos determinar la fuerza resultante, o fuerza efectiva, R, mediante la fórmula $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$. Dos automóviles intentan sacar a otro del fango, como se muestra a continuación. Si el automóvil A ejerce una fuerza de 60 libras y el automóvil B ejerce una fuerza de 80 libras, determine la fuerza resultante sobre el automóvil atascado en el fango.



110. **Velocidad de escape** La velocidad de escape es la velocidad que necesita una nave espacial para escapar del campo gravitacional de un planeta, y se determina mediante la fórmula $v_e = \sqrt{2gR}$, donde g es la fuerza de gravedad del planeta, y R es el radio del planeta. Determine la velocidad de escape de la Tierra, en metros por segundo, donde $g = 9.75\ m/s^2$ y $R = 6{,}370{,}000$ metros.

111. **Oleaje** Una fórmula que se utiliza para estudiar el movimiento ondulatorio en aguas poco profundas es $c = \sqrt{gH}$, donde c es la velocidad de ola, H es la profundidad del agua, y g es la aceleración provocada por la gravedad. Determine la velocidad de la ola, si la profundidad del agua es de 10 pies. (Utilice $g = 32$ pies/seg^2).

112. **Diagonal de una caja** La tapa de una caja rectangular mide 20 por 32 pulgadas. Determine la longitud de su diagonal.

113. **Jardín floral** Un jardín floral con forma rectangular mide 25 por 32 metros. Determine la longitud de la diagonal del jardín.

114. **Velocidad del sonido** Cuando el sonido recorre el aire (o cualquier gas), la velocidad de la onda sonora depende de la temperatura del aire (o gas). La velocidad, v, en metros por segundo, a la temperatura del aire, t, en grados Celsius, puede determinarse mediante la fórmula

$$v = 331.3\sqrt{1 + \frac{t}{273}}$$

Determine la velocidad del sonido en aire cuya temperatura es de 20°C (equivalente a 68°F).

Una fórmula que ya hemos mencionado y que analizaremos pronto con más detalle, es la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

115. Determine x cuando $a = 1, b = 0, c = -4$.

116. Determine x cuando $a = 1, b = 1, c = -12$.

117. Determine x cuando $a = -1, b = 4, c = 5$.

118. Determine x cuando $a = 2, b = 5, c = -12$.

Dada $f(x)$, determine todos los valores de x para los que $f(x)$ tiene el valor indicado.

119. $f(x) = \sqrt{x - 5}, f(x) = 5$

120. $f(x) = \sqrt[3]{2x + 3}, f(x) = 3$

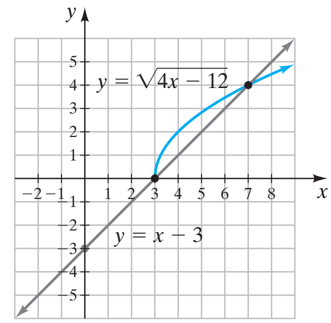
121. $f(x) = \sqrt{3x^2 - 11} + 7, f(x) = 15$

122. $f(x) = 8 + \sqrt[3]{x^2 + 152}, f(x) = 14$

123. **a)** Considere la ecuación $\sqrt{4x - 12} = x - 3$. Si igualamos cada lado de la ecuación con y, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$y = \sqrt{4x - 12}$$
$$y = x - 3$$

En la figura siguiente se muestran las gráficas de las ecuaciones del sistema.



A partir de la gráfica, determine los valores que parecen ser soluciones de la ecuación $\sqrt{4x - 12} = x - 3$. Explique cómo determinó su respuesta.

b) Sustituya los valores determinados en la parte **a)** de la ecuación original, y determine si son soluciones a la ecuación.

c) Resuelva la ecuación $\sqrt{4x - 12} = x - 3$ en forma algebraica, e indique si su solución concuerda con los valores obtenidos en la parte **a)**.

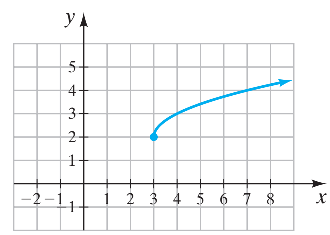
124. Si la gráfica de una función radical $f(x)$ no interseca al eje x, entonces la ecuación $f(x) = 0$ no tiene soluciones reales. Explique por qué.

125. Suponga que se nos da una función racional $g(x)$. Si $g(4) = 0$, entonces la gráfica de $g(x)$ debe intersecar al eje x en 4. Explique por qué.

126. La gráfica de la ecuación $y = \sqrt{x - 3} + 2$ se ilustra en la siguiente figura.

a) ¿Cuál es el dominio de la función?

b) ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\sqrt{x - 3} + 2 = 0$? Liste todas las soluciones reales. Explique cómo determinó su respuesta.



127. Intervalo de confianza En estadística, un “intervalo de confianza” es un rango de valores donde es probable encontrar el valor verdadero de la población. Para un “intervalo de confianza de 95%”, los límites, inferior, L_1, y superior, L_2, del rango pueden determinarse mediante las fórmulas

$$L_1 = p - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$L_2 = p + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

donde p representa el porcentaje obtenido de una muestra, y n es el tamaño de la muestra. Franceso, un estadístico, realiza una encuesta en una muestra de 36 familias y determina que 60% de ellas utiliza una máquina contestadora en su casa. Él puede estar 95% seguro de que el porcentaje verdadero de familias que utilizan una máquina contestadora está entre L_1 y L_2. Determine los valores de L_1 y L_2. Utilice $p = 0.60$ y $n = 36$ en las fórmulas.

128. Media cuadrática La *media cuadrática* (o *raíz cuadrada media*, *RCM*) con frecuencia se utiliza en la solución de problemas de física. Por ejemplo, en sistemas de distribución de potencia, muchas veces se hace referencia a los voltajes y las corrientes en términos de sus valores RCM. La media cuadrática de un conjunto de valores se obtiene elevando al cuadrado cada valor y sumando los resultados (representados por Σx^2), luego dividir el valor obtenido entre el número de valores y tomar la raíz cuadrada del mismo. Podemos expresar esta fórmula como

$$\text{media cuadrática} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}$$

Determine la media cuadrática de los números 2, 4 y 10.

En los ejercicios 129 y 130, resuelva la ecuación.

129. $\sqrt{x^2 + 49} = (x^2 + 49)^{1/2}$

130. $\sqrt{x^2 - 16} = (x^2 - 16)^{1/2}$

En los ejercicios 131 a 134, utilice su calculadora graficadora para resolver las ecuaciones. Redondee sus soluciones al décimo más cercano.

131. $\sqrt{x + 8} = \sqrt{3x + 5}$

132. $\sqrt{10x - 16} - 15 = 0$

133. $\sqrt[3]{5x^2 - 6} - 4 = 0$

134. $\sqrt[3]{5x^2 - 22} = \sqrt[3]{4x + 83}$

Retos

Resuelva.

135. $\sqrt{\sqrt{x + 25} - \sqrt{x}} = 5$

136. $\sqrt{\sqrt{x + 9} + \sqrt{x}} = 3$

Despeje n en cada ecuación.

137. $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

138. $z = \dfrac{p' - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$

Actividad en grupo

Analicen y respondan en grupo el ejercicio 139.

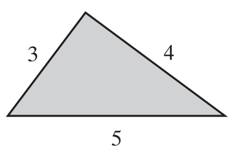
139. Fórmula de Herón El área de un triángulo es $A = \frac{1}{2}bh$.

Si se desconoce la altura pero se sabe cuánto miden sus tres lados, podemos utilizar la fórmula de Herón para determinar el área, A. La fórmula de Herón es

$$A = \sqrt{S(S - a)(S - b)(S - c)}$$

donde a, b y c son las longitudes de los tres lados y

$$S = \frac{a + b + c}{2}$$

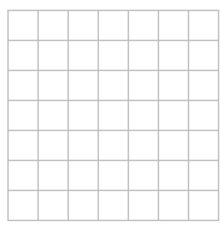


a) Cada miembro del grupo utilizará la fórmula de Herón para determinar el área de un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 pulgadas.

b) Comparen las respuestas que dieron a la parte **a)**. Si algún miembro del grupo obtuvo una respuesta incorrecta, discutan en qué consistió el error.

c) Cada miembro del grupo realizará los pasos siguientes:

1. Dibuje un triángulo en la cuadrícula. Coloque cada vértice del triángulo en la intersección de dos líneas de la cuadrícula.



2. Mida con una regla la longitud de cada lado de su triángulo.

3. Utilice la fórmula de Herón para determinar el área de su triángulo.

4. Comparen y analicen sus resultados de la parte **c)**.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **140.** Despeje P_2 de la fórmula $P_1P_2 - P_1P_3 = P_2P_3$.

[6.1] **141.** Simplifique $\dfrac{x(x-5)+x(x-2)}{2x-7}$.

Realice cada operación que se indica.

[6.1] **142.** $\dfrac{4a^2-9b^2}{4a^2+12ab+9b^2} \cdot \dfrac{6a^2b}{8a^2b^2-12ab^3}$

143. $(t^2-2t-15) \div \dfrac{t^2-9}{t^2-3t}$

[6.2] **144.** $\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{2x}{x^2-9}$

[6.4] **145.** Resuelva $2 + \dfrac{3x}{x-1} = \dfrac{8}{x-1}$.

7.7 Números complejos

1 Reconocer un número complejo.

2 Sumar y restar números complejos.

3 Multiplicar números complejos.

4 Dividir números complejos.

5 Determinar potencias de i.

1 Reconocer un número complejo

En la sección 7.1 mencionamos que las raíces cuadradas de números negativos, como $\sqrt{-4}$ no son números reales. Números como $\sqrt{-4}$ se denominan **números imaginarios**, se llaman así, porque muchos matemáticos rechazaban su existencia cuando se introdujeron. Aunque no pertenecen al conjunto de los números reales, por definición los números imaginarios existen y son muy útiles en matemáticas y ciencias.

Todo número imaginario tiene a $\sqrt{-1}$ como factor. El número $\sqrt{-1}$, llamado **unidad imaginaria**, con frecuencia se denota con la letra i.

Unidad imaginaria

$$i = \sqrt{-1}$$

Para escribir la raíz cuadrada de un número negativo en términos de i, se usa la siguiente propiedad.

Raíz cuadrada de un número negativo

Para cualquier número real positivo n,

$$\sqrt{-n} = \sqrt{-1}\,\sqrt{n} = i\sqrt{n}$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\,\sqrt{4} = i2 \quad \text{o} \quad 2i$$
$$\sqrt{-9} = \sqrt{-1}\,\sqrt{9} = i3 \quad \text{o} \quad 3i$$
$$\sqrt{-7} = \sqrt{-1}\,\sqrt{7} = i\sqrt{7}$$

Por lo general, en este libro escribiremos $i\sqrt{7}$ en vez de $\sqrt{7}i$ para evitar confusiones con $\sqrt{7i}$. También $3\sqrt{5}i$ se escribirá como $3i\sqrt{5}$.

Ejemplos

$$\sqrt{-81} = 9i \qquad \sqrt{-6} = i\sqrt{6}$$
$$\sqrt{-49} = 7i \qquad \sqrt{-10} = i\sqrt{10}$$

El sistema de los números reales es parte de un sistema de números más grande, denominado *sistema de números complejos*. A continuación analizamos a los **números complejos**.

Número complejo

Todo número con la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales, es un **número complejo**.

Todos los números reales y todos los números imaginarios son también números complejos. Un número complejo tiene dos partes: una parte real, a, y una parte imaginaria, b.

Parte real ↓ ↓ Parte imaginaria

$$a + b\,i$$

Si $b = 0$, el número complejo es un número real. Si $a = 0$, el número complejo es un *número imaginario puro*.

Ejemplos de números complejos

$3 + 2i$	$a = 3, b = 2$	
$5 - i\sqrt{6}$	$a = 5, b = -\sqrt{6}$	
4	$a = 4, b = 0$	(número real, $b = 0$)
$8i$	$a = 0, b = 8$	(número imaginario, $a = 0$)
$-i\sqrt{7}$	$a = 0, b = -\sqrt{7}$	(número imaginario, $a = 0$)

Hemos dicho que todos los números reales e imaginarios son también números complejos. En la **figura 7.7** se muestra la relación entre los diversos conjuntos de números.

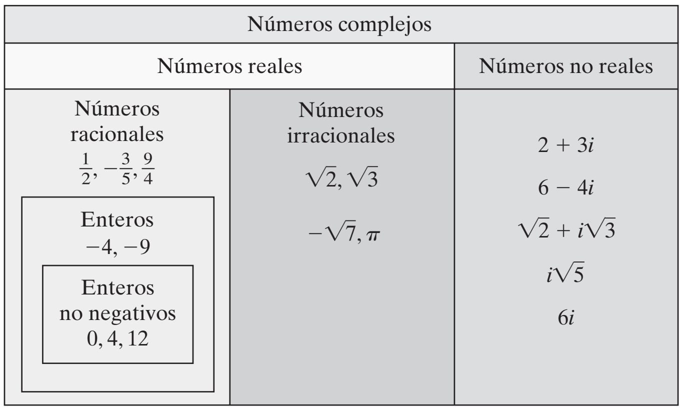


FIGURA 7.7

EJEMPLO 1 ▸ Escriba cada uno de los siguientes números complejos en la forma $a + bi$.

a) $7 + \sqrt{-36}$ **b)** $4 - \sqrt{-12}$ **c)** 19 **d)** $\sqrt{-50}$ **e)** $6 + \sqrt{10}$

Solución

a) $7 + \sqrt{-36} = 7 + \sqrt{-1}\,\sqrt{36}$
$= 7 + i6 \quad \text{o} \quad 7 + 6i$

b) $4 - \sqrt{-12} = 4 - \sqrt{-1}\,\sqrt{12}$
$= 4 - \sqrt{-1}\,\sqrt{4}\,\sqrt{3}$
$= 4 - i(2)\sqrt{3} \quad \text{or} \quad 4 - 2i\sqrt{3}$

c) $19 = 19 + 0i$

d) $\sqrt{-50} = 0 + \sqrt{-50}$
$= 0 + \sqrt{-1}\,\sqrt{25}\,\sqrt{2}$
$= 0 + i(5)\sqrt{2} \quad \text{o} \quad 0 + 5i\sqrt{2}$

e) Tanto 6 como $\sqrt{10}$ son números reales. Si escribimos la expresión como un número complejo, obtenemos $(6 + \sqrt{10}) + 0i$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 23**

Los números complejos pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse. Para realizar estas operaciones, utilizamos el hecho de que $i = \sqrt{-1}$ y de

Definición de i^2

$$i^2 = -1$$

2 Sumar y restar números complejos

A continuación se explica cómo sumar y restar números complejos.

Para sumar y restar números complejos

1. Cambie todos los números imaginarios a la forma bi.
2. Sume (o reste) las partes reales de los números complejos.
3. Sume (o reste) las partes imaginarias de los números complejos.
4. Escriba la respuesta en la forma $a + bi$.

EJEMPLO 2 Sume $(9 + 15i) + (-6 - 2i) + 18$.

Solución

$$\begin{aligned}(9 + 15i) + (-6 - 2i) + 18 &= 9 + 15i - 6 - 2i + 18 \\ &= 9 - 6 + 18 + 15i - 2i && \text{Reacomodar términos.} \\ &= 21 + 13i && \text{Reducir los términos semejantes.}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 27

EJEMPLO 3 Reste $(8 - \sqrt{-27}) - (-3 + \sqrt{-48})$.

Solución

$$\begin{aligned}(8 - \sqrt{-27}) - (-3 + \sqrt{-48}) &= (8 - \sqrt{-1}\sqrt{27}) - (-3 + \sqrt{-1}\sqrt{48}) \\ &= (8 - \sqrt{-1}\sqrt{9}\sqrt{3}) - (-3 + \sqrt{-1}\sqrt{16}\sqrt{3}) \\ &= (8 - 3i\sqrt{3}) - (-3 + 4i\sqrt{3}) \\ &= 8 - 3i\sqrt{3} + 3 - 4i\sqrt{3} \\ &= 8 + 3 - 3i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} \\ &= 11 - 7i\sqrt{3}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 35

3 Multiplicar números complejos

Ahora veamos cómo multiplicar números complejos.

Para multiplicar números complejos

1. Cambie todos los números imaginarios a la forma bi.
2. Multiplique los números complejos como si multiplicara polinomios.
3. Sustituya cada aparición de i^2 con -1.
4. Reduzca las partes reales e imaginarias. Escriba la respuesta en la forma $a + bi$.

EJEMPLO 4 Multiplique.

a) $5i(6 - 2i)$ **b)** $\sqrt{-9}(\sqrt{-3} + 8)$ **c)** $(2 - \sqrt{-18})(\sqrt{-2} + 5)$

Solución

a)
$$\begin{aligned}5i(6 - 2i) &= 5i(6) + 5i(-2i) && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= 30i - 10i^2 \\ &= 30i - 10(-1) && \text{Reemplazar } i^2 \text{ con } -1. \\ &= 30i + 10 \quad \text{o} \quad 10 + 30i\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\sqrt{-9}(\sqrt{-3} + 8) &= 3i(i\sqrt{3} + 8) && \text{Cambiar los números imaginarios a la forma } bi. \\ &= 3i(i\sqrt{3}) + 3i(8) && \text{Propiedad distributiva} \\ &= 3i^2\sqrt{3} + 24i \\ &= 3(-1)\sqrt{3} + 24i && \text{Reemplazar } i^2 \text{ con } -1. \\ &= -3\sqrt{3} + 24i\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}(2 - \sqrt{-18})(\sqrt{-2} + 5) &= (2 - \sqrt{-1}\,\sqrt{18})(\sqrt{-1}\,\sqrt{2} + 5)\\ &= (2 - \sqrt{-1}\,\sqrt{9}\,\sqrt{2})(\sqrt{-1}\,\sqrt{2} + 5)\\ &= (2 - 3i\sqrt{2})(i\sqrt{2} + 5)\end{aligned}$$

Ahora utilice el método PIES para multiplicar.

$$\begin{aligned}(2 - 3i\sqrt{2})(i\sqrt{2} + 5) &= (2)(i\sqrt{2}) + (2)(5) + (-3i\sqrt{2})(i\sqrt{2}) + (-3i\sqrt{2})(5)\\ &= 2i\sqrt{2} - 3i^2(2) + 10 - 15i\sqrt{2}\\ &= 2i\sqrt{2} - 3(-1)(2) + 10 - 15i\sqrt{2}\\ &= 2i\sqrt{2} + 6 + 10 - 15i\sqrt{2}\\ &= 16 - 13i\sqrt{2}\end{aligned}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 45**

Cómo evitar errores comunes

¿Qué es $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-2}$?

CORRECTO	INCORRECTO
$\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-2} = 2i \cdot i\sqrt{2}$	$\cancel{\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{8}}$
$= 2i^2\sqrt{2}$	$\cancel{= \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}}$
$= 2(-1)\sqrt{2}$	$\cancel{= 2\sqrt{2}}$
$= -2\sqrt{2}$	

Recuerde que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ sólo para a y b números reales *no negativos*.

4 Dividir números complejos

El **conjugado de un número complejo**, $a + bi$ es $a - bi$. Por ejemplo,

Número complejo	Conjugado
$3 + 7i$	$3 - 7i$
$1 - i\sqrt{3}$	$1 + i\sqrt{3}$
$2i$ (o $0 + 2i$)	$-2i$ (o $0 - 2i$)

Al multiplicar un número complejo por su conjugado mediante el método PIES, los productos interno y externo sumarán cero y el resultado será un número real. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(5 + 3i)(5 - 3i) &= 25 + 15i - 15i - 9i^2\\ &= 25 - 9i^2\\ &= 25 - 9(-1)\\ &= 25 + 9 = 34\end{aligned}$$

Ahora veamos cómo dividir números complejos.

Para dividir números complejos

1. Cambie todos los números imaginarios a la forma bi.
2. Racionalice el denominador, multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.
3. Escriba la respuesta en la forma $a + bi$.

EJEMPLO 5 Divida $\dfrac{9+i}{i}$.

Solución Comience multiplicando el numerador y el denominador por $-i$, el conjugado de i.

$$\begin{aligned}\frac{9+i}{i}\cdot\frac{-i}{-i} &= \frac{(9+i)(-i)}{-i^2}\\ &= \frac{-9i-i^2}{-i^2} && \textit{Propiedad distributiva.}\\ &= \frac{-9i-(-1)}{-(-1)} && \textit{Reemplace } i^2 \textit{ con } -1.\\ &= \frac{-9i+1}{1}\\ &= 1-9i\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 59

EJEMPLO 6 Divida $\dfrac{3+2i}{4-i}$.

Solución Multiplique el numerador y el denominador por $4+i$, el conjugado de $4-i$.

$$\begin{aligned}\frac{3+2i}{4-i}\cdot\frac{4+i}{4+i} &= \frac{12+3i+8i+2i^2}{16-i^2}\\ &= \frac{12+11i+2(-1)}{16-(-1)}\\ &= \frac{10+11i}{17} \quad \text{o} \quad \frac{10}{17}+\frac{11}{17}i\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 65

EJEMPLO 7 **Impedancia** Un concepto necesario en el estudio de la electrónica es la *impedancia*. La impedancia afecta la corriente en un circuito; siendo Z, en un circuito se determina mediante la fórmula $Z=\dfrac{V}{I}$, donde V es el voltaje e I es la corriente. Determine Z cuando $V=1.6-0.3i$ e $I=-0.2i$, donde $i=\sqrt{-1}$.

Solución $Z=\dfrac{V}{I}=\dfrac{1.6-0.3i}{-0.2i}$. Ahora multiplicamos el numerador y el denominador por $0.2i$.

$$\begin{aligned}Z=\frac{1.6-0.3i}{-0.2i}\cdot\frac{0.2i}{0.2i} &= \frac{0.32i-0.06i^2}{-0.04i^2}\\ &= \frac{0.32i+0.06}{0.04}\\ &= \frac{0.32i}{0.04}+\frac{0.06}{0.04}\\ &= 8i+1.5 \quad \text{o} \quad 1.5+8i\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 127

Casi todos los libros de álgebra utilizan i como unidad imaginaria; sin embargo, muchos libros de electrónica utilizan como equivalente la letra j, ya que, en ese contexto, i suele representar la corriente.

5 Determinar potencias de i

Por medio de $i = \sqrt{-1}$ y de $i^2 = -1$, podemos determinar otras **potencias de i**. Por ejemplo,

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \qquad i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1(-1) = -1$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 \qquad i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1(-i) = -i$$
$$i^5 = i^4 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i \qquad i^8 = i^4 \cdot i^4 = (1)(1) = 1$$

Observe que las potencias sucesivas de i rotan por los cuatro valores, $i, -1, -i$, (vea la **figura 7.8**).

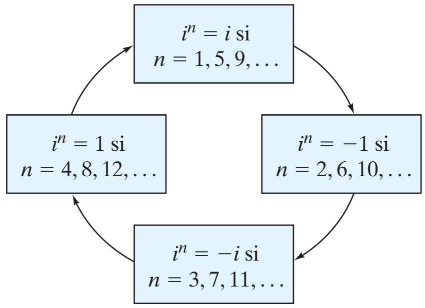


FIGURA 7.8

EJEMPLO 8 Evalúe. **a)** i^{35} **b)** i^{101}

Solución Escribimos cada expresión como un producto de factores tales que el exponente de un factor sea el máximo múltiplo de 4 menor o igual que el exponente dado. Después escribimos este factor como i^4 elevado a alguna potencia. Como i^4 tiene un valor de 1, la expresión i^4 elevada a una potencia también tendrá un valor de 1.

a) $i^{35} = i^{32} \cdot i^3 = (i^4)^8 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = 1(-i) = -i$

b) $i^{101} = i^{100} \cdot i^1 = (i^4)^{25} \cdot i = 1 \cdot i = i$

Ahora resuelva el ejercicio 101

Sugerencia útil

Una forma rápida para evaluar i^n consiste en dividir el exponente entre 4 y analizar el residuo.

Si el residuo es 0, el valor es 1.
Si el residuo es 1, el valor es i.
Si el residuo es 2, el valor es -1.
Si el residuo es 3, el valor es $-i$.

Para el ejemplo 8 **a)**

$$\begin{array}{r} 8 \\ 4\overline{)35} \\ \underline{32} \\ 3 \end{array}$$

La respuesta es $-i$.

$i^{35} = (i^4)^8 \cdot i^3 = (1)^8 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = i^3 = -i$

Para el ejemplo 8 **b)**

$$\begin{array}{r} 25 \\ 4\overline{)101} \\ \underline{8} \\ 21 \\ \underline{20} \\ 1 \end{array}$$

$\leftarrow$ *La respuesta es i.*

EJEMPLO 9 Sea $f(x) = x^2$. Determine: **a)** $f(6i)$ **b)** $f(3 + 7i)$.

Solución

a) $f(x) = x^2$

$f(6i) = (6i)^2 = 36i^2 = 36(-1) = -36$

b) $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f(3 + 7i) = (3 + 7i)^2 &= (3)^2 + 2(3)(7i) + (7i)^2 \\ &= 9 + 42i + 49i^2 \\ &= 9 + 42i + 49(-1) \\ &= 9 + 42i - 49 \\ &= -40 + 42i \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 117

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.7

MathXL® MyMathLab

1. **a)** ¿A qué es igual i?
   b) ¿A qué es igual i^2?
2. Escriba $\sqrt{-n}$ mediante i.
3. ¿Todos los siguientes son números complejos? Si algunos no lo son, explique por qué.
   a) 9 **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** $4 - \sqrt{-2}$
   d) $7 - 3i$ **e)** $4.2i$ **f)** $11 + \sqrt{3}$
4. ¿A qué es igual i^4?
5. ¿Todos los números reales y todos los números imaginarios son números complejos?
6. ¿Todos los números complejos son números reales?
7. ¿Cuál es el conjugado de $a + bi$?
8. **a)** ¿Es $i \cdot i$ un número real? Explique.
   b) ¿Es $i \cdot i \cdot i$ un número real? Explique.
9. Liste, si es posible, un número que *no* sea
   a) un número racional.
   b) un número irracional.
   c) un número real.
   d) un número imaginario.
   e) un número complejo.
10. Escriba un párrafo o dos explicando la relación entre los números reales, los números imaginarios y los números complejos. Incluya cómo se relacionan entre sí los distintos conjuntos de números.

Práctica de habilidades

Escriba cada expresión como un número complejo en la forma a + bi.

11. 7 **12.** $3i$ **13.** $\sqrt{25}$ **14.** $\sqrt{-100}$
15. $21 - \sqrt{-36}$ **16.** $\sqrt{3} + \sqrt{-3}$ **17.** $\sqrt{-24}$ **18.** $\sqrt{49} - \sqrt{-49}$
19. $8 - \sqrt{-12}$ **20.** $\sqrt{-9} + \sqrt{-81}$ **21.** $3 + \sqrt{-98}$ **22.** $\sqrt{-9} + 7i$
23. $12 - \sqrt{-25}$ **24.** $10 + \sqrt{-32}$ **25.** $7i - \sqrt{-45}$ **26.** $\sqrt{144} + \sqrt{-96}$

Sume o reste.

27. $(19 - i) + (2 + 9i)$
28. $(22 + i) - 5(11 - 3i) + 4$
29. $(8 - 3i) + (-8 + 3i)$
30. $(7 - \sqrt{-4}) - (-1 - \sqrt{-16})$
31. $(1 + \sqrt{-1}) + (-18 - \sqrt{-169})$
32. $(16 - i\sqrt{3}) + (17 - \sqrt{-3})$
33. $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (3\sqrt{2} - \sqrt{-8})$
34. $(8 - \sqrt{2}) - (5 + \sqrt{-15})$
35. $(5 - \sqrt{-72}) + (6 + \sqrt{-8})$
36. $(29 + \sqrt{-75}) + (\sqrt{-147})$
37. $(\sqrt{4} - \sqrt{-45}) + (-\sqrt{25} + \sqrt{-5})$
38. $(\sqrt{20} - \sqrt{-12}) + (2\sqrt{5} + \sqrt{-75})$

Multiplique.

39. $2(3 - i)$ **40.** $-7(5 + 3i\sqrt{5})$ **41.** $i(4 + 9i)$
42. $3i(6 - i)$ **43.** $\sqrt{-9}(6 + 11i)$ **44.** $\frac{1}{2}i\left(\frac{1}{3} - 18i\right)$
45. $\sqrt{-16}(\sqrt{3} - 7i)$ **46.** $-\sqrt{-24}(\sqrt{6} - \sqrt{-3})$ **47.** $\sqrt{-27}(\sqrt{3} - \sqrt{-3})$
48. $\sqrt{-32}(\sqrt{2} + \sqrt{-8})$ **49.** $(3 + 2i)(1 + i)$ **50.** $(6 - 2i)(3 + i)$
51. $(10 - 3i)(10 + 3i)$ **52.** $(-4 + 3i)(2 - 5i)$ **53.** $(7 + \sqrt{-2})(5 - \sqrt{-8})$
54. $(\sqrt{4} - 3i)(4 + \sqrt{-4})$ **55.** $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}i\right)$ **56.** $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}i\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}i\right)$

Divida.

57. $\frac{8}{3i}$ **58.** $\frac{5}{4i}$ **59.** $\frac{2 + 3i}{2i}$ **60.** $\frac{7 - 3i}{2i}$
61. $\frac{6}{2 - i}$ **62.** $\frac{9}{5 + i}$ **63.** $\frac{3}{1 - 2i}$ **64.** $\frac{13}{-3 - 4i}$
65. $\frac{6 - 3i}{4 + 2i}$ **66.** $\frac{4 - 3i}{4 + 3i}$ **67.** $\frac{4}{6 - \sqrt{-4}}$ **68.** $\frac{2}{3 + \sqrt{-5}}$
69. $\frac{\sqrt{2}}{5 + \sqrt{-12}}$ **70.** $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{-9}}$ **71.** $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{-3}}{5 - \sqrt{-20}}$ **72.** $\frac{12 - \sqrt{-12}}{\sqrt{3} + \sqrt{-5}}$
73. $\frac{\sqrt{-75}}{\sqrt{-3}}$ **74.** $\frac{\sqrt{-30}}{\sqrt{-2}}$ **75.** $\frac{\sqrt{-32}}{\sqrt{-18}\sqrt{8}}$ **76.** $\frac{\sqrt{-40}\sqrt{-20}}{\sqrt{-4}}$

Realice las operaciones indicadas. Estos ejercicios son una combinación de los que se presentaron antes en esta sección.

77. $(9 - 2i) + (3 - 5i)$

78. $\left(\frac{1}{2} + 2i\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3}i\right)$

79. $(\sqrt{50} - \sqrt{2}) - (\sqrt{-12} - \sqrt{-48})$

80. $(8 - \sqrt{-6}) - (2 - \sqrt{-24})$

81. $5.2(4 - 3.2i)$

82. $\sqrt{-6}(\sqrt{3} - \sqrt{-10})$

83. $(9 + 2i)(3 - 5i)$

84. $(\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{6} - \sqrt{-8})$

85. $\dfrac{11 + 4i}{2i}$

86. $\dfrac{1}{4 + 3i}$

87. $\dfrac{6}{\sqrt{3} - \sqrt{-4}}$

88. $\dfrac{5 - 2i}{3 + 2i}$

89. $\left(11 - \frac{5}{9}i\right) - \left(4 - \frac{3}{5}i\right)$

90. $\frac{8}{7}\left(4 - \frac{2}{5}i\right)$

91. $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}i\right)\left(\frac{3}{5} - \frac{3}{4}i\right)$

92. $\sqrt{\frac{4}{9}}\left(\sqrt{\frac{25}{36}} - \sqrt{-\frac{4}{25}}\right)$

93. $\dfrac{\sqrt{-48}}{\sqrt{-12}}$

94. $\dfrac{-6 - 2i}{2 + \sqrt{-5}}$

95. $(5.23 - 6.41i) - (9.56 + 4.5i)$

96. $(\sqrt{-6} + 3)(\sqrt{-15} + 5)$

Indique si el valor de cada número imaginario es -1, $-i$ o 1.

97. i^6 **98.** i^{63} **99.** i^{160} **100.** i^{231}

101. i^{93} **102.** i^{103} **103.** i^{811} **104.** i^{1213}

Resolución de problemas

105. Considere el número complejo $2 + 3i$.

a) Determine su inverso aditivo.

b) Determine su inverso multiplicativo. Escriba la respuesta en forma simplificada.

106. Considere el número complejo $4 - 5i$.

a) Determine su inverso aditivo.

b) Determine su inverso multiplicativo. Escriba la respuesta en forma simplificada.

En los ejercicios 107 a 110, responda verdadero o falso. Apoye su respuesta con un ejemplo.

107. El producto de dos números imaginarios puros siempre es un número real.

108. La suma de dos números imaginarios puros siempre es un número imaginario puro.

109. El producto de dos números complejos siempre es un número real.

110. La suma de dos números complejos siempre es un número complejo.

111. ¿Qué valores de n hacen que i^n sea un número real? Explique.

112. ¿Qué valores de n hacen que i^{2n} sea un número real? Explique.

113. Si $f(x) = x^2$, determine $f(2i)$.

114. Si $f(x) = x^2$, determine $f(4i)$.

115. Si $f(x) = x^4 - 2x$, determine $f(2i)$.

116. Si $f(x) = x^3 - 4x^2$, determine $f(5i)$.

117. Si $f(x) = x^2 + 2x$, determine $f(3 + i)$.

118. Si $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$, determine $f(4 - i)$.

Evalúe cada expresión para el valor dado de x.

119. $x^2 - 2x + 5, x = 1 + 2i$

120. $x^2 - 2x + 5, x = 1 - 2i$

121. $x^2 + 2x + 7, x = -1 + i\sqrt{5}$

122. $x^2 + 2x + 9, x = -1 - i\sqrt{5}$

En los ejercicios 123 a 126, determine si el valor dado de x es solución de la ecuación.

123. $x^2 - 4x + 5 = 0, x = 2 - i$

124. $x^2 - 4x + 5 = 0, x = 2 + i$

125. $x^2 - 6x + 11 = 0, x = -3 + i\sqrt{3}$

126. $x^2 - 6x + 15 = 0, x = 3 - i\sqrt{3}$

127. **Impedancia** Determine la impedancia, Z, mediante la fórmula $Z = \dfrac{V}{I}$ cuando $V = 1.8 + 0.5i$ e $I = 0.6i$. Vea el ejemplo 7.

128. **Impedancia** Consulte el ejercicio 127. Determine la impedancia cuando $V = 2.4 - 0.6i$ e $I = -0.4i$.

129. Impedancia En determinadas condiciones, la impedancia total, Z_T, de un circuito se determina mediante la fórmula

$$Z_T = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Determine Z_T cuando $Z_1 = 2 - i$ y $Z_2 = 4 + i$

130. Impedancia Consulte el ejercicio 129. Determine Z_T, cuando $Z_1 = 3 - i$ y $Z_2 = 5 + i$.

131. Determine si i^{-1} es igual a $i, -1, -i$ o 1.

132. Determine si i^{-5} es igual a $i, -1, -i$ o 1.

En el capítulo 8 utilizaremos la fórmula cuadrática $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *para resolver ecuaciones con la forma* $ax^2 + bx + c = 0$.

(*a*) *Utilice la fórmula cuadrática para resolver las ecuaciones cuadráticas siguientes.* **(*b*)** *Compruebe cada una de las soluciones sustituyendo los valores encontrados para x (uno a la vez) en la ecuación original. En estos ejercicios, el símbolo ± (se lee "más menos") da como resultado dos respuestas complejas distintas.*

133. $x^2 - 2x + 6 = 0$

134. $x^2 - 4x + 6 = 0$

Dados los números complejos $a = 5 + 2i\sqrt{3}$, $b = 1 + i\sqrt{3}$, *evalúe cada expresión.*

135. $a + b$

136. $a - b$

137. ab

138. $\dfrac{a}{b}$

Ejercicios de repaso acumulativo

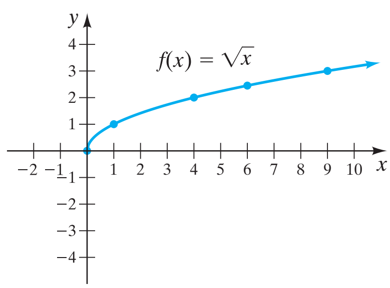
[4.3] **139. Mezcla** Berreda Coughlin, un abarrotero, tiene dos tipos de café en su almacén; uno lo vende a $5.50 por libra y el otro en $6.30. ¿Cuántas libras de cada tipo debe mezclar para producir 40 libras de café para vender a $6.00 por libra?

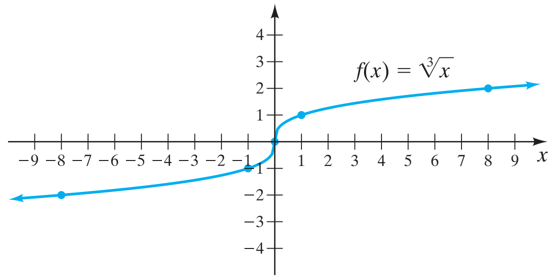
[5.3] **140.** Divida $\dfrac{8c^2 + 6c - 35}{4c + 9}$.

[6.2] **141.** Sume $\dfrac{b}{a - b} + \dfrac{a + b}{b}$.

[6.4] **142.** Resuelva $\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{x - 1}{2}$.

Resumen del capítulo 7

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.1	
Una **expresión radical** tiene la forma $\sqrt[n]{x}$, donde n es el índice y x es el radicando.	En la expresión radical $\sqrt[3]{x}$, 3 es el índice y x es el radicando.
La **raíz cuadrada principal** de un número positivo a, escrita $\sqrt{a}$, es el número positivo b tal que $b^2 = a$.	$\sqrt{81} = 9$, ya que $9^2 = 81$ $\sqrt{0.36} = 0.6$ ya que $(0.6)^2 = 0.36$
La **función raíz cuadrada** es $f(x) = \sqrt{x}$. Su dominio es $[0, \infty)$ y su rango es $[0, \infty)$.	
La **raíz cúbica** de un número a, escrita $\sqrt[3]{a}$, es el número b tal que $b^3 = a$.	$\sqrt[3]{27} = 3$ ya que $3^3 = 27$ $\sqrt[3]{-125} = -5$ ya que $(-5)^3 = -125$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.1 (continuación)	
La **función raíz cúbica** es $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Su dominio es $(-\infty, \infty)$ o $\mathbb{R}$ y su rango es $(-\infty, \infty)$ o $\mathbb{R}$.	
La raíz n-ésima de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un **índice par** y a es un número real no negativo, es el número no negativo b tal que $b^n = a$.	$\sqrt{4} = 2$ ya que $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$ $\sqrt[4]{81} = 3$ ya que $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
La raíz n-ésima de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un **índice impar** y a es cualquier número real, es el número real b tal que $b^n = a$.	$\sqrt[3]{27} = 3$ ya que $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ $\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$
Para cualquier número real a, $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$.	$\sqrt{(-6)^2} = \lvert -6 \rvert = 6$ $\sqrt{(y+8)^2} = \lvert y + 8 \rvert$
Sección 7.2	
Exponente racional $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ Cuando a es no negativo, n puede ser cualquier índice. Cuando a es negativo, n debe ser impar.	$\sqrt{17} = 17^{1/2}$ $\sqrt[4]{21x^3y^2} = (21x^3y^2)^{1/4}$
Para cualquier número no negativo a, y enteros m y n. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\overset{\text{Potencia}}{m}/\underset{\text{Índice}}{n}}$	$\sqrt[4]{z^9} = (\sqrt[4]{z})^9 = z^{9/4}$
Para cualquier número real no negativo a. $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a^{n/n} = a$	$\sqrt[4]{y^4} = y, \quad \sqrt[8]{14^8} = 14$
Reglas de los exponentes Para todos los números reales a y b y todos los números racionales m y n, Regla del producto $\quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ Regla del cociente $\quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$ Regla del exponente no negativo $\quad a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}, \quad a \neq 0$ Regla del exponente cero $\quad a^0 = 1, \quad a \neq 0$ Elevar una potencia a una potencia $\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$ Elevar un producto a una potencia $\quad (ab)^m = a^m b^m$ Elevar un cociente a una potencia $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}, \quad a \neq 0, b \neq 0$	$x^{1/3} \cdot x^{4/3} = x^{(1/3)+(4/3)} = x^{5/3}$ $\dfrac{x^{4/5}}{x^{1/2}} = x^{(4/5)-(1/2)} = x^{(8/10)-(5/10)} = x^{3/10}$ $x^{-1/7} = \dfrac{1}{x^{1/7}}$ $m^0 = 1$ $(c^{1/8})^{16} = c^{(1/8)\cdot 16} = c^2$ $(p^3q^4)^{1/8} = p^{3/8}q^{1/2}$ $\left(\dfrac{81}{49}\right)^{-1/2} = \left(\dfrac{49}{81}\right)^{1/2} = \dfrac{49^{1/2}}{81^{1/2}} = \dfrac{7}{9}$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.3	
Un número o expresión es un **cuadrado perfecto** si es el cuadrado de una expresión.	Cuadrados perfectos: $49 \quad 81 \quad x^{12} \quad y^{50}$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ Cuadrado de un número o expresión: $7^2 \quad 9^2 \quad (x^6)^2 \quad (y^{25})^2$
Un número o expresión es un **cubo perfecto** si es el cubo de una expresión.	Cubos perfectos: $27 \quad -27 \quad y^{18} \quad z^{30}$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ Cubo de un número o expresión: $3^3 \quad (-3)^3 \quad (y^6)^3 \quad (z^{10})^3$
Regla del producto para radicales Para números reales no negativos a y b, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4, \quad \sqrt[3]{2x^3} = \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{2} = x\sqrt[3]{2}$
Para simplificar radicales mediante la regla del producto **1.** Si el radicando tiene un coeficiente diferente de 1, escríbalo como un producto de dos números, uno de los cuales sea la mayor potencia perfecta para el índice. **2.** Escriba cada factor variable como un producto de dos factores, uno de los cuales sea la mayor potencia perfecta para el índice. **3.** Utilice la regla del producto para escribir la expresión radical como un producto de radicales. Coloque todas las potencias perfectas (números y variables) bajo el mismo radical. **4.** Simplifique el radical que tiene las potencias perfectas.	$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4}\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ $\sqrt[3]{16x^5y^9} = \sqrt[3]{8x^3y^9 \cdot 2x^2}$ $= \sqrt[3]{8x^3y^9}\sqrt[3]{2x^2}$ $= 2xy^3\sqrt[3]{2x^2}$
Regla del cociente para radicales Para números reales no negativos a y b, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, \quad b \neq 0$	$\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4, \quad \sqrt[3]{\dfrac{x^6}{y^{12}}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{y^{12}}} = \dfrac{x^2}{y^4}$
Sección 7.4	
Radicales semejantes son radicales con el mismo radicando y el mismo índice. **Radicales diferentes** son radicales con un radicando o el índice diferente.	Radicales semejantes: $\sqrt{3}, \quad 12\sqrt{3}$; $\quad 2\sqrt[4]{xy^3}, \quad -3\sqrt[4]{xy^3}$ Radicales no semejantes: $\sqrt{3}, \quad 7\sqrt[4]{3}$; $\quad \sqrt[5]{xy^3}, \quad x\sqrt[5]{y^3}$
Para sumar o restar radicales **1.** Simplifique cada expresión radical. **2.** Combine los radicales semejantes (si los hay).	$\sqrt{27} + \sqrt{48} - 2\sqrt{75} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{3}$ $= 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3}$ $= -3\sqrt{3}$
Para multiplicar radicales Utilice la regla del producto $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[4]{8c^2}\sqrt[4]{4c^3} = \sqrt[4]{32c^5} = \sqrt[4]{16c^4}\sqrt[4]{2c}$ $= 2c\sqrt[4]{2c}$
Sección 7.5	
Para **racionalizar un denominador** multiplique el numerador y el denominador de la fracción por el radical que dé como resultado que el radicando en el denominador sea una potencia perfecta.	$\dfrac{6}{\sqrt{3x}} \cdot \dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}} = \dfrac{6\sqrt{3x}}{\sqrt{9x^2}} = \dfrac{6\sqrt{3x}}{3x} = \dfrac{2\sqrt{3x}}{x}$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.5 (continuación)	
Una expresión radical está simplificada cuando se cumple todo lo siguiente **1.** No hay potencias perfectas que sean factores del radicando y todos los exponentes en el radicando son menores que el índice. **2.** Ningún radicando tiene fracciones. **3.** Ningún denominador tiene radicales.	No está simplificada — Simplificada **1.** $\sqrt{x^3}$ — $x\sqrt{x}$ **2.** $\sqrt{\frac{1}{2}}$ — $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **3.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ — $\frac{\sqrt{2}}{2}$
Sección 7.6	
Para resolver ecuaciones radicales **1.** Reescriba la ecuación de modo que un radical con una variable quede solo (aislado) en un lado de la ecuación. **2.** Eleve cada lado de la ecuación a una potencia igual al índice del radical. **3.** Reduzca los términos semejantes. **4.** Si la ecuación aún tiene un término con una variable en un radicando, repita los pasos 1 a 3. **5.** Despeje la variable de la ecuación resultante. **6.** Compruebe todas las soluciones en la ecuación original, para detectar raíces extrañas (si las hay).	Resuelva $\sqrt{x} - 8 = 0$. $\sqrt{x} - 8 = 0$ $\sqrt{x} = 8$ $(\sqrt{x})^2 = 8^2$ $x = 64$ Una verificación muestra que 64 es la solución.
Sección 7.7	
La **unidad imaginaria**, i, se define como $i = \sqrt{-1}$. (También, $i^2 = -1$.)	$\sqrt{-25} = \sqrt{25}\sqrt{-1} = 5i$
Número imaginario Para cualquier número positivo n, $\sqrt{-n} = i\sqrt{n}$.	$\sqrt{-19} = i\sqrt{19}$
Un **número complejo** es un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.	$3 + 2i$ y $26 - 15i$ son números complejos.
Para sumar o restar números complejos **1.** Cambie todos los números imaginarios a la forma bi. **2.** Sume (o reste) las partes reales de los números complejos. **3.** Sume (o reste) las partes imaginarias de los números complejos. **4.** Escriba la respuesta en la forma $a + bi$.	Sume $(8 - 3i) + (12 + 5i)$. $(8 - 3i) + (12 + 5i)$ $= 8 + 12 - 3i + 5i$ $= 20 + 2i$
Para multiplicar números complejos **1.** Cambie todos los números imaginarios a la forma bi. **2.** Multiplique los números complejos como multiplicaría polinomios. **3.** Sustituya i^2 por -1. **4.** Reduzca las partes reales y las partes imaginarias. Escriba la respuesta en la forma $a + bi$.	Multiplique $(7 + 2i\sqrt{3})(5 - 4i\sqrt{3})$. $(7 + 2i\sqrt{3})(5 - 4i\sqrt{3})$ $= 35 - 28i\sqrt{3} + 10i\sqrt{3} - 8(i^2)(3)$ $= 35 - 28i\sqrt{3} + 10i\sqrt{3} + 24$ $= 59 - 18i\sqrt{3}$
El **conjugado de un número complejo** $a + bi$ es $a - bi$.	Número complejo — Conjugado $14 + 2i$ — $14 - 2i$ $17 - 8i$ — $17 + 8i$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.7 (continuación)	
Para dividir números complejos **1.** Cambie todos los números imaginarios a la forma *bi*. **2.** Racionalice el denominador, multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. **3.** Escriba la respuesta en la forma $a + bi$.	Divida $\frac{2-i}{5+3i}$. $\frac{2-i}{5+3i}\cdot\frac{5-3i}{5-3i} = \frac{10-6i-5i+3i^2}{25-9i^2} = \frac{7-11i}{34}$
Potencias de i $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$	$i^{38} = i^{36}\cdot i^2 = (i^4)^9\cdot i^2 = 1^9\cdot(-1) = -1$ $i^{63} = i^{60}\cdot i^3 = (i^4)^{15}\cdot i^3 = 1^{15}(-i) = -i$

Ejercicios de repaso del capítulo 7

[7.1] *Evalúe*

1. $\sqrt{100}$ **2.** $\sqrt[3]{-27}$ **3.** $\sqrt[3]{-125}$ **4.** $\sqrt[4]{256}$

Utilice el valor absoluto para evaluar.

5. $\sqrt{(-8)^2}$ **6.** $\sqrt{(38.2)^2}$

Escriba como un valor absoluto.

7. $\sqrt{x^2}$ **8.** $\sqrt{(x-3)^2}$ **9.** $\sqrt{(x-y)^2}$ **10.** $\sqrt{(x^2-4x+12)^2}$

11. Sea $f(x) = \sqrt{10x+9}$. Determine $f(4)$.

12. Sea $k(x) = 2x + \sqrt{\frac{x}{3}}$. Determine $k(27)$.

13. Sea $g(x) = \sqrt[3]{2x+3}$. Determine $g(4)$ y redondee la respuesta al décimo más cercano

14. **Área** El área de un cuadrado mide 144 metros cuadrados. Determine la longitud de cada uno de sus lados.

Para el resto de estos ejercicios de repaso, suponga que todas las variables representan números reales positivos.

[7.2] *Escriba en forma exponencial.*

15. $\sqrt{x^7}$ **16.** $\sqrt[3]{x^5}$ **17.** $(\sqrt[4]{y})^{13}$ **18.** $\sqrt[7]{6^{-2}}$

Escriba en forma radical.

19. $x^{1/2}$ **20.** $a^{4/5}$ **21.** $(8m^2n)^{7/4}$ **22.** $(x+y)^{-5/3}$

Simplifique cada expresión radical cambiándola a forma exponencial. Escriba la respuesta en forma radical cuando sea apropiado.

23. $\sqrt[3]{4^6}$ **24.** $\sqrt{x^{12}}$ **25.** $(\sqrt[4]{9})^8$ **26.** $\sqrt[20]{a^5}$

Evalúe, si es posible. Si la expresión no es un número real, indíquelo.

27. $-36^{1/2}$ **28.** $(-36)^{1/2}$ **29.** $\left(\frac{64}{27}\right)^{-1/3}$ **30.** $64^{-1/2} + 8^{-2/3}$

Simplifique. Escriba la respuesta sin exponentes negativos.

31. $x^{3/5}\cdot x^{-1/3}$ **32.** $\left(\frac{64}{y^9}\right)^{1/3}$ **33.** $\left(\frac{a^{-6/5}}{a^{2/5}}\right)^{2/3}$ **34.** $\left(\frac{20x^5y^{-3}}{4y^{1/2}}\right)^2$

Multiplique.

35. $a^{1/2}(5a^{3/2} - 3a^2)$ **36.** $4x^{-2/3}\left(x^{-1/2} + \frac{11}{4}x^{2/3}\right)$

Factorice cada expresión. Escriba la respuesta sin exponentes negativos.

37. $x^{2/5} + x^{7/5}$ **38.** $a^{-1/2} + a^{3/2}$

Determine el valor indicado en cada función. Utilice su calculadora para evaluar los números irracionales. Redondee los números irracionales al milésimo más cercano.

39. Si $f(x) = \sqrt{6x-11}$, determine $f(6)$.

40. Si $g(x) = \sqrt[3]{9x-17}$, determine $g(4)$.

Grafique las funciones siguientes.

41. $f(x) = \sqrt{x}$

42. $f(x) = \sqrt{x} - 4$

[7.2–7.5] *Simplifique.*

43. $\sqrt{48}$

44. $\sqrt[3]{128}$

45. $\sqrt{\frac{49}{9}}$

46. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$

47. $-\sqrt{\frac{81}{49}}$

48. $\sqrt[3]{-\frac{27}{125}}$

49. $\sqrt{32}\sqrt{2}$

50. $\sqrt[3]{32}\sqrt[3]{2}$

51. $\sqrt{18x^2y^3z^4}$

52. $\sqrt{75x^3y^7}$

53. $\sqrt[3]{54a^7b^{10}}$

54. $\sqrt[3]{125x^8y^9z^{16}}$

55. $\left(\sqrt[6]{x^2y^3z^5}\right)^{42}$

56. $\left(\sqrt[5]{2ab^4c^6}\right)^{15}$

57. $\sqrt{5x}\sqrt{8x^5}$

58. $\sqrt[3]{2x^2y}\sqrt[3]{4x^9y^4}$

59. $\sqrt[3]{2x^4y^5}\sqrt[3]{16x^4y^4}$

60. $\sqrt[4]{4x^4y^7}\sqrt[4]{4x^5y^9}$

61. $\sqrt{3x}(\sqrt{12x} - \sqrt{20})$

62. $\sqrt[3]{2x^2y}\left(\sqrt[3]{4x^4y^7} + \sqrt[3]{9x}\right)$

63. $\sqrt{\sqrt{a^3b^2}}$

64. $\sqrt{\sqrt[3]{x^5y^2}}$

65. $\left(\frac{4r^2p^{1/3}}{r^{1/2}p^{4/3}}\right)^3$

66. $\left(\frac{6y^{2/5}z^{1/3}}{x^{-1}y^{3/5}}\right)^{-1}$

67. $\sqrt{\frac{3}{5}}$

68. $\sqrt[3]{\frac{7}{9}}$

69. $\sqrt[4]{\frac{5}{4}}$

70. $\frac{x}{\sqrt{10}}$

71. $\frac{8}{\sqrt{x}}$

72. $\frac{m}{\sqrt[3]{25}}$

73. $\frac{10}{\sqrt[3]{y^2}}$

74. $\frac{9}{\sqrt[4]{z}}$

75. $\sqrt[3]{\frac{x^3}{27}}$

76. $\frac{\sqrt[3]{2x^{10}}}{\sqrt[3]{16x^7}}$

77. $\sqrt{\frac{32x^2y^5}{2x^8y}}$

78. $\sqrt[4]{\frac{48x^9y^{15}}{3xy^3}}$

79. $\sqrt{\frac{6x^4}{y}}$

80. $\sqrt{\frac{12a}{7b}}$

81. $\sqrt{\frac{18x^4y^5}{3z}}$

82. $\sqrt{\frac{125x^2y^5}{3z}}$

83. $\sqrt[3]{\frac{108x^3y^7}{2y^3}}$

84. $\sqrt[3]{\frac{3x}{5y}}$

85. $\sqrt[3]{\frac{9x^5y^3}{x^6}}$

86. $\sqrt[3]{\frac{y^6}{5x^2}}$

87. $\sqrt[4]{\frac{2a^2b^{11}}{a^5b}}$

88. $\sqrt[4]{\frac{3x^2y^6}{8x^3}}$

89. $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$

90. $(\sqrt{x} + y)(\sqrt{x} - y)$

91. $(x - \sqrt{y})(x + \sqrt{y})$

92. $(\sqrt{3} + 2)^2$

93. $(\sqrt{x} - \sqrt{3y})(\sqrt{x} + \sqrt{5y})$

94. $(\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{3y})(\sqrt[3]{3x} - \sqrt[3]{2y})$

95. $\frac{6}{2 + \sqrt{5}}$

96. $\frac{x}{4 + \sqrt{x}}$

97. $\frac{a}{4 - \sqrt{b}}$

98. $\frac{x}{\sqrt{y} - 7}$

99. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

100. $\frac{\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

101. $\frac{2}{\sqrt{a - 1} - 2}$

102. $\frac{5}{\sqrt{y + 2} - 3}$

103. $\sqrt[3]{x} + 10\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x}$

104. $\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{192}$

105. $\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{64}$

106. $\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{32}} + \sqrt{50}$

107. $9\sqrt{x^5y^6} - \sqrt{16x^7y^8}$

108. $8\sqrt[3]{x^7y^8} - \sqrt[3]{x^4y^2} + 3\sqrt[3]{x^{10}y^2}$

En los ejercicios 109 y 110, f(x) y g(x) están dadas. Determine $(f \cdot g)(x)$.

109. $f(x) = \sqrt{3x}, g(x) = \sqrt{6x} - \sqrt{15}$

110. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2}, g(x) = \sqrt[3]{4x^4} + \sqrt[3]{16x^5}$

Simplifique. En el ejercicio 112, suponga que la variable puede ser cualquier número real.

111. $f(x) = \sqrt{2x + 7}\sqrt{2x + 7}, x \geq -\frac{7}{2}$

112. $g(a) = \sqrt{20a^2 + 100a + 125}$

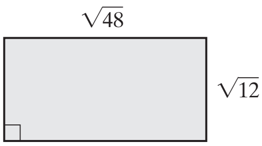
Simplifique.

113. $\frac{\sqrt[3]{(x + 5)^5}}{\sqrt{(x + 5)^3}}$

114. $\frac{\sqrt[3]{a^3b^2}}{\sqrt[4]{a^4b}}$

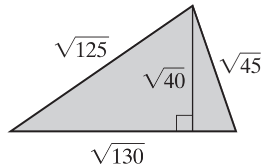
Perímetro y área *Para cada figura, determine* **a)** *el perímetro, y* **b)** *el área. Escriba sus respuestas en forma radical, con los radicales simplificados.*

115.

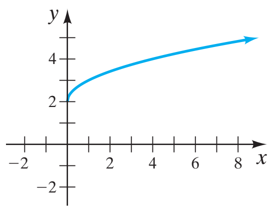


Rectángulo

116.

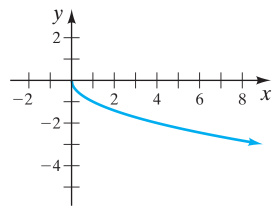


117. Ésta es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x} + 2$.



a) Para $g(x) = -3$, trace la gráfica de $(f + g)(x)$.
b) ¿Cuál es el dominio de $(f + g)(x)$?

118. Ésta es la gráfica de $f(x) = -\sqrt{x}$



a) Para $g(x) = \sqrt{x} + 2$, trace la gráfica de $(f + g)(x)$.
b) ¿Cuál es el dominio de $(f + g)(x)$?

[7.6] *Resuelva cada ecuación y compruebe sus soluciones.*

119. $\sqrt{x} = 9$

120. $\sqrt{x} = -4$

121. $\sqrt[3]{x} = 4$

122. $\sqrt[3]{x} = -5$

123. $7 + \sqrt{x} = 10$

124. $7 + \sqrt[3]{x} = 12$

125. $\sqrt{3x + 4} = \sqrt{5x + 14}$

126. $\sqrt{x^2 + 2x - 8} = x$

127. $\sqrt[3]{x - 9} = \sqrt[3]{5x + 3}$

128. $(x^2 + 7)^{1/2} = x + 1$

129. $\sqrt{x} + 3 = \sqrt{3x + 9}$

130. $\sqrt{6x - 5} - \sqrt{2x + 6} - 1 = 0$

Para cada par de funciones, determine todos los valores de x para los que $f(x) = g(x)$.

131. $f(x) = \sqrt{3x + 4}$, $g(x) = 2\sqrt{2x - 4}$

132. $f(x) = (4x + 5)^{1/3}$, $g(x) = (6x - 7)^{1/3}$

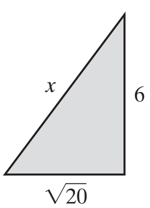
Despeje la variable que se indica.

133. $V = \sqrt{\dfrac{2L}{w}}$, para L

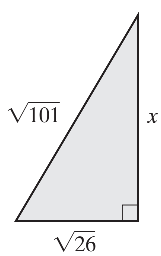
134. $r = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$, para A

Determine la longitud del lado desconocido de cada triángulo rectángulo. Escriba la respuesta como un radical en forma simplificada.

135.



136.



Resuelva.

137. Poste telefónico ¿Cuál es la longitud del cable que necesita utilizar una compañía telefónica para alcanzar la parte superior de un poste telefónico de 5 metros desde un punto a 2 metros de la base del poste?

138. Velocidad Utilice la fórmula $v = \sqrt{2gh}$ para determinar la velocidad de un objeto después de haber caído 20 pies ($g = 32$ pies/s^2).

139. Péndulo Utilice la fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$$

para determinar el periodo de un péndulo, T, si su longitud, L, es de 64 pies.

140. Energía cinética y energía potencial Existen dos tipos de energía: cinética y potencial, La energía potencial es la energía debida a su posición y la energía cinética se debe al movimiento. Por ejemplo, si sostiene una bola de billar a cierta altura del suelo, ésta tiene energía potencial; si la suelta, la energía potencial se transforma en energía cinética al caer. La fórmula

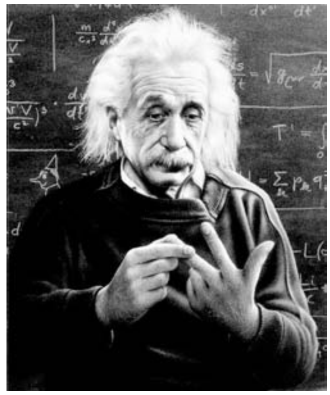
$$V = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

puede usarse para determinar la velocidad, V, en metros por segundo, cuando una masa, m, en kilogramos, tiene una energía cinética, K, en joules. Se lanza una bola de béisbol de 0.145 kg. Si la energía cinética de la bola en movimiento es de 45 joules, ¿a qué velocidad se está moviendo la bola?

141. Velocidad de la luz Albert Einstein determinó que si un objeto en reposo, con masa m_0, se hace viajar a una velocidad cercana a la de la luz, su masa aumenta a m, donde

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

En la fórmula, v es la velocidad del objeto en movimiento y c es la velocidad de la luz.* En un acelerador usado para terapia contra el cáncer, las partículas viajan a velocidades de $0.98c$, esto es, a 98% de la velocidad de la luz. A una velocidad de $0.98c$, determine la masa de la partícula, m, en términos de su masa en reposo, m_0. Utilice $v = 0.98c$ en la fórmula anterior.



[7.7] *Escriba cada expresión como un número complejo en la forma $a + bi$.*

142. 5 **143.** -8 **144.** $7 - \sqrt{-256}$ **145.** $9 + \sqrt{-16}$

Realice cada operación que se indica.

146. $(3 + 2i) + (10 - i)$ **147.** $(9 - 6i) - (3 - 4i)$ **148.** $(\sqrt{3} + \sqrt{-5}) + (11\sqrt{3} - \sqrt{-7})$

149. $\sqrt{-6}(\sqrt{6} + \sqrt{-6})$ **150.** $(4 + 3i)(2 - 3i)$ **151.** $(6 + \sqrt{-3})(4 - \sqrt{-15})$

152. $\dfrac{8}{3i}$ **153.** $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2i}$ **154.** $\dfrac{4}{3 + 2i}$ **155.** $\dfrac{\sqrt{3}}{5 - \sqrt{-6}}$

Evalúe cada expresión para el valor dado de x.

156. $x^2 - 2x + 9, x = 1 + 2i\sqrt{2}$ **157.** $x^2 - 2x + 12, x = 1 - 2i$

Indique si el valor de cada número imaginario es i, -1, $-i$ o 1.

158. i^{33} **159.** i^{59} **160.** i^{404} **161.** i^{802}

*La velocidad de la luz es 3.00×10^8 metros por segundo. Sin embargo, no necesitamos esta información para resolver el problema.

Examen de práctica del capítulo 7

*Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección donde se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en el **Chapter Test Prep Video CD**. Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. Escriba $\sqrt{(5x - 3)^2}$ como un valor absoluto.
2. Simplifique $\left(\dfrac{x^{2/5} \cdot x^{-1}}{x^{3/5}}\right)^2$.
3. Factorice $x^{-2/3} + x^{4/3}$.
4. Grafique $g(x) = \sqrt{x} + 1$.

En los ejercicios 5 a 14, simplifique. Suponga que todas las variables representan números reales positivos.

5. $\sqrt{54x^7y^{10}}$
6. $\sqrt[3]{25x^5y^2}\,\sqrt[3]{10x^6y^8}$
7. $\sqrt{\dfrac{7x^6y^3}{8z}}$
8. $\dfrac{9}{\sqrt[3]{x}}$
9. $\dfrac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{27}}$
10. $2\sqrt{24} - 6\sqrt{6} + 3\sqrt{54}$
11. $\sqrt[3]{8x^3y^5} + 4\sqrt[3]{x^6y^8}$
12. $(\sqrt{3} - 2)(6 - \sqrt{8})$
13. $\sqrt[4]{\sqrt{x^5y^3}}$
14. $\dfrac{\sqrt[4]{(7x + 2)^5}}{\sqrt[3]{(7x + 2)^2}}$

En los ejercicios 15-17 resuelva la ecuación.

15. $\sqrt{2x + 19} = 3$
16. $\sqrt{x^2 - x - 12} = x + 3$
17. $\sqrt{a - 8} = \sqrt{a} - 2$
18. Para $f(x) = (9x + 37)^{1/3}$ y $g(x) = 2(2x + 2)^{1/3}$, determine todos los valores de x tales que $f(x) = g(x)$.
19. Despeje g de la fórmula $w = \dfrac{\sqrt{2gh}}{4}$.

20. Objeto en caída La velocidad, V, en pies por segundo, después de que un objeto ha caído una distancia, h, en pies, puede determinarse mediante la fórmula $V = \sqrt{64.4h}$. Determine la velocidad de una pluma (bolígrafo) después de que ha caído 200 pies.

21. Escalera Una escalera se recarga contra una casa. Si la base de la escalera está a 5 pies de la casa y su parte superior descansa sobre la casa a 12 pies por encima del piso, determine la longitud de la escalera.

22. Resortes Una fórmula que se emplea en el estudio de resortes es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

donde T es el periodo del resorte (el tiempo necesario para que el resorte se alargue y regrese a su punto de reposo), m es la masa en el resorte, en kilogramos, y k es la constante del resorte, en newtons/metro. Una masa de 1400 kilogramos descansa sobre un resorte. Determine el periodo del resorte si su constante del resorte es de 65,000 newtons/metro.

23. Multiplique $(6 - \sqrt{-4})(2 + \sqrt{-16})$.

24. Divida $\dfrac{5 - i}{7 + 2i}$.

25. Evalúe $x^2 + 6x + 12$ para $x = -3 + i$.

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen siguiente y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revise las preguntas que haya respondido en forma incorrecta. La sección y objetivo donde se estudia el material se indica después de la respuesta.

1. Resuelva $\frac{1}{5}(x - 3) = \frac{3}{4}(x + 3) - x$.

2. Resuelva $3(x - 4) = 6x - (4 - 5x)$.

3. Suéter Cuando su precio se rebaja 60%, un suéter cuesta \$16. Determine el precio original del suéter.

4. Determine el conjunto solución de $|3 - 2x| < 5$.

5. Grafique $y = \frac{3}{2}x - 3$.

6. Determine si las gráficas de las ecuaciones siguientes son rectas paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas.

$$y = 3x - 8$$
$$6y = 18x + 12$$

7. Dadas $f(x) = x^2 - 3x + 4$ y $g(x) = 2x - 9$, determine $(g - f)(x)$.

8. Determine la ecuación de la recta que pasa por $(1, -4)$, y que es perpendicular a la gráfica de $3x - 2y = 6$.

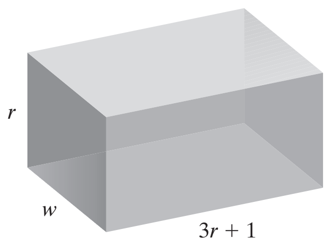
9. Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$x + 2y = 12$$
$$4x = 8$$
$$3x - 4y + 5z = 20$$

10. Evalúe el determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

11. Volumen El volumen de la caja que se ilustra a continuación es $6r^3 + 5r^2 + r$. Determine w en términos de r.



12. Multiplique $(5xy - 3)(5xy + 3)$.

13. Resuelva $\sqrt{2x^2 + 7} + 3 = 8$.

14. Factorice $4x^3 - 9x^2 + 5x$.

15. Factorice $(x + 1)^3 - 27$.

16. Resuelva $8x^2 - 3 = -10x$.

17. Multiplique $\dfrac{4x + 4y}{x^2y} \cdot \dfrac{y^3}{12x}$.

18. Sume $\dfrac{x - 4}{x - 5} - \dfrac{3}{x + 5} - \dfrac{10}{x^2 - 25}$.

19. Resuelva $\dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{x}$.

20. Objeto en caída La distancia, d, de un objeto en caída libre es directamente proporcional al cuadrado del tiempo, t. Si un objeto cae 16 pies en 1 segundo, ¿qué distancia recorrerá un objeto que cae durante 5 segundos?

8 Funciones cuadráticas

OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En la sección 5.1 presentamos las funciones cuadráticas; ahora ampliaremos los conceptos correspondientes. Explicaremos cómo completar el cuadrado y la fórmula cuadrática. Después de estudiar estas secciones, conoceremos tres técnicas para la resolución de ecuaciones cuadráticas: factorización (cuando esto sea posible), completar el cuadrado y la fórmula cuadrática. Además, analizaremos técnicas para representar gráficamente funciones cuadráticas y desigualdades no lineales con una variable.

EXISTEN MUCHAS SITUACIONES DE LA VIDA REAL que pueden representarse o aproximarse mediante el uso de ecuaciones cuadráticas; a lo largo de este capítulo verá varias aplicaciones reales de ecuaciones y de funciones cuadráticas. Por ejemplo, en los ejercicios 101 y 102 de la página 538 utilizaremos las ecuaciones cuadráticas y la fórmula cuadrática para determinar el tiempo que tarda en caer una gota de agua desde lo alto de una cascada hasta llegar a la parte inferior de la misma.

8.1 Resolución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

1 Usar la propiedad de la raíz cuadrada para resolver ecuaciones.

2 Entender los trinomios cuadrados perfectos.

3 Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado.

En esta sección se presentarán dos nuevos conceptos, la propiedad de la raíz cuadrada y cómo completar el cuadrado. La propiedad de la raíz cuadrada se utilizará en varias secciones de este libro.

En la sección 5.8 resolvimos ecuaciones cuadráticas, o de segundo grado, mediante la factorización. Las ecuaciones cuadráticas que no se pueden resolver mediante factorización, pueden solucionarse completando el cuadrado, o mediante la fórmula cuadrática que se presenta en la sección 8.2.

1 Usar la propiedad de la raíz cuadrada para resolver ecuaciones

En la sección 7.1 se dijo que todo número positivo tiene dos raíces cuadradas. Hasta ahora sólo hemos utilizado la raíz cuadrada positiva. En esta sección utilizaremos ambas, tanto la raíz cuadrada positiva como la raíz cuadrada negativa de un número.

Raíz cuadrada positiva de 25	Raíz cuadrada negativa de 25
$\sqrt{25} = 5$	$-\sqrt{25} = -5$

Una manera práctica de indicar las dos raíces cuadradas de un número es utilizando el símbolo más o menos, $\pm$. Por ejemplo, las raíces cuadradas de 25 pueden indicarse mediante ± 5, expresión que se lee "más, menos 5". La ecuación $x^2 = 25$, tiene dos soluciones: las dos raíces cuadradas de 25, que son ± 5. Si verifica cada raíz, verá que ambos valores satisfacen la ecuación. Puede utilizarse la **propiedad de la raíz cuadrada** para determinar las soluciones de ecuaciones con la forma $x^2 = a$.

Propiedad de la raíz cuadrada

Si $x^2 = a$, donde a es un número real, entonces $x = \pm\sqrt{a}$.

EJEMPLO 1 Sume 9 a ambos lados de la ecuación para aislar la variable.

a) $x^2 - 9 = 0$ **b)** $x^2 + 10 = 85$

Solución

a) Resuelva las ecuaciones siguientes.

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 \\ x^2 &= 9 && \textit{Aislar la variable.} \\ x &= \pm\sqrt{9} && \textit{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ &= \pm 3 \end{aligned}$$

Compruebe las soluciones en la ecuación original.

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ x^2 - 9 &= 0 \\ 3^2 - 9 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \textit{Verdadero} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 3 \\ x^2 - 9 &= 0 \\ (-3)^2 - 9 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \textit{Verdadero} \end{aligned}$$

En ambos casos la comprobación nos da un resultado verdadero, lo que significa que tanto 3 como -3 son soluciones de la ecuación.

b)

$$\begin{aligned} x^2 + 10 &= 85 \\ x^2 &= 75 && \textit{Aislar la variable.} \\ x &= \pm\sqrt{75} && \textit{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ &= \pm\sqrt{25}\,\sqrt{3} && \textit{Simplificar.} \\ &= \pm 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Las soluciones son $5\sqrt{3}$ y $-5\sqrt{3}$.

Ahora resuelva el ejercicio 13

No todas las ecuaciones cuadráticas tienen soluciones reales, como se ilustra en el ejemplo 2:

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva la ecuación $x^2 + 7 = 0$.

Solución

$$\begin{aligned} x^2 + 7 &= 0 \\ x^2 &= -7 && \text{Aislar la variable.} \\ x &= \pm\sqrt{-7} && \text{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ &= \pm i\sqrt{7} \end{aligned}$$

Las soluciones son $i\sqrt{7}$ y $-i\sqrt{7}$, ambos son números imaginarios.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 15**

EJEMPLO 3 ▸ Resuelva **a)** $(a - 5)^2 = 32$ **b)** $(z + 3)^2 + 28 = 0$.

Solución

a) Como el término que incluye la variable ya está aislado, empiece usando la propiedad de la raíz cuadrada.

$$\begin{aligned} (a - 5)^2 &= 32 \\ a - 5 &= \pm\sqrt{32} && \text{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ a &= 5 \pm \sqrt{32} && \text{Sumar cinco a ambos lados.} \\ &= 5 \pm \sqrt{16}\sqrt{2} && \text{Simplificar.} \\ &= 5 \pm 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Las soluciones son $5 + 4\sqrt{2}$ y $5 - 4\sqrt{2}$.

b) Inicie restando 28 en ambos lados de la ecuación para aislar el término que contiene la variable.

$$\begin{aligned} (z + 3)^2 + 28 &= 0 \\ (z + 3)^2 &= -28 \end{aligned}$$

Ahora utilice la propiedad de la raíz cuadrada.

$$\begin{aligned} z + 3 &= \pm\sqrt{-28} && \text{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ z &= -3 \pm \sqrt{-28} && \text{Restar 3 de ambos lados.} \\ &= -3 \pm \sqrt{28}\sqrt{-1} \\ &= -3 \pm i\sqrt{4}\sqrt{7} && \text{Simplificar } \sqrt{28} \text{ y reemplazar } \sqrt{-1} \text{ con } i. \\ &= -3 \pm 2i\sqrt{7} \end{aligned}$$

Las soluciones son $-3 + 2i\sqrt{7}$ y $-3 - 2i\sqrt{7}$. Observe que las soluciones a la ecuación $(z + 3)^2 + 28 = 0$ no son números reales, sino números complejos.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 23**

---

2 Entender los trinomios cuadrados perfectos

Ahora que conocemos la propiedad de la raíz cuadrada, podemos centrar nuestra atención en la técnica para completar el cuadrado. Para entender este procedimiento es necesario que sepa cómo formar trinomios cuadrados perfectos, información que se presentó en la sección 5.6. Recuerde que un **trinomio cuadrado perfecto** es un trinomio que puede expresarse como el cuadrado de un binomio. A continuación se ofrecen algunos ejemplos.

Trinomios cuadrados perfectos		Factores		Cuadrado de un binomio
$x^2 + 8x + 16$	=	$(x + 4)(x + 4)$	=	$(x + 4)^2$
$x^2 - 8x + 16$	=	$(x - 4)(x - 4)$	=	$(x - 4)^2$
$x^2 + 10x + 25$	=	$(x + 5)(x + 5)$	=	$(x + 5)^2$
$x^2 - 10x + 25$	=	$(x - 5)(x - 5)$	=	$(x - 5)^2$

En un trinomio cuadrado perfecto con coeficiente principal de 1, existe una relación entre el coeficiente del término de primer grado y el término constante. En tales trinomios el término constante es el cuadrado de la mitad del coeficiente del término de primer grado.

Examinemos algunos trinomios cuadrados perfectos para los que el coeficiente principal sea 1.

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$
$$\left[\tfrac{1}{2}(8)\right]^2 = (4)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$
$$\left[\tfrac{1}{2}(-10)\right]^2 = (-5)^2$$

Cuando un trinomio cuadrado perfecto con coeficiente principal de 1 se escribe como el cuadrado de un binomio, la constante del binomio es la mitad del coeficiente del término de primer grado del trinomio. Por ejemplo,

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$
$$\tfrac{1}{2}(8)$$

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$
$$\tfrac{1}{2}(-10)$$

3 Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Ahora analizaremos la técnica para completar el cuadrado. Para resolver una ecuación cuadrática **completando el cuadrado** sumamos una constante en ambos lados de la ecuación, de modo que el trinomio restante sea un trinomio cuadrado perfecto. Luego utilizamos la propiedad de la raíz cuadrada para resolver la ecuación resultante. Ahora resumiremos el procedimiento.

Para resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado

1. Si es necesario, utilice la propiedad de la multiplicación (o división) de la igualdad para hacer que el coeficiente principal sea 1.
2. Reescriba la ecuación aislando la constante en el lado derecho.
3. Tome la mitad del coeficiente numérico del término de primer grado, elévela al cuadrado y sume la cantidad resultante en ambos lados de la ecuación.
4. Reemplace el trinomio cuadrado perfecto con el cuadrado de un binomio.
5. Utilice la propiedad de la raíz cuadrada para tomar la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.
6. Despeje la variable.
7. Compruebe sus soluciones en la ecuación *original*.

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $x^2 + 6x + 5 = 0$ completando el cuadrado.

Solución Como el coeficiente principal es 1, el paso uno ya no es necesario.

Paso 2: Pase la constante, 5, al lado derecho de la ecuación, restando 5 en ambos lados de la misma.

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$x^2 + 6x = -5$$

Paso 3: Determine el cuadrado de la mitad del coeficiente numérico del término de primer grado, 6.

$$\frac{1}{2}(6) = 3, \qquad 3^2 = \boxed{9}$$

Sume este valor en ambos lados de la ecuación.

$$x^2 + 6x \boxed{+ 9} = -5 \boxed{+ 9}$$
$$x^2 + 6x + 9 = 4$$

Paso 4: Siguiendo este procedimiento producimos un trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo de la ecuación. La expresión $x^2 + 6x + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto que puede expresarse como $(x + 3)^2$.

$\frac{1}{2}$ el coeficiente numérico del término de primer grado es $\frac{1}{2}(6) = +3$.

$$(x \underbrace{+ 3})^2 = 4$$

Paso 5: Utilice la propiedad de la raíz cuadrada.

$$x + 3 = \pm\sqrt{4}$$
$$x + 3 = \pm 2$$

Paso 6: Por último, despeje x restando 3 en ambos lados de la ecuación.

$$x + 3 \boxed{- 3} = \boxed{-3} \pm 2$$
$$x = -3 \pm 2$$
$$x = -3 + 2 \quad \text{o} \quad x = -3 - 2$$
$$x = -1 \qquad\qquad x = -5$$

Paso 7: Compruebe ambas soluciones en la ecuación original.

$x = -1$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$(-1)^2 + 6(-1) + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$1 - 6 + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \quad \textit{Verdadero}$$

$x = -5$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$(-5)^2 + 6(-5) + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$25 - 30 + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \quad \textit{Verdadero}$$

Cómo ambos números cumplen, tanto -1 como -5 son soluciones de la ecuación original.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 49

Sugerencia útil

Cuando resolvemos la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ completando el cuadrado, obtenemos $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ en el lado izquierdo y una constante en el lado derecho de la ecuación. Luego reemplazamos $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ con $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$. En la figura que sigue mostramos por qué

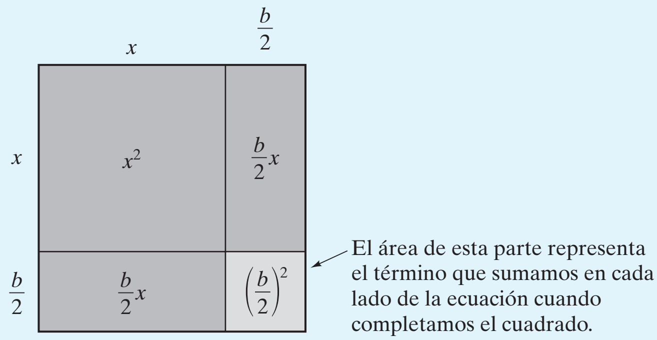
$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

La figura es un cuadrado con lados de longitud $x + \frac{b}{2}$. Por lo tanto, el área es $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$. El área del cuadrado también puede determinarse sumando las áreas de las cuatro secciones, como sigue:

$$x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{b}{2}x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

(*continúa en la página siguiente*)

Al comparar las áreas, vemos que $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$.



EJEMPLO 5 Resuelva la ecuación $-x^2 = -3x - 18$ completando el cuadrado.

Solución El coeficiente numérico del término elevado al cuadrado debe ser 1, no -1. Por lo tanto, empiece multiplicando ambos lados de la ecuación por -1, para hacer que el coeficiente del término al cuadrado sea igual a 1.

$$-x^2 = -3x - 18$$
$$-1(-x^2) = -1(-3x - 18)$$
$$x^2 = 3x + 18$$

Ahora pase todos los términos, excepto la constante, al lado izquierdo de la ecuación.

$$x^2 - 3x = 18$$

Tome la mitad del coeficiente numérico del término x, elévela al cuadrado y sume el producto en ambos lados de la ecuación. Luego rescriba el lado izquierdo de la ecuación como el cuadrado de un binomio.

$$\frac{1}{2}(-3) = -\frac{3}{2} \qquad \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 18 + \frac{9}{4} \qquad \textit{Completar el cuadrado.}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 18 + \frac{9}{4} \qquad \textit{Reescribir el trinomio como el cuadrado de un binomio.}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{72}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{81}{4}} \qquad \textit{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{9}{2} \qquad \textit{Simplificar.}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{9}{2} \qquad \textit{Sumar } \frac{3}{2} \textit{ en ambos lados.}$$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{3}{2} - \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{12}{2} = 6 \qquad x = -\frac{6}{2} = -3$$

Las soluciones son 6 y -3.

Ahora resuelva el ejercicio 53

En los ejemplos siguientes se pasarán por alto algunos de los pasos intermedios.

EJEMPLO 6 Resuelva la ecuación $x^2 - 8x + 34 = 0$.

Solución

$$x^2 - 8x + 34 = 0$$
$$x^2 - 8x = -34 \quad \textit{Pasar el término constante al lado derecho.}$$
$$x^2 - 8x + 16 = -34 + 16 \quad \textit{Completar el cuadrado.}$$
$$(x - 4)^2 = -18 \quad \textit{Escribir el trinomio como el cuadrado de un binomio.}$$
$$x - 4 = \pm\sqrt{-18} \quad \textit{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$
$$x - 4 = \pm 3i\sqrt{2} \quad \textit{Simplificar.}$$
$$x = 4 \pm 3i\sqrt{2} \quad \textit{Despejar x.}$$

Las soluciones son $4 + 3i\sqrt{2}$ y $4 - 3i\sqrt{2}$.

Ahora resuelva el ejercicio 61

EJEMPLO 7 Resuelva la ecuación $-4m^2 + 8m + 32 = 0$ completando el cuadrado.

Solución

$$-4m^2 + 8m + 32 = 0$$
$$-\frac{1}{4}(-4m^2 + 8m + 32) = -\frac{1}{4}(0) \quad \textit{Multiplicar por } -\frac{1}{4} \textit{ para obtener un coeficiente principal de 1.}$$
$$m^2 - 2m - 8 = 0$$

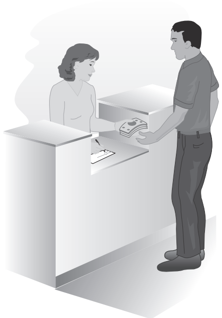
Ahora procedemos como antes.

$$m^2 - 2m = 8 \quad \textit{Pasar el término constante al lado derecho.}$$
$$m^2 - 2m + 1 = 8 + 1 \quad \textit{Completar el cuadrado.}$$
$$(m - 1)^2 = 9 \quad \textit{Escribir el trinomio como el cuadrado de un binomio.}$$
$$m - 1 = \pm 3 \quad \textit{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$
$$m = 1 \pm 3 \quad \textit{Despejar m.}$$
$$m = 1 + 3 \quad \text{o} \quad m = 1 - 3$$
$$m = 4 \qquad\qquad m = -2$$

Ahora resuelva el ejercicio 75

Si se le pidiera resolver la ecuación $-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 8 = 0$ completando el cuadrado, ¿qué haría primero? Si respondió, "Multiplicar ambos lados de la ecuación por -4 para hacer que el coeficiente principal sea igual a 1", su contestación es correcta. Para resolver la ecuación $\frac{2}{3}x^2 + 3x - 5 = 0$, multiplicaría antes ambos lados de la ecuación por $\frac{3}{2}$ para obtener un coeficiente principal de 1.

Por lo general, las ecuaciones cuadráticas que no pueden resolverse con facilidad por medio de factorización se resolverán mediante la *fórmula cuadrática* que se presentará en la próxima sección. No obstante, hemos presentado el procedimiento para completar el cuadrado porque lo utilizaremos para deducir la fórmula cuadrática en la sección 8.2. Además, utilizaremos este concepto más adelante en este mismo capítulo y en un capítulo posterior.



EJEMPLO 8 **Interés compuesto** La fórmula para calcular el interés compuesto: $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ puede usarse para determinar el monto, A, cuando un capital inicial, p, se invierte a una tasa de interés anual, r, capitalizable n veces en un año durante t años.

a) En un principio, Josh Adams invirtió \$1000 en una cuenta de ahorros cuyo interés compuesto se paga una vez al año. Si después de dos años el monto, o saldo, en la cuenta es de \$1102.50, determine la tasa de interés anual, r.

b) Trisha McDowel invirtió \$1000 en una cuenta de ahorros cuyo interés compuesto se paga trimestralmente. Si después de 3 años el monto en la cuenta es de \$1195.62, determine la tasa de interés anual, r.

Solución **a)** Entienda el problema Se nos ha dado la siguiente información:

$$p = \$1000, \quad A = \$1102.50, \quad n = 1, \quad t = 2$$

Se nos pide determinar la tasa anual, r. Para hacerlo, sustituimos los valores apropiados en la fórmula y despejamos r.

Traduzca

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$1102.50 = 1000\left(1 + \frac{r}{1}\right)^{1(2)}$$

Realice los cálculos

$$1102.50 = 1000(1 + r)^2$$

$$1.10250 = (1 + r)^2 \qquad \textit{Dividir ambos lados entre 1000.}$$

$$\sqrt{1.10250} = 1 + r \qquad \textit{Propiedad de la raíz cuadrada; usar la raíz principal, ya que r debe ser positiva.}$$

$$1.05 = 1 + r$$

$$0.05 = r \qquad \textit{Restar 1 en ambos lados de la ecuación.}$$

Responda La tasa de interés anual es de 0.05 o 5%.

b) Entienda el problema Se nos dieron estos datos:

$$p = 1000, \quad A = \$1195.62, \quad n = 4, \quad t = 3$$

Para determinar r sustituimos los valores apropiados en la fórmula, y despejamos r.

Traduzca

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$1195.62 = 1000\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4(3)}$$

$$1.19562 = \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{12} \qquad \textit{Divida ambos lados entre 1000.}$$

Realice los cálculos

$$\sqrt[12]{1.19562} = 1 + \frac{r}{4} \qquad \textit{Sacar la raíz 12 en ambos lados (o elevar ambos lados a la potencia 1/12).}$$

$$1.015 \approx 1 + \frac{r}{4} \qquad \textit{Aproximar } \sqrt[12]{1.19562} \textit{ con ayuda de una calculadora.}$$

$$0.015 \approx \frac{r}{4} \qquad \textit{Restar 1 en ambos lados de la ecuación.}$$

$$0.06 \approx r \qquad \textit{Multiplicar ambos lados por 4.}$$

Responda La tasa de interés anual es, aproximadamente, de 0.06 o 6%.

Ahora resuelva el ejercicio 103

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

En este capítulo trabajaremos con raíces y radicales. Este material se estudió en el capítulo 7. Si no recuerda cómo evaluar o simplificar radicales, repáselo ahora.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Escriba las dos raíces cuadradas de 36.

2. Escriba las dos raíces cuadradas de 17.

3. Escriba la propiedad de la raíz cuadrada.

4. ¿Cuál es el primer paso para completar el cuadrado?

5. Explique cómo determinar si un trinomio es un trinomio cuadrado perfecto.

6. Escriba un párrafo en el que explique cómo construir un trinomio cuadrado perfecto.

7. a) ¿$x = 4$ es la solución de $x - 4 = 0$? Si no, ¿cuál es la solución correcta? Explique.

b) ¿$x = 2$ es la solución de $x^2 - 4 = 0$? Si no, ¿cuál es la solución correcta? Explique.

8. a) ¿$x = -7$ es la solución de $x + 7 = 0$? Si no, ¿cuál es la solución correcta? Explique.

b) ¿$x = \pm\sqrt{7}$ es solución de $x^2 + 7 = 0$? Si no, ¿cuál es la solución correcta? Explique.

9. De acuerdo con el método de completar el cuadrado, ¿cuál es el primer paso para resolver la ecuación $2x^2 + 3x = 9$? Explique.

10. De acuerdo con el método de completar el cuadrado, ¿cuál es el primer paso para resolver la ecuación $\frac{1}{7}x^2 + 12x = -4$? Explique.

11. Cuando se resuelve la ecuación $x^2 - 6x = 17$ completando el cuadrado, ¿qué número sumamos en ambos lados de la ecuación? Explique.

12. Cuando se resuelve la ecuación $x^2 + 10x = 39$ completando el cuadrado, ¿qué número sumamos en ambos lados de la ecuación? Explique.

Práctica de habilidades

Utilice la propiedad de la raíz cuadrada para resolver cada ecuación.

13. $x^2 - 25 = 0$ **14.** $x^2 - 49 = 0$ **15.** $x^2 + 49 = 0$

16. $x^2 - 24 = 0$ **17.** $x^2 + 24 = 0$ **18.** $y^2 - 10 = 51$

19. $y^2 + 10 = -51$ **20.** $(x - 3)^2 = 49$ **21.** $(p - 4)^2 = 16$

22. $(x + 3)^2 = 49$ **23.** $(x + 3)^2 + 25 = 0$ **24.** $(a - 3)^2 = 45$

25. $(a - 2)^2 + 45 = 0$ **26.** $(a + 2)^2 + 45 = 0$ **27.** $\left(b + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

28. $\left(b - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ **29.** $\left(b - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{9} = 0$ **30.** $(x - 0.2)^2 = 0.64$

31. $(x + 0.8)^2 = 0.81$ **32.** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{9}$ **33.** $(2a - 5)^2 = 18$

34. $(4y + 1)^2 = 12$ **35.** $\left(2y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{25}$ **36.** $\left(3x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{25}$

Resuelva cada ecuación por el método de completar el cuadrado.

37. $x^2 + 3x - 4 = 0$ **38.** $x^2 - 3x - 4 = 0$ **39.** $x^2 + 8x + 15 = 0$

40. $x^2 - 8x + 15 = 0$ **41.** $x^2 + 6x + 8 = 0$ **42.** $x^2 - 6x + 8 = 0$

43. $x^2 - 7x + 6 = 0$ **44.** $x^2 + 9x + 18 = 0$ **45.** $2x^2 + x - 1 = 0$

46. $3c^2 - 4c - 4 = 0$ **47.** $2z^2 - 7z - 4 = 0$ **48.** $4a^2 + 9a = 9$

49. $x^2 - 13x + 40 = 0$ **50.** $x^2 + x - 12 = 0$ **51.** $-x^2 + 6x + 7 = 0$

52. $-a^2 - 5a + 14 = 0$ **53.** $-z^2 + 9z - 20 = 0$ **54.** $-z^2 - 4z + 12 = 0$

55. $b^2 = 3b + 28$ **56.** $-x^2 = 6x - 27$ **57.** $x^2 + 10x = 11$

58. $-x^2 + 40 = -3x$ **59.** $x^2 - 4x - 10 = 0$ **60.** $x^2 - 6x + 2 = 0$

61. $r^2 + 8r + 5 = 0$ **62.** $a^2 + 4a - 8 = 0$ **63.** $c^2 - c - 3 = 0$

64. $p^2 - 5p = 4$ **65.** $x^2 + 3x + 6 = 0$ **66.** $z^2 - 5z + 7 = 0$

67. $9x^2 - 9x = 0$ **68.** $4y^2 + 12y = 0$ **69.** $-\frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{2}b = 0$

70. $\frac{1}{3}a^2 - \frac{5}{3}a = 0$ **71.** $36z^2 - 6z = 0$ **72.** $x^2 = \frac{9}{2}x$

73. $-\frac{1}{2}p^2 - p + \frac{3}{2} = 0$

74. $2x^2 + 6x = 20$

75. $2x^2 = 8x + 64$

76. $3x^2 + 33x + 72 = 0$

77. $2x^2 + 18x + 4 = 0$

78. $\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = 0$

79. $\frac{3}{4}w^2 + \frac{1}{2}w - \frac{1}{2} = 0$

80. $\frac{3}{4}c^2 - 2c + 1 = 0$

81. $2x^2 - x = -5$

82. $\frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} = 0$

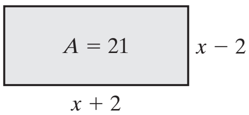
83. $-3x^2 + 6x = 6$

84. $x^2 + 2x = -5$

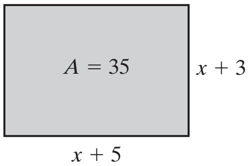
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 85 a 88 se da el área, A, de cada rectángulo.* **a)** *Escriba una ecuación para determinar el área.* **b)** *Despeje x en la ecuación.*

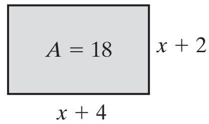
85.



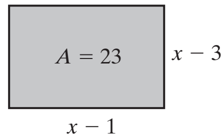
86.



87.



88.



89. Distancia necesaria para detenerse en la nieve La fórmula para calcular la distancia, d en pies, necesaria para detener un automóvil específico sobre una superficie con nieve es $d = \frac{1}{6}x^2$, donde x es la velocidad del automóvil, en millas por hora, antes de que se apliquen los frenos. Si la distancia necesaria para detener un automóvil fue de 150 pies, ¿cuál era la velocidad del automóvil antes de que se aplicaran los frenos?

90. Distancia necesaria para detenerse en el pavimento seco La fórmula para calcular la distancia, d en pies, necesaria para detener un automóvil específico sobre una superficie de pavimento seco es $d = \frac{1}{10}x^2$, donde x es la velocidad del automóvil, en millas por hora, antes de que se apliquen los frenos. Si la distancia necesaria para detener un automóvil fue de 40 pies, ¿cuál era la velocidad del automóvil antes de que se aplicaran los frenos?

91. Enteros El producto de dos enteros impares consecutivos es 35. Determine cuáles son esos dos enteros impares.

92. Enteros El más grande de dos enteros es 2 unidades mayor que el doble del más pequeño. Si el producto de ambos enteros es 12, determine ambos números.

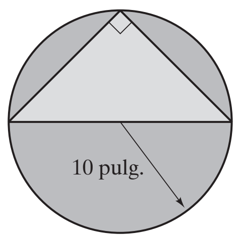
93. Jardín rectangular Donna Simm delimitó un área de su jardín para dedicarla a plantar tomates. Determine las dimensiones del área rectangular, si el largo es 2 pies mayor que el doble del ancho, y el área mide 60 pies cuadrados.

94. Entrada de cochera Manuel Cortez planea asfaltar la entrada de su cochera. Determine las dimensiones de la entrada rectangular, si su área es de 381.25 pies cuadrados y el largo es 18 pies mayor que su ancho.

95. Patio Bill Justice diseña un patio, cuya diagonal es 6 pies mayor que el largo de un lado. Determine las dimensiones del patio.

96. Piscina para niños Un hotel planea construir una piscina poco profunda para niños. Si la piscina será un cuadrado cuya diagonal mide 7 pies más que un lado, determine las dimensiones de la piscina.

97. Triángulo inscrito Cuando se inscribe un triángulo en un semicírculo, donde el diámetro del círculo es un lado del triángulo, éste siempre es un triángulo rectángulo. Si un triángulo isósceles (dos lados iguales) se inscribe en un semicírculo con radio de 10 pulgadas, determine la longitud de los otros dos lados del triángulo.



98. Triángulo inscrito Consulte el ejercicio 97. Suponga que un triángulo está inscrito en un semicírculo, cuyo diámetro es de 12 metros. Si un lado del triángulo inscrito es de 6 metros, determine cuánto mide el tercer lado.

99. Área de un círculo El área de un círculo es de 24π pies cuadrados. Utilice la fórmula $A = \pi r^2$ para determinar el radio del círculo.

100. Área de un círculo El área de un círculo es 16.4π metros cuadrados. Determine el radio del círculo.

Para responder los ejercicios 101 a 104, utilice la fórmula $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

101. Cuenta de ahorros Frank Dipalo invirtió \$500 en principio en una cuenta de ahorros cuyo interés se capitaliza anualmente. Si después de 2 años el saldo de la cuenta es de \$540.80, determine la tasa de interés anual.

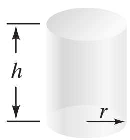
102. Cuenta de ahorros Margret Chang invirtió inicialmente \$1000 en una cuenta de ahorros cuyo interés se capitaliza cada año. Si después de 2 años el saldo de la cuenta es de \$1102.50, determine la tasa de interés anual.

103. Cuenta de ahorros Steve Rodi invirtió \$1200 como base en una cuenta de ahorros cuyo interés se capitaliza semestralmente. Si después de 3 años el saldo de la cuenta es de \$1432.86, determine la tasa de interés anual.

104. Cuenta de ahorros Angela Reyes invirtió \$1500 en una cuenta de ahorros cuyo interés se capitaliza cada semestre. Si después de 4 años el saldo de la cuenta es de \$2052.85, determine la tasa de interés anual.

105. Volumen y área de la superficie El área de la superficie, S, y el volumen, V, de un cilindro circular recto de radio, r, y altura, h, están dados por las fórmulas

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh, \quad V = \pi r^2 h$$



a) Determine el área de la superficie del cilindro, si su altura es de 10 pulgadas y su volumen es de 160 pulgadas cúbicas.

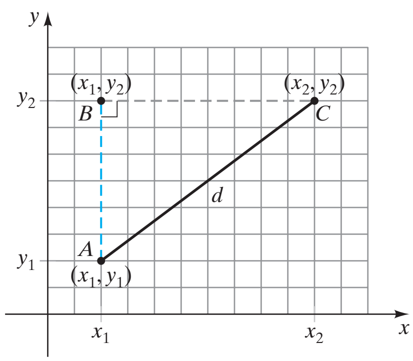
b) Determine el radio si la altura es de 10 pulgadas y el volumen es de 160 pulgadas cúbicas.

c) Determine el radio si la altura es de 10 pulgadas y el área de la superficie es de 160 pulgadas cuadradas.

Actividad en grupo

Analicen y respondan en grupo el ejercicio 106.

106. En la cuadrícula siguiente se señalan los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_1, y_2).



a) Explique por qué el punto (x_1, y_2) se colocó donde está, y no en algún otro lugar de la gráfica.

b) Exprese la longitud de la recta punteada en color rojo en términos de y_2 y y_1. Explique cómo determinó su respuesta.

c) Exprese la longitud de la recta punteada en color gris en términos de x_2 y x_1. Explique cómo determinó su respuesta.

d) Mediante el teorema de Pitágoras y el triángulo rectángulo ABC, deduzca una fórmula para determinar la distancia, d, entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).* Explique cómo determinó la fórmula.

e) Utilice la fórmula que determinó en la parte **d)** para calcular la distancia del segmento de recta entre los puntos $(1, 4)$ y $(3, 7)$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] **107.** Resuelva $-4(2z - 6) = -3(z - 4) + z$.

[2.4] **108. Inversión** Thea Prettyman invirtió $10,000 durante un año, parte a 7% y parte a $6\frac{1}{4}$%. Si ganó un interés total de $656.50, ¿qué cantidad invirtió en cada tasa?

[2.6] **109.** Resuelva $|x + 3| = |2x - 7|$.

[3.4] **110.** Determine la pendiente de la recta que pasa por $(-2, 5)$ y $(0, 5)$.

[5.2] **111.** Multiplique $(x - 2)(4x^2 + 9x - 3)$.

8.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula cuadrática

1 Deducir la fórmula cuadrática.

2 Utilizar la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones.

3 Escribir una ecuación cuadrática dadas sus soluciones.

4 Usar el discriminante para determinar el número de soluciones reales para una ecuación cuadrática.

5 Estudiar problemas de aplicación que utilicen ecuaciones cuadráticas.

1 Deducir la fórmula cuadrática

La fórmula cuadrática puede usarse para resolver cualquier ecuación cuadrática. De hecho, *es el método más útil y versátil para resolver ecuaciones cuadráticas*. Por su eficiencia, por lo general se le utiliza en lugar del método de completar el cuadrado.

La forma general de una ecuación cuadrática es $ax^2 + bx + c = 0$, donde a es el coeficiente del término cuadrático, b es el coeficiente del término de primer grado y c es la constante.

Forma general de la ecuación cuadrática	Valores de los coeficientes		
$x^2 - 3x + 4 = 0$	$a = 1,$	$b = -3,$	$c = 4$
$1.3x^2 - 7.9 = 0$	$a = 1.3,$	$b = 0,$	$c = -7.9$
$-\frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{8}x = 0$	$a = -\frac{5}{6},$	$b = \frac{3}{8},$	$c = 0$

*La fórmula para calcular la distancia se estudiará en un capítulo posterior.

Podemos deducir la fórmula cuadrática empezando con una ecuación cuadrática dada en la forma general y completando el cuadrado, como se estudió en la sección anterior.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \textit{Dividir ambos lados entre a.}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \textit{Restar c/a en ambos lados.}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \boxed{\frac{b^2}{4a^2}} = -\frac{c}{a} + \boxed{\frac{b^2}{4a^2}}$$

Tomar 1/2 de b/a (esto es, b/2a), y elevarlo al cuadrado para obtener $b^2/4a^2$. Luego sumar esta expresión en ambos lados.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \qquad \textit{Reescribir el lado izquierdo de la ecuación como el cuadrado de un binomio.}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \textit{Escribir el lado derecho con un denominador común.}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \textit{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textit{Regla del cociente para radicales.}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textit{Restar b/2a en ambos lados.}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textit{Escribir con un denominador común para obtener la fórmula cuadrática.}$$

2 Utilizar la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones

Ahora que ya sabemos cómo deducir la fórmula cuadrática, la utilizaremos para resolver ecuaciones.

Para resolver una ecuación mediante la fórmula cuadrática

1. Escriba la ecuación cuadrática en la forma general, $ax^2 + bx + c = 0$, y determine los valores numéricos de a, b y c.
2. Sustituya a, b y c con los valores correspondientes en la fórmula cuadrática, y luego evalúe la fórmula para obtener la solución.

Fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO 1 ▸ Resuelva la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$ mediante la fórmula cuadrática.

Solución En esta ecuación $a = 1$, $b = 2$ y $c = -8$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 6}{2} \qquad \text{o} \qquad x = \frac{-2 - 6}{2}$$
$$x = \frac{4}{2} = 2 \qquad\qquad x = \frac{-8}{2} = -4$$

Una comprobación mostrará que tanto 2 como -4 son soluciones para la ecuación. Observe que las soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$ son dos números reales.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 23**

La solución del ejemplo 1 también podría haberse obtenido mediante la factorización, como se ilustra a continuación.

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$(x + 4)(x - 2) = 0$$
$$x + 4 = 0 \qquad \text{o} \qquad x - 2 = 0$$
$$x = -4 \qquad\qquad x = 2$$

Cuando tenga que resolver una ecuación cuadrática sin especificar el método para hacerlo, primero trate, mediante factorización (como se estudió en la sección 5.8). Si la ecuación no se puede factorizar con facilidad, utilice la fórmula cuadrática.

Al resolver una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática, los cálculos pueden ser más sencillos si el coeficiente principal, a, es positivo. Por lo tanto, si tuviera que resolver una ecuación cuadrática como $-x^2 + 3x = 2$, sería recomendable que la reescribiera como $x^2 - 3x + 2 = 0$.

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva $-9x^2 = -6x + 1$ mediante la fórmula cuadrática.

Solución Empiece sumando $9x^2$ en ambos lados de la ecuación para obtener

$$0 = 9x^2 - 6x + 1$$
$$\text{o} \quad 9x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$a = 9, \qquad b = -6, \qquad c = 1$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(9)(1)}}{2(9)}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Observe que la solución de la ecuación $-9x^2 = -6x + 1$ es un solo valor, $\frac{1}{3}$. Algunas ecuaciones cuadráticas tienen como solución un solo valor. Esto sucede cuando $b^2 - 4ac = 0$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 39**

Cómo evitar errores comunes

Todo el numerador de la fórmula cuadrática debe dividirse entre $2a$.

CORRECTO	INCORRECTO
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$\cancel{x = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ $\cancel{x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$

EJEMPLO 3 ▸ Resuelva la ecuación $p^2 + \frac{1}{3}p + \frac{5}{6} = 0$ mediante la fórmula cuadrática.

Solución No se preocupe por el cambio de la variable. La fórmula cuadrática se utiliza exactamente igual a como se hace cuando la variable es x.

Podríamos resolver esta ecuación mediante la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = \frac{1}{3}$ y $c = \frac{5}{6}$. Sin embargo, cuando una ecuación cuadrática tiene fracciones, casi siempre es más fácil empezar multiplicando ambos lados de la misma por el mínimo común denominador. En este ejemplo, el mínimo común denominador es 6.

$$6\left(p^2 + \frac{1}{3}p + \frac{5}{6}\right) = 6(0)$$
$$6p^2 + 2p + 5 = 0$$

Ahora podemos utilizar la fórmula cuadrática con $a = 6$, $b = 2$ y $c = 5$.

$$\begin{aligned}
p &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(6)(5)}}{2(6)} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{-116}}{12} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}\sqrt{29}}{12} \\
&= \frac{-2 \pm 2i\sqrt{29}}{12} \\
&= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(-1 \pm i\sqrt{29})}{\underset{6}{\cancel{12}}} \\
&= \frac{-1 \pm i\sqrt{29}}{6}
\end{aligned}$$

Las soluciones son $\frac{-1 + i\sqrt{29}}{6}$ y $\frac{-1 - i\sqrt{29}}{6}$. Observe que ninguna de estas soluciones es un número real; ambas son números complejos.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 53

Cómo evitar errores comunes

Algunos estudiantes aplican correctamente la fórmula cuadrática, pero al llegar al último paso cometen un error. A continuación se ilustra este problema con los procedimientos correctos e incorrectos, para una respuesta sencilla.

Cuando *ambos* términos del numerador *y* el denominador tienen un factor común, se puede dividir entre ese factor común, como sigue:

CORRECTO

$$\frac{2 + 4\sqrt{3}}{2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(1 + 2\sqrt{3})}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 1 + 2\sqrt{3}$$

$$\frac{6 + 3\sqrt{3}}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}(2 + \sqrt{3})}{\underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

Los siguientes son algunos errores comunes. Estúdielos con cuidado para no cometerlos. ¿Puede explicar por qué cada uno de los procedimientos siguientes es incorrecto?

INCORRECTO

$$\frac{2 + 3}{2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} + 3}{\underset{1}{\cancel{2}}} \qquad \frac{3 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \overset{1}{\cancel{2}}\sqrt{5}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$\frac{3 + \sqrt{6}}{2} = \frac{3 + \sqrt{\cancel{6}^{\,3}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} \qquad \frac{4 + 3\sqrt{5}}{2} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} + 3\sqrt{5}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

Observe que $(2 + 3)/2$ se simplifica a $5/2$. Sin embargo, $(3 + 2\sqrt{5})/2$, $(3 + \sqrt{6})/2$, y $(4 + 3\sqrt{5})/2$ no pueden simplificarse más.

EJEMPLO 4 Dada $f(x) = 2x^2 + 4x$, determine todos los valores reales de x para los que $f(x) = 5$.

Solución Queremos determinar todos los valores reales de x para los que

$$2x^2 + 4x = 5$$

Para resolver esta ecuación, podemos utilizar la fórmula cuadrática. Primero, escriba la ecuación en la forma general.

$$2x^2 + 4x - 5 = 0$$

Ahora utilice la fórmula cuadrática con $a = 2, b = 4$ y $c = -5$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{56}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{14}}{4} \end{aligned}$$

Luego factorice el 2 de ambos términos del numerador y divida entre el factor común.

$$x = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(-2 \pm \sqrt{14})}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}\,^{*}$$

Así, las soluciones son $\dfrac{-2 + \sqrt{14}}{2}$ y $\dfrac{-2 - \sqrt{14}}{2}$.

Observe que la expresión del ejemplo 4, $2x^2 + 4x - 5$, no es factorizable. Por lo tanto, el ejemplo 4 no podría resolverse mediante factorización.

Ahora resuelva el ejercicio 69

Si todos los coeficientes numéricos de una ecuación cuadrática tienen un factor común, debe factorizarlo antes de utilizar la fórmula cuadrática. Por ejemplo, considere la ecuación $3x^2 + 12x + 3 = 0$. Aquí, $a = 3, b = 12$ y $c = 3$. Si utilizamos la fórmula cuadrática, a la larga obtendríamos como soluciones $x = -2 \pm \sqrt{3}$. Al factorizar la ecuación antes de utilizar la fórmula, obtenemos

$$\begin{aligned} 3x^2 + 12x + 3 &= 0 \\ 3(x^2 + 4x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Si consideramos $x^2 + 4x + 1 = 0$, entonces $a = 1, b = 4$ y $c = 1$. Si usamos estos nuevos valores de a, b y c en la fórmula cuadrática, obtendremos soluciones idénticas, $x = -2 \pm \sqrt{3}$. Sin embargo, los valores más pequeños de a, b y c permiten que los cálculos sean más simples. Resuelva ambas ecuaciones mediante la fórmula cuadrática para corroborar lo anterior.

3 Escribir una ecuación cuadrática dadas sus soluciones

Si nos dan las soluciones, podemos deducir la ecuación correspondiente siguiendo el procedimiento a la inversa. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Escriba una ecuación que tenga las soluciones siguientes:

a) -5 y 1 **b)** $3 + 2i$ y $3 - 2i$

Solución

a) Si las soluciones son -5 y 1, escribimos

$$\begin{aligned} x = -5 \quad &\text{o} \quad x = 1 \\ x + 5 = 0 \quad & \quad x - 1 = 0 && \textit{Igualar las ecuaciones a 0.} \\ (x + 5)(x - 1) &= 0 && \textit{Propiedad del factor nulo.} \\ x^2 - x + 5x - 5 &= 0 && \textit{Multiplicar los factores.} \\ x^2 + 4x - 5 &= 0 && \textit{Reducir términos semejantes.} \end{aligned}$$

*En la sección de respuestas, las soluciones se darán en esta forma.

Así, la ecuación es $x^2 + 4x - 5 = 0$. Muchas otras ecuaciones tienen soluciones -5 y 1. De hecho, cualquier ecuación de la forma $k(x^2 + 4x - 5) = 0$, donde k es una constante, tiene esas soluciones. ¿Puede explicar por qué?

b) $x = 3 + 2i$ o $x = 3 - 2i$

$$x - (3 + 2i) = 0 \qquad x - (3 - 2i) = 0 \qquad \text{Igualar las ecuaciones a 0.}$$

$$[x - (3 + 2i)][x - (3 - 2i)] = 0 \qquad \text{Propiedad del factor nulo.}$$

$$x \cdot x - x(3 - 2i) - x(3 + 2i) + (3 + 2i)(3 - 2i) = 0 \qquad \text{Multiplicar.}$$

$$x^2 - 3x + 2xi - 3x - 2xi + (9 - 4i^2) = 0 \qquad \text{Propiedad distributiva; multiplicar.}$$

$$x^2 - 6x + 9 - 4i^2 = 0 \qquad \text{Reducir términos semejantes.}$$

$$x^2 - 6x + 9 - 4(-1) = 0 \qquad \text{Sustituir } i^2 = -1.$$

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \qquad \text{Simplificar.}$$

La ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$ tiene las soluciones complejas $3 + 2i$ y $3 - 2i$.

▶ **Ahora resuelva el ejercicio 75**

En el ejemplo 5 **a)**, determinamos que la ecuación $x^2 + 4x - 5 = 0$ tiene las soluciones -5 y 1. Considere la gráfica de $f(x) = x^2 + 4x - 5$. La intersección con el eje x de la gráfica de $f(x)$ ocurre cuando $f(x) = 0$ o cuando $x^2 + 4x - 5 = 0$. Por lo tanto, las intersecciones x de la gráfica $f(x) = x^2 + 4x - 5$ son $(-5, 0)$ y $(1, 0)$, como se muestra en la **figura 8.1**. En el ejemplo 5 **b)**, determinamos que la ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$ no tiene soluciones reales. Así, la gráfica de $f(x) = x^2 - 6x + 13$ no tiene intersección con el eje x. La gráfica de $f(x) = x^2 - 6x + 13$ se muestra en la **figura 8.2**.

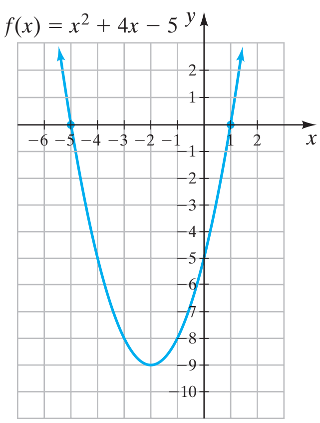


FIGURA 8.1

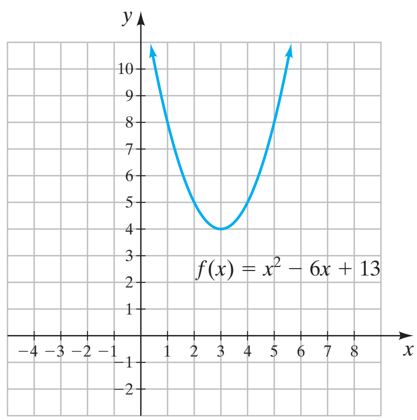


FIGURA 8.2

4 Usar el discriminante para determinar el número de soluciones reales para una ecuación cuadrática

La expresión bajo el signo radical en la fórmula cuadrática se denomina **discriminante**.

$$\underbrace{b^2 - 4ac}_{\text{discriminante}}$$

El discriminante proporciona información para determinar el número y la clase de soluciones de una ecuación cuadrática.

Soluciones de una ecuación cuadrática

Para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$:

Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales distintas.

Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática tiene una sola solución real.

Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales.

EJEMPLO 6 ▸

a) Determine el discriminante de la ecuación $x^2 - 8x + 16 = 0$.

b) ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación dada?

c) Utilice la fórmula cuadrática para determinar la solución o las soluciones.

Solución

a) $a = 1, \qquad b = -8, \qquad c = 16$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-8)^2 - 4(1)(16) \\ &= 64 - 64 = 0 \end{aligned}$$

b) Como el discriminante es igual a 0, sólo hay una solución real.

c)
$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{8 \pm 0}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

La única solución es 4.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 9**

EJEMPLO 7 ▸ Sin proporcionar las soluciones, determine si las ecuaciones siguientes tienen dos soluciones reales y distintas, una solución real o ninguna solución real.

a) $2x^2 - 4x + 6 = 0$ **b)** $x^2 - 5x - 3 = 0$ **c)** $4x^2 - 12x = -9$

Solución Utilizamos el discriminante de la fórmula cuadrática para responder estas preguntas.

a) $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(6) = 16 - 48 = -32$

Como el discriminante es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales.

b) $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(-3) = 25 + 12 = 37$

Como el discriminante es positivo, esta ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

c) Primero reescriba $4x^2 - 12x = -9$ como $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0$$

Como el discriminante es 0, esta ecuación tiene una sola solución real.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 15**

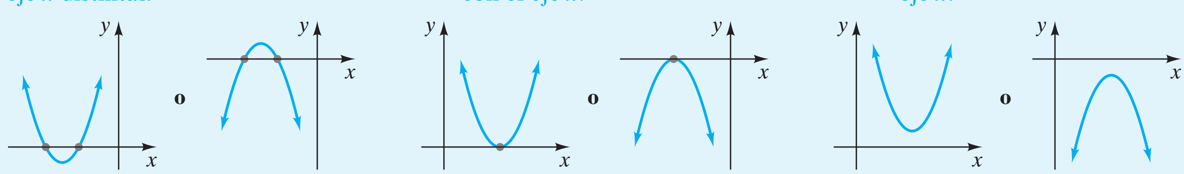
El discriminante puede utilizarse para determinar el número de soluciones reales de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Como las intersecciones con el eje x de una función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, ocurren en donde $f(x) = 0$, el discriminante también puede usarse para determinar el número de intersecciones con el eje x de una función cuadrática. La **figura 8.3** muestra la relación entre el discriminante y el número de intersecciones con el eje x para una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Gráficas de $f(x) = ax^2 + bx + c$

Si $b^2 - 4ac > 0$, $f(x)$ tiene dos intersecciones con el eje x distintas.

Si $b^2 - 4ac = 0$, $f(x)$ tiene una sola intersección con el eje x.

Si $b^2 - 4ac < 0$, $f(x)$ no tiene intersecciones con el eje x.



(a) (b) (c)

FIGURA 8.3

En la sección 8.5 analizaremos a detalle la graficación de funciones cuadráticas.

5 Estudiar problemas de aplicación que utilicen ecuaciones cuadráticas

Ahora veremos algunos problemas de aplicación que involucran el uso de ecuaciones cuadráticas.

EJEMPLO 8 ▸ **Teléfonos celulares** Mary Olson es propietaria de un negocio que fabrica y vende teléfonos celulares. El ingreso, $R(n)$, de la venta de teléfonos celulares se determina multiplicando el número de teléfonos celulares por el costo por teléfono. Suponga que el ingreso por la venta de n teléfonos celulares, $n \leq 50$, es

$$R(n) = n(50 - 0.2n)$$

donde $(50 - 0.2n)$ es el precio por teléfono celular, en dólares.

a) Determine el ingreso cuando se venden 30 teléfonos celulares.

b) Para tener un ingreso de $480, ¿cuántos teléfonos celulares deben venderse?

Solución **a)** Para determinar el ingreso cuando se venden 30 teléfonos celulares, evaluamos la función de ingreso para $n = 30$.

$$\begin{aligned} R(n) &= n(50 - 0.2n) \\ R(30) &= 30[50 - 0.2(30)] \\ &= 30(50 - 6) \\ &= 30(44) \\ &= 1320 \end{aligned}$$

El ingreso por la venta de 30 teléfonos celulares es de $1320.

b) Entienda el problema Queremos determinar el número de teléfonos celulares que deben venderse para tener un ingreso de $480. Así, necesitamos hacer $R(n) = 480$ y despejar n.

$$\begin{aligned} R(n) &= n(50 - 0.2n) \\ 480 &= n(50 - 0.2n) \\ 480 &= 50n - 0.2n^2 \\ 0.2n^2 - 50n + 480 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora podemos utilizar la fórmula cuadrática para resolver la ecuación.

Traduzca $a = 0.2, \quad b = -50, \quad c = 480$

$$\begin{aligned} n &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4(0.2)(480)}}{2(0.2)} \end{aligned}$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} &= \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 384}}{0.4} \\ &= \frac{50 \pm \sqrt{2116}}{0.4} \\ &= \frac{50 \pm 46}{0.4} \end{aligned}$$

$$n = \frac{50 + 46}{0.4} = 240 \quad \text{o} \quad n = \frac{50 - 46}{0.4} = 10$$

Responda Como el problema especificó que $n \leq 50$, la única solución aceptable es $n = 10$. Así, para obtener un ingreso de $480, Mary debe vender 10 teléfonos celulares.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 87**

Una fórmula importante en física es $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$. Cuando un objeto se lanza hacia arriba desde una altura inicial, h_0, con una velocidad inicial v_0, esta fórmula puede usarse para determinar la altura, h, respecto del piso en cualquier instante t. En la fórmula, g es la aceleración provocada por la gravedad. Como la aceleración en la Tierra es de -32 pies/seg^2, en la fórmula utilizamos -32 para g cuando se hable de la Tierra. Esta fórmula también puede usarse para describir la trayectoria de cualquier objeto proyectado en la Luna y en otros planetas, pero el valor de g tendría que cambiarse de acuerdo con la fuerza de gravedad de cada cuerpo celeste. Utilizaremos esta fórmula en el ejemplo 9.

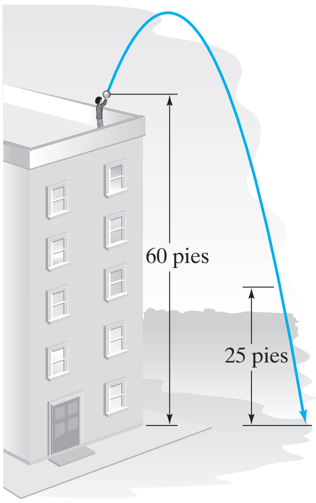


FIGURA 8.4

EJEMPLO 9 ▸ **Lanzamiento de una pelota** Betsy Farber se encuentra parada en la parte superior de un edificio, y lanza una pelota hacia arriba desde una altura de 60 pies, con una velocidad inicial de 30 pies por segundo. Utilice la fórmula $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$ para responder las preguntas siguientes.

a) A partir de su lanzamiento, ¿cuánto tiempo tardará la pelota en estar a 25 pies respecto del piso? Redondee la respuesta a la décima más cercana.

b) A partir de su lanzamiento, ¿cuánto tiempo tardará la pelota en golpear el suelo?

Solución **a)** Entienda el problema Ilustraremos este problema con un diagrama (vea la **figura 8.4**). Aquí $g = -32$, $v_0 = 30$ y $h_0 = 60$. Se nos pide determinar el tiempo, t, que tarda la pelota en alcanzar una altura, h, de 25 pies respecto del nivel del piso. Sustituimos estos valores en la fórmula y después despejamos t.

Traduzca

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$

$$25 = \frac{1}{2}(-32)t^2 + 30t + 60$$

Realice los cálculos Ahora escribimos la ecuación cuadrática en forma general y despejamos t mediante la fórmula cuadrática.

$$0 = -16t^2 + 30t + 35$$

$$\text{o} \quad -16t^2 + 30t + 35 = 0$$

$$a = -16, \qquad b = 30, \qquad c = 35$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-30 \pm \sqrt{(30)^2 - 4(-16)(35)}}{2(-16)}$$

$$= \frac{-30 \pm \sqrt{3140}}{-32}$$

$$t = \frac{-30 + \sqrt{3140}}{-32} \quad \text{o} \quad t = \frac{-30 - \sqrt{3140}}{-32}$$

$$\approx -0.8 \qquad\qquad \approx 2.7$$

Responda Como el tiempo no puede ser negativo, la única solución razonable es 2.7 segundos. Por lo tanto, alrededor de 2.7 segundos después de su lanzamiento, la pelota estará a 25 pies del piso.

b) Entienda el problema Deseamos determinar el momento en que la pelota golpeará el piso. En ese instante, la distancia entre la pelota y el piso es 0. Por lo tanto, sustituimos $h = 0$ en la fórmula y despejamos t.

Traduzca

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$

$$0 = \frac{1}{2}(-32)t^2 + 30t + 60$$

Realice los cálculos

$$0 = -16t^2 + 30t + 60$$
$$a = -16, \quad b = 30, \quad c = 60$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-30 \pm \sqrt{(30)^2 - 4(-16)(60)}}{2(-16)}$$
$$= \frac{-30 \pm \sqrt{4740}}{-32}$$
$$t = \frac{-30 + \sqrt{4740}}{-32} \quad \text{o} \quad t = \frac{-30 - \sqrt{4740}}{-32}$$
$$\approx -1.2 \qquad\qquad \approx 3.1$$

Responda Como el tiempo no puede ser negativo, la única solución razonable es 3.1 segundos. Por lo tanto, la pelota golpea el piso alrededor de 3.1 segundos después de su lanzamiento.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 103

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.2

Ejercicios de concepto/redacción

1. Escriba la fórmula cuadrática. (Debe memorizarla).
2. Para resolver la ecuación $3x + 2x^2 - 9 = 0$ mediante la fórmula cuadrática, ¿cuáles son los valores de *a, b* y *c*?
3. Para resolver la ecuación $6x - 3x^2 + 8 = 0$ mediante la fórmula cuadrática, ¿cuáles son los valores de *a, b* y *c*?
4. Para resolver la ecuación $4x^2 - 5x = 7$ mediante la fórmula cuadrática, ¿cuáles son los valores de *a, b* y *c*?
5. Considere las dos ecuaciones $-6x^2 + \frac{1}{2}x - 5 = 0$ y $6x^2 - \frac{1}{2}x + 5 = 0$. ¿Sus soluciones deben ser iguales? Explique su respuesta.
6. Considere $12x^2 - 15x - 6 = 0$ y $3(4x^2 - 5x - 2) = 0$.
   a) ¿Serán iguales las soluciones para las dos ecuaciones? Explique.
   b) Resuelva $12x^2 - 15x - 6 = 0$.
   c) Resuelva $3(4x^2 - 5x - 2) = 0$.
7. **a)** Explique cómo determinar el discriminante.
   b) ¿Cuál es el discriminante de la ecuación $3x^2 - 6x + 10 = 0$?
   c) Escriba uno o dos párrafos donde explique la relación entre el valor del discriminante y el número de soluciones reales para una ecuación cuadrática. Aclare *por qué* el valor del discriminante ayuda a establecer el número de soluciones reales.
8. Escriba uno o dos párrafos para explicar la relación entre el valor del discriminante y el número de intersecciones con el eje *x* de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Explique también cuándo la función tendrá 0, 1 y 2 intersecciones con el eje *x*.

Práctica de habilidades

Utilice el discriminante para determinar si cada una de las siguientes ecuaciones tiene dos soluciones reales distintas, una sola solución real o ninguna solución real.

9. $x^2 + 3x + 1 = 0$
10. $2x^2 + x + 3 = 0$
11. $4z^2 + 6z + 5 = 0$
12. $-a^2 + 3a - 6 = 0$
13. $5p^2 + 3p - 7 = 0$
14. $2x^2 = 16x - 32$
15. $-5x^2 + 5x - 8 = 0$
16. $4.1x^2 - 3.1x - 2.8 = 0$
17. $x^2 + 10.2x + 26.01 = 0$
18. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 10 = 0$
19. $b^2 = -3b - \frac{9}{4}$
20. $\frac{x^2}{3} = \frac{2x}{7}$

Resuelva cada ecuación mediante la fórmula cuadrática.

21. $x^2 - 9x + 18 = 0$
22. $x^2 + 9x + 18 = 0$
23. $a^2 - 6a + 8 = 0$
24. $a^2 + 6a + 8 = 0$
25. $x^2 = -6x + 7$
26. $-a^2 - 9a + 10 = 0$
27. $-b^2 = 4b - 20$
28. $a^2 - 16 = 0$
29. $b^2 - 64 = 0$
30. $2x^2 = 4x + 1$
31. $3w^2 - 4w + 5 = 0$
32. $x^2 - 6x = 0$

33. $c^2 - 5c = 0$
34. $-t^2 - t - 1 = 0$
35. $4s^2 - 8s + 6 = 0$
36. $-3r^2 = 9r + 6$
37. $a^2 + 2a + 1 = 0$
38. $y^2 + 16y + 64 = 0$
39. $16x^2 - 8x + 1 = 0$
40. $100m^2 + 20m + 1 = 0$
41. $x^2 - 2x - 1 = 0$
42. $2 - 3r^2 = -4r$
43. $-n^2 = 3n + 6$
44. $-9d - 3d^2 = 5$
45. $2x^2 + 5x - 3 = 0$
46. $(r - 3)(3r + 4) = -10$
47. $(2a + 3)(3a - 1) = 2$
48. $6x^2 = 21x + 27$
49. $\frac{1}{2}t^2 + t - 12 = 0$
50. $\frac{2}{3}x^2 = 8x - 18$
51. $9r^2 + 3r - 2 = 0$
52. $2x^2 - 4x - 2 = 0$
53. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{2}{3} = 0$
54. $x^2 - \frac{11}{3}x = \frac{10}{3}$
55. $a^2 - \frac{a}{5} - \frac{1}{3} = 0$
56. $b^2 = -\frac{b}{2} + \frac{2}{3}$
57. $c = \frac{c - 6}{4 - c}$
58. $3y = \frac{5y + 6}{2y + 3}$
59. $2x^2 - 4x + 5 = 0$
60. $3a^2 - 4a = -5$
61. $y^2 + \frac{y}{2} = -\frac{3}{2}$
62. $2b^2 - \frac{7}{3}b + \frac{4}{3} = 0$
63. $0.1x^2 + 0.6x - 1.2 = 0$
64. $2.3x^2 - 5.6x - 0.4 = 0$

Determine todos los valores reales de la variable para los que cada función tiene el valor indicado.

65. $f(x) = x^2 - 2x + 5, f(x) = 5$
66. $g(x) = x^2 + 3x + 8, g(x) = 8$
67. $k(x) = x^2 - x - 15, k(x) = 15$
68. $p(r) = r^2 + 17r + 81, p(r) = 9$
69. $h(t) = 2t^2 - 7t + 6, h(t) = 2$
70. $t(x) = x^2 + 5x - 4, t(x) = 3$
71. $g(a) = 2a^2 - 3a + 16, g(a) = 14$
72. $h(x) = 6x^2 + 3x + 1, h(x) = -7$

Determine una función que tenga las soluciones dadas.

73. $2, 5$
74. $-3, 4$
75. $1, -9$
76. $-2, -6$
77. $-\frac{3}{5}, \frac{2}{3}$
78. $-\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}$
79. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$
80. $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$
81. $3i, -3i$
82. $8i, -8i$
83. $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}$
84. $5 - \sqrt{3}, 5 + \sqrt{3}$
85. $2 + 3i, 2 - 3i$
86. $5 - 4i, 5 + 4i$

Resolución de problemas

En los ejercicios 87 a 90, **a)** *plantee una función de ingreso, $R(n)$, que pueda usarse para resolver el problema, y* **b)** *resuelva el problema. Vea el ejemplo 8.*

87. Venta de lámparas Un negocio vende n lámparas, $n \leq 65$, a un precio de $(10 - 0.02n)$ dólares cada una. ¿Cuántas lámparas deben venderse para obtener un ingreso de \$450?

88. Venta de pilas Un negocio vende n pilas, $n \leq 26$, a un precio de $(25 - 0.1n)$ dólares cada una. ¿Cuántas pilas deben venderse para obtener un ingreso de \$460?

89. Venta de sillas Un negocio vende n sillas, $n \leq 50$, a un precio de $(50 - 0.4n)$ dólares cada una. ¿Cuántas sillas deben venderse para obtener un ingreso de \$660?

90. Venta de relojes Un negocio vende n relojes, $n \leq 75$, a un precio de $(30 - 0.15n)$ dólares cada uno. ¿Cuántos relojes deben venderse para obtener un ingreso de \$1260 dólares?

91. Proporcione su propio ejemplo de una ecuación cuadrática que pueda resolverse mediante la fórmula cuadrática, pero no por medio de factorización sobre el conjunto de enteros.

92. ¿Existen ecuaciones cuadráticas que **a)** puedan resolverse mediante la fórmula cuadrática, pero que no se puedan resolver completando el cuadrado; **b)** puedan resolverse completando el cuadrado pero no factorizando sobre el conjunto de enteros?

93. Al resolver una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática, si el discriminante es un cuadrado perfecto, ¿la ecuación debe ser factorizable sobre el conjunto de los enteros?

94. Al resolver una ecuación mediante la fórmula cuadrática, si el discriminante es un número natural, ¿la ecuación debe ser factorizable sobre el conjunto de los enteros?

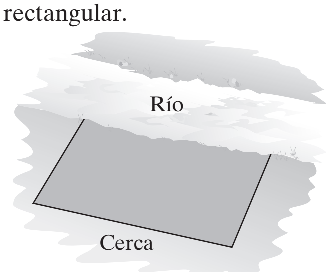
En los ejercicios 95 a 102, utilice una calculadora cuando sea necesario para dar la solución en forma decimal. Redondee los números irracionales al centésimo más cercano.

95. Números El doble del cuadrado de un número positivo aumentado en tres veces el número original es igual a 27. Determine el número.

96. Números El triple del cuadrado de un número positivo menos el doble del mismo número es igual a 21. Determine el número.

97. Jardín rectangular El largo de un jardín rectangular es 1 pie menor que el triple de su ancho. Si el área del jardín es de 24 pies cuadrados, determine el largo y el ancho.

98. Área rectangular Lora Wallman desea cercar un área rectangular ubicada en la ribera de un río, como se ilustra en el diagrama. Si sólo tiene 400 pies de cerca y desea encerrar un área de 15,000 pies cuadrados, determine las dimensiones del área rectangular.



99. Fotografía John Williams, un fotógrafo profesional, tiene una fotografía de 6 por 8 pulgadas, y desea reducir la misma cantidad de cada lado, de modo que la fotografía resultante tenga la mitad del área de la fotografía original. ¿En cuánto debe reducir cada lado?

100. Jardín rectangular Bart Simmons tiene un jardín floral de 12 por 9 metros, y quiere construir un camino de grava de ancho uniforme por la parte interior del jardín y a lo largo de cada lado, de modo que el espacio resultante tendrá la mitad del área del jardín original. ¿Qué ancho tendrá el camino de grava?

101. Cascada Cuando una gota de agua (u otro objeto) desde la parte superior de las cataratas Lower Falls en el parque nacional de Yellowstone cae a la fosa en la parte inferior, la altura, h, en pies, con respecto del agua en la fosa, puede determinarse mediante la ecuación $h = -16t^2 + 308$. En la ecuación, t es el tiempo, en segundos, a partir de que la gota cae en la cascada. Determine el tiempo que tarda la gota en llegar a la parte inferior de la cascada, en la fosa (cuando $h = 0$).

102. Cascada Cuando una gota de agua (u otro objeto) desde la parte superior de las cataratas del Niágara cae a la fosa en la parte inferior, la altura, h, en pies, con respecto del agua en la fosa, puede determinarse mediante la ecuación $h = -16t^2 + 176$. En la ecuación, t es el tiempo, en segundos, a partir de que la gota cae en la cascada. Determine el tiempo que tarda la gota en llegar a la parte inferior de la cascada, en la fosa (cuando $h = 0$).

En los ejercicios 103 y 104, utilice la ecuación $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$ *(consulte el ejemplo 9).*

103. Lanzamiento de una herradura Una herradura se lanza hacia arriba desde una altura inicial de 80 pies con una velocidad inicial de 60 pies por segundo. ¿Cuánto tiempo después de que se lanza hacia arriba

a) estará a 20 pies del suelo?

b) dará contra el suelo?

104. Gravedad en la Luna La gravedad en la Luna equivale más o menos a un sexto de la terrestre. Suponga que Neil Armstrong se encuentra en la Luna, parado sobre una colina de 60 pies de altura. Si salta hacia arriba con una velocidad de 40 pies por segundo, ¿cuánto tardará en tocar el suelo que está al pie de la colina?

Resuelva mediante la fórmula cuadrática.

105. $x^2 - \sqrt{5}x - 10 = 0$

106. $x^2 + 5\sqrt{6}x + 36 = 0$

Retos

107. Calentamiento de un cubo metálico Un cubo de metal se expande cuando se calienta. Si cada lado aumenta 0.20 milímetros después de que se calienta y el volumen total aumenta 6 milímetros cúbicos, determine la longitud original de cada lado del cubo.

108. Seis soluciones La ecuación $x^n = 1$ tiene n soluciones (incluyendo las soluciones complejas). Determine las seis soluciones de $x^6 = 1$. (*Sugerencia:* Reescriba la ecuación como $x^6 - 1 = 0$; luego factorice mediante la fórmula para la diferencia de dos cuadrados.)

109. Lanzamiento de una piedra Travis Hawley se encuentra en el cuarto nivel de un edificio de ocho pisos, y Courtney Prenzlow está en el techo. Travis se encuentra a 60 pies de distancia respecto del suelo mientras que Courtney está a 120 pies del suelo.

a) Si Travis deja caer una piedra desde una ventana, determine el tiempo que tardará ésta en chocar contra el suelo.

b) Si Courtney deja caer una piedra desde el techo, determine el tiempo que tardará ésta en chocar contra el suelo.

c) Si Travis lanza una piedra hacia arriba con una velocidad inicial de 100 pies por segundo, y Courtney lanza al mismo tiempo una piedra hacia arriba a 60 pies por segundo, ¿cuál de las piedras dará primero contra el suelo? Explique.

d) ¿En algún instante las piedras estarán a la misma distancia respecto del suelo? Si es así, ¿cuándo?

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.6] **110.** Evalúe $\dfrac{5.55 \times 10^3}{1.11 \times 10^1}$.

[3.2] **111.** Si $f(x) = x^2 + 2x - 8$, determine $f(3)$.

[4.1] **112.** Resuelva este sistema de ecuaciones.

$$3x + 4y = 2$$
$$2x = -5y - 1$$

[6.3] **113.** Simplifique $2x^{-1} - (3y)^{-1}$.

[7.6] **114.** Resuelva $\sqrt{x^2 - 6x - 4} = x$.

8.3 Ecuaciones cuadráticas: aplicaciones y resolución de problemas

1 Resolver problemas de aplicación adicionales.

2 Despejar una variable de una fórmula.

1 Resolver problemas de aplicación adicionales

Ya hemos analizado unos cuantos problemas de aplicación que involucran el uso de ecuaciones cuadráticas. En esta sección exploraremos varios más. También estudiaremos cómo despejar una variable en una fórmula. Empezamos determinando las utilidades de una compañía nueva.

EJEMPLO 1 ▸ **Utilidades de una compañía** Laserox, una compañía que inicia sus operaciones, proyecta que sus utilidades anuales, $p(n)$, en miles de dólares, durante los primeros 6 años de operación, pueden calcularse mediante la función $p(n) = 1.2n^2 + 4n - 8$, en donde n es el número de años en operación.

a) Calcule la utilidad (o pérdida) de la compañía después del primer año.

b) Calcule la utilidad (o pérdida) de la compañía después de 6 años.

c) Calcule el tiempo necesario para que la compañía alcance el punto de equilibrio.

Solución **a)** Para aproximar la utilidad después de 1 año, evaluamos la función en 1.

$$p(n) = 1.2n^2 + 4n - 8$$
$$p(1) = 1.2(1)^2 + 4(1) - 8 = -2.8$$

Así, al final del primer año la compañía proyecta una pérdida de \$2.8 miles, es decir, de \$2800.

b) $p(6) = 1.2(6)^2 + 4(6) - 8 = 59.2$

Por lo tanto, al final del sexto año la utilidad proyectada de la compañía es de \$59.2 miles, es decir, de \$59,200.

c) Entienda el problema La compañía alcanzará el punto de equilibrio cuando la utilidad sea 0. Así, para determinar el punto de equilibrio (ni pérdidas ni ganancias) resolvemos la ecuación

$$1.2n^2 + 4n - 8 = 0$$

Podemos utilizar la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación.

Traduzca $a = 1.2, \quad b = 4, \quad c = -8$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1.2)(-8)}}{2(1.2)}$$

Realice los cálculos
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 38.4}}{2.4}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{54.4}}{2.4}$$
$$\approx \frac{-4 \pm 7.376}{2.4}$$
$$n \approx \frac{-4 + 7.376}{2.4} \approx 1.4 \quad \text{o} \quad n \approx \frac{-4 - 7.376}{2.4} \approx -4.74$$

Responda Como el tiempo no puede ser negativo, el momento en que la compañía llega al punto de equilibrio es aproximadamente a los 1.4 años.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 29

Ahora consideremos otro ejemplo en que se utiliza la fórmula cuadrática para resolver una ecuación cuadrática.

EJEMPLO 2 ▸ **Expectativa de vida** La función $N(t) = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$ puede usarse para calcular el promedio de número de años de expectativa de vida para una persona de t años de edad, donde $30 \le t \le 100$.

a) Calcule la expectativa de vida para una persona de 40 años de edad.

b) Si una persona tiene una expectativa de vida de 14.3 años, calcule su edad actual.

Solución **a)** Entienda el problema En principio, es lógico que cuanto mayor sea la persona menor será su expectativa de vida. Para determinar la expectativa de vida de una persona de 40 años de edad, sustituimos t por 40 en la función y evaluamos.

Traduzca
$$N(t) = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$$
$$N(40) = 0.0054(40)^2 - 1.46(40) + 95.11$$

Realice los cálculos
$$= 0.0054(1600) - 58.4 + 95.11$$
$$= 8.64 - 58.4 + 95.11$$
$$= 45.35$$

Responda y compruebe La respuesta parece razonable. Así, en promedio, una persona de 40 años puede esperar vivir otros 45.35 años, para llegar a una edad de 85.35 años.

b) Entienda el problema Aquí se nos da la expectativa de vida, $N(t)$, y se nos pide determinar la edad actual de la persona, t. Para resolver este problema, sustituimos $N(t)$ por 14.3 y despejamos t; para ello utilizaremos la fórmula cuadrática.

Traduzca
$$N(t) = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$$
$$14.3 = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$$

Realice los cálculos
$$0 = 0.0054t^2 - 1.46t + 80.81$$
$$a = 0.0054, \quad b = -1.46, \quad c = 80.81$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-1.46) \pm \sqrt{(-1.46)^2 - 4(0.0054)(80.81)}}{2(0.0054)}$$
$$= \frac{1.46 \pm \sqrt{2.1316 - 1.745496}}{0.0108}$$
$$= \frac{1.46 \pm \sqrt{0.386104}}{0.0108}$$
$$\approx \frac{1.46 \pm 0.6214}{0.0108}$$
$$t \approx \frac{1.46 + 0.6214}{0.0108} \approx 192.72 \quad \text{o} \quad t \approx \frac{1.46 - 0.6214}{0.0108} \approx 77.65$$

Responda Como 192.72 no es una edad razonable, podemos omitir este resultado. Por lo tanto, en promedio, las personas con una expectativa de vida de 14.3 años, tienen alrededor de 77.65 años de edad.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 31

Problemas de movimiento

En la sección 2.4 estudiamos por primera vez los problemas de movimiento; los que analizaremos a continuación se resuelven mediante la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 3 ▸ Paseo en una lancha de motor Charles Curtis decide dar un paseo relajante en su lancha de motor por el río Potomac. Inicia su recorrido en Bethesda, Maryland. Después de recorrer 12 millas a favor de la corriente, decide regresar. Su paseo tuvo una duración de 5 horas y la corriente del río se movía a una velocidad de 2 millas por hora. Si todo el trayecto lo hizo a la misma velocidad, determine la velocidad de la lancha en aguas tranquilas.

Solución **Entienda el problema** Nos piden determinar la velocidad de la lancha en aguas tranquilas, por lo que hacemos r = velocidad de la lancha en aguas tranquilas. Sabemos que el paseo duró 5 horas; por lo tanto, el tiempo en que recorrió el trayecto de ida y el de regreso debe sumar 5 horas. Ya que distancia = velocidad · tiempo, podemos determinar el tiempo dividiendo la distancia entre la velocidad.

Dirección	Distancia	Velocidad	Tiempo
Trayecto de ida (a favor de la corriente)	12	$r + 2$	$\frac{12}{r+2}$
Trayecto de vuelta (en contra de la corriente)	12	$r - 2$	$\frac{12}{r-2}$

Traduzca trayecto de ida + trayecto de vuelta = tiempo total

$$\frac{12}{r+2} + \frac{12}{r-2} = 5$$

Realice los cálculos

$$(r+2)(r-2)\left(\frac{12}{r+2} + \frac{12}{r-2}\right) = (r+2)(r-2)(5) \quad \textit{Multiplicar por el MCD.}$$

$$(\cancel{r+2})(r-2)\left(\frac{12}{\cancel{r+2}}\right) + (r+2)(\cancel{r-2})\left(\frac{12}{\cancel{r-2}}\right) = (r+2)(r-2)(5) \quad \textit{Propiedad distributiva.}$$

$$12(r-2) + 12(r+2) = 5(r^2-4)$$

$$12r - 24 + 12r + 24 = 5r^2 - 20 \quad \textit{Propiedad distributiva.}$$

$$24r = 5r^2 - 20 \quad \textit{Simplificar.}$$

$$\text{o} \quad 5r^2 - 24r - 20 = 0$$

Si utilizamos la fórmula cuadrática con $a = 5$, $b = -24$ y $c = -20$, obtenemos

$$r = \frac{24 \pm \sqrt{976}}{10}$$

$$r \approx 5.5 \quad \text{o} \quad r \approx -0.7$$

Responda Puesto que la velocidad no puede ser negativa, la velocidad o rapidez de la lancha en aguas tranquilas es de alrededor de 5.5 millas por hora.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 43

Observe que en situaciones de la vida real, la mayoría de las respuestas no son valores enteros.

Problemas de trabajo

Resolvemos un ejemplo que incluye un problema de trabajo. Los problemas de trabajo se estudiaron en la sección 6.5. Antes de seguir adelante sería conveniente que revisara esa sección.

EJEMPLO 4 ▸ **Bombeo de agua** A consecuencia de un huracán, el sótano de los Dural se inundó. Para drenar el agua, la familia cuenta con una pequeña bomba, pero además pidió prestada una bomba más al departamento de bomberos. Con ambas bombas trabajando juntas, el sótano quedaría seco en alrededor de 6 horas. La bomba del departamento de bomberos tenía mayor potencia, por lo que si sólo se utilizara ésta, vaciarían el sótano en 2 horas menos que si utilizaran únicamente la pequeña bomba. Si se usara cada una de estas bombas por separado para drenar el agua, ¿cuánto tiempo necesitaría cada una para vaciar el sótano?

Solución **Entienda el problema** Recuerde que en la sección 6.5 se dijo que la velocidad de trabajo multiplicada por el tiempo de trabajo da como resultado la parte de la tarea realizada.

Sea t = el número de horas que tarda la bomba más lenta en terminar sola el trabajo.
$t - 2$ = el número de horas que tarda la bomba más rápida en terminar sola el trabajo.

Bomba	Velocidad del trabajo	Tiempo trabajado	Parte de la tarea realizada
Bomba más lenta	$\frac{1}{t}$	6	$\frac{6}{t}$
Bomba más rápida	$\frac{1}{t-2}$	6	$\frac{6}{t-2}$

Traduzca
$$\left(\begin{array}{c}\text{parte de la tarea realizada}\\ \text{por la bomba de los Dural}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{parte de la tarea realizada}\\ \text{por la bomba de los bomberos}\end{array}\right) = 1$$

$$\left(\frac{6}{t} + \frac{6}{t-2}\right) = 1$$

Realice los cálculos
$$t(t-2)\left(\frac{6}{t} + \frac{6}{t-2}\right) = t(t-2)(1)$$
Multiplicar ambos lados por el MCD $t(t-2)$.

$$\cancel{t}(t-2)\left(\frac{6}{\cancel{t}}\right) + t(\cancel{t-2})\left(\frac{6}{\cancel{t-2}}\right) = t^2 - 2t$$
Propiedad distributiva.

$$6(t-2) + 6t = t^2 - 2t$$
$$6t - 12 + 6t = t^2 - 2t$$
$$t^2 - 14t + 12 = 0$$

Usando la fórmula cuadrática, obtenemos

$$t = \frac{14 \pm \sqrt{148}}{2}$$
$$t \approx 13.1 \quad \text{o} \quad t \approx 0.9$$

Responda Tanto 13.1 como 0.9, satisfacen la ecuación $\frac{6}{t} + \frac{6}{t-2} = 1$ (con valores redondeados). Sin embargo, si aceptamos a 0.9 como solución, significaría que la bomba más rápida terminaría la tarea en un tiempo negativo ($t - 2 = 0.9 - 2 = -1.1$), lo cual no es posible. Por consiguiente, 0.9 horas no es una solución aceptable. La única solución es 13.1 horas, que es el tiempo aproximado que la bomba más lenta tardaría en vaciar el sótano, mientras que la otra bomba necesitaría de $13.1 - 2 = 11.1$ horas para realizar la misma tarea.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 45**

2 Despejar una variable de una fórmula

Cuando en una *fórmula* aparece una variable elevada al cuadrado, para despejar la variable se necesitaría utilizar la propiedad de la raíz cuadrada. Sin embargo, *en la mayoría de las fórmulas, cuando se usa la propiedad de la raíz cuadrada sólo se utilizará la raíz principal o raíz positiva,* ya que por lo general se busca una cantidad que no puede ser negativa.

EJEMPLO 5 ▸

a) La fórmula para determinar el área de un círculo es $A = \pi r^2$. Despeje el radio, r, de esta ecuación.

b) *La ley de Newton de la gravitación universal* establece que toda partícula en el universo atrae a otra partícula con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Podemos representar esta ley como

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Despeje r de la ecuación.

Solución

a)

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{A}{\pi} = r^2 \qquad \textit{Aislar } r^2 \textit{ dividiendo ambos lados entre } \pi.$$

$$\sqrt{\frac{A}{\pi}} = r \qquad \textit{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

b)

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$r^2 F = G m_1 m_2 \qquad \textit{Multiplicar ambos lados por } r^2.$$

$$r^2 = \frac{G m_1 m_2}{F} \qquad \textit{Aislar } r^2 \textit{ dividiendo ambos lados entre } F.$$

$$r = \sqrt{\frac{G m_1 m_2}{F}} \qquad \textit{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 23**

En el ejemplo 5, como r debe ser mayor que 0 sólo tomamos la raíz cuadrada principal, o positiva, cuando usamos la propiedad de la raíz cuadrada.

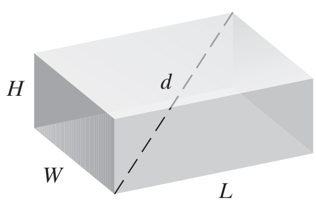


FIGURA 8.5

EJEMPLO 6 ▸ **Diagonal de una maleta** La diagonal de una caja puede calcularse mediante la fórmula

$$d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$$

donde L es la longitud, W es el ancho y H es la altura de la caja. Vea la **figura 8.5**.

a) Determine la diagonal de una maleta con longitud de 30 pulgadas, ancho de 15 pulgadas y altura de 10 pulgadas.

b) Resuelva la ecuación para el ancho, W.

Solución **a)** Entienda el problema Para determinar la diagonal, necesitamos sustituir los valores apropiados en la fórmula y realizar los cálculos.

Traduzca

$$d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$$

$$d = \sqrt{(30)^2 + (15)^2 + (10)^2}$$

Realice los cálculos

$$= \sqrt{900 + 225 + 100}$$

$$= \sqrt{1225}$$

$$= 35$$

Responda Por lo tanto, la diagonal de la maleta mide 35 pulgadas.

b) El primer paso para despejar W es elevar al cuadrado ambos lados de la fórmula.

$$d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$$

$$d^2 = \left(\sqrt{L^2 + W^2 + H^2}\right)^2 \qquad \textit{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$

$$d^2 = L^2 + W^2 + H^2 \qquad \textit{Utilizar } (\sqrt{a})^2 = a,\ a \geq 0.$$

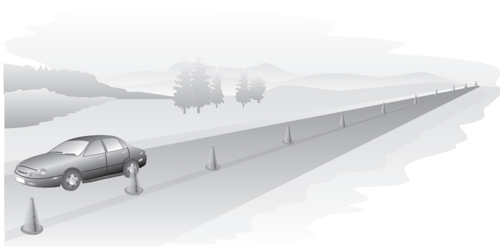
$$d^2 - L^2 - H^2 = W^2 \qquad \textit{Aislar } W^2.$$

$$\sqrt{d^2 - L^2 - H^2} = W \qquad \textit{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 15**

EJEMPLO 7 ▸ **Conos** El área de la superficie de un cono circular recto es

$$s = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$



a) Como señalamiento, en las carreteras se utilizan conos color naranja; cada uno de ellos mide 18 pulgadas de alto y tiene un radio de 12 pulgadas. Determine el área de la superficie de cada cono.

b) Despeje h de la fórmula.

Solución **a)** Entienda el problema y traduzca Para determinar el área de la superficie, sustituimos los valores apropiados en la fórmula.

$$\begin{aligned} s &= \pi r\sqrt{r^2 + h^2} \\ &= \pi(12)\sqrt{(12)^2 + (18)^2} \end{aligned}$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} &= 12\pi\sqrt{144 + 324} \\ &= 12\pi\sqrt{468} \\ &\approx 815.56 \end{aligned}$$

Responda El área de la superficie es de casi 815.56 pulgadas cuadradas.

b) Para despejar h, necesitamos aislarla en un lado de la ecuación. Esto se puede hacer de varias formas, una de ellas es la siguiente:

$$s = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\frac{s}{\pi r} = \sqrt{r^2 + h^2} \qquad \textit{Dividir ambos lados entre } \pi r.$$

$$\left(\frac{s}{\pi r}\right)^2 = \left(\sqrt{r^2 + h^2}\right)^2 \qquad \textit{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$

$$\frac{s^2}{\pi^2 r^2} = r^2 + h^2 \qquad \textit{Utilizar } (\sqrt{a})^2 = a,\ a \geq 0.$$

$$\frac{s^2}{\pi^2 r^2} - r^2 = h^2 \qquad \textit{Restar } r^2 \textit{ en ambos lados.}$$

$$\sqrt{\frac{s^2}{\pi^2 r^2} - r^2} = h \qquad \textit{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

Otras respuestas que también son aceptables son $h = \sqrt{\dfrac{s^2 - \pi^2 r^4}{\pi^2 r^2}}$ y $h = \dfrac{\sqrt{s^2 - \pi^2 r^4}}{\pi r}$. Explique por qué.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 27**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. En general, si utiliza la propiedad de la raíz cuadrada o la fórmula cuadrática para despejar una variable en una fórmula, sólo usará la raíz cuadrada positiva. Explique por qué.

2. Suponga que $P = ☺^2 + \square^2$ es una fórmula real. Al despejar ☺ se obtiene $☺ = \sqrt{P - \square^2}$. Si ☺ representa un número real, ¿qué relación debe existir entre P y $\square$?

Práctica de habilidades

En cada una de las fórmulas siguientes, despeje la variable que se indica. Suponga que la variable que se despeja debe ser mayor que 0.

3. $A = s^2$, para s (área de un cuadrado).
4. $A = (s + 1)^2$, para s (área de un cuadrado).
5. $d = 4.9t^2$, para t (distancia que ha caído un objeto).
6. $A = S^2 - s^2$, para S (área entre dos cuadrados).
7. $E = i^2r$, para i (corriente en electrónica).
8. $A = 4\pi r^2$, para r (área de la superficie de una esfera).
9. $d = 16t^2$, para t (distancia de un objeto que cae).
10. $d = \frac{1}{9}x^2$, para x (distancia de paro sobre pavimento).
11. $E = mc^2$, para c (famosa fórmula de la energía, propuesta por Einstein).
12. $V = \pi r^2h$, para r (volumen de un cilindro circular recto).
13. $V = \frac{1}{3}\pi r^2h$, para r (volumen de un cono circular recto).
14. $d = \sqrt{L^2 + W^2}$, para L (diagonal de un rectángulo).
15. $d = \sqrt{L^2 + W^2}$, para W (diagonal de un rectángulo).
16. $a^2 + b^2 = c^2$, para a (teorema de Pitágoras).
17. $a^2 + b^2 = c^2$, para b (teorema de Pitágoras).
18. $d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$, para L (diagonal de una caja).
19. $d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$, para H (diagonal de una caja).
20. $A = P(1 + r)^2$, para r (fórmula de interés compuesto).
21. $h = -16t^2 + s_0$, para t (altura de un objeto).
22. $h = -4.9t^2 + s_0$, para t (altura de un objeto).
23. $E = \frac{1}{2}mv^2$, para v (energía cinética).
24. $f_x^2 + f_y^2 = f^2$, para f_x (fuerza que actúa sobre un objeto).
25. $a = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$, para v_1 (aceleración de un vehículo).
26. $A = 4\pi(R^2 - r^2)$, para R (área de la superficie de dos esferas).
27. $v' = \sqrt{c^2 - v^2}$, para c (relatividad; v' se lee "v prima").
28. $L = L_0\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$, para v (arte, contracción de una pintura).

Resolución de problemas

29. **Utilidad** La utilidad de una compañía que vende tractores, es $P(n) = 2.7n^2 + 9n - 3$, donde $P(n)$ son cientos de dólares.
    a) Determine la utilidad cuando se venden 5 tractores.
    b) ¿Cuántos tractores deben venderse para obtener una utilidad de $20,000?
30. **Utilidad** La utilidad de la compañía Jackson, que vende refrigeradores, es $P(n) = 6.2n^2 + 6n - 3$, donde $P(n)$ son dólares.
    a) Determine la utilidad cuando se venden 7 refrigeradores.
    b) ¿Cuántos refrigeradores deben venderse para obtener una ganancia de $675?
31. **Temperatura** La temperatura, T, en grados Fahrenheit, del radiador de un automóvil durante los primeros 4 minutos de conducción es una función del tiempo, t. La temperatura puede determinarse mediante la fórmula $T = 6.2t^2 + 12t + 32$, $0 \le t \le 4$.
    a) Cuando se arranca el automóvil, ¿cuál es la temperatura del radiador?
    b) Después de 2 minutos de conducir el automóvil, ¿cuál es la temperatura del radiador?
    c) ¿Cuánto tiempo después de que se arrancó el automóvil la temperatura del radiador alcanza los 120°F?
32. **Matrícula escolar** Para calcular el total de estudiantes inscritos entre los años 1990 y 2008 en el nivel básico y secundario en Estados Unidos, se puede utilizar la función $N(t) = -0.043t^2 + 1.22t + 46.0$, en millones. En la ecuación t es el número de años desde 1989, $1 \le t \le 19$.

    a) Calcule el total de niños inscritos en 1995.
    b) ¿En qué años el total de niños inscritos es de 54 millones de estudiantes?
33. **Descarga de canciones** El número de descargas de canciones, en miles de millones, de 2002 a 2006 y proyectado para 2008, puede estimarse con la función $D = 0.04t^2 - 0.03t + 0.01$. En esta función, t es el número de años desde 2002 y $0 \le t \le 6$. *Fuente*: Price Waterhouse Coopers, LLP, RIAA, *Newsweek* (11 de julio de 2005).
    a) Calcule el número de descargas en 2006.
    b) ¿En qué año está proyectado que las descargas lleguen a mil millones?

34. Calificación promedio En un colegio, los registros muestran que la calificación promedio, G, de un alumno es una función del número de horas que él o ella estudia y destina a realizar tareas por semana. La calificación promedio puede calcularse mediante la ecuación $G = 0.01h^2 + 0.2h + 1.2, 0 \leq h \leq 8$.

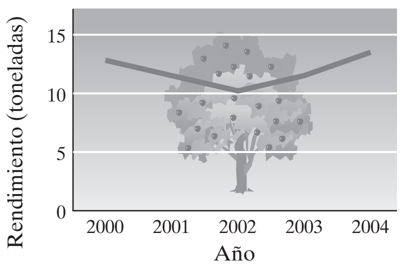
a) ¿Cuál es la calificación promedio de un alumno que estudia 0 horas a la semana?

b) ¿Cuál es la calificación promedio de un alumno que dedica 3 horas a la semana para estudiar?

c) Para obtener una calificación promedio de 3.2, ¿cuántas horas a la semana debería dedicar un alumno al estudio?

35. Producción de manzanas La gráfica siguiente muestra la producción promedio anual por acre, de manzanos, durante los años de 2000 a 2004.

Rendimiento por acre de manzanos



Source: National Agricultural Statistics, *USA Today* (9/15/05)

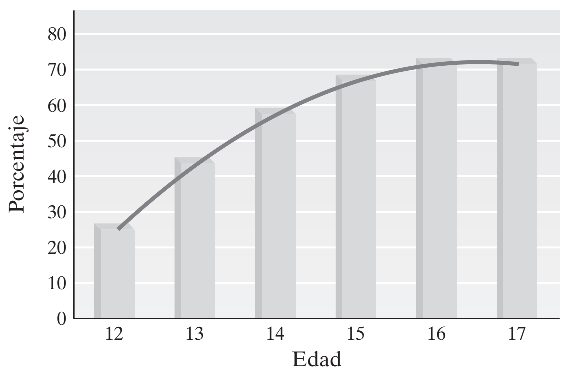
La producción promedio anual por acre de manzanos, en toneladas, puede estimarse mediante la función $Y = 0.66t^2 - 2.49t + 12.93$. En esta función, t es el número de años desde 2000 y $0 \leq t \leq 4$.

a) Estime la producción por acre en 2003.

b) ¿En qué año el rendimiento por acre fue de 13 mil millones de toneladas?

36. Escuela libre de drogas En la gráfica siguiente se muestra el porcentaje de estudiantes que afirma que en sus escuelas se consumen drogas.

Estudiantes que afirman que en sus escuelas se consumen drogas



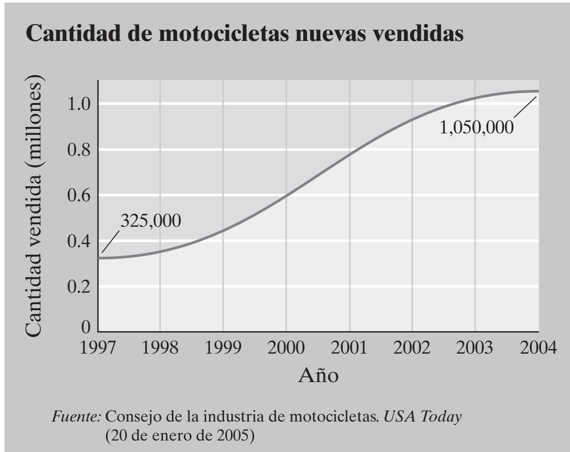
Fuente: Centro Nacional de Adicciones y Abuso de Sustancias de Estados Unidos

La función $f(a) = -2.32a^2 + 76.58a - 559.87$ puede emplearse para calcular el porcentaje de estudiantes que afirma que en sus escuelas se consumen drogas. En la función, a representa la edad del estudiante, donde $12 \leq a \leq 17$. Utilice la función para responder las siguientes preguntas.

a) Calcule el porcentaje de estudiantes de 13 años que afirma que en sus escuelas se consumen drogas.

b) ¿A qué edad 70% de los estudiantes afirma que en sus escuelas se consumen drogas?

37. Ventas de motocicletas La gráfica siguiente muestra el número de motocicletas nuevas, en millones, vendidas en Estados Unidos durante los años de 1997 a 2004.



El número de motocicletas nuevas, $m(t)$, en millones, vendidas en Estados Unidos puede aproximarse mediante la función $M = -0.00434t^2 + 0.142t + 0.315$. En esta función, t es el número de años a partir de 1997.

a) Si esta tendencia continúa, utilice esta función para aproximar el número de motocicletas que se venderán en Estados Unidos en 2007.

b) ¿En qué año el número de motocicletas vendidas en Estados Unidos será de 1.4 millones?

38. Utilidad La utilidad semanal de una tienda de videos, P, en miles de dólares, es una función del precio de alquiler de las cintas, t. La ecuación de la utilidad es $P = 0.2t^2 + 1.5t - 1.2$, $0 \leq t \leq 5$.

a) Si la tienda cobra \$3 por cinta, ¿cuál es la utilidad o pérdida semanal de la tienda?

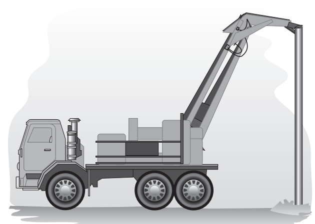
b) Si cobra \$5 por cinta, ¿cuál es la utilidad semanal?

c) ¿Cuál debe ser el precio de alquiler de cada cinta para que la utilidad semanal sea de \$1,600?

39. Patio escolar El área de un patio escolar es de 500 metros cuadrados. La longitud es 5 metros mayor que el ancho; determine la longitud y el ancho del patio.

40. Viaje Hana Juárez condujo 80 millas en medio del tránsito pesado, hasta llegar a una autopista, por la que viajó 260 millas a una velocidad promedio de 25 millas por hora más que la velocidad promedio en el tránsito pesado. Si el viaje total duró 6 horas, determine su velocidad promedio en tránsito pesado y en la autopista.

41. Perforación de un pozo Paolo y Rima Jones desean cavar un pozo en su propiedad, así que contratan una compañía especializada para que lo perfore. La compañía tiene que perforar 64 pies para encontrar agua, e informa a los Torres que acaba de pedir un nuevo equipo que perfora a una velocidad de 1 pie por hora más rápido, lo cual les permitiría llegar al agua 3.2 horas antes que con el equipo que tienen actualmente. Determine la velocidad a la que perfora el equipo actual.



42. Transportación de automóviles Frank Simms transportó un lote de automóviles nuevos desde Detroit, Michigan, hasta Indianapolis, Indiana. En su viaje de regreso el camión estaba más ligero, así que la velocidad de Francisco fue, en promedió, 10 millas por hora más rápida que en su viaje de ida. Si la distancia total recorrida fue de 300 millas y el tiempo total empleado en la conducción fue de 11 horas, determine la velocidad promedio de ida y la velocidad promedio de regreso.

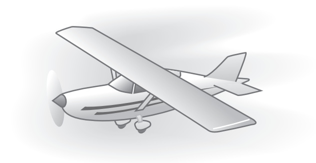
43. Corredor Latoya Williams, corredora de fondo, sale de su casa, trota 6 millas y regresa. La mayor parte del recorrido de ida es cuesta arriba, por lo que su velocidad promedio es 2 millas por hora menos que su velocidad de regreso. Si el tiempo total que dura su recorrido es $1\frac{3}{4}$ horas, determine su velocidad de ida y su velocidad de regreso.

44. Tiempo de viaje Kathy Nickel viajó de una ciudad a otra; la distancia total que recorrió fue de 300 millas. Al llegar a su destino calculó que si hubiera viajado 10 millas por hora más rápido, en promedio, habría llegado a su destino 1 hora antes. Determine la velocidad promedio a la que viajó Kathy.

45. Construcción de un motor Trabajando juntas, dos mecánicas, Bonita y Pamela, tardan 6 horas en reconstruir un motor. Si cada una de ellas trabajara sola, Bonita, la más experimentada, podría completar la tarea 1 hora antes que Pamela. ¿Cuánto tiempo tardaría cada una de ellas en reconstruir el motor por su cuenta?

46. Paseo en bicicleta Ricky Bullock disfruta pasear en bicicleta de ida y regreso desde Washington, D.C., hasta Bethesda, Maryland; el trayecto total es de 30 millas. La mayor parte del viaje a Bethesda es cuesta arriba. La velocidad promedio al ir a Bethesda es 5 millas por hora más lenta que la velocidad promedio de regreso a Washington. Si el viaje completo dura 4.5 horas, determine la velocidad promedio en cada dirección.

47. Vuelo en aeroplano Dole Rohm voló su aeroplano monomotor por una distancia de 80 millas a favor del viento, desde Jackson Hole, Wyoming, hasta Blackfoot, Idaho. En ese momento dio vuelta y voló de regreso a Jackson Hole con el viento en contra. Si la velocidad del viento era de 30 millas por hora y el tiempo total del recorrido fue de 1.3 horas, determine la velocidad del aeroplano con viento en calma.



48. Barcos Después de un derrame petrolero, se envían dos barcos para limpiar la bahía de Baffin. El barco más nuevo puede limpiar todo el derrame en 3 horas menos que el barco más antiguo. Si ambos barcos trabajan juntos, pueden limpiar el derrame de petróleo en 8 horas. ¿Cuánto tardaría el barco más nuevo en limpiar el petróleo derramado si trabajara solo?

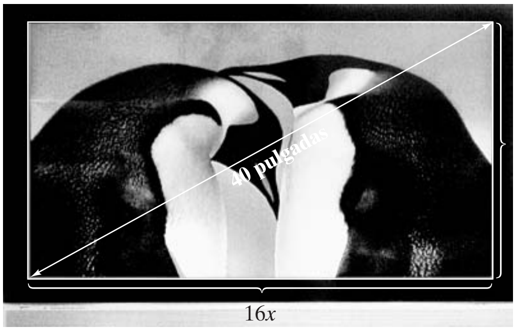
49. Servicio de limpieza Los O'Connor ofrecen servicios de limpieza. Si trabaja solo, John necesita $\frac{1}{2}$ hora más que Cristina para limpiar un edificio de oficinas. Si trabajan juntos, John y Chris pueden limpiar el mismo edificio en 6 horas. Determine el tiempo que necesita cada uno de ellos para limpiar el edificio sin ayuda de su compañero.

50. Calentador eléctrico Un calentador eléctrico pequeño requiere 6 minutos más que un calentador más grande para elevar la temperatura de una cochera hasta alcanzar un clima agradable. Juntos, los dos calentadores pueden elevar la temperatura de la cochera hasta ese nivel en 42 minutos. ¿Cuánto tiempo tardaría en elevar la temperatura de la cochera hasta ese nivel cada uno de los calentadores?

51. Viaje Shywanda Moore viajó de San Antonio, Texas, a Austin, Texas, una distancia de 75 millas. Ella se detuvo 2 horas en Austin para visitar a un amigo antes de continuar su viaje a Dallas, Texas, que se encuentra a una distancia de 195 millas. Si condujo 10 millas por hora más rápido de San Antonio a Austin y el tiempo total del viaje fue de 6 horas, determine su velocidad promedio de San Antonio a Austin.

52. Viaje Lewis y su amigo George viajan de Memphis, Tennessee, a Richmond, Virginia. Lewis viaja en automóvil y George en tren. El tren y el automóvil salen de Memphis al mismo tiempo. Durante el viaje, los amigos hablan por teléfono celular, y Lewis le informa a George que se detuvo al anochecer después de haber recorrido 500 millas. Una hora y dos tercios después, George le habla a Lewis para informarle que el tren acaba de llegar a Richmond, ciudad que se encuentra a 800 millas de Memphis. Suponiendo que, en promedio, el tren viaja 20 millas por hora más rápido que el automóvil, determine la velocidad promedio del automóvil y del tren.

53. Televisores de pantalla ancha Un televisor de pantalla ancha (vea la figura) tiene una razón de aspecto de 16:9. Esto significa que la razón del largo a la altura de la pantalla es 16 a 9. La figura ilustra cómo pueden determinarse el largo y el ancho de una televisión de pantalla ancha de 40 pulgadas. Determine el largo y la altura de dicho televisor.



54. Televisor estándar Muchos televisores de tubos de rayos catódicos tienen una pantalla con razón de aspecto de 4:3. Determine el largo y la altura de la pantalla de una televisión que tiene una razón de aspecto de 4:3 y cuya diagonal es de 36 pulgadas. Vea el ejercicio 53.

55. Escriba su propio problema de movimiento y resuélvalo.

56. Escriba su propio problema de trabajo y resuélvalo.

Reto

57. Área El área de un rectángulo es de 18 metros cuadrados. Cuando la longitud se aumenta en 2 metros y el ancho en 3 metros, el área es de 48 metros cuadrados. Determine las dimensiones del rectángulo más pequeño.

58. Área El área de un rectángulo es de 35 pulgadas cuadradas. Cuando la longitud se disminuye en 1 pulgada y el ancho se aumenta en una pulgada, el área del nuevo rectángulo es de 36 pulgadas cuadradas. Determine las dimensiones del rectángulo original.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **59.** Evalúe $-[4(5-3)^3] + 2^4$.

[2.2] **60.** Despeje R de $IR + Ir = E$.

[6.2] **61.** Sume $\frac{r}{r-4} - \frac{r}{r+4} + \frac{32}{r^2-16}$.

[7.2] **62.** Simplifique $\left(\frac{x^{3/4}y^{-2}}{x^{1/2}y^2}\right)^8$.

[7.6] **63.** Resuelva $\sqrt{x^2 + 3x + 12} = x$.

Examen de mitad de capítulo: 8.1-8.3

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en donde se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

Utilice la propiedad de la raíz cuadrada para resolver cada ecuación.

1. $x^2 - 12 = 86$

2. $(a-3)^2 + 20 = 0$

3. $(2m+7)^2 = 36$

Resuelva cada ecuación completando el cuadrado.

4. $y^2 + 4y - 12 = 0$

5. $3a^2 - 12a - 30 = 0$

6. $4c^2 + c = -9$

7. Patio El patio de una casa es un cuadrado, con la diagonal 6 metros mayor que un lado. Determine la longitud de cada lado del patio.

8. a) Proporcione la fórmula para el discriminante de una ecuación cuadrática.

b) Explique cómo determinar si una ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales, una solución real o ninguna solución real.

9. Utilice el discriminante para determinar si la ecuación $2b^2 - 6b - 11 = 0$ tiene dos soluciones reales, una solución real o ninguna solución real.

Resuelva cada ecuación mediante la fórmula cuadrática.

10. $6n^2 + n = 15$

11. $p^2 = -4p + 8$

12. $3d^2 - 2d + 5 = 0$

En los ejercicios 13 y 14, determine una ecuación que tenga las soluciones dadas.

13. $7, -2$

14. $2 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}$

15. Lámparas Una empresa vende n lámparas, $n \le 20$, a un precio de $(60 - 0.5n)$ dólares cada una. ¿Cuántas lámparas deben venderse para tener un ingreso de \$550?

En los ejercicios 16 al 18, despeje la variable que se indica. Suponga que todas las variables son positivas.

16. Despeje r de $y = x^2 - r^2$.

17. Despeje x de $A = \frac{1}{3}kx^2$.

18. Despeje y de $D = \sqrt{x^2 + y^2}$.

19. Área La longitud de un rectángulo es dos pies mayor que el doble del ancho. Determine las dimensiones, si su área es de 60 pies cuadrados.

20. Relojes La utilidad de una compañía que vende n relojes es $p(n) = 2n^2 + n - 35$, donde $p(n)$ está en cientos de dólares. ¿Cuántos relojes deben venderse para tener una utilidad de $2000?

8.4 Planteamiento de ecuaciones en forma cuadrática

1 Resolver ecuaciones con forma cuadrática.

2 Resolver ecuaciones con exponentes racionales.

1 Resolver ecuaciones con forma cuadrática

En ocasiones se nos presenta la necesidad de resolver ecuaciones que, aunque no son cuadráticas, pueden reescribirse en forma cuadrática para darles solución ya sea mediante factorización, completando el cuadrado o a través de la fórmula cuadrática.

Ecuaciones en la forma cuadrática

Una ecuación que puede escribirse en la forma $au^2 + bu + c = 0$, para $a \neq 0$, en donde u es una expresión algebraica, se dice que está en **la forma cuadrática**.

Cuando le den una ecuación en la forma cuadrática, haga una sustitución para transformarla a $au^2 + bu + c = 0$. En general, si los exponentes son positivos y la expresión está en orden descendente de la variable, hacemos u igual al término de en medio, sin el coeficiente numérico. Por ejemplo,

Ecuación de la forma cuadrática	Sustitución	Ecuación con la sustitución
$y^4 - y^2 - 6 = 0$	$u = y^2$	$u^2 - u - 6 = 0$
$2(x+5)^2 - 5(x+5) - 12 = 0$	$u = x + 5$	$2u^2 - 5u - 12 = 0$
$x^{2/3} + 4x^{1/3} - 3 = 0$	$u = x^{1/3}$	$u^2 + 4u - 3 = 0$

Para resolver ecuaciones con la forma cuadrática utilizamos el procedimiento siguiente, ilustrado en el ejemplo 1.

Para resolver ecuaciones con la forma cuadrática

1. Haga una sustitución que tenga como resultado una ecuación de la forma $au^2 + bu + c = 0, a \neq 0$, donde u es una función de la variable original.
2. Despeje u en la ecuación $au^2 + bu + c = 0$.
3. Reemplace u con la función de la variable original del paso 1 y resuelva la ecuación resultante para la variable original.
4. Verifique si hay soluciones extrañas, sustituyendo las soluciones aparentes en la ecuación original.

EJEMPLO 1

a) Resuelva la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

b) Determine las intersecciones del eje x de la función $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Solución

a) Para obtener una ecuación en la forma cuadrática, escribimos x^4 como $(x^2)^2$.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0 \qquad \text{Reemplazar } x^4 \text{ con } (x^2)^2 \text{ para obtener una ecuación en la forma deseada.}$$

Ahora, sea $u = x^2$. Esto produce una ecuación en la forma cuadrática.

$$
\begin{aligned}
u^2 - 5u + 4 &= 0 && \textit{Sustituir } x^2 \textit{ por } u.\\
(u-4)(u-1) &= 0 && \textit{Despejar } u.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
u - 4 = 0 & \text{o} & u - 1 = 0\\
u = 4 & & u = 1\\
x^2 = 4 & & x^2 = 1 \quad \textit{Reemplazar } u \textit{ por } x^2.\\
x = \pm\sqrt{4} & & x = \pm\sqrt{1} \quad \textit{Despejar } x.\\
x = \pm 2 & & x = \pm 1
\end{array}
$$

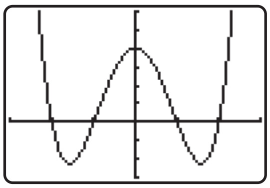
Compruebe las cuatro soluciones posibles en la ecuación original.

$$
\begin{array}{cccc}
x = 2 & x = -2 & x = 1 & x = -1\\
x^4 - 5x^2 + 4 = 0 & x^4 - 5x^2 + 4 = 0 & x^4 - 5x^2 + 4 = 0 & x^4 - 5x^2 + 4 = 0\\
2^4 - 5(2)^2 + 4 \stackrel{?}{=} 0 & (-2)^4 - 5(-2)^2 + 4 \stackrel{?}{=} 0 & 1^4 - 5(1)^2 + 4 \stackrel{?}{=} 0 & (-1)^4 - 5(-1)^2 + 4 \stackrel{?}{=} 0\\
16 - 20 + 4 \stackrel{?}{=} 0 & 16 - 20 + 4 \stackrel{?}{=} 0 & 1 - 5 + 4 \stackrel{?}{=} 0 & 1 - 5 + 4 \stackrel{?}{=} 0\\
0 = 0 & 0 = 0 & 0 = 0 & 0 = 0\\
\textit{Verdadero} & \textit{Verdadero} & \textit{Verdadero} & \textit{Verdadero}
\end{array}
$$

Por lo tanto, las soluciones son $2, -2, 1, -1$.

b) Las intersecciones del eje x ocurren donde $f(x) = 0$. Por consiguiente, la gráfica cruzará el eje x en las soluciones de la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Con base en la parte **a)**, sabemos que las soluciones son $2, -2, 1$ y -1. Así, las intersecciones del eje x son $(2, 0), (-2, 0), (1, 0)$ y $(-1, 0)$. La **figura 8.6** es la gráfica de $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, como se ilustra en una calculadora graficadora. Observe que la gráfica cruza el eje x en $x = 2, x = -2, x = 1$ y $x = -1$.



$-3, 3, 1, -3, 6, 1$

FIGURA 8.6

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 7**

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva la ecuación $p^4 + 2p^2 = 8$.

Solución

$$
\begin{aligned}
p^4 + 2p^2 - 8 &= 0 && \textit{Igualar la ecuación a 0.}\\
(p^2)^2 + 2p^2 - 8 &= 0 && \textit{Escribir } p^4 \textit{ como } (p^2)^2 \textit{ para obtener una ecuación en la forma deseada.}
\end{aligned}
$$

Ahora determine $u = p^2$. Esto da una ecuación en forma cuadrática.

$$
\begin{aligned}
u^2 + 2u - 8 &= 0 && \textit{Sustituir } p^2 \textit{ por } u.\\
(u+4)(u-2) &= 0 && \textit{Despejar } u \textit{ en la ecuación.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
u + 4 = 0 & \text{o} & u - 2 = 0\\
u = -4 & & u = 2
\end{array}
$$

No hemos terminado. Como la variable de la ecuación original es p, debemos resolver p, no u. En consecuencia, sustituimos p^2 por u y despejamos p.

$$
\begin{array}{rcl}
p^2 = -4 & & p^2 = 2 \quad \textit{Reemplazar } u \textit{ con } p^2.\\
p = \pm\sqrt{-4} & & p = \pm\sqrt{2} \quad \textit{Despejar } p.\\
p = \pm 2i & &
\end{array}
$$

Compruebe las cuatro posibles soluciones en la ecuación *original*.

$$
\begin{array}{cccc}
p = 2i & p = -2i & p = \sqrt{2} & p = -\sqrt{2}\\
p^4 + 2p^2 = 8 & p^4 + 2p^2 = 8 & p^4 + 2p^2 = 8 & p^4 + 2p^2 = 8\\
(2i)^4 + 2(2i)^2 \stackrel{?}{=} 8 & (-2i)^4 + 2(-2i)^2 \stackrel{?}{=} 8 & (\sqrt{2})^4 + 2(\sqrt{2})^2 \stackrel{?}{=} 8 & (-\sqrt{2})^4 + 2(-\sqrt{2})^2 \stackrel{?}{=} 8\\
2^4i^4 + 2(2^2)(i^2) \stackrel{?}{=} 8 & (-2)^4i^4 + 2(-2)^2i^2 \stackrel{?}{=} 8 & 4 + 2(2) \stackrel{?}{=} 8 & 4 + 2(2) \stackrel{?}{=} 8\\
16(1) + 8(-1) \stackrel{?}{=} 8 & 16(1) + 8(-1) \stackrel{?}{=} 8 & 8 = 8 & 8 = 8\\
16 - 8 = 8 & 16 - 8 = 8 & \textit{Verdadero} & \textit{Verdadero}\\
\textit{Verdadero} & \textit{Verdadero} & &
\end{array}
$$

Por lo tanto, las soluciones son $2i, -2i, \sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 17**

Las soluciones para ecuaciones como $p^4 + 2p^2 = 8$ deben comprobarse. En general, en este tipo de ecuaciones no se introducen soluciones extrañas, a menos que se cometa algún error. Sin embargo, *pueden* introducirse soluciones extrañas cuando se trabaja con exponentes racionales, como se mostrará en el ejemplo 6.

Sugerencia útil

En ocasiones los estudiantes despejan u en la ecuación, pero luego olvidan terminar el problema despejando la variable original. Recuerde que si la ecuación original está en términos de x, debe obtener valores para x. Si la ecuación está en términos de p (como en el ejemplo 2), debe obtener valores para p, y así sucesivamente.

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $4(2w + 1)^2 - 16(2w + 1) + 15 = 0$.

Solución Si hacemos $u = 2w + 1$, la ecuación se transforma en

$$4(2w + 1)^2 - 16(2w + 1) + 15 = 0$$
$$4u^2 - 16u + 15 = 0 \qquad \text{Sustituir } 2w + 1 \text{ por } u.$$

Ahora podemos factorizar y resolver.

$$(2u - 3)(2u - 5) = 0$$
$$2u - 3 = 0 \quad \text{o} \quad 2u - 5 = 0$$
$$2u = 3 \qquad 2u = 5$$
$$u = \frac{3}{2} \qquad u = \frac{5}{2}$$

No hemos terminado, ya que la variable original en la ecuación es w, así que debemos despejar w no u. Por lo tanto, ahora sustituimos u por $2w + 1$ y despejamos w.

$$u = \frac{3}{2} \qquad u = \frac{5}{2}$$
$$2w + 1 = \frac{3}{2} \qquad 2w + 1 = \frac{5}{2} \qquad \text{Sustituir } u \text{ por } 2w + 1.$$
$$2w = \frac{1}{2} \qquad 2w = \frac{3}{2}$$
$$w = \frac{1}{4} \qquad w = \frac{3}{4}$$

Una comprobación mostrará que $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ son soluciones de la ecuación original.

Ahora resuelva el ejercicio 29

EJEMPLO 4 Determine las intersecciones del eje x de la gráfica de la función $f(x) = 2x^{-2} + x^{-1} - 1$.

Solución Las intersecciones del eje x ocurren donde $f(x) = 0$. Por lo tanto, para determinar las intersecciones del eje x debemos resolver la ecuación

$$2x^{-2} + x^{-1} - 1 = 0$$

Esta ecuación puede expresarse como

$$2(x^{-1})^2 + x^{-1} - 1 = 0$$

Cuando hacemos $u = x^{-1}$, la ecuación se transforma en

$$2u^2 + u - 1 = 0$$
$$(2u - 1)(u + 1) = 0$$
$$2u - 1 = 0 \quad \text{o} \quad u + 1 = 0$$
$$u = \frac{1}{2} \qquad u = -1$$

Ahora sustituimos u por x^{-1}.

$$x^{-1} = \frac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad x^{-1} = -1$$
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \qquad\qquad \frac{1}{x} = -1$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = -1$$

Una comprobación mostrará que 2 y -1 son soluciones de la ecuación original. Por lo tanto, las intersecciones del eje x son $(2, 0)$ y $(-1, 0)$.

Ahora resuelva el ejercicio 61

La ecuación del ejemplo 4 también podría expresarse como

$$\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 1 = 0$$

Un segundo método para resolver esta ecuación consiste en multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, x^2, y luego simplificar.

$$x^2\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 1\right) = x^2 \cdot 0$$
$$2 + x - x^2 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = -1$$

Muchas de las ecuaciones resueltas en esta sección se pueden resolver por más de un método.

2 Resolver ecuaciones con exponentes racionales

Al resolver ecuaciones que tienen la forma cuadrática y exponentes racionales, primero debemos eliminar los exponentes elevando ambos lados de la ecuación a alguna potencia. Recuerde que hicimos esto en la sección 7.6, cuando resolvimos ecuaciones con radicales. Al elevar ambos lados de una ecuación a una potencia, podemos introducir soluciones extrañas. **Por lo tanto, siempre que elevemos ambos lados de una ecuación a una potencia, debemos verificar todas las soluciones en la ecuación original para asegurarnos de que ninguna es extraña**. Ahora resolvamos dos ejemplos para mostrar cómo trabajar con ecuaciones que tienen exponentes racionales. Utilizaremos el procedimiento que ya conocemos.

EJEMPLO 5 Resuelva la ecuación $x^{2/5} + x^{1/5} - 6 = 0$.

Solución Esta ecuación puede reescribirse como

$$(x^{1/5})^2 + x^{1/5} - 6 = 0$$

Sea $u = x^{1/5}$. Entonces, la ecuación se transforma en

$$u^2 + u - 6 = 0$$
$$(u + 3)(u - 2) = 0$$
$$u + 3 = 0 \quad \text{o} \quad u - 2 = 0$$
$$u = -3 \qquad\qquad u = 2$$

Ahora sustituimos u por $x^{1/5}$ y elevamos ambos lados de la ecuación a la quinta potencia para eliminar los exponentes racionales.

$$x^{1/5} = -3 \quad \text{o} \quad x^{1/5} = 2$$
$$(x^{1/5})^5 = (-3)^5 \qquad (x^{1/5})^5 = 2^5$$
$$x = -243 \qquad\qquad x = 32$$

Las *dos posibles* soluciones son -243 y 32. Recuerde que siempre que eleve ambos lados de una ecuación a una potencia, como hicimos aquí, necesita comprobar si hay soluciones extrañas.

Compruebe $x = -243$

$$\begin{aligned} x^{2/5} + x^{1/5} - 6 &= 0 \\ (-243)^{2/5} + (-243)^{1/5} - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ (\sqrt[5]{-243})^2 + \sqrt[5]{-243} - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ (-3)^2 - 3 - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 9 - 3 - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

$x = 32$

$$\begin{aligned} x^{2/5} + x^{1/5} - 6 &= 0 \\ (32)^{2/5} + (32)^{1/5} - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ (\sqrt[5]{32})^2 + \sqrt[5]{32} - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 2^2 + 2 - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 4 + 2 - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

Como ambos valores satisfacen la ecuación, las soluciones son -243 y 32.

▶ **Ahora resuelva el ejercicio 63**

EJEMPLO 6 ▶ Resuelva la ecuación $2p - \sqrt{p} - 10 = 0$.

Solución Podemos expresar esta ecuación como

$$\begin{aligned} 2p - p^{1/2} - 10 &= 0 \\ 2(p^{1/2})^2 - p^{1/2} - 10 &= 0 \end{aligned}$$

Si hacemos $u = p^{1/2}$, esta ecuación tiene la forma cuadrática.

$$\begin{aligned} 2u^2 - u - 10 &= 0 \\ (2u - 5)(u + 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2u - 5 &= 0 \quad \text{o} \quad & u + 2 &= 0 \\ 2u &= 5 & u &= -2 \\ u &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Sin embargo, como en la ecuación original la variable es p, debemos despejar p. Por lo tanto, sustituimos u por $p^{1/2}$.

$$p^{1/2} = \frac{5}{2} \qquad p^{1/2} = -2$$

Ahora elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} (p^{1/2})^2 &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 & (p^{1/2})^2 &= (-2)^2 \\ p &= \frac{25}{4} & p &= 4 \end{aligned}$$

Para terminar, debemos comprobar las dos posibles soluciones en la ecuación original.

Compruebe $p = \frac{25}{4}$

$$\begin{aligned} 2p - \sqrt{p} - 10 &= 0 \\ 2\left(\frac{25}{4}\right) - \sqrt{\frac{25}{4}} - 10 &\stackrel{?}{=} 0 \\ \frac{25}{2} - \frac{5}{2} - 10 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

$p = 4$

$$\begin{aligned} 2p - \sqrt{p} - 10 &= 0 \\ 2(4) - \sqrt{4} - 10 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 8 - 2 - 10 &\stackrel{?}{=} 0 \\ -4 &= 0 \quad \text{Falso} \end{aligned}$$

Como 4 no satisface la ecuación, es una solución extraña; la única solución es $\frac{25}{4}$.

▶ **Ahora resuelva el ejercicio 25**

El ejemplo 6 también podría resolverse escribiendo la ecuación como $\sqrt{p} = 2p - 10$ y elevando ambos lados al cuadrado. Resuélvala de esta manera; si olvidó cómo hacerlo, revise la sección 7.6.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique cómo se puede determinar si una ecuación dada puede expresarse como una ecuación en la forma cuadrática.
2. Al resolver una ecuación que está en la forma cuadrática, ¿en qué situaciones es esencial comprobar si hay soluciones extrañas? Explique por qué.
3. Para resolver la ecuación $3x^4 - 5x^2 + 1 = 0$, ¿cuál es la elección correcta para u a fin de transformar la ecuación a la forma cuadrática? Explique.
4. Para resolver la ecuación $2y^{4/3} + 9y^{2/3} - 7 = 0$, ¿cuál es la elección correcta para u a fin de transformar la ecuación a la forma cuadrática? Explique.
5. Para resolver la ecuación $z^{-2} - z^{-1} = 56$, ¿cuál es la elección correcta para u a fin de transformar la ecuación a la forma cuadrática? Explique.
6. Para resolver la ecuación $3\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{x+3}\right) - 9 = 0$, ¿cuál es la elección correcta para u a fin de transformar la ecuación a la forma cuadrática? Explique.

Práctica de habilidades

Resuelva cada ecuación.

7. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
8. $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$
9. $x^4 + 17x^2 + 16 = 0$
10. $x^4 + 50x^2 + 49 = 0$
11. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
12. $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$
13. $a^4 - 7a^2 + 12 = 0$
14. $b^4 + 7b^2 + 12 = 0$
15. $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
16. $9d^4 - 13d^2 + 4 = 0$
17. $r^4 - 8r^2 = -15$
18. $p^4 - 8p^2 = -12$
19. $z^4 - 7z^2 = 18$
20. $a^4 + a^2 = 42$
21. $-c^4 = 4c^2 - 5$
22. $9b^4 = 57b^2 - 18$
23. $\sqrt{x} = 2x - 6$
24. $x - 2\sqrt{x} = 8$
25. $x - \sqrt{x} = 6$
26. $x - 4 = -3\sqrt{x}$
27. $9x + 3\sqrt{x} = 2$
28. $8x + 2\sqrt{x} = 1$
29. $(x + 3)^2 + 2(x + 3) = 24$
30. $(x + 1)^2 + 4(x + 1) + 3 = 0$
31. $6(a - 2)^2 = -19(a - 2) - 10$
32. $10(z + 2)^2 = 3(z + 2) + 1$
33. $(x^2 - 3)^2 - (x^2 - 3) - 6 = 0$
34. $(a^2 - 1)^2 - 5(a^2 - 1) - 14 = 0$
35. $2(b + 3)^2 + 5(b + 3) - 3 = 0$
36. $(z^2 - 6)^2 + 2(z^2 - 6) - 24 = 0$
37. $18(x^2 - 5)^2 + 27(x^2 - 5) + 10 = 0$
38. $28(x^2 - 8)^2 - 23(x^2 - 8) - 15 = 0$
39. $a^{-2} + 4a^{-1} + 4 = 0$
40. $x^{-2} + 10x^{-1} + 25 = 0$
41. $12b^{-2} - 7b^{-1} + 1 = 0$
42. $5x^{-2} + 4x^{-1} - 1 = 0$
43. $2b^{-2} = 7b^{-1} - 3$
44. $10z^{-2} - 3z^{-1} - 1 = 0$
45. $x^{-2} + 9x^{-1} = 10$
46. $6a^{-2} = a^{-1} + 12$
47. $x^{-2} = 4x^{-1} + 12$
48. $x^{2/3} - 5x^{1/3} + 6 = 0$
49. $x^{2/3} - 4x^{1/3} = -3$
50. $x^{2/3} = 3x^{1/3} + 4$
51. $b^{2/3} - 9b^{1/3} + 18 = 0$
52. $c^{2/3} - 4 = 0$
53. $-2a - 5a^{1/2} + 3 = 0$
54. $r^{2/3} - 7r^{1/3} + 10 = 0$
55. $c^{2/5} + 3c^{1/5} + 2 = 0$
56. $x^{2/5} - 5x^{1/5} + 6 = 0$

Determine todas las intersecciones del eje x de cada función.

57. $f(x) = x - 5\sqrt{x} + 4$
58. $g(x) = x - 15\sqrt{x} + 56$
59. $h(x) = x + 14\sqrt{x} + 45$
60. $k(x) = x + 7\sqrt{x} + 12$
61. $p(x) = 4x^{-2} - 19x^{-1} - 5$
62. $g(x) = 4x^{-2} + 12x^{-1} + 9$
63. $f(x) = x^{2/3} - x^{1/3} - 6$
64. $f(x) = x^{1/2} + 6x^{1/4} - 7$
65. $g(x) = (x^2 - 3x)^2 + 2(x^2 - 3x) - 24$
66. $g(x) = (x^2 - 6x)^2 - 5(x^2 - 6x) - 24$
67. $f(x) = x^4 - 29x^2 + 100$
68. $h(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

Resolución de problemas

69. Indique un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$.
70. Indique un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.
71. Indique un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $ax^{-2} + bx^{-1} + c = 0$.
72. Indique un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $a(x - r)^2 + b(x - r) - c = 0$.
73. Escriba una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones ± 2 y ± 1. Explique cómo obtuvo su respuesta.
74. Escriba una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones ± 3 y $\pm 2i$. Explique cómo obtuvo su respuesta.
75. Escriba una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones $\pm\sqrt{2}$ y $\pm\sqrt{5}$. Explique cómo obtuvo su respuesta.
76. Escriba una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones $\pm 2i$ y $\pm 5i$. Explique cómo obtuvo su respuesta.
77. ¿Es posible que una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tenga exactamente una solución imaginaria? Explique.
78. ¿Es posible que una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tenga exactamente una solución real? Explique.
79. Resuelva la ecuación $\frac{3}{x^2} - \frac{3}{x} = 60$.
    a) multiplicando ambos lados por el MCD.
    b) escribiendo la ecuación con exponentes negativos.
80. Resuelva la ecuación $1 = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$.
    a) multiplicando ambos lados por el MCD.
    b) escribiendo la ecuación con exponentes negativos.

Determine todas las soluciones reales de cada ecuación.

81. $15(r + 2) + 22 = -\frac{8}{r + 2}$

82. $2(p + 3) + 5 = \frac{3}{p + 3}$

83. $4 - (x - 1)^{-1} = 3(x - 1)^{-2}$

84. $3(x - 4)^{-2} = 16(x - 4)^{-1} + 12$

85. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

86. $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

87. $(x^2 + 2x - 2)^2 - 7(x^2 + 2x - 2) + 6 = 0$

88. $(x^2 + 3x - 2)^2 - 10(x^2 + 3x - 2) + 16 = 0$

Determine todas las soluciones de cada ecuación.

89. $2n^4 - 6n^2 - 3 = 0$

90. $3x^4 + 8x^2 - 1 = 0$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] **91.** Evalúe $\frac{4}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$.

[2.1] **92.** Resuelva $3(x + 2) - 2(3x + 3) = -3$

[3.2] **93.** Establezca el dominio y el rango de $y = (x - 3)^2$.

[7.3] **94.** Simplifique $\sqrt[3]{16x^3y^6}$.

[7.4] **95.** Sume $\sqrt{75} + \sqrt{48}$.

8.5 Graficación de funciones cuadráticas

1. Determinar cuándo una parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
2. Determinar el eje de simetría, el vértice y las intersecciones del eje x de una parábola.
3. Graficar funciones cuadráticas por medio del eje de simetría, el vértice y las intersecciones.
4. Resolver problemas de máximos y mínimos.
5. Entender el desplazamiento de las parábolas.
6. Escribir funciones en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

En la sección 3.2 graficamos ecuaciones cuadráticas por medio del trazado de puntos, y en la sección 5.8 hicimos un breve análisis de las intersecciones del eje x de las funciones cuadráticas. En esta sección estudiaremos con mayor profundidad las gráficas de funciones cuadráticas, denominadas **parábolas**. En la parte 3 se explica cómo graficar funciones cuadráticas usando el eje de simetría, el vértice y las intersecciones. En la parte 5 estudiaremos patrones en las gráficas de las parábolas, y utilizaremos dichos patrones para determinar traslaciones, o desplazamientos, que puedan usarse para graficar parábolas.

1 Determinar cuándo una parábola abre hacia arriba o hacia abajo

Las parábolas tienen una forma parecida a la de la letra U, pero su abertura puede estar hacia arriba o hacia abajo. Para una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, el *signo* del coeficiente principal, a, determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo. *Cuando $a > 0$, la parábola abre hacia arriba* (vea la **figura 8.7a**). *Cuando $a < 0$, la parábola abre hacia abajo* (vea la **figura 8.7b**).

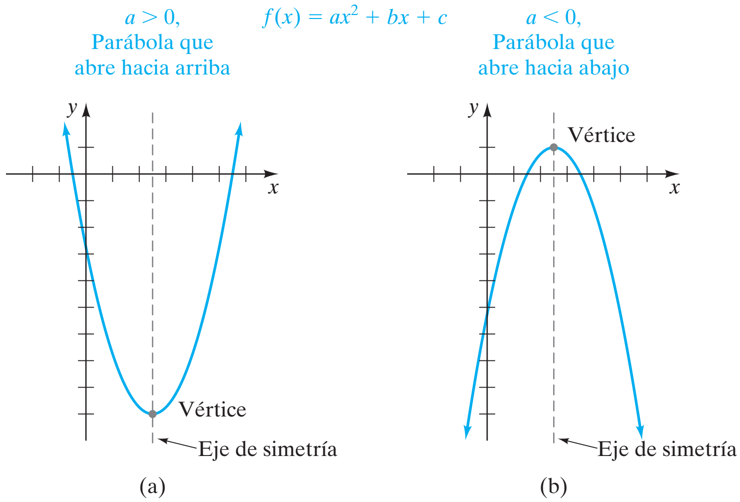


FIGURA 8.7

En el caso de las parábolas que abren hacia arriba, el **vértice** es el punto más bajo de la curva. El valor mínimo de la función es la coordenada y del vértice. El valor mínimo se obtiene cuando la coordenada x del vértice se sustituye en la función. En cuanto a las parábolas que abren hacia abajo, el vértice es el punto más alto de la curva. El valor máximo de la función es la coordenada y del vértice. El valor máximo se obtiene cuando la coordenada x del vértice se sustituye en la función.

2 Determinar el eje de simetría, el vértice y las intersecciones del eje x de una parábola

Las gráficas de funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, tendrán **simetría** respecto de una recta vertical que pasa por el vértice. Esto significa que si dobláramos el papel a lo largo de esta línea imaginaria, denominada **eje de simetría**, los dos lados de la parábola coincidirán (vea la **figura 8.7**). A continuación se establece la ecuación para determinar el eje de simetría.

Para determinar el eje de simetría

Para una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, la ecuación para determinar el **eje de simetría** de la parábola es

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Ahora deduciremos la fórmula para encontrar el eje de simetría, y determinaremos las coordenadas del vértice de la parábola; comencemos con una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y completemos el cuadrado con los primeros dos términos.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \quad \textit{Factorizar } a.$$

Un medio del coeficiente de x es $\frac{b}{2a}$, y su cuadrado es $\frac{b^2}{4a^2}$. Sumemos y restemos este término dentro del paréntesis; el resultado es cero.

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

Ahora reescribimos la función de la manera siguiente.

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$ *Reemplazar el trinomio con el cuadrado de un binomio.*

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$ *Escribir fracciones con un denominador común.*

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$ *Combinar los dos últimos términos; escribir primero con la variable a.*

$$= a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

La expresión $\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2$ siempre será mayor o igual a cero, ¿por qué? Si $a > 0$, la parábola abrirá hacia arriba y tendrá un valor mínimo. Como $\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2$ tendrá un valor mínimo cuando $x = -\frac{b}{2a}$, el valor mínimo de la gráfica se presentará cuando $x = -\frac{b}{2a}$. Si $a < 0$, la parábola abrirá hacia abajo y tendrá un valor máximo; éste se presentará cuando $x = -\frac{b}{2a}$. Para determinar el punto más bajo o el más alto de una parábola, sustituimos x por $-\frac{b}{2a}$ en la función, a fin de conocer el valor de y. El par ordenado resultante será el vértice de la parábola. Como el eje de simetría es la recta vertical que pasa por el vértice de la parábola, su ecuación se determina mediante la coordenada x del par ordenado. Así, la ecuación para determinar el eje de simetría es $x = -\frac{b}{2a}$. Observe que cuando $x = -\frac{b}{2a}$, el valor de $f(x)$ es $\frac{4ac - b^2}{4a}$. ¿Puede explicar por qué?

Para determinar el vértice de una parábola

La parábola representada por la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tendrá como eje de simetría $x = -\frac{b}{2a}$ y como vértice

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Ya que con frecuencia determinamos la coordenada y del vértice sustituyendo la coordenada x del vértice en $f(x)$, el vértice también puede designarse como

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

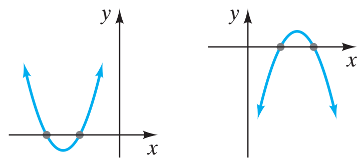
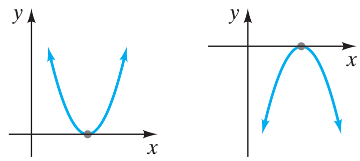
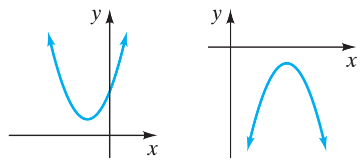
La parábola dada mediante la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ abrirá hacia arriba cuando a sea mayor que 0, y hacia abajo cuando a sea menor que 0.

Recuerde que para determinar la intersección del eje x de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$, hacemos $f(x) = 0$ y resolvemos la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Esta ecuación puede resolverse por factorización, mediante la fórmula cuadrática o completando el cuadrado.

Como se mencionó en la sección 8.2, el discriminante, $b^2 - 4ac$, puede usarse para determinar el *número de intersecciones con el eje x*. La tabla siguiente resume la información acerca del discriminante.

Discriminante $b^2 - 4ac$	**Número de intersecciones de** x	**Posibles gráficas de** $f(x) = ax^2 + bx + c$
> 0	Dos	
$= 0$	Una	
< 0	Ninguna	

3 Graficar funciones cuadráticas por medio del eje de simetría, el vértice y las intersecciones

En esta parte trazaremos gráficas de funciones cuadráticas.

EJEMPLO 1 Examine la ecuación $y = -x^2 + 8x - 12$.

a) Determine si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
b) Determine la intersección del eje y.
c) Determine el vértice.
d) Determine las intersecciones del eje x, si las hay.
e) Trace la gráfica.

Solución

a) Como a es -1, es decir, menor que 0, la parábola abre hacia abajo.

b) Para determinar la intersección del eje y, hacemos $x = 0$ y despejamos y.

$$y = -(0)^2 + 8(0) - 12 = -12$$

La intersección del eje y se da en el punto $(0, -12)$.

c) Primero determinamos la coordenada x y luego la coordenada y del vértice.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2(-1)} = 4$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-12) - 8^2}{4(-1)} = \frac{48 - 64}{-4} = 4$$

El vértice está en $(4, 4)$. La coordenada y del vértice podría haberse obtenido también sustituyendo x por 4 en la función, y determinando el valor de y correspondiente, que es 4.

d) Para determinar las intersecciones del eje x, hacemos $y = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 8x - 12 \\ \text{o} \quad x^2 - 8x + 12 &= 0 \\ (x - 6)(x - 2) &= 0 \\ x - 6 = 0 \quad \text{o} \quad & x - 2 = 0 \\ x = 6 \quad \text{o} \quad & x = 2 \end{aligned}$$

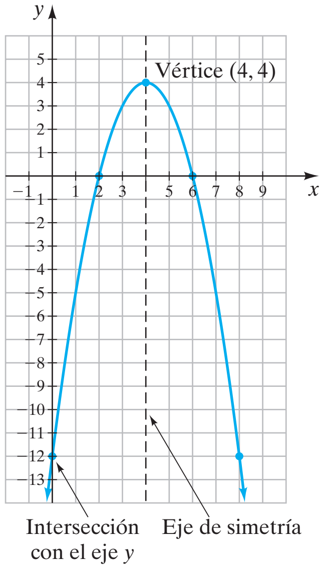


FIGURA 8.8

Así, las intersecciones del eje x se dan en $(2, 0)$ y $(6, 0)$. Estos valores también podrían determinarse por medio de la fórmula cuadrática (o completando el cuadrado).

e) Utilice toda esta información para trazar la gráfica (**figura 8.8**).

Ahora resuelva el ejercicio 15

Observe que en el ejemplo 1, la ecuación es $y = -x^2 + 8x - 12$ y la intersección con el eje y es $(0, -12)$. En general, para cualquier ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, la intersección con el eje y será $(0, c)$.

Si al determinar las intersecciones del eje x, mediante la fórmula cuadrática, obtiene valores irracionales utilice su calculadora para estimar estos valores, y luego trace los valores decimales. Por ejemplo, si obtiene $x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$, evaluaría $\frac{2 + \sqrt{10}}{2}$ y $\frac{2 - \sqrt{10}}{2}$ en su calculadora para obtener 2.58 y -0.58, respectivamente (resultados redondeados al centésimo más cercano). Por lo tanto, las intersecciones del eje x se darían en $(2.58, 0)$ y $(-0.58, 0)$.

EJEMPLO 2 Examine la función $f(x) = 2x^2 + 6x + 5$.

a) Determine si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
b) Determine la intersección del eje y.
c) Determine el vértice.
d) Determine las intersecciones del eje x, si las hay.
e) Trace la gráfica.

Solución

a) Como a es 2, es decir, mayor que 0, la parábola abre hacia arriba.

b) Ya que $f(x)$ es lo mismo que y, para determinar la intersección del eje y hacemos $x = 0$ y despejamos $f(x)$ o y.

$$f(0) = 2(0)^2 + 6(0) + 5 = 5$$

La intersección del eje y se da en $(0, 5)$.

c)
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(2)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$
$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(2)(5) - 6^2}{4(2)} = \frac{40 - 36}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

El vértice está en $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. La coordenada y del vértice también puede determinarse evaluando $f\left(-\frac{3}{2}\right)$.

d) Para determinar las intersecciones del eje x, establecemos $f(x) = 0$.

$$0 = 2x^2 + 6x + 5$$

Este trinomio no puede factorizarse. Para determinar si esta ecuación tiene alguna solución real, evaluamos el discriminante.

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4(2)(5) = 36 - 40 = -4$$

Como el discriminante es menor que 0, esta ecuación no tiene soluciones reales. Esta respuesta era de suponerse, ya que la coordenada y del vértice es un número positivo y, por lo tanto, se ubica por arriba del eje x; ya que la parábola abre hacia arriba, no puede intersectar al eje x.

e) La gráfica se muestra en la **figura 8.9**.

Ahora resuelva el ejercicio 39

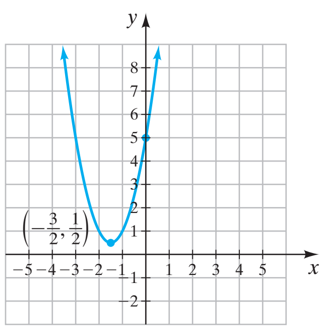


FIGURA 8.9

4 Resolver problemas de máximos y mínimos

Como se ilustra en la **figura 8.10a**, una parábola que abre hacia arriba tiene un **valor mínimo** en su vértice. Por otra parte, como se muestra en la **figura 8.10b**, una parábola que abre hacia abajo tiene un **valor máximo** en su vértice. Si le dan una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, debe saber que el valor máximo o mínimo estará en $-\dfrac{b}{2a}$, y será $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$. Existen muchos problemas de la vida real en los que se requiere determinar los valores máximo o mínimo.

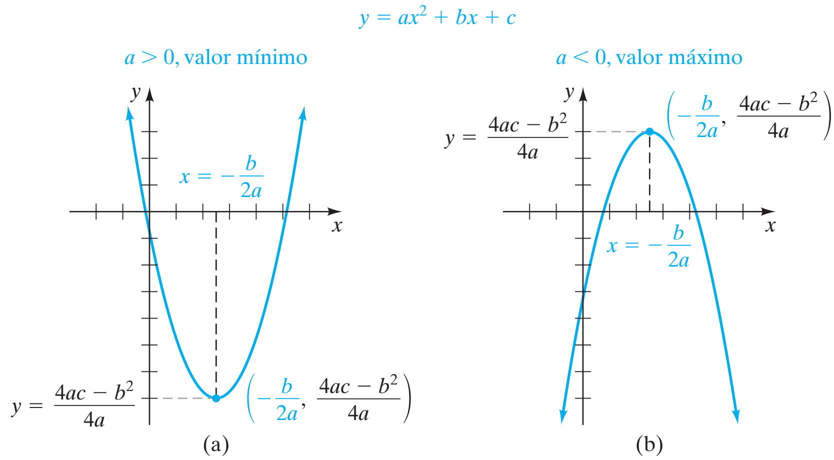


FIGURA 8.10

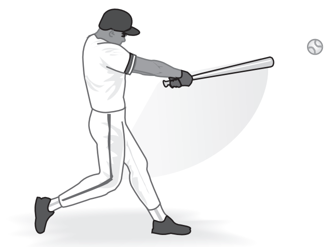


FIGURA 8.11

EJEMPLO 3 ▸ **Béisbol** Tommy Magee juega béisbol con los Cardenales de Yorktown. Durante la séptima entrada en un partido contra los Azulejos de Arlington, Magee batea de hit hacia el jardín (vea la **figura 8.11**); el contacto entre su bate y la bola se da a 3 pies del suelo. Para este hit en particular, la altura de la bola respecto del suelo, $f(t)$, en pies, en el instante t, en segundos, puede calcularse mediante la fórmula

$$f(t) = -16t^2 + 52t + 3$$

a) Determine la altura máxima que alcanza la bola de béisbol.

b) Determine el tiempo que tarda la bola en alcanzar su máxima altura.

c) Determine el tiempo que tarda la bola en chocar contra el suelo.

Solución **a)** Entienda el problema La bola de béisbol sigue la trayectoria de una parábola que abre hacia abajo ($a < 0$); a consecuencia de la gravedad, la bola se eleva hasta una altura máxima para luego caer hacia el suelo. Para determinar la altura máxima que alcanza la bola, usamos la fórmula $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Traduzca
$$a = -16, \quad b = 52, \quad c = 3$$
$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Realice los cálculos
$$= \frac{4(-16)(3) - (52)^2}{4(-16)}$$
$$= \frac{-192 - 2704}{-64}$$
$$= \frac{-2896}{-64}$$
$$= 45.25$$

Responda La bola de béisbol alcanza una altura máxima de 45.25 pies.

b) La bola de béisbol llega a su altura máxima en

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{52}{2(-16)} = -\frac{52}{-32} = \frac{13}{8} \quad \text{o} \quad 1\frac{5}{8} \quad \text{o} \quad 1.625 \text{ segundos}$$

c) Entienda el problema y traduzca Cuando la bola de béisbol choca contra el suelo, su altura, y, respecto de éste es 0. Por lo tanto, para determinar cuándo golpea el suelo, resolvemos la ecuación

$$-16t^2 + 52t + 3 = 0$$

Usaremos la fórmula cuadrática para resolverla.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Realice los cálculos

$$= \frac{-52 \pm \sqrt{(52)^2 - 4(-16)(3)}}{2(-16)}$$

$$= \frac{-52 \pm \sqrt{2704 + 192}}{-32}$$

$$= \frac{-52 \pm \sqrt{2896}}{-32}$$

$$\approx \frac{-52 \pm 53.81}{-32}$$

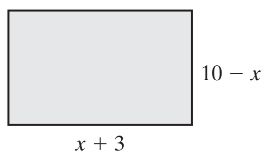
$$t \approx \frac{-52 + 53.81}{-32} \quad \text{o} \quad t \approx \frac{-52 - 53.81}{-32}$$

$$\approx -0.06 \text{ segundos} \qquad \approx 3.31 \text{ segundos}$$

Responda El único valor aceptable es 3.31 segundos. La bola de béisbol choca contra el suelo después de aproximadamente 3.31 segundos. Observe que en la parte **b)** el tiempo que tarda la bola en alcanzar su altura máxima, 1.625, no es exactamente la mitad del tiempo total que está en el aire, 3.31 segundos. La razón es que fue golpeada a una altura de 3 pies, y no al nivel del suelo.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 95

EJEMPLO 4 ▸ **Área de un rectángulo** Considere el rectángulo siguiente, cuya longitud es $x + 3$ y cuyo ancho es $10 - x$



a) Determine una ecuación para calcular el área, $A(x)$.

b) Determine el valor de x que proporciona el área (máxima) más grande.

c) Determine el área máxima.

Solución **a)** El área se obtiene al multiplicar la longitud por el ancho. La función para el área es

$$A(x) = (x + 3)(10 - x)$$

$$= -x^2 + 7x + 30$$

b) Entienda el problema y traduzca La gráfica de la función es una parábola que abre hacia abajo. Así, el valor máximo se alcanza en el vértice. Por lo tanto, el área máxima se da en $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Realice los cálculos

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2(-1)} = \frac{7}{2} = 3.5$$

Responda El área máxima se alcanza cuando x es 3.5 unidades.

c) Para determinar el área máxima, sustituimos cada x de la ecuación que se obtuvo en la parte **a)** por 3.5.

$$\begin{aligned} A(x) &= -x^2 + 7x + 30 \\ A(3.5) &= -(3.5)^2 + 7(3.5) + 30 \\ &= -12.25 + 24.5 + 30 \\ &= 42.25 \end{aligned}$$

Observe que para este rectángulo la longitud es $x + 3 = 3.5 + 3 = 6.5$ unidades, y el ancho es $10 - x = 10 - 3.5 = 6.5$ unidades. En realidad el rectángulo es un cuadrado, y su área es $(6.5)(6.5) = 42.25$ unidades cuadradas. Por consiguiente, el área máxima es 42.25 unidades cuadradas.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 73

En el ejemplo 4**c)**, el área máxima pudo haberse determinado también utilizando la fórmula $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. Determine el área máxima utilizando dicha fórmula. La respuesta debe ser la misma que se mencionó antes, 42.25 unidades cuadradas.

EJEMPLO 5 ▸ **Corral rectangular** John W. Brown construye un corral rectangular para unos terneros recién nacidos (vea la **figura 8.12**). Si planea utilizar 160 metros de cerca, determine las dimensiones del corral con la mayor área.

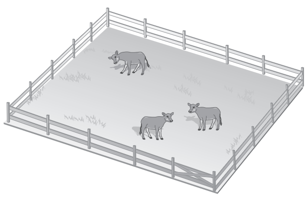


FIGURA 8.12

Solución **Entienda el problema** Se nos ha informado cuál es el perímetro del corral, 160 metros. La fórmula para determinar el perímetro de un rectángulo es $P = 2l + 2w$, así que, en este problema, $160 = 2l + 2w$. Nos piden maximizar el área, A, donde

$$A = lw$$

Necesitamos expresar el área en términos de una variable, no de dos. Para hacerlo en términos de l, despejamos w en la fórmula del perímetro, $160 = 2l + 2w$, y luego hacemos una sustitución.

Traduzca

$$\begin{aligned} 160 &= 2l + 2w \\ 160 - 2l &= 2w \\ 80 - l &= w \end{aligned}$$

Realice los cálculos Ahora sustituimos $80 - l$ por w en $A = lw$. Esto da

$$\begin{aligned} A &= lw \\ A &= l(80 - l) \\ A &= -l^2 + 80l \end{aligned}$$

En esta ecuación cuadrática, $a = -1$, $b = 80$ y $c = 0$. El área máxima se obtendrá cuando

$$l = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{2(-1)} = 40$$

Responda La longitud que dará el área máxima es 40 metros. El ancho, $w = 80 - l$, también será igual a 40 metros. Por lo tanto, un cuadrado con dimensiones de 40 por 40 metros dará el área máxima.

El área máxima también puede determinarse sustituyendo $l = 40$ en la fórmula $A = l(80 - l)$, o mediante $A = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. En cualquier caso, la respuesta es 1600 metros cuadrados.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 93

Cuando obtuvimos la ecuación $A = -l^2 + 80l$ en el ejemplo 5, podríamos haber completado el cuadrado como sigue:

$$\begin{aligned} A &= -(l^2 - 80l) \\ &= -(l^2 - 80l + 1600 - 1600) \\ &= -(l^2 - 80l + 1600) + 1600 \\ &= -(l - 40)^2 + 1600 \end{aligned}$$

Con base en esta ecuación, podemos determinar que el área máxima, 1600 metros cuadrados, se alcanza cuando la longitud es de 40 metros.

5 Entender el desplazamiento de las parábolas

Ahora veremos otro método para graficar parábolas. En él, se comienza con una gráfica de la forma $f(x) = ax^2$, y ésta se **desplaza**, o traslada para obtener la gráfica de la función que se está buscando. Como referencia, la **figura 8.13a** muestra las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = \frac{1}{2}x^2$. La **figura 8.13b** muestra las gráfica de $f(x) = -x^2$, $g(x) = -2x^2$ y $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

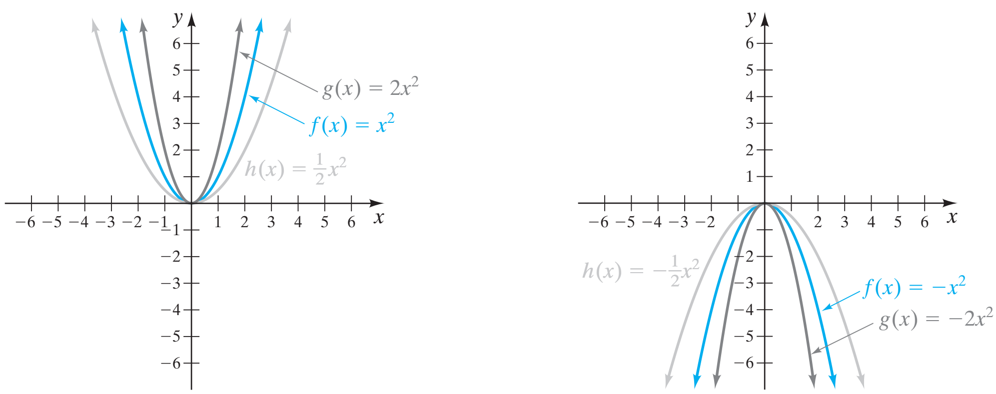


FIGURA 8.13 (a) (b)

Trazando los puntos, usted puede verificar que cada una de las gráficas es correcta. Observe que en las **figuras 8.13a** y **b** el *valor de a* en $f(x) = ax^2$ determina el ancho de la parábola. Conforme $|a|$ aumenta, la parábola se hace más angosta, y conforme $|a|$ disminuye, la parábola se hace más ancha.

Ahora consideremos las tres funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = (x - 2)^2$ y $h(x) = (x + 2)^2$. Estas funciones se grafican en la **figura 8.14**. (Si lo desea, trace los puntos para verificar que éstas son las gráficas de las funciones).

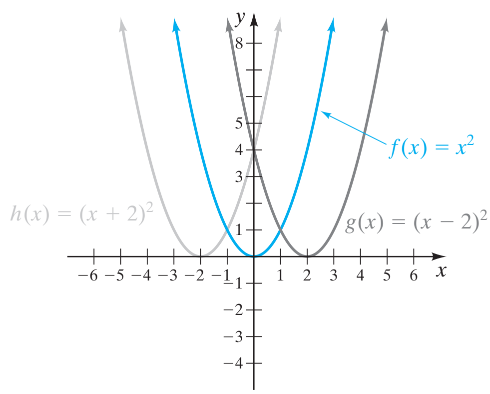


FIGURA 8.14

Observe que las gráficas de $g(x)$ y de $h(x)$ son idénticas a la gráfica de $f(x)$, salvo que $g(x)$ se ha trasladado, o desplazado, 2 unidades hacia la derecha, y $h(x)$ se ha trasladado 2 unidades hacia la izquierda. En general, la gráfica de $g(x) = a(x - h)^2$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x) = ax^2$. La gráfica de una ecuación de la forma $g(x) = a(x - h)^2$ estará desplazada horizontalmente respecto de la gráfica de $f(x) = ax^2$. *Si h es un número real positivo, la gráfica de* $g(x) = a(x - h)^2$ *estará desplazada h unidades hacia la derecha respecto de la gráfica de* $f(x) = ax^2$. *Si h es un número real negativo, la gráfica de* $g(x) = a(x - h)^2$ *estará desplazada* $|h|$ *unidades hacia la izquierda respecto de la gráfica de* $f(x) = ax^2$.

Ahora considere las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 3$ y $h(x) = x^2 - 3$, ilustradas en la **figura 8.15**. Mediante el trazo de puntos, puede verificar que éstas son las gráficas de las tres funciones.

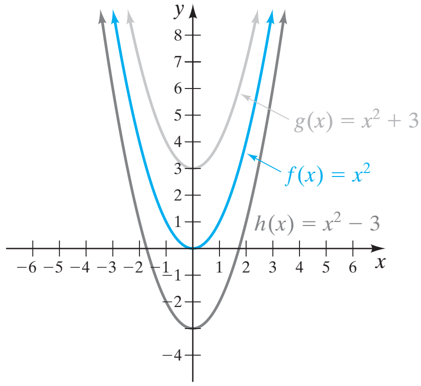


FIGURA 8.15

Observe que las gráficas de $g(x)$ y de $h(x)$ son idénticas a la gráfica de $f(x)$, salvo que $g(x)$ se ha trasladado 3 unidades hacia arriba y $h(x)$ se ha trasladado 3 unidades hacia abajo. En general, *si k es un número real positivo la gráfica de* $g(x) = ax^2 + k$ *es la gráfica de* $f(x) = ax^2$ *desplazada k unidades hacia arriba, y* $|k|$ *unidades hacia abajo si k es un número real negativo*.

Ahora considere las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x - 2)^2 + 3$, ilustradas en la **figura 8.16**.

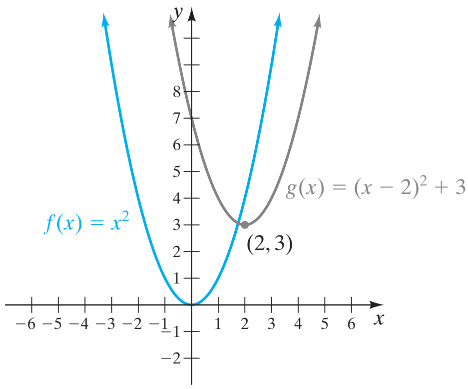


FIGURA 8.16

Observe que la gráfica de $g(x)$ tiene la misma forma general que la de $f(x)$. La gráfica de $g(x)$ es la gráfica de $f(x)$ trasladada 2 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba. Esta gráfica y el análisis anterior conducen a las importantes conclusiones siguientes.

Desplazamientos de parábolas

Para cualquier función $f(x) = ax^2$, la gráfica de $g(x) = a(x - h)^2 + k$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x)$. La gráfica de $g(x)$ será la gráfica de $f(x)$, pero desplazada según las siguientes condiciones:

- Si h es un número real positivo, la gráfica se desplazará h unidades hacia la derecha.
- Si h es un número real negativo, la gráfica se desplazará $|h|$ unidades hacia la izquierda.
- Si k es un número real positivo, la gráfica se desplazará k unidades hacia arriba.
- Si k es un número real negativo, la gráfica se desplazará $|k|$ unidades hacia abajo.

Examine la gráfica de $g(x) = (x - 2)^2 + 3$ en la **figura 8.16**. Observe que su eje de simetría está en $x = 2$ y su vértice se da en $(2, 3)$.

Eje de simetría y vértice de una parábola

La gráfica de cualquier función de la forma

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

será una parábola con eje de simetría en $x = h$ y vértice en (h, k).

Ejemplo	Eje de simetría	Vértice	La parábola abre hacia
$f(x) = 2(x - 5)^2 + 7$	$x = 5$	$(5, 7)$	arriba, $a > 0$
$f(x) = -\frac{1}{2}(x - 6)^2 - 3$	$x = 6$	$(6, -3)$	abajo, $a < 0$

Ahora considere $f(x) = 2(x + 5)^2 + 3$. Podemos reescribir esta función como $f(x) = 2[x - (-5)]^2 + 3$; por lo tanto, h tiene un valor de -5 y k tiene un valor de 3. La gráfica de esta función tiene su eje de simetría en $x = -5$ y su vértice en $(-5, 3)$.

Ejemplo	Eje de simetría	Vértice	La parábola abre hacia
$f(x) = 3(x + 4)^2 - 2$	$x = -4$	$(-4, -2)$	arriba, $a > 0$
$f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{4}$	$x = -\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$	abajo, $a < 0$

Ahora estamos preparados para graficar parábolas utilizando las traslaciones.

EJEMPLO 6 La gráfica de $f(x) = -2x^2$ se ilustra en la **figura 8.17**. Tomándola como guía, grafique $g(x) = -2(x + 3)^2 - 4$.

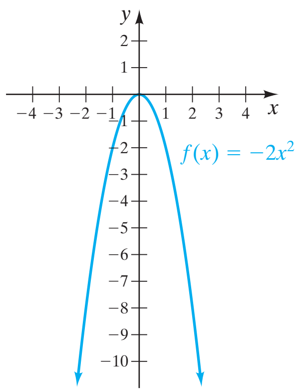


FIGURA 8.17

Solución La función $g(x)$ puede escribirse como $g(x) = -2[x - (-3)]^2 - 4$. Por lo tanto, en la función, h tiene un valor de -3 y k un valor de -4. Así, la gráfica de $g(x)$ será la gráfica de $f(x)$ desplazada 3 unidades hacia la izquierda (ya que $h = -3$) y 4 unidades hacia abajo (ya que $k = -4$). Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se ilustran en la **figura 8.18**.

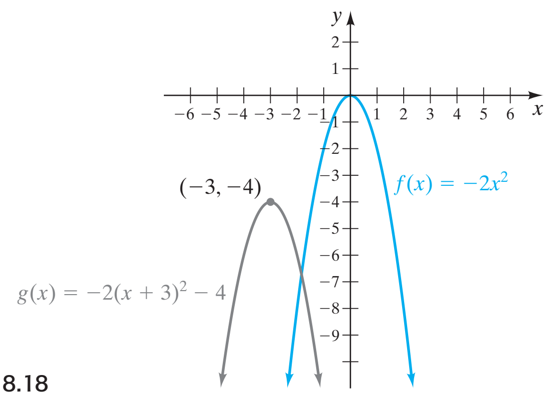


FIGURA 8.18

Ahora resuelva el ejercicio 49

En la parte 2 de esta sección iniciamos con una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, y completamos el cuadrado para obtener

$$f(x) = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Además, se mencionó que el vértice de la parábola de esta función es $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Suponga que en la función sustituimos h por $-\dfrac{b}{2a}$ y k por $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$. Entonces obtenemos

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

que sabemos da por resultado una parábola con vértice en (h, k). Por lo tanto, las dos funciones $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $f(x) = a(x - h)^2 + k$ tienen el mismo vértice y el mismo eje de simetría para cualesquiera funciones dadas.

6 Escribir funciones en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Si queremos graficar parábolas utilizando desplazamientos, necesitamos cambiar la forma de la función de $f(x) = ax^2 + bx + c$ a $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Para hacerlo, *completamos el cuadrado* como se estudió en la sección 8.1. Al completar el cuadrado obtenemos un trinomio cuadrado perfecto, que puede representarse como el cuadrado de un binomio. En los ejemplos 7 y 8 se explica el procedimiento, mismo que usaremos nuevamente en un capítulo posterior, cuando analicemos las secciones cónicas.

EJEMPLO 7 ▸ Dada $f(x) = x^2 - 6x + 10$,

a) Escriba $f(x)$ en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

b) Grafique $f(x)$.

Solución

a) Utilizamos los términos x^2 y $-6x$ para obtener un trinomio cuadrado perfecto.

$$f(x) = (x^2 - 6x) + 10$$

Ahora tomamos la mitad del coeficiente del término en x y lo elevamos al cuadrado.

$$\left[\frac{1}{2}(-6)\right]^2 = 9$$

Luego sumamos este valor, 9, dentro de los paréntesis. Como sumamos 9 dentro del paréntesis, sumamos -9 fuera de los paréntesis. Sumar 9 y -9 a una expresión es como si sumáramos 0, ya que su valor no cambia.

$$f(x) = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 10$$

Al hacer esto hemos creado un trinomio cuadrado perfecto dentro de los paréntesis más una constante fuera de los paréntesis. Expresamos el trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.

$$f(x) = (x - 3)^2 + 1$$

Ahora la función está en la forma que buscábamos.

b) Como $a = 1$ es mayor que 0, la parábola abre hacia arriba. El eje de simetría de la parábola está en $x = 3$, y su vértices se da en $(3, 1)$. La intersección con el eje y puede obtenerse con facilidad sustituyendo $x = 0$ y determinando el valor de $f(x)$. Cuando $x = 0$, $f(x) = (-3)^2 + 1 = 10$. Por lo tanto, la intersección con el eje y se da en 10. Trazando el vértice, la intersección con el eje y y unos cuantos puntos más, obtenemos la gráfica de la **figura 8.19**. Para compararlas, la figura también muestra la gráfica de $y = x^2$.

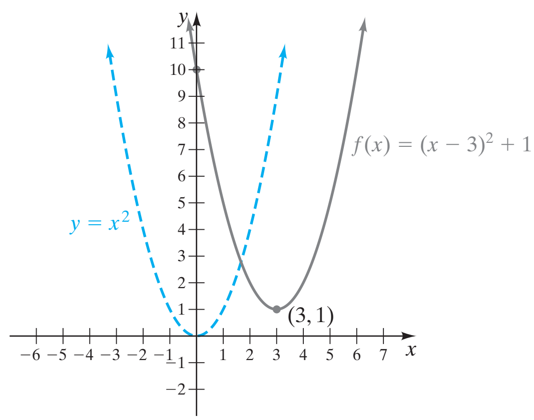


FIGURA 8.19

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 59**

EJEMPLO 8 Dada $f(x) = -2x^2 - 10x - 13$,

a) Escriba $f(x)$ en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.
b) Grafique $f(x)$.

Solución

a) Cuando el coeficiente principal no es 1, lo factorizamos de los términos que incluyen a la variable.

$$f(x) = -2(x^2 + 5x) - 13$$

Luego completamos el cuadrado

La mitad del coeficiente del término de x al cuadrado

$$\left[\frac{1}{2}(5)\right]^2 = \boxed{\frac{25}{4}}$$

Si sumamos $\frac{25}{4}$ dentro de los paréntesis, en realidad sumamos $-2\left(\frac{25}{4}\right)$ o $-\frac{25}{2}$, ya que cada término dentro de los paréntesis se multiplica por -2. Por lo tanto, para $\frac{25}{2}$ fuera de los paréntesis.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\left(x^2 + 5x + \boxed{\frac{25}{4}}\right) + \boxed{\frac{25}{2}} - 13 \\ &= -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Como $a = -2$, la parábola abre hacia abajo. El eje de simetría está en $x = -\frac{5}{2}$ y el vértice se da en $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. La intersección con el eje y está en $f(0) = -13$. Trazamos unos cuantos puntos y dibujamos la gráfica en la **figura 8.20**. Para comparar, en la figura, también se ilustra la gráfica de $y = -2x^2$.

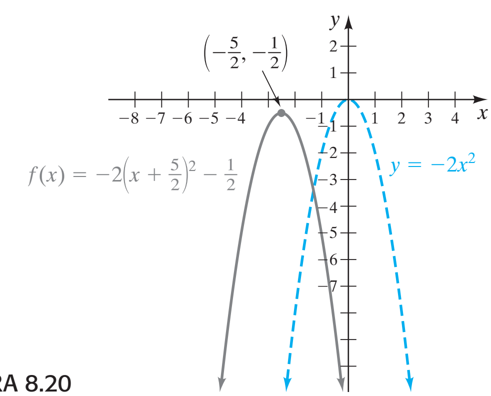


FIGURA 8.20

Observe que $f(x) = -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ no tiene intersecciones con el eje x. Por lo tanto, no hay valores reales de x para los que $f(x) = 0$.

Ahora resuelva el ejercicio 63

Una segunda manera de cambiar la ecuación de $f(x) = ax^2 + bx + c$ a la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$ es hacer $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Después, se determinan los valores para h y k, y luego se sustituyen los valores obtenidos en $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Por ejemplo, para la función $f(x) = -2x^2 - 10x - 13$ del ejemplo 8, $a = -2$, $b = -10$ y $c = -13$; entonces

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2(-2)} = -\frac{5}{2}$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(-13) - (-10)^2}{4(-2)} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-h)^2 + k \\ &= -2\left[x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right]^2 - \frac{1}{2} \\ &= -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esta respuesta coincide con la que se obtuvo en el ejemplo 8.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.5

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cómo se denomina la gráfica de una ecuación cuadrática?
2. ¿Cuál es el vértice de una parábola?
3. ¿Qué es el eje de simetría de una parábola?
4. ¿Cuál es la ecuación para determinar el eje de simetría de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$?
5. ¿Cuál es el vértice de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$?
6. ¿Cuántas intersecciones con el eje x tiene una función cuadrática si el discriminante es **a)** < 0, **b)** $= 0$, **c)** > 0?
7. ¿La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tendrá un máximo o un mínimo si **a)** $a > 0$, **b)** $a < 0$? Explique.
8. Explique cómo determinar las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función cuadrática.
9. Explique cómo determinar las intersecciones con el eje y de la gráfica de una función cuadrática.
10. Considere la gráfica de $f(x) = ax^2$. Explique cómo cambia la forma de $f(x)$ conforme $|a|$ aumenta y conforme $|a|$ disminuye.
11. Considere la gráfica de $f(x) = ax^2$. ¿Cuál es la forma general de $f(x)$, si **a)** $a > 0$, **b)** $a < 0$?
12. Las gráficas de $f(x) = ax^2$ y de $g(x) = -ax^2$, ¿tienen el mismo vértice para cualquier número real, a, distinto de cero? Explique.
13. ¿La función $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ tiene un valor máximo o mínimo? Explique.
14. ¿La función $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 7$ tiene un valor máximo o mínimo? Explique.

Práctica de habilidades

En cada caso, determine: **a)** *si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo;* **b)** *la intersección con el eje y;* **c)** *el vértice;* **d)** *las intersecciones con el eje x (si las hay),* y **e)** *dibuje la gráfica.*

15. $f(x) = x^2 + 8x + 15$
16. $g(x) = x^2 + 2x - 3$
17. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
18. $h(x) = x^2 - 2x - 8$
19. $f(x) = -x^2 - 2x + 8$
20. $p(x) = -x^2 + 8x - 15$
21. $g(x) = -x^2 + 4x + 5$
22. $n(x) = -x^2 - 2x + 24$
23. $t(x) = -x^2 + 4x - 5$

24. $g(x) = x^2 + 6x + 13$

25. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

26. $r(x) = -x^2 + 10x - 25$

27. $r(x) = x^2 + 2$

28. $f(x) = x^2 + 4x$

29. $l(x) = -x^2 + 5$

30. $g(x) = -x^2 + 6x$

31. $f(x) = -2x^2 + 4x - 8$

32. $g(x) = -2x^2 - 6x + 4$

33. $m(x) = 3x^2 + 4x + 3$

34. $p(x) = -2x^2 + 5x + 4$

35. $y = 3x^2 + 4x - 6$

36. $y = x^2 - 6x + 4$

37. $y = 2x^2 - x - 6$

38. $g(x) = -4x^2 + 6x - 9$

39. $f(x) = -x^2 + 3x - 5$

40. $h(x) = -2x^2 + 4x - 5$

Utilizando como guía las gráficas de las **figuras 8.13** *a* **8.16**, *grafique cada función y determine el vértice.*

41. $f(x) = (x - 3)^2$

42. $f(x) = (x - 4)^2$

43. $f(x) = (x + 1)^2$

44. $f(x) = (x + 2)^2$

45. $f(x) = x^2 + 3$

46. $f(x) = x^2 + 5$

47. $f(x) = x^2 - 1$

48. $f(x) = x^2 - 4$

49. $f(x) = (x - 2)^2 + 3$

50. $f(x) = (x - 3)^2 - 4$

51. $f(x) = (x + 4)^2 + 4$

52. $h(x) = (x + 4)^2 - 1$

53. $g(x) = -(x + 3)^2 - 2$

54. $g(x) = (x - 1)^2 + 4$

55. $y = -2(x - 2)^2 + 2$

56. $y = -2(x - 3)^2 + 1$

57. $h(x) = -2(x + 1)^2 - 3$

58. $f(x) = -(x - 5)^2 + 2$

En los ejercicios 59 a 68, **a)** *exprese cada función en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, y* **b)** *dibuje la gráfica de cada función y determine el vértice.*

59. $f(x) = x^2 - 6x + 8$

60. $g(x) = x^2 + 6x + 2$

61. $g(x) = x^2 - x - 3$

62. $f(x) = x^2 - x + 1$

63. $f(x) = -x^2 - 4x - 6$

64. $h(x) = -x^2 + 6x + 1$

65. $g(x) = x^2 - 4x - 1$

66. $p(x) = x^2 - 2x - 6$

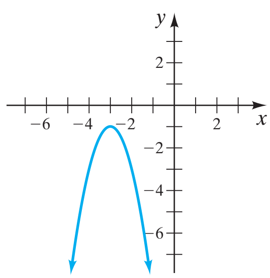
67. $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

68. $k(x) = 2x^2 + 7x - 4$

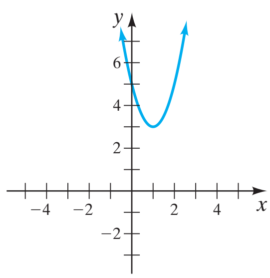
Resolución de problemas

De las funciones de los ejercicios 69 a 72, identifique cuál corresponde a cada una de las gráficas marcadas **a)** *a* **d)**.

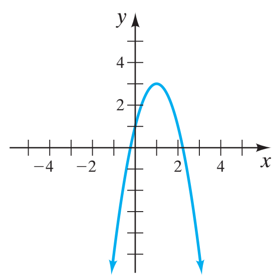
a)



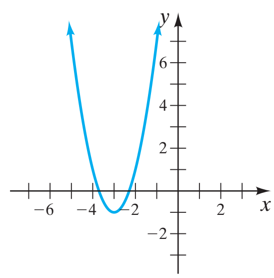
b)



c)



d)



69. $f(x) = 2(x + 3)^2 - 1$

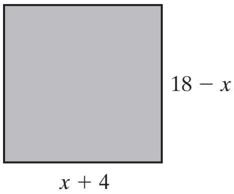
70. $f(x) = -2(x + 3)^2 - 1$

71. $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$

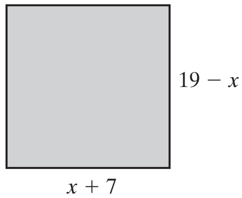
72. $f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$

Área *Para cada rectángulo,* **a)** *determine el valor de x que da el área máxima, y* **b)** *determine el área máxima.*

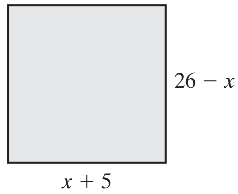
73.



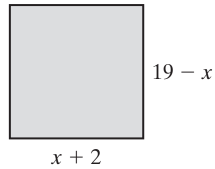
74.



75.



76.



77. **Venta de pilas** La función para calcular el ingreso por la venta de n pilas es $R(n) = n(8 - 0.02n) = -0.02n^2 + 8n$. Determine **a)** el número de pilas que deben venderse para obtener el ingreso máximo, y **b)** el ingreso máximo.

78. **Venta de relojes** La función para calcular el ingreso por la venta de n relojes es $R(n) = n(25 - 0.1n) = -0.1n^2 + 25n$. Determine **a)** el número de relojes que deben venderse para obtener el ingreso máximo, y **b)** el ingreso máximo.

79. **Matrícula** El número de alumnos inscritos en una escuela puede calcularse mediante la función

$$N(t) = -0.043t^2 + 1.82t + 46.0$$

donde t es el número de años desde 1989 y $1 \leq t \leq 22$. ¿En qué año se obtendrá el máximo de alumnos inscritos?

80. **Escuelas sanas** En Estados Unidos, el porcentaje de estudiantes que afirman que en sus escuelas se consumen drogas puede calcularse mediante la función

$$f(a) = -2.32a^2 + 76.58a - 559.87$$

donde a es la edad del estudiante y $12 < a < 20$. ¿A qué grupo de edad pertenecen los estudiantes que representan el porcentaje más alto entre los que afirman que en sus escuelas se consumen drogas?

81. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = (x - 2)^2 + \frac{5}{2}$ y $g(x) = (x - 2)^2 - \frac{3}{2}$?

82. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = 2(x - 4)^2 - 3$ y $g(x) = -3(x - 4)^2 + 2$?

83. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = 2(x + 4)^2 - 3$ y $g(x) = -(x + 1)^2 - 3$?

84. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 - 2$ y $g(x) = 2(x + 5)^2 - 2$?

85. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = 2x^2$ y su vértice en $(3, -2)$.

86. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ y su vértice en $\left(\frac{2}{3}, -5\right)$.

87. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = -4x^2$ y su vértice en $\left(-\frac{3}{5}, -\sqrt{2}\right)$.

88. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = \frac{3}{5}x^2$ y su vértice en $(-\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

89. Considere $f(x) = x^2 - 8x + 12$ y $g(x) = -x^2 + 8x - 12$.
a) Sin graficar, ¿puede comparar las gráficas de las dos funciones?
b) ¿Las gráficas tienen las mismas intersecciones con el eje x? Explique.
c) ¿Las gráficas tienen el mismo vértice? Explique.
d) Grafique ambas funciones en los mismos ejes.

90. Analizando el coeficiente principal de una ecuación cuadrática y determinando las coordenadas del vértice de su gráfica, explique cómo se puede determinar el número de intersecciones con el eje x que tiene la parábola.

91. **Venta de boletos** El Club de Teatro de la preparatoria Johnson trata de establecer el precio de los boletos para una obra. Si el precio es muy bajo no recolectará suficiente dinero para cubrir los gastos, y si es muy alto tendrá poco público. Ellos creen que su ingreso total por representación, I, en cientos de dólares, puede calcularse mediante la fórmula

$$I = -x^2 + 24x - 44, 0 \leq x \leq 24$$

donde x es el costo de un boleto.

a) Dibuje una gráfica del ingreso contra el costo de un boleto.
b) Determine el costo mínimo de un boleto para que el productor llegue al punto de equilibrio.
c) Determine el costo máximo que puede cobrar el productor por cada boleto para llegar al punto de equilibrio.
d) ¿Cuánto debe cobrar para recibir el ingreso máximo?
e) Determine el ingreso máximo.

92. **Lanzamiento de un objeto** Un objeto se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 192 pies por segundo. La distancia a la que se encuentra el objeto respecto del piso, d, después de t segundos, puede calcularse mediante la fórmula $d = -16t^2 + 192t$.
a) Determine la distancia que habrá entre el objeto y el piso después de 3 segundos.

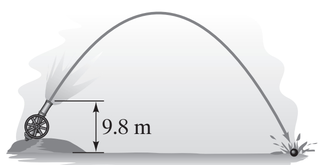
b) Haga una gráfica de la distancia contra el tiempo.
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto?
d) ¿En qué momento alcanzará su altura máxima?
e) ¿En qué instante el objeto chocará contra el piso?

93. Utilidad Una compañía productora de alimento para aves obtiene una utilidad semanal de acuerdo con la función $f(x) = -0.4x^2 + 80x - 200$, donde x es el número de bolsas de alimento para aves fabricadas y vendidas.
a) Determine el número de bolsas de alimento para aves que debe vender la compañía para obtener la utilidad máxima.
b) Determine la utilidad máxima.

94. Utilidad Una mueblería especializada en mecedoras obtiene una utilidad semanal de acuerdo con la función $f(x) = -1.2x^2 + 180x - 280$, donde x es el número de mecedoras fabricadas y vendidas.
a) Determine el número de mecedoras que la mueblería debe vender en una semana para obtener la utilidad máxima.
b) Determine la utilidad máxima.

95. Disparo de un cañón Si un cañón se dispara desde una altura de 9.8 metros por arriba del suelo, a cierto ángulo, la altura de la bala respecto del suelo, h, en metros en el instante t, en segundos, se determina por medio de la función.

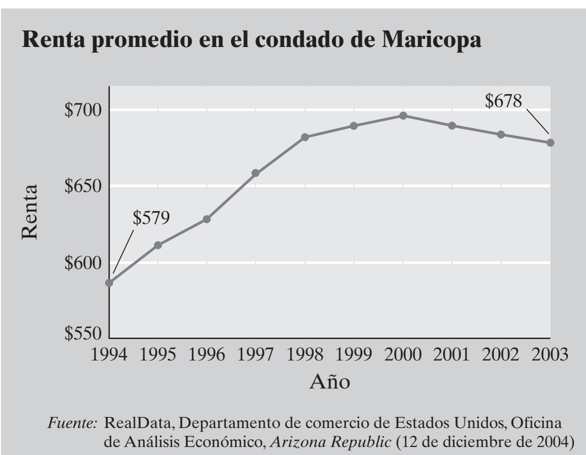
$$h(t) = -4.9t^2 + 24.5t + 9.8$$



a) Determine la altura máxima que alcanza la bala del cañón.
b) Determine el tiempo que tarda la bala para llegar a su altura máxima.
c) Determine el tiempo que tarda la bala en chocar contra el suelo.

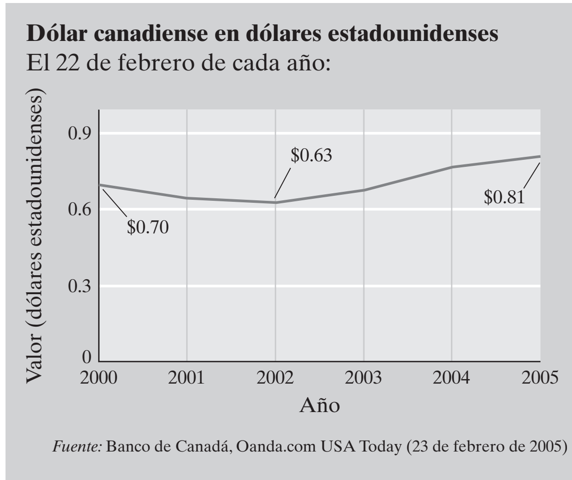
96. Lanzamiento de un balón Ramon Loomis lanza un balón al aire con una velocidad inicial de 32 pies por segundo. La altura del balón en cualquier instante, t, está dada por la fórmula $h = 96t - 16t^2$. ¿En qué instante el balón llega a su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

97. Alquiler de una casa La gráfica siguiente muestra la renta mensual promedio de un apartamento en el condado de Maricopa, Arizona (complejos de 50 o más apartamentos), de 1994 a 2003.



Se puede emplear la función $r(t) = -2.723t^2 + 35.273t + 579$ para calcular la renta mensual promedio de un apartamento en el condado de Maricopa, en donde t es el número de años desde 1994.
a) Si suponemos que la tendencia continúa, estime la renta mensual promedio de un apartamento en el condado de Maricopa en 2007.
b) ¿En qué año la renta mensual promedio de un apartamento fue máxima?

98. Dólar canadiense La gráfica siguiente muestra el valor de un dólar canadiense en dólares estadounidenses, el 22 de febrero de cada año, de 2000 a 2005.



Se puede usar la función $C(t) = 0.019t^2 - 0.074t + 0.702$ para calcular el valor de un dólar canadiense en dólares estadounidenses para el 22 de febrero de cada año, donde t es el número de años desde 2000.
a) Si suponemos que la tendencia continúa, estime el valor de un dólar canadiense, en dólares estadounidenses, el 22 de febrero de 2008.
b) ¿El 22 de febrero de qué año fue máximo el valor de un dólar canadiense, en dólares estadounidenses?

99. Diseño de interiores Jake Kishner está diseñando los planos de su casa. ¿Cuál es el área máxima posible de una habitación si su perímetro será de 80 pies?

100. Área máxima ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener un jardín rectangular para alcanzar su área máxima, si el perímetro será de 70 pies?

101. Producto mínimo ¿Cuál es el producto mínimo de dos números que difieren en 8 unidades? ¿Cuáles son los números?

102. Producto mínimo ¿Cuál es el producto mínimo de dos números que difieren en 10 unidades? ¿Cuáles son los números?

103. Producto máximo ¿Cuál es el producto máximo de dos números cuya suma da por resultado 60? ¿Cuáles son los números?

104. Producto máximo ¿Cuál es el producto máximo de dos números cuya suma da por resultado 5? ¿Cuáles son los números?

La utilidad de una compañía, en dólares, es la diferencia entre sus ingresos y sus gastos. En los ejercicios 105 y 106 se dan las funciones de gastos, C(x), y de ingresos, R(x). La x representa el número de artículos producidos y vendidos a los distribuidores. Determine **a)** *la utilidad máxima de la compañía, y* **b)** *el número de artículos que deben producirse y venderse para obtener la utilidad máxima.*

105. $C(x) = 2000 + 40x$
$R(x) = 800x - x^2$

106. $C(x) = 5000 + 12x$
$R(x) = 2000x - x^2$

Retos

107. Béisbol En el ejemplo 3 de esta sección usamos la función $f(t) = -16t^2 + 52t + 3$ para determinar que la altura máxima, f, alcanzada por una bola de béisbol golpeada por Tommy Magee fue de 45.25 pies. La bola alcanzó esta altura 1.625 segundos después de que fue bateada.
Repase el ejemplo 3.

a) Completando el cuadrado, escriba $f(t)$ en la forma $f(t) = a(t - h)^2 + k$.

b) Mediante la función que obtuvo en la parte **a)**, determine la altura máxima que alcanza la bola de béisbol y el tiempo que tarda en llegar a ella a partir de que fue bateada.

c) ¿Las respuestas que obtuvo en la parte **b)**, son las mismas que se obtuvieron en el ejemplo 3? Si no es así, explique por qué.

Actividad en grupo

Analicen y respondan en grupo el ejercicio 108.

108. a) Miembro 1 del grupo: Escriba dos funciones cuadráticas $f(x)$ y $g(x)$ de modo que no se intersequen.

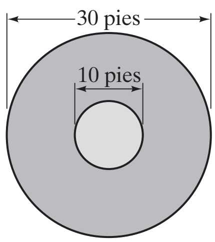
b) Miembro 2 del grupo: Escriba dos funciones cuadráticas $f(x)$ y $g(x)$ de modo que ninguna de ellas tenga intersecciones con el eje x y los vértices de ambas se den en lados opuestos del eje x.

c) Miembro 3 del grupo: Escriba dos funciones cuadráticas $f(x)$ y $g(x)$ de modo que ambas tengan el mismo vértice, pero que la parábola de una abra hacia arriba y la de la otra abra hacia abajo.

d) Revisen en grupo sus respuestas a las partes **a)**, **b)** y **c)**, y decidan si son correctas. Si hay alguna incorrecta, corríjanla.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **109.** Determine el área de la región exterior de la figura.



[3.7] **110.** Grafique $y \leq \frac{2}{3}x + 3$.

[4.2] **111.** Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x - y &= -5 \\ 2x + 2y - z &= 0 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

[4.5] **112.** Evalúe el determinante.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

[6.1] **113.** Divida $(x - 3) \div \dfrac{x^2 + 3x - 18}{x}$.

8.6 Desigualdades cuadráticas y de otros tipos con una variable

1 Resolver desigualdades cuadráticas.

2 Resolver otras desigualdades polinomiales.

3 Resolver desigualdades racionales.

En la sección 2.5 se analizaron las desigualdades lineales con una variable. Ahora estudiaremos las desigualdades cuadráticas con una variable.

Cuando el signo de igual en una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se reemplaza por un signo de desigualdad, obtenemos una **desigualdad cuadrática**.

Ejemplos de desigualdades cuadráticas

$$x^2 + x - 12 > 0, \qquad 2x^2 - 9x - 5 \leq 0$$

La **solución de una desigualdad cuadrática** es el conjunto de todos los valores que la hacen verdadera. Por ejemplo, si sustituimos x por 5 en $x^2 + x - 12 > 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + x - 12 &> 0 \\ 5^2 + 5 - 12 &\overset{?}{>} 0 \\ 18 &> 0 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

La desigualdad es verdadera cuando x es 5, por lo que 5 satisface la desigualdad. Sin embargo, 5 no es la única solución; existen otros valores que satisfacen (o son soluciones de) la desigualdad. ¿El número 4 satisface la desigualdad? ¿El número 2?

1 Resolver desigualdades cuadráticas

Para determinar las soluciones de desigualdades cuadráticas pueden usarse diferentes métodos. Empezaremos por analizar el de la **graficación de signos**. Considere la función $f(x) = x^2 + x - 12$, cuya gráfica se muestra en la **figura 8.21a**. La **figura 8.21b** muestra, en color rojo, que cuando $x < -4$ o $x > 3$, $f(x) > 0$ o $x^2 + x - 12 > 0$. La parte de la parábola en color negro muestra que cuando $-4 < x < 3$, $f(x) < 0$ o $x^2 + x - 12 < 0$.

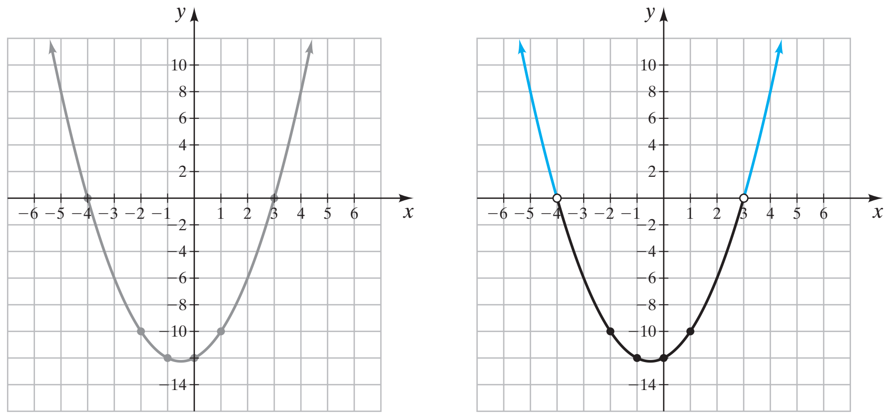


FIGURA 8.21 (a) (b)

La graficación de signos consiste en trazar la gráfica correspondiente a la desigualdad para determinar cuáles valores de la variable la satisfacen, tal como se acaba de mostrar. En muchos casos, sin embargo, trazar la gráfica de una función podría ser complicado o tomar demasiado tiempo, por lo que hay métodos alternativos para resolver desigualdades cuadráticas y de otros tipos.

En el ejemplo 1 se ilustra cómo se resuelve $x^2 + x - 12 > 0$ mediante una recta numérica, y se explica el procedimiento.

EJEMPLO 1 ▸ Resuelva la desigualdad $x^2 + x - 12 > 0$. Proporcione la solución **a)** en una recta numérica, **b)** en notación de intervalos y **c)** en notación constructiva de conjuntos.

Solución Haga la desigualdad igual a 0 y resuelva la ecuación.

$$\begin{aligned} x^2 + x - 12 &= 0 \\ (x + 4)(x - 3) &= 0 \\ x + 4 = 0 \quad &\text{o} \quad x - 3 = 0 \\ x = -4 \quad & \quad\quad x = 3 \end{aligned}$$

Los números obtenidos se denominan **valores frontera**, y se usan para dividir una recta numérica en intervalos. Si la desigualdad original es $<$ o $>$, los valores frontera no son parte de los intervalos; si la desigualdad original es $\leq$ o $\geq$ los valores frontera son parte de los intervalos.

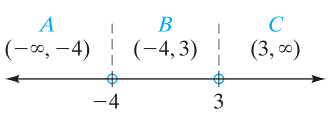


FIGURA 8.22

En la **figura 8.22** se identifican los intervalos A, B y C. A continuación, seleccionamos un valor de prueba en *cada* intervalo. Luego sustituimos cada uno de esos números, de uno en uno, en $x^2 + x - 12 > 0$ o en $(x + 4)(x - 3) > 0$, y determinamos si

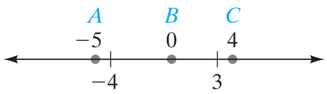


FIGURA 8.23

hacen que la desigualdad sea verdadera. Si el valor de prueba satisface la desigualdad, significa que todos los demás valores de ese intervalo también lo harán. Si el valor de prueba no satisface la desigualdad, ningún número del intervalo lo hará.

En este ejemplo usaremos los valores de prueba -5 en el intervalo A, 0 en el intervalo B, y 4 en el intervalo C (vea la **figura 8.23**).

Intervalo *A*	Intervalo *B*	Intervalo *C*
$(-\infty, -4)$	$(-4, 3)$	$(3, \infty)$
Valor de prueba, -5	Valor de prueba, 0	Valor de prueba, 4
¿$x^2 + x - 12$ es > 0?	¿$x^2 + x - 12$ es > 0?	¿$x^2 + x - 12$ es > 0?
$(-5)^2 - 5 - 12 \overset{?}{>} 0$	$0^2 + 0 - 12 \overset{?}{>} 0$	$4^2 + 4 - 12 \overset{?}{>} 0$
$8 > 0$	$-12 > 0$	$8 > 0$
Verdadera	*Falsa*	*Verdadera*

Como los valores de prueba en los intervalos A y C satisfacen la desigualdad, la solución es todos los números reales en los intervalos A y C. El símbolo de desigualdad es $>$. Los valores -4 y 3 no se incluyen en la solución, ya que hacen que la desigualdad sea igual a 0.

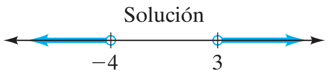


FIGURA 8.24

Las respuestas a las partes **a)**, **b)** y **c)** son las siguientes.

a) La solución se ilustra en la recta numérica de la **figura 8.24**.

b) La solución en notación de intervalos es $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$.

c) La solución en notación constructiva de conjuntos es $\{x | x < -4 \text{ o } x > 3\}$.

Observe que todas estas soluciones son consistentes con la gráfica de la **figura 8.21b**.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 15

Para resolver desigualdades cuadráticas y de otros tipos

1. Escriba la desigualdad como una ecuación y resuélvala.
2. Si resuelve una desigualdad racional, determine los valores que hacen que el denominador sea igual a 0.
3. Construya una recta numérica. Marque las soluciones obtenidas en los pasos 1 y 2. Marque el valor más pequeño a la izquierda, e incremente hacia la derecha.
4. Seleccione un valor de prueba en cada intervalo y determine si satisface la desigualdad. También pruebe los valores frontera.
5. Escriba la solución en la forma solicitada por su profesor.

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva la desigualdad $x^2 - 4x \geq -4$. Proporcione la solución **a)** en una recta numérica, **b)** en notación de intervalos y **c)** en notación constructiva de conjuntos.

Solución Escriba la desigualdad como una ecuación, y resuélvala.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= -4 \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ (x - 2)(x - 2) &= 0 \\ x - 2 = 0 \quad &\text{o} \quad x - 2 = 0 \\ x = 2 \quad & \quad\quad x = 2 \end{aligned}$$

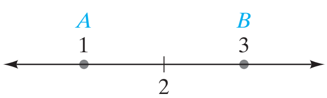


FIGURA 8.25

Como ambos factores son iguales, existe un solo valor frontera, 2 (vea la **figura 8.25**). Ambos valores de prueba, 1 y 3, hacen que la desigualdad sea verdadera.

Intervalo *A*	Intervalo *B*
$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
Valor de prueba, 1	Valor de prueba, 3
$x^2 - 4x \geq -4$	$x^2 - 4x \geq -4$
$1^2 - 4(1) \overset{?}{\geq} -4$	$3^2 - 4(3) \overset{?}{\geq} -4$
$1 - 4 \overset{?}{\geq} -4$	$9 - 12 \overset{?}{\geq} -4$
$-3 \geq -4$ *Verdadera*	$-3 \geq -4$ *Verdadera*

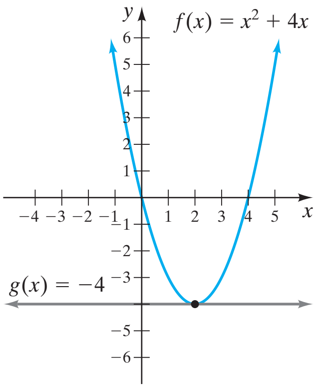
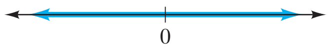


FIGURA 8.26

El conjunto solución incluye ambos intervalos y el valor frontera, 2. Por lo tanto, el conjunto solución es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$. Las respuestas a las partes **a)**, **b)** y **c)** son:

a) 

b) $(-\infty, \infty)$ **c)** $\{x|-\infty < x < \infty\}$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 11**

Podemos comprobar la solución del ejemplo 2 mediante una gráfica. Sea $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = -4$. Para que $x^2 - 4x \geq -4$ sea verdadero, necesitamos que $f(x) \geq g(x)$. Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se ilustran en la **figura 8.26**.

Observe que $f(x) = g(x)$ en $x = 2$ y $f(x) > g(x)$ para todos los demás valores de x. Por lo tanto, $f(x) \geq g(x)$ para todos los valores de x, y el conjunto solución es el conjunto de los números reales.

En el ejemplo 2, si reescribimos la desigualdad $x^2 - 4x \geq -4$ como $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ y luego como $(x-2)^2 \geq 0$, podemos ver que la solución debe ser el conjunto de los números reales, ya que $(x-2)^2$ debe ser mayor o igual a 0 para cualquier número real x. La solución a $x^2 - 4x < -4$ es el conjunto vacío, $\varnothing$. ¿Puede explicar por qué?

EJEMPLO 3 ▸ Resuelva la desigualdad $x^2 - 2x - 4 \leq 0$. Expese la solución en notación de intervalos.

Solución Primero necesitamos resolver la ecuación $x^2 - 2x - 4 = 0$. Como esta ecuación no se puede factorizar, utilizamos la fórmula cuadrática para resolverla.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

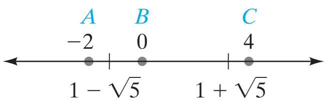


FIGURA 8.27

Los valores frontera son $1 - \sqrt{5}$ y $1 + \sqrt{5}$. El valor de $1 - \sqrt{5}$ es aproximadamente -1.24 y el valor de $1 + \sqrt{5}$ es alrededor de 3.24. Seleccionaremos como valores de prueba a -2, 0 y 4 (vea la **figura 8.27**).

Intervalo *A*	Intervalo *B*	Intervalo *C*
$(-\infty, 1 - \sqrt{5})$	$(1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$	$(1 + \sqrt{5}, \infty)$
Valor de prueba, -2	Valor de prueba, 0	Valor de prueba, 4
$x^2 - 2x - 4 \leq 0$	$x^2 - 2x - 4 \leq 0$	$x^2 - 2x - 4 \leq 0$
$(-2)^2 - 2(-2) - 4 \overset{?}{\leq} 0$	$0^2 - 2(0) - 4 \overset{?}{\leq} 0$	$4^2 - 2(4) - 4 \overset{?}{\leq} 0$
$4 + 4 - 4 \overset{?}{\leq} 0$	$0 - 0 - 4 \overset{?}{\leq} 0$	$16 - 8 - 4 \overset{?}{\leq} 0$
$4 \leq 0$	$-4 \leq 0$	$4 \leq 0$
Falso	*Verdadero*	*Falso*

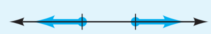
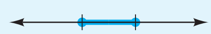
FIGURA 8.28

Como el símbolo de la desigualdad es $\leq$ y los valores frontera hacen que la desigualdad sea igual a 0, éstos son parte de la solución. Así, la solución en notación de intervalos es $[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}]$ y se ilustra en la recta numérica de la **figura 8.28**.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 19**

Sugerencia útil

Si $ax^2 + bx + c = 0$, con $a > 0$, tiene dos soluciones reales distintas, entonces:

Desigualdad de la forma	**La solución es**	**Solución en la recta numérica**
$ax^2 + bx + c \geq 0$	Intervalos de los extremos	
$ax^2 + bx + c \leq 0$	Intervalo central	

El ejemplo 1 es una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c > 0$, y el ejemplo 3 es una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$. Como el ejemplo 2 no tiene dos soluciones reales distintas, esta sugerencia útil no se aplica.

2 Resolver otras desigualdades polinomiales

Puede emplearse un procedimiento similar al usado anteriormente para resolver otras **desigualdades polinomiales**, como se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4 ▶ Resuelva la desigualdad $(3x - 2)(x + 3)(x + 5) < 0$. Ilustre la solución en una recta numérica y escríbala en notación de intervalos y en notación constructiva de conjuntos.

Solución Utilizamos la propiedad del factor nulo para resolver la ecuación $(3x - 2)(x + 3)(x + 5) = 0$.

$$3x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 5 = 0$$
$$x = \frac{2}{3} \qquad x = -3 \qquad x = -5$$

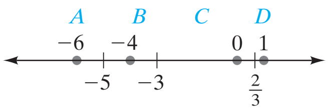


FIGURA 8.29

Las soluciones -5, -3 y $\frac{2}{3}$ dividen la recta numérica en cuatro intervalos (vea la **figura 8.29**). Los valores de prueba que usaremos son -6, -4, 0 y 1. En la tabla siguiente se muestran los resultados.

Intervalo	Valor de prueba	$(3x - 2)(x + 3)(x + 5)$	< 0
A: $(-\infty, -5)$	-6	-60	Verdadero
B: $(-5, -3)$	-4	14	Falso
C: $\left(-3, \frac{2}{3}\right)$	0	-30	Verdadero
D: $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$	1	24	Falso

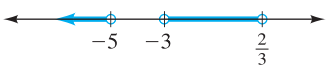


FIGURA 8.30

Como el símbolo original de la desigualdad es $<$, los valores frontera no son parte de la solución. La solución, intervalos A y C, se ilustra en la recta numérica de la **figura 8.30**; en notación constructiva de conjuntos es $\left\{x \middle| x < -5 \text{ o } -3 < x < \frac{2}{3}\right\}$ y en notación de intervalos es $(-\infty, -5) \cup \left(-3, \frac{2}{3}\right)$.

▶ **Ahora resuelva el ejercicio 27**

EJEMPLO 5 ▶ Dada $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$, determine todos los valores de x para los que $f(x) \geq 0$. Ilustre la solución en una recta numérica y proporcione la solución en notación de intervalos.

Solución Necesitamos resolver la desigualdad

$$3x^3 - 3x^2 - 6x \geq 0$$

Empezamos resolviendo la ecuación $3x^3 - 3x^2 - 6x = 0$.

$$3x(x^2 - x - 2) = 0$$
$$3x(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$3x = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 0 \qquad x = 2 \qquad x = -1$$

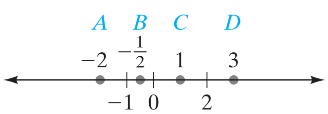


FIGURA 8.31

Las soluciones -1, 0 y 2 dividen la recta numérica en cuatro intervalos (vea la **figura 8.31**). Los valores de prueba que usaremos son -2, $-\frac{1}{2}$, 1 y 3.

Intervalo	Valor de prueba	$3x^3 - 3x^2 - 6x$	≥ 0
A: $(-\infty, 1)$	-2	-24	*Falso*
B: $(-1, 0)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{15}{8}$	*Verdadero*
C: $(0, 2)$	1	-6	*Falso*
D: $(2, \infty)$	3	36	*Verdadero*

Como la desigualdad original es $\geq$, los valores frontera (en los intervalos B y D) son parte de la solución, tal como se ilustra en la recta numérica de la **figura 8.32a**. En notación de intervalos, la solución es $[-1, 0] \cup [2, \infty)$. La **figura 8.32b** muestra la gráfica de $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$. Observe que $f(x) \geq 0$ para $-1 \leq x \leq 0$ y para $x \geq 2$, lo cual coincide con nuestra solución.

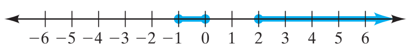


FIGURA 8.32a

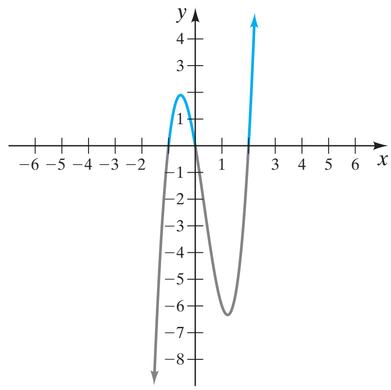


FIGURA 8.32b

Ahora resuelva el ejercicio 41

En todos los ejemplos que hemos resuelto, el coeficiente del término principal ha sido un número positivo.

Ahora considere la desigualdad $-3x^3 + 3x^2 + 6x \leq 0$; observe que el coeficiente del término principal, $-3x^3$, es un número negativo, -3. Por lo general es más sencillo resolver una desigualdad en la que el coeficiente del término principal es un número positivo, así que lo convertiremos multiplicando ambos lados de la desigualdad por -1. Cuando haga esto, recuerde invertir el símbolo de la desigualdad.

$$-3x^3 + 3x^2 + 6x \leq 0$$

$$-1(-3x^3 + 3x^2 + 6x) \geq -1(0) \quad \textit{Invertir el símbolo de la desigualdad.}$$

$$3x^3 - 3x^2 - 6x \geq 0$$

Esta desigualdad se resolvió en el ejemplo 5.

3 Resolver desigualdades racionales

En los ejemplos 6 y 7 resolveremos **desigualdades racionales**, que son aquellas que incluyen expresiones racionales.

EJEMPLO 6 Resuelva la desigualdad $\frac{x-1}{x+3} \geq 2$ y grafique la solución en una recta numérica.

Solución Cambie el $\geq$ por $=$ y resuelva la ecuación resultante.

$$\frac{x-1}{x+3} = 2$$

$$\cancel{x+3} \cdot \frac{x-1}{\cancel{x+3}} = 2(x+3) \quad \textit{Multiplicar ambos lados por } x+3.$$

$$x - 1 = 2x + 6$$

$$-1 = x + 6$$

$$-7 = x$$

Al resolver desigualdades racionales, también necesitamos determinar el valor o valores que hacen al denominador igual a 0. Igualamos a 0 el denominador y resolvemos.

$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$

Para determinar los intervalos, utilizamos la solución de la ecuación, -7, y el valor que anula al denominador 0, -3, como se muestra en la **figura 8.33**. Como valores de prueba utilizaremos -8, -5 y 0.

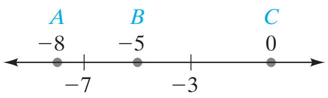


FIGURA 8.33

Intervalo *A*	Intervalo *B*	Intervalo *C*
$(-\infty, -7)$	$(-7, -3)$	$(-3, \infty)$
Valor de prueba, -8	Valor de prueba, -5	Valor de prueba, 0
$\frac{x-1}{x+3} \geq 2$	$\frac{x-1}{x+3} \geq 2$	$\frac{x-1}{x+3} \geq 2$
$\frac{-8-1}{-8+3} \overset{?}{\geq} 2$	$\frac{-5-1}{-5+3} \overset{?}{\geq} 2$	$\frac{0-1}{0+3} \overset{?}{\geq} 2$
$\frac{9}{5} \geq 2$ *Falso*	$3 \geq 2$ *Verdadero*	$-\frac{1}{3} \geq 2$ *Falso*

Sólo el intervalo *B* satisface la desigualdad. Siempre que tengamos una desigualdad racional, debemos ser muy cuidadosos al determinar cuáles valores frontera están contenidos en la solución. Recuerde que nunca podemos incluir en nuestra solución valores que anulen al denominador. Ahora verificamos los valores frontera -7 y -3. Como -7 da por resultado la desigualdad $-2 \geq -2$, que es verdadera, -7 es una solución. Puesto que no está permitida la división entre 0, -3 no es solución. Por lo tanto, la solución es $[-7, -3)$. La solución se ilustra en la recta numérica de la **figura 8.34**.

FIGURA 8.34

▸ Ahora resuelva el ejercicio 81

En el ejemplo 6 resolvimos $\frac{x-1}{x+3} \geq 2$. Suponga que graficamos $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$. ¿Para qué valores de x sería $f(x) \geq 2$? Si respondió $-7 \leq x < -3$, su respuesta es correcta. En la **figura 8.35** se muestran las gráficas de $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ y de $y = 2$. Observe que $f(x) \geq 2$ cuando $-7 \leq x < -3$.

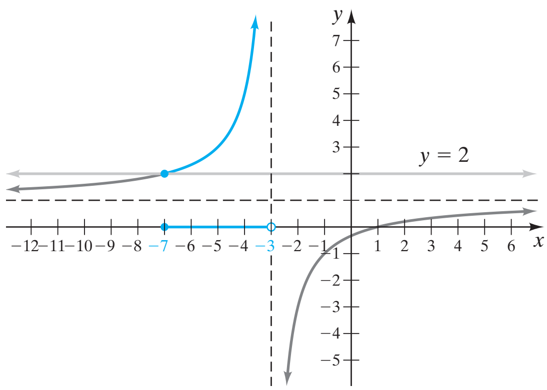


FIGURA 8.35

EJEMPLO 7 ▸ Resuelva la desigualdad $\frac{(x-3)(x+4)}{x+1} \geq 0$. Grafique la solución en una recta numérica y escríbala en notación de intervalos.

Solución Las soluciones de la ecuación $\frac{(x-3)(x+4)}{x+1} = 0$ son 3 y -4, ya que estos valores son los que hacen el numerador igual a 0. La ecuación no está definida en

-1; por lo tanto, utilizamos los valores 3, -4 y -1 para determinar los intervalos en la recta numérica (vea la **figura 8.36**). Al comprobar los valores de prueba -5, -2, 0 y 4, encontramos que los valores en los intervalos B y D, $-4 < x < -1$ y $x > 3$, satisfacen la desigualdad. Compruebe los valores de prueba para verificarlo. Los valores 3 y -4 igualan a 0 la desigualdad y, por lo tanto, son parte de la solución. La desigualdad no está definida en -1, así que -1 no es parte de la solución. La solución es $[-4, -1) \cup [3, \infty)$, como se ilustra en la recta numérica de la **figura 8.37**.

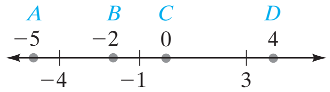


FIGURA 8.36

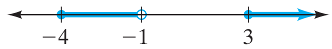


FIGURA 8.37

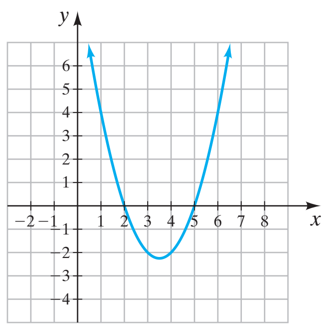
▸ **Ahora resuelva el ejercicio 71**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.6

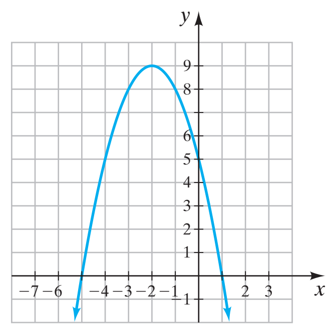
MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. A continuación se da la gráfica de $f(x) = x^2 - 7x + 10$. Determine la solución de **a)** $f(x) > 0$ y **b)** $f(x) < 0$.



2. Dada la gráfica de $f(x) = -x^2 - 4x + 5$, determine la solución de **a)** $f(x) \geq 0$ y **b)** $f(x) \leq 0$.



3. Al resolver la desigualdad $(x - 5)(x + 3) \geq 0$, ¿los valores frontera 5 y -3 están incluidos en el conjunto solución? Explique.

4. Al resolver la desigualdad $(x - 2)(x + 4) < 0$, ¿los valores frontera 2 y -4 están incluidos en el conjunto solución? Explique.

5. Al resolver la desigualdad $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+1} \leq 0$, ¿los valores frontera -2 y 1 están incluidos en el conjunto solución? ¿El valor frontera -1 está incluido en el conjunto solución? Explique.

6. Al resolver la desigualdad $\dfrac{(x + 3)}{(x + 4)(x - 2)} \geq 0$, ¿el valor frontera -3 está incluido en el conjunto solución? ¿Los valores frontera -4 y 2 están incluidos en el conjunto solución? Explique.

Práctica de habilidades

Resuelva cada desigualdad y grafique la solución en la recta numérica.

7. $x^2 - 2x - 8 \geq 0$

8. $x^2 - 2x - 8 < 0$

9. $x^2 + 7x + 6 > 0$

10. $x^2 + 8x + 7 < 0$

11. $n^2 - 6n + 9 \geq 0$

12. $x^2 - 8x \geq 0$

13. $x^2 - 16 < 0$

14. $r^2 - 5r < 0$

15. $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

16. $3n^2 - 7n \leq 6$

17. $5x^2 + 6x \leq 8$

18. $3x^2 + 5x - 3 \leq 0$

19. $2x^2 - 12x + 9 \leq 0$

20. $5x^2 \leq -20x - 4$

Resuelva cada desigualdad y proporcione la solución en notación de intervalos.

21. $(x-2)(x+1)(x+5) \geq 0$

22. $(x-2)(x+2)(x+5) \leq 0$

23. $(a-3)(a+2)(a+4) < 0$

24. $(r-1)(r+2)(r+7) < 0$

25. $(2c+5)(3c-6)(c+6) > 0$

26. $(a-4)(a-2)(a+8) > 0$

27. $(3x+5)(x-3)(x+1) > 0$

28. $(3c-1)(c+4)(3c+6) \leq 0$

29. $(x+2)(x+2)(3x-8) \geq 0$

30. $(x+3)^2(4x-7) \leq 0$

31. $x^3 - 6x^2 + 9x < 0$

32. $x^3 + 3x^2 - 40x > 0$

Determine todos los valores de x para los que $f(x)$ satisface las condiciones que se indican en cada una de las siguientes funciones. Grafique la solución en una recta numérica.

33. $f(x) = x^2 - 6x, f(x) \geq 0$

34. $f(x) = x^2 - 7x, f(x) > 0$

35. $f(x) = x^2 + 4x, f(x) > 0$

36. $f(x) = x^2 + 8x, f(x) \leq 0$

37. $f(x) = x^2 - 14x + 48, f(x) < 0$

38. $f(x) = x^2 - 2x - 15, f(x) < 0$

39. $f(x) = 2x^2 + 9x - 1, f(x) \leq 5$

40. $f(x) = x^2 + 5x - 3, f(x) \leq 4$

41. $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 35x, f(x) \geq 0$

42. $f(x) = x^3 - 9x, f(x) \leq 0$

Resuelva cada desigualdad y proporcione la solución en notación constructiva de conjuntos.

43. $\dfrac{x+2}{x-4} > 0$

44. $\dfrac{x+2}{x-4} \geq 0$

45. $\dfrac{x-1}{x+5} < 0$

46. $\dfrac{x-1}{x+5} \leq 0$

47. $\dfrac{x+3}{x-2} \geq 0$

48. $\dfrac{x-4}{x+6} > 0$

49. $\dfrac{a-9}{a+5} < 0$

50. $\dfrac{b+7}{b+1} \leq 0$

51. $\dfrac{c-10}{c-4} > 0$

52. $\dfrac{2d-6}{d-1} < 0$

53. $\dfrac{3y+6}{y+4} \leq 0$

54. $\dfrac{4z-8}{z-9} \geq 0$

55. $\dfrac{5a+10}{3a-1} \geq 0$

56. $\dfrac{x+4}{x-4} \leq 0$

57. $\dfrac{3x+4}{2x-1} < 0$

58. $\dfrac{k+3}{k} \geq 0$

59. $\dfrac{3x+8}{x-2} \leq 0$

60. $\dfrac{4x-2}{2x-8} > 0$

Resuelva cada desigualdad y proporcione la solución en notación de intervalos.

61. $\dfrac{(x+1)(x-6)}{x+3} < 0$

62. $\dfrac{(x+1)(x-6)}{x+3} \leq 0$

63. $\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-5} > 0$

64. $\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-5} \geq 0$

65. $\dfrac{(a-1)(a-7)}{a+2} \geq 0$

66. $\dfrac{(b-2)(b+4)}{b} < 0$

67. $\dfrac{c}{(c-3)(c+8)} \leq 0$

68. $\dfrac{z-5}{(z+6)(z-9)} \geq 0$

69. $\dfrac{x-6}{(x+4)(x-1)} \leq 0$

70. $\dfrac{x+9}{(x-2)(x+4)} > 0$

71. $\dfrac{(x-3)(2x+5)}{x-4} \geq 0$

72. $\dfrac{r(r-8)}{2r+6} < 0$

Resuelva cada desigualdad y grafique la solución en una recta numérica.

73. $\dfrac{2}{x-4} \geq 1$

74. $\dfrac{2}{x-4} > 1$

75. $\dfrac{3}{x-1} > -1$

76. $\dfrac{3}{x+1} \geq -1$

77. $\dfrac{5}{x+2} \leq 1$

78. $\dfrac{5}{x+2} < 1$

79. $\dfrac{2p-5}{p-4} \leq 1$

80. $\dfrac{2}{2a-1} > 2$

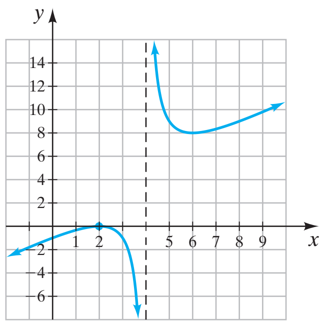
81. $\dfrac{4}{x+2} \geq 2$

82. $\dfrac{x+6}{x+2} > 1$

83. $\dfrac{w}{3w-2} > -2$

84. $\dfrac{x-1}{2x+6} \leq -3$

85. A continuación se ilustra la gráfica de $y = \dfrac{x^2-4x+4}{x-4}$. Determine la solución de las desigualdades siguientes.

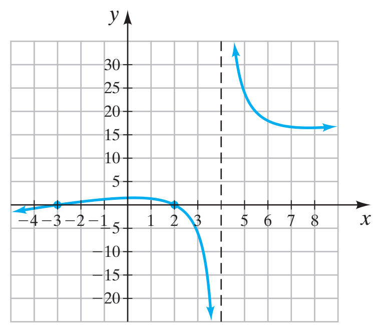


a) $\dfrac{x^2-4x+4}{x-4} > 0$

b) $\dfrac{x^2-4x+4}{x-4} < 0$

Explique cómo determinó su respuesta.

86. A continuación se ilustra la gráfica de $y = \dfrac{x^2+x-6}{x-4}$. Determine la solución de las desigualdades siguientes.



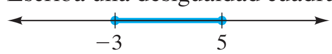
a) $\dfrac{x^2+x-6}{x-4} \geq 0$

b) $\dfrac{x^2+x-6}{x-4} < 0$

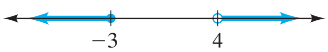
Explique cómo determinó su respuesta.

87. Escriba una desigualdad cuadrática cuya solución sea

88. Escriba una desigualdad cuadrática cuya solución sea



89. Escriba una desigualdad racional cuya solución sea



90. Escriba una desigualdad racional cuya solución sea

91. ¿Cuál es la solución de la desigualdad $(x+3)^2(x-1)^2 \geq 0$? Explique su respuesta.

92. ¿Cuál es la solución de la desigualdad $x^2(x-3)^2(x+4)^2 < 0$? Explique su respuesta.

93. ¿Cuál es la solución de la desigualdad $\dfrac{x^2}{(x+2)^2} \geq 0$? Explique su respuesta.

94. ¿Cuál es la solución de la desigualdad $\dfrac{x^2}{(x-3)^2} > 0$? Explique su respuesta.

95. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a > 0$ y el discriminante es negativo, ¿cuál es la solución de $f(x) < 0$? Explique.

96. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a < 0$ y el discriminante es negativo, ¿cuál es la solución de $f(x) > 2$? Explique.

Retos

Resuelva cada desigualdad y grafique la solución en la recta numérica.

97. $(x+1)(x-3)(x+5)(x+8) \geq 0$

98. $\dfrac{(x-4)(x+2)}{x(x+9)} \geq 0$

Escriba una desigualdad cuadrática con las soluciones siguientes; para cada problema existen diferentes respuestas posibles. Explique cómo determinó sus respuestas.

99. $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

100. $\{2\}$

101. $\varnothing$

102. $\mathbb{R}$

En los ejercicios 103 y 104, resuelva cada desigualdad y proporcione la solución en notación de intervalos. Para determinar la solución, utilice las técnicas analizadas en la sección 8.5.

103. $x^4 - 10x^2 + 9 > 0$

104. $x^4 - 26x^2 + 25 \leq 0$

En los ejercicios 105 y 106, resuelva cada desigualdad factorizando por agrupación. Proporcione la solución en notación de intervalos.

105. $x^3 + x^2 - 4x - 4 \geq 0$

106. $2x^3 + x^2 - 32x - 16 < 0$

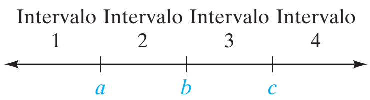
Actividad en grupo

Analicen y respondan en grupo los ejercicios 107 y 108.

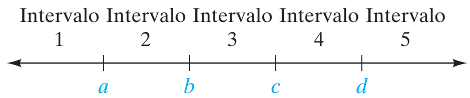
107. Consideren la siguiente recta numérica, donde a, b y c son números reales distintos.

a) ¿En qué intervalos los números reales satisfacen la desigualdad $(x - a)(x - b)(x - c) > 0$? Expliquen.

b) ¿En qué intervalos los números reales satisfacen la desigualdad $(x - a)(x - b)(x - c) < 0$? Expliquen.



108. Consideren la recta numérica siguiente, en la que a, b, c y d son números reales distintos.



a) ¿En qué intervalos los números reales satisfacen la desigualdad $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) > 0$? Expliquen.

b) ¿En qué intervalos los números reales satisfacen la desigualdad $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) < 0$? Expliquen.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.4] **109.** **Anticongelante** Paul Simmons desea obtener una solución de anticongelante con concentración de 50%. ¿Cuántos cuartos de galón de anticongelante con concentración de 100% debe agregar a 10 cuartos de galón de anticongelante con concentración de 20%?

[3.2] **110.** Si $h(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x + 9}$, determine $h(-3)$.

[5.1] **111.** Sume $(6r + 5s - t) + (-3r - 2s - 8t)$.

[6.3] **112.** Simplifique $\dfrac{1 + \dfrac{x}{x + 1}}{\dfrac{2x + 1}{x - 3}}$.

[7.7] **113.** Multiplique $(3 - 4i)(6 + 5i)$.

Resumen del capítulo 8

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 8.1	
Propiedad de la raíz cuadrada Si $x^2 = a$, donde a es un número real, entonces $x = \pm\sqrt{a}$.	Resuelva $x^2 - 36 = 0$. $x^2 - 36 = 0$ $x^2 = 36$ $x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$ Las soluciones son -6 y 6.
Un **trinomio cuadrado perfecto** es un trinomio que puede expresarse como el cuadrado de un binomio.	$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 8.1 (continuación)	
Para resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado **1.** Si es necesario, utilice la propiedad de la multiplicación (o división) para una igualdad, a fin de hacer que el coeficiente principal sea 1. **2.** Reescriba la ecuación con el término constante, solo, en el lado derecho de la ecuación. **3.** Tome un medio del coeficiente numérico del término de primer grado, elévelo al cuadrado, y sume esta cantidad a ambos lados de la ecuación. **4.** Reemplace el trinomio con el cuadrado de un binomio. **5.** Utilice la propiedad de la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación. **6.** Despeje la variable. **7.** Compruebe sus soluciones en la ecuación *original*.	Resuelva $x^2 + 4x - 12 = 0$ mediante la fórmula cuadrática. $x^2 + 4x - 12 = 0$ $x^2 + 4x = 12$ $x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$ $(x + 2)^2 = 16$ $x + 2 = \pm\sqrt{16}$ $x + 2 = \pm 4$ $x = -2 \pm 4$ $x = -2 - 4 = -6 \quad \text{o} \quad x = -2 + 4 = 2$ Las soluciones son -6 y 2.
Sección 8.2	
La **forma general de una ecuación cuadrática** es $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.	$x^2 - 5x + 17 = 0$
Para resolver una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática **1.** Escriba la ecuación cuadrática en la forma general, $ax^2 + bx + c = 0$, y determine los valores numéricos para a, b y c. **2.** Sustituya los valores para a, b y c en la fórmula cuadrática y luego evalúe la fórmula para obtener la solución Fórmula cuadrática $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Resuelva $x^2 - 2x - 15 = 0$ mediante la fórmula cuadrática. $a = 1, \quad b = -2, \quad c = -15$ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $= \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$ $= \dfrac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$ $= \dfrac{2 \pm 8}{2}$ $x = \dfrac{2+8}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \quad \text{o} \quad x = \dfrac{2-8}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$ Las soluciones son 5 y -3.
Soluciones de una ecuación cuadrática Para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, el **discriminante** es $b^2 - 4ac$. Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales distintas. Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática tiene una sola solución real. Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales.	Determine el número de soluciones de $3x^2 - x + 7 = 0$. $a = 3, b = -1, c = 7$ $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(7)$ $= 1 - 84$ $= -83$ Como el discriminante es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 8.4

Una ecuación que puede escribirse en la forma $au^2 + bu + c = 0$, con $a \neq 0$, donde u es una expresión algebraica, se denomina ecuación de **forma cuadrática**.

Para resolver ecuaciones en forma cuadrática

1. Haga una sustitución que tenga por resultado una ecuación en la forma $au^2 + bu + c = 0, a \neq 0$, donde u es una función de la variable original.
2. Resuelva la ecuación $au^2 + bu + c = 0$ para u.
3. Reemplace u con la función de la variable original del paso 1 y resuelva la ecuación resultante para la variable original.
4. Compruebe si hay soluciones extrañas, sustituyendo las soluciones aparentes en la ecuación original.

Resuelva $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$.

Sea $u = x^2$.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
u^2 - 17u + 16 &= 0\\
(u - 16)(u - 1) &= 0\\
u - 16 = 0 \quad &\text{o} \quad u - 1 = 0\\
u = 16 \qquad &\qquad u = 1\\
x^2 = 16 \qquad &\qquad x^2 = 1\\
x = \pm 4 \qquad &\qquad x = \pm 1
\end{aligned}
$$

Una comprobación mostrará que las soluciones son 4, −4, 1 y −1.

Sección 8.5

Parábola

Las gráficas de ecuaciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ son parábolas.

a) La parábola abre hacia arriba cuando $a > 0$ y hacia abajo cuando $a < 0$.

b) El eje de simetría es la recta $x = -\dfrac{b}{2a}$.

c) El vértice es el punto $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ o $\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.

d) La intersección con el eje y es el punto $(0, c)$.

e) Para obtener la(s) intersecciones con el eje x, hacemos $f(x) = 0$ y resolvemos para x.

La gráfica de $f(x) = x^2 - 2x - 3$ es una parábola.

a) Abre hacia arriba ya que $a > 0$.

b) El eje de simetría es $x = -\dfrac{-2}{2(1)} = 1$.

c) El vértice es $(1, -4)$.

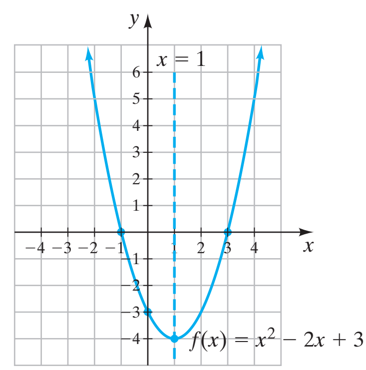
d) La intersección con el eje y es $(0, -3)$.

e)

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x - 3 &= 0\\
(x - 3)(x + 1) &= 0\\
x - 3 = 0 \quad &\text{o} \quad x + 1 = 0\\
x = 3 \qquad &\qquad x = -1
\end{aligned}
$$

Las intersecciones con el eje x son $(3, 0)$ y $(-1, 0)$.

La gráfica de $f(x) = x^2 - 2x - 3$.



Sección 8.6

Una **desigualdad cuadrática** se obtiene cuando el signo igual, en la ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$, se reemplaza por un signo de desigualdad.

La **solución de una desigualdad cuadrática** es el conjunto de todos los valores que hacen verdadera la desigualdad.

$$x^2 - 5x + 7 > 0$$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 8.6 (continuación)

Para resolver desigualdades cuadráticas, polinomiales y racionales

1. Escriba la desigualdad como una ecuación y resuelva la ecuación.
2. Si se resuelve una desigualdad racional, determine los valores que hacen el denominador igual a cero.
3. Trace una recta numérica. Marque cada solución del paso 1 y los números obtenidos en el paso 2 en la recta numérica.
4. Seleccione un valor de prueba en cada intervalo y determine si satisface la desigualdad. También pruebe cada valor frontera.
5. Escriba la solución en la forma que le pida su profesor.

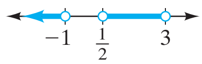
Resuelva $(2x - 1)(x - 3)(x + 1) < 0$.

$$(2x - 1)(x - 3)(x + 1) < 0$$
$$(2x - 1)(x - 3)(x + 1) = 0$$
$$2x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{2} \qquad x = 3 \qquad x = -1$$

Los intervalos y los valores de prueba seleccionados se muestran a continuación.

Intervalo	Valor de prueba	$(2x - 1)(x - 3)(x + 1) < 0$
$(-\infty, -1)$	-2	-25
$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	0	3
$\left(\frac{1}{2}, 3\right)$	1	-4
$(3, \infty)$	5	108

La solución es $x < -1$ o $\frac{1}{2} < x < 3$.

La solución en una recta numérica: 

.

La solución en notación de intervalo: $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right)$

La solución en notación de conjuntos:
$\left\{x \,\middle|\, x < -1 \quad \text{o} \quad \frac{1}{2} < x < 3\right\}$

Ejercicios de repaso del capítulo 8

[8.1] *Utilice la propiedad de la raíz cuadrada para resolver cada ecuación.*

1. $(x - 5)^2 = 24$ **2.** $(2x + 1)^2 = 60$ **3.** $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ **4.** $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4$

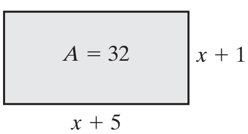
Complete el cuadrado para resolver cada ecuación.

5. $x^2 - 7x + 12 = 0$ **6.** $x^2 + 4x - 32 = 0$ **7.** $a^2 + 2a - 9 = 0$

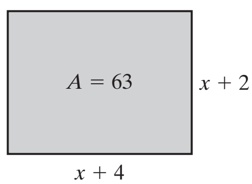
8. $z^2 + 6z = 12$ **9.** $x^2 - 2x + 10 = 0$ **10.** $2r^2 - 8r = -64$

Área *En los ejercicios 11 y 12 se da el área, A, de cada rectángulo.* **a)** *Escriba una ecuación para determinar el área.* **b)** *Despeje x en la ecuación.*

11.



12.



13. Enteros consecutivos El producto de dos enteros positivos y consecutivos es 42; determine los dos enteros.

14. Sala de estar Ronnie Sampson se acaba de mudar a una casa nueva, cuya sala de estar es una habitación cuadrada cuya diagonal tiene una longitud 7 pies mayor que la longitud de uno de los lados. Determine las dimensiones de la habitación.

[8.2] *Determine si cada una de las siguientes ecuaciones tiene dos soluciones reales distintas, una sola solución o no tiene soluciones reales.*

15. $2x^2 - 5x - 1 = 0$
16. $3x^2 + 2x = -6$
17. $r^2 + 16r = -64$
18. $5x^2 - x + 2 = 0$
19. $a^2 - 14a = -49$
20. $\frac{1}{2}x^2 - 3x = 8$

Resuelva cada ecuación por medio de la fórmula cuadrática.

21. $3x^2 + 4x = 0$
22. $x^2 - 11x = -18$
23. $r^2 = 3r + 40$
24. $7x^2 = 9x$
25. $6a^2 + a - 15 = 0$
26. $4x^2 + 11x = 3$
27. $x^2 + 8x + 5 = 0$
28. $b^2 + 4b = 8$
29. $2x^2 + 4x - 3 = 0$
30. $3y^2 - 6y = 8$
31. $x^2 - x + 13 = 0$
32. $x^2 - 2x + 11 = 0$
33. $2x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{25}{3}$
34. $4x^2 + 5x - \frac{3}{2} = 0$

Determine todos los valores reales de la variable para los que cada una de las siguientes funciones tiene el valor que se indica.

35. $f(x) = x^2 - 4x - 35, f(x) = 25$
36. $g(x) = 6x^2 + 5x, g(x) = 6$
37. $h(r) = 5r^2 - 7r - 10, h(r) = -8$
38. $f(x) = -2x^2 + 6x + 7, f(x) = -2$

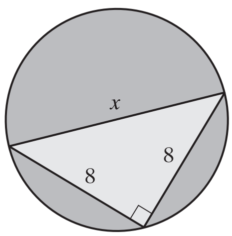
Determine una función que tenga las soluciones dadas.

39. $3, -1$
40. $\frac{2}{3}, -2$
41. $-\sqrt{11}, \sqrt{11}$
42. $3 - 2i, 3 + 2i$

[8.1–8.3]

43. Jardín rectangular Sophia Yang está diseñando un jardín rectangular. Si el área debe medir 96 pies cuadrados y el largo debe ser 4 pies mayor que el ancho, determine las dimensiones del jardín.

44. Triángulo y círculo Determine la longitud del lado x en la figura siguiente.



45. Cuenta de ahorros Samuel Rivera invirtió $1000 en una cuenta de ahorros que paga el interés una vez al año. Si al cabo de 2 años el saldo de la cuenta es de $1081.60, determine la tasa de interés anual.

46. Números El mayor de dos números positivos es 4 unidades mayor que el menor. Determine los dos números si su producto es 77.

47. Rectángulo La longitud de un rectángulo es 4 pulgadas menor que el doble de su ancho. Determine las dimensiones si su área mide 96 pulgadas cuadradas.

48. Cultivo de trigo El valor, V, en dólares por acre de un plantío de trigo d días después de que se siembran las semillas está dado por la fórmula $V = 12d - 0.05d^2, 20 < d < 80$. Determine el valor de un acre de trigo después de 60 días de que sembraron las semillas.

49. Gasto de compañías petroleras El gasto $E(t)$, en miles de millones de dólares, hecho por compañías petroleras para proyectos nuevos de petróleo y gas natural puede aproximarse mediante la ecuación $E(t) = 7t^2 - 7.8t + 82.2$, donde t es el número de años a partir de 2001. **Fuente:** John S. Herald Inc. *Washington Post* (14 de marzo de 2005).

a) Determine el gasto de las compañías petroleras para proyectos nuevos de petróleo y gas natural en 2004.

b) Si esta tendencia continúa, ¿en qué año el gasto será de $579 mil millones?

50. Objeto en caída La distancia al suelo, d, en pies, a la que un objeto está t segundos a partir que se dejó caer desde un aeroplano, está dada por la fórmula $d = -16t^2 + 784$.

a) Determine la distancia a la que el objeto está del suelo, 2 segundos después de que se le dejó caer.

b) ¿En qué instante el objeto chocará con el suelo?

51. Fuga de aceite Un tractor tiene una fuga de aceite. La cantidad de aceite, $L(t)$ en mililitros por hora que pierde es una función de la temperatura que alcanza el tractor, t, en grados Celsius. La función es

$$L(t) = 0.0004t^2 + 0.16t + 20, 100°C \leq t \leq 160°C$$

a) ¿Cuántos mililitros de aceite perderá el tractor en 1 hora si su temperatura es de 100°C?

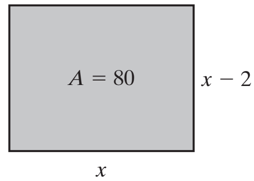
b) Si el aceite está saliendo a 53 mililitros por hora, ¿cuál es la temperatura del tractor?

52. Máquinas moldeadoras Dos máquinas moldeadoras pueden completar un pedido en 12 horas. Si trabaja sola, la máquina más grande puede terminar el pedido en 1 hora menos que el tiempo que tardaría la máquina más pequeña trabajando sola. Si cada máquina trabaja sola, ¿cuánto tiempo tardaría cada una en terminar el pedido?

53. Tiempo de recorrido Steve Forrester manejó 25 millas a velocidad constante, y luego aumentó su velocidad en 15 millas por hora durante las siguientes 65 millas. Si el tiempo total del recorrido de 90 millas fue de 1.5 horas, determine la velocidad a la que Steve manejó durante las primeras 25 millas.

54. Paseo en canoa Joan Banker viajó en canoa río abajo, a favor de la corriente, 3 millas; luego dio la vuelta y remó río arriba, en contra de la corriente, hasta llegar al punto en donde inició su recorrido. Si el tiempo total que empleó en el trayecto fue de 4 horas y la corriente del río tenía una velocidad de 0.4 millas por hora, ¿a qué velocidad rema Joan en aguas tranquilas?

55. Área El área de un rectángulo mide 80 unidades cuadradas. Si la longitud es de x unidades y el ancho es de $x - 2$ unidades, determine la longitud y el ancho. Redondee su respuesta a la décima más cercana.



56. Venta de mesas Una mueblería vende n mesas, $n \leq 40$, a un precio de $(60 - 0.3n)$ dólares cada una. ¿Cuántas mesas debe vender para tener un ingreso de \$1080?

En los ejercicios 57 a 60, despeje la variable que se indica en cada ecuación.

57. Despeje a en $a^2 + b^2 = c^2$ (teorema de Pitágoras)

58. Despeje t en $h = -4.9t^2 + c$ (altura de un objeto)

59. Despeje v_y en $v_x^2 + v_y^2 = v^2$ (vectores)

60. Despeje v_2 en $a = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$

[8.4] *Resuelva cada ecuación.*

61. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

62. $x^4 - 21x^2 + 80 = 0$

63. $a^4 = 5a^2 + 24$

64. $3y^{-2} + 16y^{-1} = 12$

65. $3r + 11\sqrt{r} - 4 = 0$

66. $2p^{2/3} - 7p^{1/3} + 6 = 0$

67. $6(x - 2)^{-2} = -13(x - 2)^{-1} + 8$

68. $10(r + 1) = \dfrac{12}{r + 1} - 7$

Determine todas las intersecciones con el eje x de cada función dada.

69. $f(x) = x^4 - 82x + 81$

70. $f(x) = 30x + 13\sqrt{x} - 10$

71. $f(x) = x - 6\sqrt{x} + 12.$

72. $f(x) = (x^2 - 6x)^2 - 5(x^2 - 6x) - 24$

[8.5] **a)** *Determine si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.* **b)** *Determine la intersección con el eje y.* **c)** *Determine el vértice.* **d)** *Determine las intersecciones con el eje x (si las hay).* **e)** *Trace la gráfica.*

73. $f(x) = x^2 + 5x$

74. $f(x) = x^2 - 2x - 8$

75. $g(x) = -x^2 - 2$

76. $g(x) = -2x^2 - x + 15$

77. Venta de boletos La compañía teatral de una escuela considera que el ingreso total, I, en cientos de dólares, que obtendrá por una puesta en escena, puede calcularse con la fórmula $I = -x^2 + 22x - 45, 2 \leq x \leq 20$, donde x es el costo de un boleto.

a) ¿Cuánto deben cobrar para obtener el ingreso máximo?

b) ¿Cuál es el ingreso máximo?

78. Lanzamiento de una pelota Josh Vincent lanza una pelota hacia arriba desde lo alto de un edificio de 75 pies. La altura, $s(t)$, de la pelota en cualquier instante t, puede determinarse mediante la función $s(t) = -16t^2 + 80t + 75$.

a) ¿En qué instante la pelota llegará a su altura máxima?

b) ¿Cuál es la altura máxima?

Grafique cada función.

79. $f(x) = (x - 3)^2$ **80.** $f(x) = -(x + 2)^2 - 3$ **81.** $g(x) = -2(x + 4)^2 - 1$ **82.** $h(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 3$

[8.6] *Grafique la solución de cada desigualdad en una recta numérica.*

83. $x^2 + 4x + 3 \geq 0$ **84.** $x^2 + 3x - 10 \leq 0$

85. $x^2 \leq 11x - 20$ **86.** $3x^2 + 8x > 16$

87. $4x^2 - 9 \leq 0$ **88.** $6x^2 - 30 > 0$

Resuelva cada desigualdad y proporcione la solución en notación constructiva de conjuntos.

89. $\frac{x + 1}{x - 5} > 0$ **90.** $\frac{x - 3}{x + 2} \leq 0$ **91.** $\frac{2x - 4}{x + 3} \geq 0$

92. $\frac{3x + 5}{x - 6} < 0$ **93.** $(x + 4)(x + 1)(x - 2) > 0$ **94.** $x(x - 3)(x - 6) \leq 0$

Resuelva cada desigualdad y proporcione la solución en notación de intervalos.

95. $(3x + 4)(x - 1)(x - 3) \geq 0$ **96.** $2x(x + 2)(x + 4) < 0$

97. $\frac{x(x - 4)}{x + 2} > 0$ **98.** $\frac{(x - 2)(x - 8)}{x + 3} < 0$

99. $\frac{x - 3}{(x + 2)(x - 7)} \geq 0$ **100.** $\frac{x(x - 6)}{x + 3} \leq 0$

Resuelva cada desigualdad y grafique la solución en una recta numérica.

101. $\frac{5}{x + 4} \geq -1$ **102.** $\frac{2x}{x - 2} \leq 1$ **103.** $\frac{2x + 3}{3x - 5} < 4$

Examen de práctica del capítulo 8

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección en la que se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en el ***Chapter Test Prep Video CD.*** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

Resuelva completando el cuadrado.

1. $x^2 + 2x - 15 = 0$ **2.** $a^2 + 7 = 6a$

Resuelva utilizando la fórmula cuadrática.

3. $x^2 - 6x - 16 = 0$ **4.** $x^2 - 4x = -11$

Resuelva utilizando el método de su preferencia.

5. $3r^2 + r = 2$ **6.** $p^2 + 4 = -7p$

7. Escriba una función cuyas intersecciones con el eje x sean $4, -\frac{2}{5}$.

8. Despeje v en la fórmula $K = \frac{1}{2}mv^2$.

9. Costo El costo, c, de una casa en Duquoin, Illinois, es una función del número de pies cuadrados, s, de la casa. El costo de la casa puede calcularse mediante

$$c(s) = -0.01s^2 + 78s + 22{,}000, \quad 1300 \leq s \leq 3900$$

a) Calcule el costo de una casa de 1600 pies cuadrados.
b) Si Clarissa Skocy quiere gastar \$160,000 en una casa, ¿qué tan grande puede ser ésta?

10. Viaje a un parque Tom Ficks condujo su automóvil desde Anchorage, Alaska, hasta el parque recreativo de Chena River, que se encuentra a 520 millas de distancia. Si hubiera manejado en promedio a 15 millas por hora más rápido, el viaje habría durado 2.4 horas menos. Determine la velocidad promedio a la que condujo Tom.

Parque Recreativo Estatal de Chena River

Resuelva.

11. $2x^4 + 15x^2 - 50 = 0$

12. $3r^{2/3} + 11r^{1/3} - 42 = 0$

13. Determine todas las intersecciones con el eje x de $f(x) = 16x - 24\sqrt{x} + 9$.

Grafique cada función.

14. $f(x) = (x - 3)^2 + 2$

15. $h(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 2$

16. Determine si $6x^2 = 2x + 3$ tiene dos soluciones reales distintas, una sola solución real o no tiene soluciones reales. Explique su respuesta.

17. Considere la ecuación cuadrática $y = x^2 + 2x - 8$.

a) Determine si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.

b) Determine la intersección con el eje y.

c) Determine el vértice.

d) Determine las intersecciones con el eje x (si las hay).

e) Trace la gráfica.

18. Escriba una función cuadrática cuyas intersecciones con el eje x sean $(-7, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Resuelva cada desigualdad y grafique la solución en una recta numérica.

19. $x^2 - x \geq 42$

20. $\dfrac{(x + 5)(x - 4)}{x + 1} \geq 0$

Resuelva la desigualdad siguiente. Escriba la respuesta en ***a)*** *notación de intervalos, y* ***b)*** *en notación constructiva de conjuntos.*

21. $\dfrac{x + 3}{x + 2} \leq -1$

22. Alfombra La longitud de una alfombra persa es 3 pies mayor que el doble de su ancho. Determine la longitud y el ancho de la alfombra, si su área mide 65 pies cuadrados.

23. Lanzamiento de una pelota José Ramírez lanza una pelota hacia arriba desde lo alto de un edificio. La distancia, d, de la pelota respecto del piso en cualquier instante, t, es $d = -16t^2 + 80t + 96$. ¿Cuánto tardará la pelota en chocar contra el piso?

24. Utilidad Una compañía que produce esculturas de madera obtiene una utilidad semanal de acuerdo con la función $f(x) = -1.4x^2 + 56x - 70$, donde x es el número de esculturas que fabrica y vende cada semana.

a) Determine el número de esculturas que la compañía debe vender cada semana para maximizar su utilidad.

b) ¿Cuál es la utilidad semanal máxima?

25. Venta de escobas Un negocio vende n escobas, $n \leq 32$, a un precio de $(10 - 0.1n)$ dólares cada una. ¿Cuántas escobas debe vender para tener un ingreso de \$160?

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revise las preguntas que haya respondido incorrectamente. Los números de la sección y el objetivo donde se analiza el material correspondiente se indican después de cada respuesta.

1. Evalúe $-4 \div (-2) + 18 - \sqrt{49}$.

2. Evalúe $2x^2 + 3x + 4$ cuando $x = 2$.

3. Exprese 2,540,000 en notación científica.

4. Determine el conjunto solución para la ecuación $|4 - 2x| = 5$.

5. Simplifique $6x - \{3 - [2(x - 2) - 5x]\}$.

6. Resuelva la ecuación $-\frac{1}{2}(4x - 6) = \frac{1}{3}(3 - 6x) + 2$.

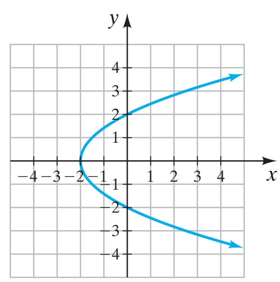
7. Resuelva la desigualdad $-4 < \dfrac{x + 4}{2} < 6$. Escriba la solución en notación de intervalos.

8. Determine la pendiente y la intersección con el eje y de la gráfica de $9x + 7y = 15$.

9. Huerto El número de canastas de manzanas, N, que se producen por x árboles en un pequeño huerto está dado por la función $N(x) = -0.2x^2 + 40x$. ¿Cuántas canastas de manzanas producen 50 árboles?

10. Escriba la ecuación, en la forma punto pendiente, de una recta que pasa por los puntos $(6, 5)$ y $(4, 3)$.

11. a) Determine si la gráfica siguiente representa una función. Explique su respuesta.



b) Determine el dominio y el rango de la función o relación.

12. Grafique cada una de las ecuaciones siguientes.

a) $x = -4$

b) $y = 2$

13. Evalúe el determinante siguiente.

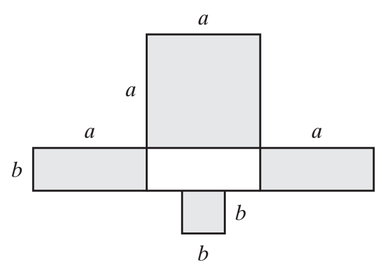
$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

14. Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$4x - 3y = 10$$
$$2x + y = 5$$

15. Factorice $(x + 3)^2 + 10(x + 3) + 24$.

16. **a)** Escriba una expresión para determinar el área sombreada de la figura siguiente, y **b)** escriba la expresión en forma factorizada.



17. Sume $\dfrac{x + 2}{x^2 - x - 6} + \dfrac{x - 3}{x^2 - 8x + 15}$.

18. Resuelva la ecuación

$$\frac{1}{a - 2} = \frac{4a - 1}{a^2 + 5a - 14} + \frac{2}{a + 7}.$$

19. **Consumo en watts** El consumo en watts, w, de un aparato varía conjuntamente con el cuadrado de la corriente, I, y la resistencia, R. Si un aparato consume 12 watts cuando la corriente es de 2 amperes y la resistencia es de 100 ohms, determine su consumo en watts cuando la corriente es de 0.8 amperes y la resistencia es de 600 ohms.

20. Simplifique $\dfrac{3 - 4i}{2 + 5i}$.

9 Funciones exponenciales y logarítmicas

OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Las funciones exponenciales y logarítmicas tienen una amplia variedad de aplicaciones, algunas de las cuales se analizarán a lo largo de este capítulo. Probablemente usted ha leído en artículos de periódicos y revistas que algunas cosas, como el gasto en servicios de salud, el uso de Internet y la población mundial, por ejemplo, crecen a un ritmo exponencial; cuando termine de estudiar este capítulo entenderá con claridad lo que esto significa.

También hablaremos de dos funciones especiales, la función exponencial natural y la función logarítmica natural. Muchos fenómenos naturales, como el fechado con carbono, el decaimiento radiactivo y el crecimiento de los ahorros invertidos en una cuenta en la que el interés se capitaliza de forma continua, pueden describirse por medio de funciones exponenciales naturales.

EL DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA y Asuntos Sociales de Estados Unidos, utiliza modelos matemáticos para hacer cálculos y proyecciones respecto de la población mundial. Hoy en día, la población mundial crece en alrededor de 1.13% anualmente. Puesto que el crecimiento poblacional puede determinarse como un porcentaje en lugar de hacerlo como una cantidad fija, se modela por medio de una función exponencial, en vez de hacerlo mediante una función lineal. En el ejercicio 79 de la página 646, investigaremos el efecto que tendrían diferentes tasas de crecimiento sobre la población mundial.

9.1 Funciones compuestas e inversas

1 Determinar funciones compuestas.

2 Entender las funciones uno a uno.

3 Determinar funciones inversas.

4 Determinar la composición de una función y su inversa.

La parte central de este capítulo son los logaritmos; sin embargo, antes de poder estudiarlos analizaremos las funciones compuestas, las funciones uno a uno y las funciones inversas. Empezaremos por las funciones compuestas.

1 Determinar funciones compuestas

A menudo nos enfrentamos con cantidades que son funciones de una variable; esas variables, a su vez, son funciones de otra variable. Por ejemplo, el costo de transmitir un mensaje publicitario durante un programa de televisión podría ser función de la calificación que le da la empresa Nielsen a ese programa; por su parte, la calificación que asigna Nielsen es una función del número de telespectadores que lo ven. Al final, el costo de la publicidad puede verse afectado por el número de telespectadores. Funciones como ésta se denominan *funciones compuestas*.

Consideremos otro ejemplo; suponga que 1 dólar estadounidense puede cambiarse por 1.20 dólares canadienses, y que 1 dólar canadiense puede cambiarse por 9.3 pesos mexicanos. A partir de esta información, podemos convertir 20 dólares estadounidenses a pesos mexicanos utilizando las funciones siguientes.

$$g(x) = 1.20x \text{ (dólares estadounidenses a dólares canadienses)}$$
$$f(x) = 9.3x \text{ (dólares canadienses a pesos mexicanos)}$$

Si hacemos $x = 20$, es decir, 20 dólares estadounidenses, entonces, mediante la función g podemos convertirlos en \$24 dólares canadienses de esta forma:

$$g(x) = 1.20x$$
$$g(20) = 1.20(20) = 24 \text{ dólares canadienses}$$

A su vez, los 24 dólares canadienses se convierten en 223.20 pesos mexicanos mediante la función f:

$$f(x) = 9.3x$$
$$f(24) = 9.3(24) = 223.20 \text{ pesos mexicanos}$$

¿Existe alguna forma de hacer la conversión sin realizar esta cadena de cálculos? La respuesta es sí. Un dólar estadounidense puede convertirse a pesos mexicanos sustituyendo la x de la función $f(x)$ por $1.20x$, que aparece en la función $g(x)$. Esto da una nueva función, h, con la que podemos convertir directamente dólares estadounidenses en pesos mexicanos.

$$g(x) = 1.20x \qquad f(x) = 9.3x$$
$$\begin{aligned} h(x) &= f[g(x)] \\ &= 9.3(1.20x) \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } g(x) \text{ en } f(x). \\ &= 11.16x \end{aligned}$$

Por lo tanto, por cada dólar estadounidense, x, obtenemos 11.16 pesos mexicanos. Si sustituimos \$20 por x, obtenemos 223.20 pesos, que es lo que esperábamos

$$h(x) = 11.16x$$
$$h(20) = 11.16(20) = 223.20$$

La función h, denominada **función compuesta de f con g**, se denota con $(f \circ g)$ y se lee "f compuesta con g", o "fog". La **figura 9.1** muestra cómo la función compuesta, h, relaciona a las funciones f y g.

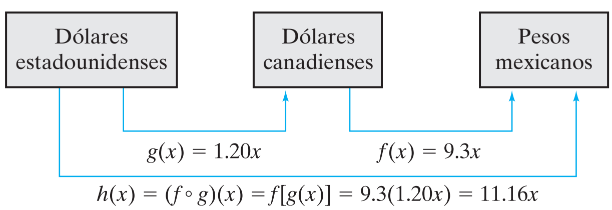


FIGURA 9.1

A continuación se da la definición de **función compuesta**.

Función compuesta

La **función compuesta** $(f \circ g)$ se define como

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Para determinar $(f \circ g)(x)$ cuando nos dan $f(x)$ y $g(x)$, en $f(x)$ sustituimos la x por $g(x)$, para obtener $f[g(x)]$.

EJEMPLO 1 Dada $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x - 5$, determine

a) $f(4)$ **b)** $f(a)$ **c)** $(f \circ g)(x)$ **d)** $(f \circ g)(3)$

Solución

a) Para determinar $f(4)$, sustituimos cada x de $f(x)$ por 4.

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$
$$f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 16 - 8 + 3 = 11$$

b) Para determinar $f(a)$, sustituimos cada x de $f(x)$ por a.

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$
$$f(a) = a^2 - 2a + 3$$

c) $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$. Para determinar $(f \circ g)(x)$, sustituimos cada x de $f(x)$ por $g(x)$, es decir, por $x - 5$.

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$
$$f[g(x)] = [g(x)]^2 - 2[g(x)] + 3$$

Ya que $g(x) = x - 5$, sustituimos como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} f[g(x)] &= (x-5)^2 - 2(x-5) + 3 \\ &= (x-5)(x-5) - 2x + 10 + 3 \\ &= x^2 - 10x + 25 - 2x + 13 \\ &= x^2 - 12x + 38 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función compuesta de f con g es $x^2 - 12x + 38$.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = x^2 - 12x + 38$$

d) Para determinar $(f \circ g)(3)$, sustituimos x en $(f \circ g)(x)$ por 3.

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 12x + 38$$
$$(f \circ g)(3) = 3^2 - 12(3) + 38 = 11$$

Ahora resuelva el ejercicio 9

¿Cómo cree que determinaríamos $(g \circ f)(x)$ o $g[f(x)]$? Si respondió: "Sustituyendo cada x de $g(x)$ por $f(x)$", tiene razón. A partir de los valores que se dieron para $f(x)$ y $g(x)$ en el ejemplo 1, determinamos $(g \circ f)(x)$ como sigue,

$$g(x) = x - 5, \qquad f(x) = x^2 - 2x + 3$$
$$g[f(x)] = f(x) - 5$$
$$\begin{aligned} g[f(x)] &= (x^2 - 2x + 3) - 5 \\ &= x^2 - 2x + 3 - 5 \\ &= x^2 - 2x - 2 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la función compuesta de g con f es $x^2 - 2x - 2$.

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = x^2 - 2x - 2$$

Al comparar los dos resultados anteriores, vemos que en este caso $f[g(x)] \neq g[f(x)]$.

EJEMPLO 2 ▸ Dadas $f(x) = x^2 + 4$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$, determine

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$

Solución

a) Para determinar $(f \circ g)(x)$, sustituimos cada x de $f(x)$ por $g(x)$, que es $\sqrt{x-1}$. En este caso, tenga en cuenta que $\sqrt{x-1}$ es un número real solamente cuando $x \geq 1$.

$$f(x) = x^2 + 4$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = (\sqrt{x-1})^2 + 4 = x - 1 + 4 = x + 3, x \geq 1$$

Como los valores de $x < 1$ no están en el dominio de $g(x)$, tampoco pertenecen al dominio de $(f \circ g)(x)$.

b) Para determinar $(g \circ f)(x)$, sustituimos cada x de $g(x)$ por $f(x)$, que es $x^2 + 4$.

$$g(x) = \sqrt{x - 1}$$
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{(x^2 + 4) - 1} = \sqrt{x^2 + 3}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 19**

EJEMPLO 3 ▸ Dadas $f(x) = x - 3$ y $g(x) = x + 7$, determine

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(f \circ g)(2)$ **c)** $(g \circ f)(x)$ **d)** $(g \circ f)(2)$

Solución

a)
$$f(x) = x - 3$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = (x + 7) - 3 = x + 4$$

b) Determinamos $(f \circ g)(2)$ sustituyendo cada x de $(f \circ g)(x)$ por 2.

$$(f \circ g)(x) = x + 4$$
$$(f \circ g)(2) = 2 + 4 = 6$$

c)
$$g(x) = x + 7$$
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = (x - 3) + 7 = x + 4$$

d) Como $(g \circ f)(x) = x + 4$, $(g \circ f)(2) = 2 + 4 = 6$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 11**

En general, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ como vimos al final del ejemplo 1. En el ejemplo 3, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, pero esto se debió a las funciones específicas que se utilizaron.

Sugerencia útil

No confunda determinar el producto de dos funciones con determinar la función compuesta.

Producto de las funciones f y g: $(fg)(x)$ o $(f \cdot g)(x)$

Función compuesta de f con g: $(f \circ g)(x)$

Para indicar que se deben multiplicar las funciones f y g, se usa el signo de multiplicación (un punto) entre f y g. Para indicar que se debe determinar la función compuesta de f con g, se utiliza el signo de función compuesta (un pequeño círculo *vacío*).

2 Entender las funciones uno a uno

Considere estos dos conjuntos de pares ordenados:

$$A = \{(1, 2), (3, 5), (4, 6), (-2, 1)\}$$
$$B = \{(1, 2), (3, 5), (4, 6), (-2, 5)\}$$

Ambos conjuntos de pares ordenados, A y B, son funciones, ya que a cada valor de x le corresponde un único valor de y. En el conjunto A, a cada valor de y también le corresponde un único valor de x, como se muestra en la **figura 9.2**. En el conjunto B, no todos los valores de y tienen un único valor de x. En los pares ordenados $(3, 5)$ y $(-2, 5)$, el valor de y, 5, corresponde a dos valores de x, como se muestra en la **figura 9.3**.

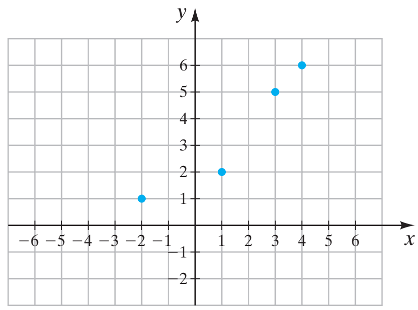


FIGURA 9.2

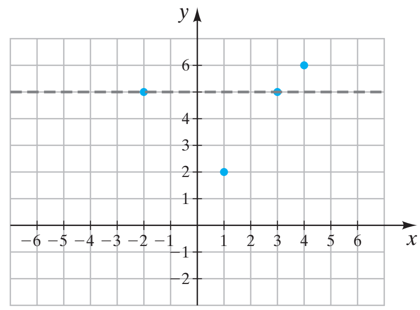


FIGURA 9.3

El conjunto de pares ordenados A es un ejemplo de una *función uno a uno* (o *inyectiva*). El conjunto de pares ordenados B no es una función uno a uno. En una **función uno a uno**, a cada valor del rango le corresponde un único valor del dominio. Así, si y es una función uno a uno de x, además de que a cada valor de x le corresponde un único valor de y (por la definición de función), también se cumple que a cada valor de y le corresponde un único valor de x.

Función uno a uno (inyectiva)

Una función es una **función uno a uno** si a cada valor del rango le corresponde exactamente un valor del dominio.

Para que una función sea uno a uno, su gráfica debe pasar no sólo la **prueba de la recta vertical** (con la cual se comprueba que es una función), sino también la **prueba de la recta horizontal** (que comprueba el criterio uno a uno).

Considere la función $f(x) = x^2$ (vea la **figura 9.4**). Observe que es una función, ya que su gráfica pasa la prueba de la recta vertical. Para cada valor de x existe un único valor de y. Ahora bien, ¿a cada valor de y también le corresponde un único valor de x? La respuesta es no, como se ilustra en la **figura 9.5**. Observe que para el valor de y que se indica existen dos valores de x, a saber, x_1 y x_2. Si limitáramos el dominio de $f(x) = x^2$ a valores de x mayores o iguales a 0, entonces a cada valor de x le correspondería un único valor de y, y a cada valor de y también le correspondería un único valor de x (vea la **figura 9.6**); por lo tanto, ésta sí sería una función uno a uno.

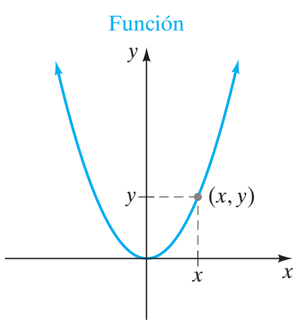


FIGURA 9.4

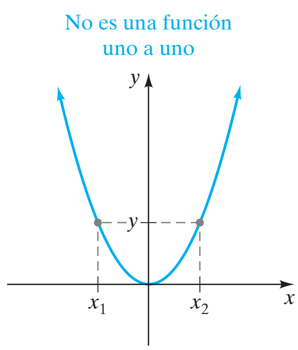


FIGURA 9.5

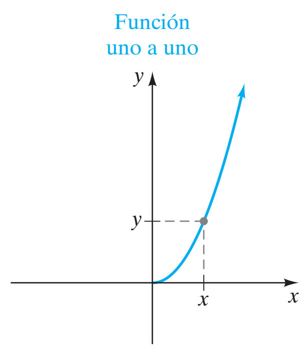


FIGURA 9.6

En la **figura 9.7**, las gráficas de (a) a (e) son funciones, ya que todas pasan la prueba de la recta vertical. Sin embargo, sólo las gráficas (a), (d) y (e) son funciones uno a uno, puesto que también pasan la prueba de la recta horizontal. La gráfica (f) no es una función y, por lo tanto, no puede ser una función uno a uno aunque pase la prueba de la recta horizontal.

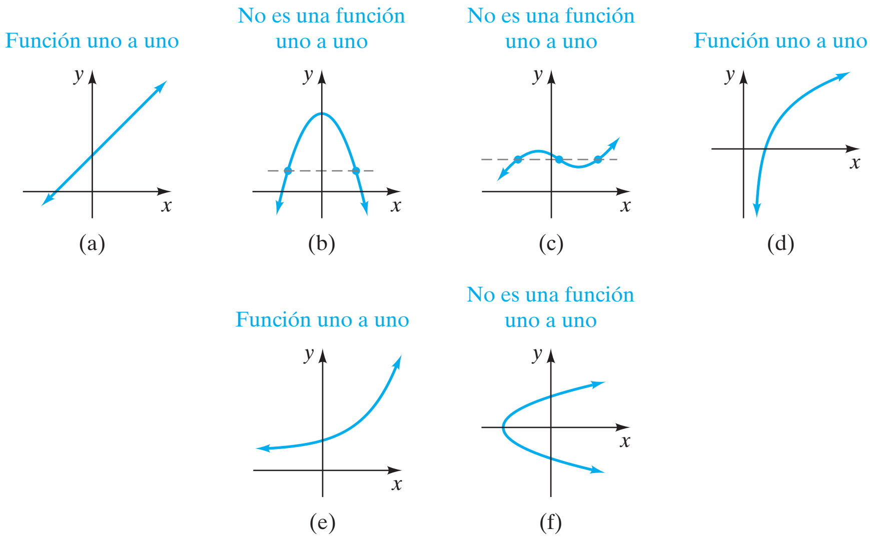


FIGURA 9.7

3 Determinar funciones inversas

Ahora que sabemos lo que son las funciones uno a uno, podemos hablar de las funciones inversas. **Sólo las funciones uno a uno pueden tener funciones inversas**. Si una función es uno a uno, su **función inversa** puede obtenerse intercambiando la primera coordenada con la segunda en cada par ordenado de la función. Así, cada par ordenado (x, y) de la función tendrá el par ordenado (y, x) en la función inversa. Por ejemplo,

Función: $\{(1, 4), (2, 0), (3, 7), (-2, 1), (-1, -5)\}$

Función inversa: $\{(4, 1), (0, 2), (7, 3), (1, -2), (-5, -1)\}$

Observe que el dominio de la función se convierte en el rango de la función inversa, y el rango de la función se transforma en el dominio de la función inversa.

Si graficamos los puntos de la función y los puntos de la función inversa (**figura 9.8**), vemos que éstos son simétricos respecto de la recta $y = x$.

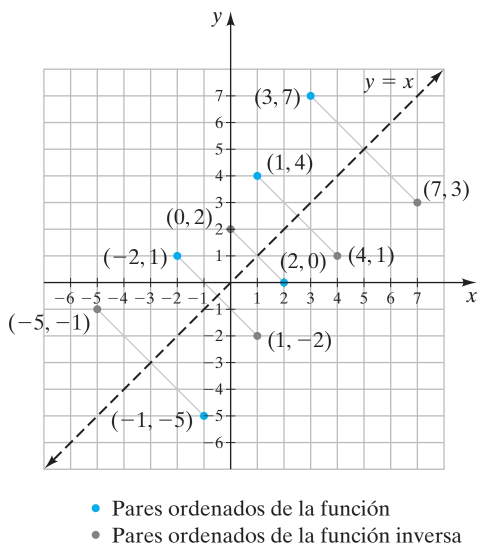


FIGURA 9.8

La notación $f^{-1}(x)$ representa la función inversa de la función $f(x)$. En la notación, el -1 *no* es un exponente; por lo tanto, $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$.

Función inversa

Si $f(x)$ es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (x, y), su **función inversa**, $f^{-1}(x)$, es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (y, x).

Cuando se grafican la función $f(x)$ y su función inversa $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes, $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son *simétricas respecto de la recta* $y = x$, como se muestra en la **figura 9.8** de la página 596.

Si una función uno a uno se da como una ecuación, su función inversa puede determinarse por medio del procedimiento siguiente.

Para determinar la función inversa de una función uno a uno

1. Reemplace $f(x)$ con y.
2. Intercambie las dos variables, x y y.
3. Despeje y en la ecuación.
4. Reemplace y con $f^{-1}(x)$ (esto proporciona la función inversa).

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 4

a) Determine la función inversa de $f(x) = 4x + 2$.

b) Grafique $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.

Solución **a)** Ésta es una función uno a uno; por lo tanto, seguiremos el procedimiento de cuatro pasos que se acaba de explicar.

$$f(x) = 4x + 2 \qquad \textit{Función original}$$

Paso 1 $$y = 4x + 2 \qquad \textit{Reemplazar f(x) con y.}$$

Paso 2 $$x = 4y + 2 \qquad \textit{Intercambiar x y y.}$$

Paso 3 $$x - 2 = 4y \qquad \textit{Despejar y.}$$

$$\frac{x-2}{4} = y$$

o $$y = \frac{x-2}{4}$$

Paso 4 $$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4} \qquad \textit{Reemplazar y con } f^{-1}(x).$$

b) A continuación se muestran tablas de valores para $f(x)$ y $f^{-1}(x)$; las gráficas correspondientes se ilustran en la **figura 9.9**.

x	$y = f(x)$
0	2
1	6

x	$y = f^{-1}(x)$
2	0
6	1

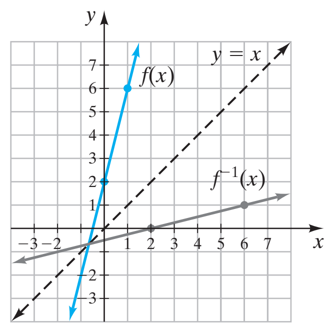


FIGURA 9.9

Observe la simetría de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ respecto de la recta $y = x$, y note que tanto el dominio como el rango de $f(x)$ y de $f^{-1}(x)$ son el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

Ahora resuelva el ejercicio 67

Cuando resolvimos ecuaciones con raíces cúbicas en el capítulo 7, elevamos al cubo ambos lados de la ecuación. Para resolver ecuaciones cúbicas elevamos cada lado de la ecuación a la potencia un tercio, que es equivalente a sacar la raíz cúbica de cada lado de la ecuación. Recuerde que, como se mencionó en ese capítulo, $\sqrt[3]{a^3} = a$ para cualquier número real a.

EJEMPLO 5

a) Determine la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.
b) Grafique $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.

Solución **a)** Ésta es una función uno a uno; por lo tanto, seguiremos el procedimiento de cuatro pasos para determinar su inversa.

	$f(x) = x^3 + 2$	*Función original*
Paso 1	$y = x^3 + 2$	*Reemplazar f(x) con y.*
Paso 2	$x = y^3 + 2$	*Intercambiar x y y.*
Paso 3	$x - 2 = y^3$	*Despejar y.*
	$\sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{y^3}$	*Sacar raíz cúbica de ambos lados.*
	$\sqrt[3]{x-2} = y$	
	o $y = \sqrt[3]{x-2}$	
Paso 4	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$	*Reemplazar y con $f^{-1}(x)$.*

b) A continuación se muestran las tablas de valores para $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

x	$y = f(x)$
−2	−6
−1	1
0	2
1	3
2	10

x	$y = f^{-1}(x)$
−6	−2
1	−1
2	0
3	1
10	2

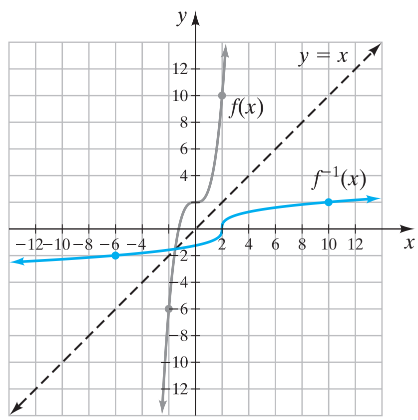


FIGURA 9.10

En la **figura 9.10**, se muestran las gráficas de $f(x)$ y de $f^{-1}(x)$. Observe que para cada punto (a, b) en la gráfica de $f(x)$, el punto (b, a) aparece en la gráfica de $f^{-1}(x)$. Por ejemplo, los puntos $(2, 10)$ y $(-2, -6)$, marcados en gris aparecen en la gráfica $f(x)$, y los puntos $(10, 2)$ y $(-6, -2)$, resaltados en color rojo, aparecen en la gráfica $f^{-1}(x)$.

Ahora resuelva el ejercicio 61

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

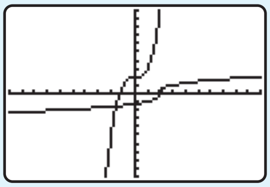
En el ejemplo 5 nos dieron $f(x) = x^3 + 2$, y determinamos que $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$. Las gráficas de estas dos funciones son simétricas respecto de la recta $y = x$, aunque esto podría no resultar evidente en una calculadora graficadora, tal como se ilustra en la **figura 9.11** donde se muestran ambas gráficas en la ventana estándar de una calculadora.

Esto se debe a que en las calculadoras el eje horizontal es mayor que el eje vertical, y ambos ejes tienen 10 marcas de división positivas y 10 negativas; en consecuencia, las gráficas aparecen distorsionadas. Sin embargo, muchas calculadoras tienen una característica para presentar las gráficas en una “ventana cuadrada”. Cuando se utiliza esta característica, la ventana sigue siendo

(*continúa en la página siguiente*)

rectangular, pero la distancia entre las marcas de división es más uniforme. Para activar esta característica en una calculadora TI-84 Plus, presione $\boxed{\text{ZOOM}}$ y luego seleccione la opción 5, ZSquare. La **figura 9.12** muestra las gráficas después de que se seleccionó esta opción. Una tercera ilustración de las gráficas puede obtenerse mediante $\boxed{\text{ZOOM}}$, opción 4, ZDecimal; esta opción hace que el eje x despliegue el intervalo -4.7 a 4.7, y el eje y el intervalo -3.1 a 3.1, como se muestra en la **figura 9.13**.

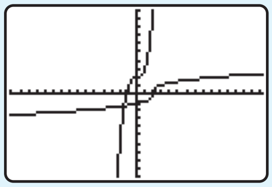
Ventana estándar



$-10, 10, 1, -10, 10, 1$

FIGURA 9.11

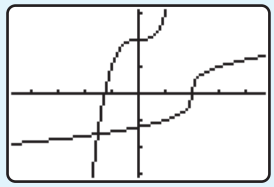
Ventana ZSquare



$\approx -15.2, \approx 15.2, 1, -10, 10, 1$

FIGURA 9.12

Ventana ZDecimal



$-4.7, 4.7, 1, -3.1, 3.1, 1$

FIGURA 9.13

4 Determinar la composición de una función y su inversa

Si dos funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son inversas una respecto de la otra, entonces $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

EJEMPLO 6 En el ejemplo 4 determinamos que para $f(x) = 4x + 2$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{4}$. Demuestre que

a) $(f \circ f^{-1})(x) = x$ **b)** $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

Solución

a) Para determinar $(f \circ f^{-1})(x)$, sustituya cada x de $f(x)$ por $f^{-1}(x)$.

$$f(x) = 4x + 2$$
$$(f \circ f^{-1})(x) = 4\left(\frac{x-2}{4}\right) + 2$$
$$= x - 2 + 2 = x$$

b) Para determinar $(f^{-1} \circ f)(x)$, sustituya cada x de $f^{-1}(x)$ por $f(x)$.

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 2}{4}$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = \frac{4x + 2 - 2}{4}$$
$$= \frac{4x}{4} = x$$

Por lo tanto, $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Ahora resuelva el ejercicio 77

EJEMPLO 7 En el ejemplo 5 determinamos que $f(x) = x^3 + 2$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$ son funciones inversas. Demuestre que

a) $(f \circ f^{-1})(x) = x$ **b)** $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

Solución

a) Para determinar $(f \circ f^{-1})(x)$, sustituya cada x de $f(x)$ por $f^{-1}(x)$.

$$f(x) = x^3 + 2$$
$$(f \circ f^{-1})(x) = (\sqrt[3]{x-2})^3 + 2$$
$$= x - 2 + 2 = x$$

b) Para determinar $(f^{-1} \circ f)(x)$, sustituya cada x de $f^{-1}(x)$ por $f(x)$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x - 2} \\ (f^{-1} \circ f)(x) &= \sqrt[3]{(x^3 + 2) - 2} \\ &= \sqrt[3]{x^3} = x \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 79

Como una función y su inversa "se anulan" entre ellas, la función compuesta de una función con su inversa tiene como resultado el valor dado en el dominio. Por ejemplo, para cualquier función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$, $(f^{-1} \circ f)(3) = 3$ y $(f \circ f^{-1})\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique cómo determinar $(f \circ g)(x)$ cuando le dan $f(x)$ y $g(x)$.

2. Explique cómo determinar $(g \circ f)(x)$ cuando le dan $f(x)$ y $g(x)$.

3. **a)** ¿Qué son las funciones uno a uno?
b) Explique cómo se puede determinar si una función es una función uno a uno.

4. ¿Todas las funciones tienen funciones inversas? Si no es así, ¿cuáles funciones sí tienen función inversa?

5. Considere el conjunto de pares ordenados $\{(3, 5), (4, 2), (-1, 3), (0, -2)\}$.
a) ¿Este conjunto de pares ordenados es una función? Explique.
b) ¿Esta función tiene una inversa? Explique.
c) Si esta función tiene inversa, indíquela. Explique cómo determinó su respuesta.

6. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inversas.
a) ¿A qué es igual $(f \circ g)(x)$?
b) ¿A qué es igual $(g \circ f)(x)$?

7. ¿Qué relación existe entre el dominio y el rango de una función, y el dominio y el rango de su función inversa?

8. ¿Cuál es el valor de $(f \circ f^{-1})(6)$? Explique.

Práctica de habilidades

Para cada par de funciones, determine **a)** $(f \circ g)(x)$, **b)** $(f \circ g)(4)$, **c)** $(g \circ f)(x)$ *y* **d)** $(g \circ f)(4)$.

9. $f(x) = x^2 + 1, g(x) = x + 2$

10. $f(x) = x^2 - 3, g(x) = x + 6$

11. $f(x) = x + 3, g(x) = x^2 + x - 4$

12. $f(x) = x + 2, g(x) = x^2 + 4x - 2$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x}, g(x) = 2x + 3$

14. $f(x) = \dfrac{2}{x}, g(x) = x^2 + 1$

15. $f(x) = 3x + 1, g(x) = \dfrac{3}{x}$

16. $f(x) = x^2 - 5, g(x) = \dfrac{4}{x}$

17. $f(x) = x^2 + 1, g(x) = x^2 + 5$

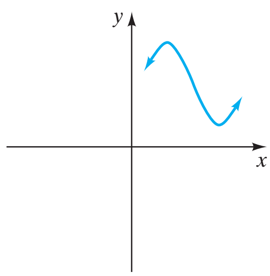
18. $f(x) = x^2 - 4, g(x) = x^2 + 3$

19. $f(x) = x - 4, g(x) = \sqrt{x + 5}, x \geq -5$

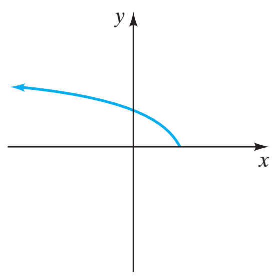
20. $f(x) = \sqrt{x + 6}, x \geq -6, g(x) = x + 7$

En los ejercicios 21 a 42, determine si cada función es uno a uno.

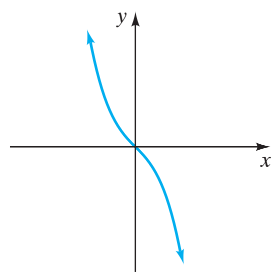
21.



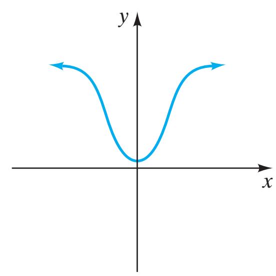
22.



23.



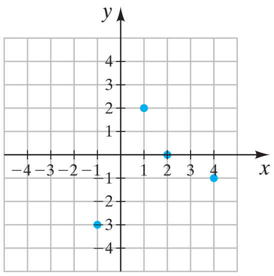
24.

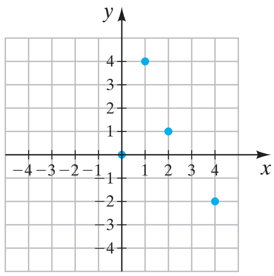


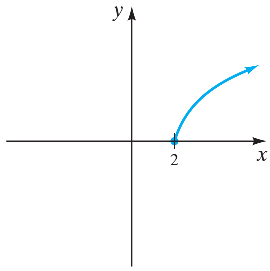
25. $\{(2, 4), (3, -7), (5, 3), (-6, 0)\}$
26. $\{(-4, 2), (2, 3), (4, 1), (0, 4)\}$
27. $\{(-4, 2), (5, 3), (0, 2), (4, 8)\}$
28. $\{(0, 5), (1, 4), (-3, 5), (4, 2)\}$
29. $y = 2x + 5$
30. $y = 3x - 8$
31. $y = x^2 - 1$
32. $y = -x^2 + 3$
33. $y = x^2 - 2x + 5$
34. $y = x^2 - 2x + 6, x \geq 1$
35. $y = x^2 - 9, x \geq 0$
36. $y = x^2 - 9, x \leq 0$
37. $y = \sqrt{x}$
38. $y = -\sqrt{x}$
39. $y = |x|$
40. $y = -|x|$
41. $y = \sqrt[3]{x}$
42. $y = x^3$

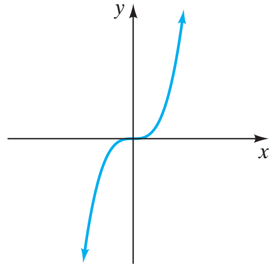
En los ejercicios del 43 al 48, determine el dominio y el rango de $f(x)$ y de $f^{-1}(x)$.

43. $\{(4, 0), (8, 9), (2, 7), (-1, 6), (-2, 4)\}$
44. $\left\{(-2, -3), (-4, 0), (5, 3), (6, 2), \left(2, \frac{1}{2}\right)\right\}$

45.


46.


47.


48.


Para cada función, **a)** *determine si es uno a uno;* **b)** *si es uno a uno, determine su función inversa.*

49. $f(x) = x - 2$
50. $g(x) = x + 5$
51. $h(x) = 4x$
52. $k(x) = 2x - 7$
53. $p(x) = 3x^2$
54. $r(x) = |x|$
55. $t(x) = x^2 + 3$
56. $m(x) = -x^2 + x + 8$
57. $g(x) = \dfrac{1}{x}$
58. $h(x) = \dfrac{5}{x}$
59. $f(x) = x^2 + 10$
60. $g(x) = x^3 + 9$
61. $g(x) = x^3 - 6$
62. $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$
63. $g(x) = \sqrt{x + 2}, x \geq -2$
64. $f(x) = x^2 - 3, x \geq 0$
65. $h(x) = x^2 - 4, x \geq 0$
66. $h(x) = |x|$

Para cada función uno a uno, **a)** *determine $f^{-1}(x)$, y* **b)** *grafique $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.*

67. $f(x) = 2x + 8$
68. $f(x) = -3x + 6$
69. $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$
70. $f(x) = -\sqrt{x}, x \geq 0$
71. $f(x) = \sqrt{x - 1}, x \geq 1$
72. $f(x) = \sqrt{x + 4}, x \geq -4$
73. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
74. $f(x) = \sqrt[3]{x + 3}$
75. $f(x) = \dfrac{1}{x}, x > 0$
76. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Para cada par de funciones inversas, demuestre que $(f \circ f^{-1})(x) = x$, y que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

77. $f(x) = x - 8, f^{-1}(x) = x + 8$
78. $f(x) = 7x + 3, f^{-1}(x) = \dfrac{x - 3}{7}$
79. $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 3, f^{-1}(x) = 2x - 6$
80. $f(x) = -\dfrac{1}{3}x + 2, f^{-1}(x) = -3x + 6$
81. $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}, f^{-1}(x) = x^3 + 2$
82. $f(x) = \sqrt[3]{x + 9}, f^{-1}(x) = x^3 - 9$
83. $f(x) = \dfrac{3}{x}, f^{-1}(x) = \dfrac{3}{x}$
84. $f(x) = \sqrt{x + 5}, f^{-1}(x) = x^2 - 5, x \geq 0$

Resolución de problemas

85. ¿$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para todos los valores de x? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.

86. Considere las funciones $f(x) = \sqrt{x+5}, x \geq -5$ y $g(x) = x^2 - 5, x \geq 0$.

a) Demuestre que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para $x \geq 0$.

b) Explique por qué es necesario estipular que $x \geq 0$ para que la parte **a)** sea verdadera.

87. Considere las funciones $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

a) Demuestre que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

b) ¿Cuáles son los dominios de $f(x)$, $g(x)$, $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$? Explique.

88. Para la función $f(x) = x^3$, $f(2) = 2^3 = 8$. Explique por qué $f^{-1}(8) = 2$.

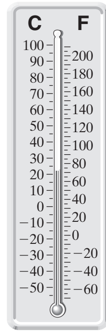
89. Para la función $f(x) = x^4$, $x > 0$, $f(2) = 16$. Explique por qué $f^{-1}(16) = 2$.

90. La función $f(x) = 12x$ convierte pies, x, en pulgadas. Determine la función inversa para convertir pulgadas en pies. ¿Qué representan x y $f^{-1}(x)$ en la función inversa?

91. La función $f(x) = 3x$ convierte yardas, x, en pies. Determine la función inversa para convertir pies en yardas. ¿Qué representan x y $f^{-1}(x)$ en la función inversa?

92. La función $f(x) = \dfrac{22}{15}x$ convierte millas por hora, x, en pies por segundo. Determine la función inversa para convertir pies por segundo en millas por hora.

93. La función $f(x) = \dfrac{5}{9}(x - 32)$ convierte grados Fahrenheit, x, en grados Celsius. Determine la función inversa para convertir grados Celsius en grados Fahrenheit.



94. a) ¿La función $f(x) = |x|$ tiene inversa? Explique.

b) Si el dominio está limitado a $x \geq 0$, ¿la función tiene inversa? Explique.

c) Determine la función inversa de $f(x) = |x|$, $x \geq 0$.

Composición de funciones *En los ejercicios del 95 al 98, se dan las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Determine la composición $(f \circ g)(x)$. Para la función composición, ¿qué representa x y qué representa $(f \circ g)(x)$?*

95. $f(x) = 16x$ convierte libras, x, en onzas, $g(x) = 28.35x$ convierte onzas, x, en gramos.

96. $f(x) = 2000x$ convierte toneladas x, a libras, $g(x) = 16x$ convierte libras, x, a onzas.

97. $f(x) = 3x$ convierte yardas, x, a pies, $g(x) = 0.305x$ convierte pies, x, a metros.

98. $f(x) = 1760x$ convierte millas, x, a yardas, $g(x) = 0.915x$ convierte yardas, x, a metros.

Utilice su calculadora graficadora para determinar si las funciones siguientes son inversas.

99. $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{4}{3}$

100. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{4 - 2x}$

101. $f(x) = x^3 - 12$, $g(x) = \sqrt[3]{x + 12}$

102. $f(x) = x^5 + 5$, $g(x) = \sqrt[5]{x - 5}$

Retos

103. Área Cuando se arroja una piedra a un estanque, el círculo (onda) que se forma en el agua se expande conforme pasa el tiempo. El área del círculo en expansión puede determinarse mediante la fórmula $A = \pi r^2$. El radio del círculo, r, en pies, es una función del tiempo, t, en segundos. Suponga que la función es $r(t) = 2t$.

a) Determine el radio del círculo 3 segundos después de arrojar la piedra.

b) Determine el área del círculo 3 segundos después de arrojar la piedra.

c) Exprese el área como una función del tiempo, determinando $A \circ r$.

d) Mediante la función que encontró en la parte **c)**, determine el área del círculo 3 segundos después de arrojar la piedra.

e) ¿Las respuestas a las partes **b)** y **c)** coinciden? Si no es así, explique por qué.

104. **Área de la superficie** El área de la superficie, S, de un globo esférico de radio r, en pulgadas, se determina con $S(r) = 4\pi r^2$. Si el globo se está inflando con una máquina a una velocidad constante, el radio del globo es una función del tiempo. Suponga que esta función es $r(t) = 1.2t$, donde t son segundos.

a) Determine el radio del globo al cabo de 2 segundos.

b) Determine el área de la superficie a los 2 segundos.

c) Exprese el área de la superficie como una función del tiempo, determinando $S \circ r$.

d) Mediante la función que determinó en la parte **b)**, calcule el área de la superficie al cabo de 2 segundos.

e) ¿Las respuestas a las partes **b)** y **d)** coinciden? Si no es así, explique por qué.

Actividad en grupo

Analicen y respondan en grupo el ejercicio 105.

105. Consideren la función $f(x) = 2^x$. Éste es un ejemplo de una *función exponencial*, de la cual hablaremos en la sección siguiente.

a) Grafiquen esta función sustituyendo valores para x y determinando los valores correspondientes de $f(x)$.

b) ¿Ustedes creen que esta función tenga inversa? Expliquen su respuesta.

c) Con la gráfica obtenida en la parte **a)**, tracen la función inversa, $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.

d) Expliquen cómo obtuvieron la gráfica de $f^{-1}(x)$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] **106.** Divide $\left|\frac{-9}{4}\right| \div \left|\frac{-4}{9}\right|$.

[3.5] **107.** Determine, en la forma general, la ecuación de una recta que pase por $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ y sea paralela a la gráfica de $2x + 3y - 9 = 0$.

[6.3] **108.** Simplifique $\dfrac{\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}}{\frac{x}{6}}$.

[6.4] **109.** Despeje p en la fórmula $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ para p.

[8.1] **110.** Complete el cuadrado para resolver la ecuación $x^2 + 2x - 10 = 0$.

9.2 Funciones exponenciales

1 Graficar funciones exponenciales.

2 Resolver aplicaciones de funciones exponenciales.

1 Graficar funciones exponenciales

Con frecuencia leemos que ciertas cosas crecen exponencialmente. Por ejemplo, es probable que alguna vez haya leído que la población mundial tiene un crecimiento exponencial, o que el uso del correo electrónico está creciendo de manera exponencial. ¿Qué quiere decir esto? La gráfica de la **figura 9.14** muestra el crecimiento de la población mundial; la gráfica de la **figura 9.15** ilustra las ventas de dispositivos manuales “inteligentes”. Como indican sus curvas, ambas gráficas tienen la misma forma general, y las dos son funciones exponenciales que crecen con rapidez.

En la función cuadrática $f(x) = x^2$, la variable es la base y el exponente es constante. En la función $f(x) = 2^x$, la constante es la base y el exponente es variable. La función $f(x) = 2^x$ es un ejemplo de una *función exponencial*, cuya definición damos en la página 604.

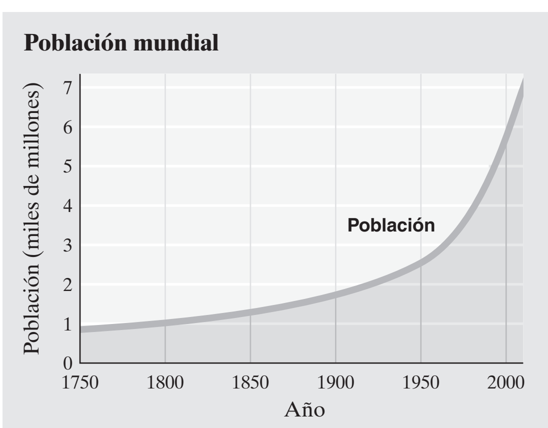


FIGURA 9.14

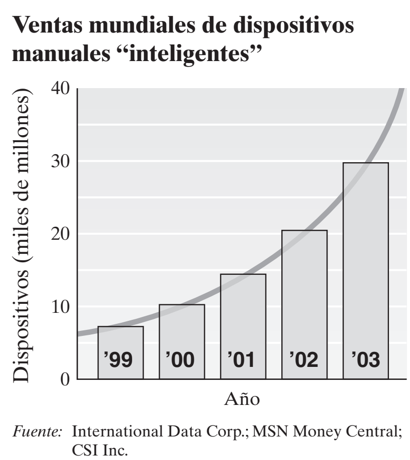


FIGURA 9.15

Función exponencial

Para cualquier número real $a > 0$ y $a \neq 1$,

$$f(x) = a^x$$

es una **función exponencial**.

Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde a es un número real positivo distinto de 1. Observe que la variable está en el exponente.

Ejemplos de funciones exponenciales

$$f(x) = 2^x, \qquad g(x) = 5^x, \qquad h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Como $y = f(x)$, las funciones de la forma $y = a^x$ también son funciones exponenciales. Las funciones exponenciales pueden graficarse seleccionando valores para x, determinando los correspondientes valores de y [o $f(x)$], y trazando los puntos.

Antes de graficar funciones exponenciales, analicemos algunas de sus características.

Gráficas de funciones exponenciales

Para toda función exponencial de la forma $y = a^x$ o $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

1. El dominio de la función es $(-\infty, \infty)$.
2. El rango de la función es $(0, \infty)$.
3. La gráfica pasa por los puntos $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$ y $(1, a)$.

En casi todos los casos puede trazarse una razonablemente buena gráfica exponencial a partir de los tres puntos listados en el paso 3. Cuando $a > 1$, vea el ejemplo 1, la gráfica se vuelve casi horizontal a la izquierda de $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$ y casi vertical a la derecha de $(1, a)$. Cuando $0 < a < 1$, vea el ejemplo 2, la gráfica es casi horizontal a la derecha de $(1, a)$ y casi vertical a la izquierda de $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$.

EJEMPLO 1 Grafique la función exponencial $y = 2^x$; determine el dominio y el rango de la función.

Solución La función es de la forma $y = a^x$, donde $a = 2$. Primero construimos una tabla de valores; en ella, los tres puntos listados en el paso 3 se muestran en rojo.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

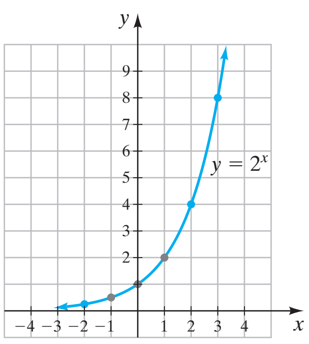


FIGURA 9.16

Ahora trazamos estos puntos y los conectamos mediante una curva suave (**figura 9.16**). Los tres pares ordenados (de color gris en la tabla), también están señalados en la gráfica.

$$\text{Dominio: } \mathbb{R}$$
$$\text{Rango: } \{y | y > 0\}$$

El dominio de esta función es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$. El rango es el conjunto de valores mayores que 0. Si analiza la ecuación $y = 2^x$, se dará cuenta de que y siempre debe ser positivo, ya que 2 es positivo.

Ahora resuelva el ejercicio 7

EJEMPLO 2 Grafique $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ determine el dominio y el rango de la función.

Solución Esta función es de la forma $y = a^x$, donde $a = \frac{1}{2}$. Construimos una tabla de valores para trazar la curva (**figura 9.17**).

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

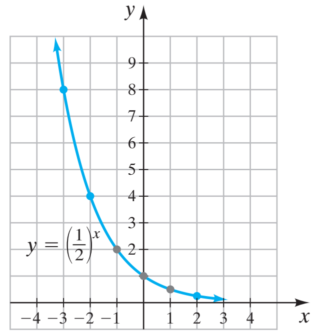


FIGURA 9.17

El dominio es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$. El rango es $\{y|y > 0\}$.

Ahora resuelva el ejercicio 13

Observe que las gráficas en las **figuras 9.16** y **9.17** son gráficas de funciones uno a uno. *Cuando $a > 1$, las gráficas de funciones de la forma $y = a^x$, son similares a la de la* **figura 9.16**; *cuando* $0 < a < 1$, *son similares a la de la* **figura 9.17**. Observe que $y = 1^x$ no es una función uno a uno, así que no la tomaremos en cuenta en nuestro análisis de funciones exponenciales.

¿A qué será similar la gráfica de $y = 2^{-x}$? Recuerde que 2^{-x} significa $\frac{1}{2^x}$ o $\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Por lo tanto, la gráfica de $y = 2^{-x}$ será idéntica a la gráfica de la **figura 9.17**. Ahora considere la ecuación $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$. Esta ecuación puede rescribirse como $y = 2^x$, ya que $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \left(\frac{2}{1}\right)^x = 2^x$. Así, la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ será idéntica a la de la **figura 9.16**.

CÓMO USAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

La **figura 9.18** muestra la gráfica de la función $y = 2^x$, tal como se vería en la ventana estándar de una calculadora graficadora. En este capítulo, en ocasiones utilizaremos ecuaciones como $y = 2000(1.08)^x$. Si tuviera que graficar esta función en la ventana estándar de una calculadora, no vería gráfica alguna. ¿Puede explicar por qué? Observando la función, ¿puede determinar dónde se da la intersección con el eje y? Para determinarlo, sustituya x por 0; entonces se dará cuenta de que la intersección con el eje y está en $2000(1.08)^0 = 2000(1) = 2000$. En la **figura 9.19** se muestra la gráfica de $y = 2000(1.08)^x$.

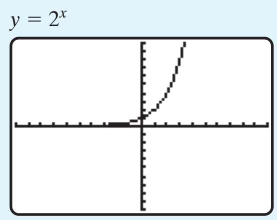
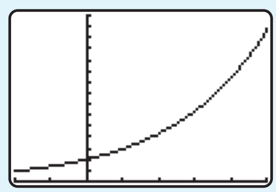


FIGURA 9.18



$-10, 25, 5, 0, 15000, 1000$

FIGURA 9.19

EJEMPLO 3 **Aumento de centavos** Jennifer Hewlett le dijo a su hermanito que si hacia su tarea, ella le daría 2 centavos la primera semana y duplicaría la cantidad cada semana, durante las siguientes 10 semanas. El número de centavos que recibiría su hermanito en cualquier semana, w, puede determinarse mediante la función $n(w) = 2^w$. Determine el número de centavos que Jennifer daría a su hermano en la semana 8.

Solución Al evaluar 2^8 en una calculadora, podemos determinar que en la semana 8, Jennifer le daría a su hermano 256 centavos, o \$2.56.

Ahora resuelva el ejercicio 35

2 Resolver aplicaciones de funciones exponenciales

Las funciones exponenciales se suelen utilizar para describir el incremento y el decremento de ciertas sustancias. Los cuatro ejemplos siguientes son ilustraciones de funciones exponenciales.

EJEMPLO 4 ▸ Valor de un jeep Ronald Yates pagó \$22,000 por un jeep nuevo. Suponga que el valor del jeep se deprecia a una tasa de 20% al año. Por lo tanto, dentro de un año, el valor del jeep será 80% de su valor actual. Es decir, dentro de un año su valor será \$22,000(0.80); dentro de dos años, su valor será \$22,000(0.80)(0.80) = \$22,000$(0.80)^2$, y así sucesivamente. Por consiguiente, la fórmula para determinar el valor del jeep en un momento dado es

$$v(t) = 22{,}000(0.80)^t$$

donde t es el tiempo en años. Determine el valor del jeep **a)** dentro de un año, y **b)** dentro de 5 años.

Solución

a) Para determinar el valor que tendrá el jeep dentro de un año, sustituya t por 1.

$$\begin{aligned} v(t) &= 22{,}000(0.80)^t \\ v(1) &= 22{,}000(0.80)^1 && \text{Sustituir } t \text{ por 1.} \\ &= 17{,}600 \end{aligned}$$

Dentro de un año, el valor del jeep será de \$17,600.

b) Para determinar el valor que tendrá el jeep dentro de 5 años, sustituya t por 5.

$$\begin{aligned} v(t) &= 22{,}000(0.80)^t \\ v(5) &= 22{,}000(0.80)^5 && \text{Sustituir } t \text{ por 5.} \\ &= 22{,}000(0.32768) \\ &= 7208.96 \end{aligned}$$

Dentro de cinco años, el valor del jeep será de \$7208.96.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 49**

EJEMPLO 5 ▸ Interés compuesto En los primeros capítulos se mencionó la *fórmula del interés compuesto*, $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$. Cuando el interés se capitaliza o compone de forma periódica (cada año, cada mes, cada trimestre), esta fórmula puede usarse para determinar el monto o saldo, A.

En la fórmula, r es la tasa de interés, p es el capital, n es el número de periodos de capitalización por año y t es el número de años. Suponga que se invierten \$10,000 a 5% de interés, en una cuenta que se capitaliza trimestralmente durante 6 años. Determine el saldo en la cuenta al cabo de 6 años.

Solución **Entienda el problema** Se nos ha dicho que el capital inicial, p, es de \$10,000; también que la tasa de interés, r, es 5%. Y como el interés se capitaliza cada trimestre, el número de periodos de capitalización por año, n, es 4. El dinero se invierte durante 6 años, por lo tanto, t es 6.

Traduzca Ahora sustituimos estos valores en la fórmula.

$$\begin{aligned} A &= p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \\ &= 10{,}000\left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^{4(6)} \end{aligned}$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} &= 10{,}000(1 + 0.0125)^{24} \\ &= 10{,}000(1.0125)^{24} \\ &\approx 10{,}000(1.347351) && \text{Obtenido con una calculadora.} \\ &\approx 13{,}473.51 \end{aligned}$$

Responda Después de 6 años, los \$10,000 originales habrán crecido a casi \$13,473.51.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 41**

EJEMPLO 6 ▸ **Fechado con carbono 14** Los científicos utilizan el carbono 14 para calcular la edad de fósiles y cualesquiera otros objetos. La fórmula que se emplea es

$$A = A_0 \cdot 2^{-t/5600}$$

donde A_0 representa la cantidad de carbono 14 cuando el fósil se formó, y A representa la cantidad de carbono 14 que contiene después de t años. Si al momento de la formación del fósil había 500 gramos de carbono 14, ¿cuántos gramos contendrá 2000 años después?

Solución **Entienda el problema** Cuando el fósil se formó, había en él 500 gramos de carbono 14; por lo tanto, $A_0 = 500$. Para determinar cuántos gramos de carbono 14 habrá después de 2000 años, sustituimos t por 2000 en la fórmula.

Traduzca

$$\begin{aligned} A &= A_0 \cdot 2^{-t/5600} \\ &= 500(2)^{-2000/5600} \end{aligned}$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} &\approx 500(0.7807092) \quad \text{Obtenido con una calculadora.} \\ &\approx 390.35 \text{ gramos} \end{aligned}$$

Responda Después de 2000 años, en el fósil habrá alrededor de 390.35 gramos de los 500 gramos de carbono 14 originales.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 43**

EJEMPLO 7 ▸ **Primas por seguro de salud** En Estados Unidos, las primas por seguro de salud se han elevado a partir de 2000. La gráfica en la **figura 9.20** muestra las primas por seguro de salud de 2000 a 2005.

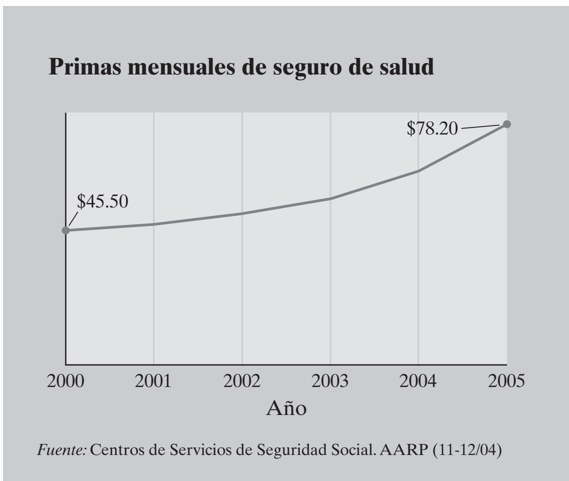


FIGURA 9.20

Una función exponencial que se aproxima mucho a esta curva es $f(t) = 44.584(1.11)^t$. En esta función, $f(t)$ es la prima mensual y t es el número de años a partir de 2000. Suponga que las primas de seguro de salud continúan aumentando como en el pasado. Utilice esta función para aproximar las primas mensuales por seguro de salud en **a)** 2006 y **b)** 2010.

Solución. **a)** **Entienda el problema** En esta función, t es años a partir de 2000. El año 2006 se representaría con $t = 6$, ya que 2006 es 6 años después de 2000. Para determinar la prima mensual en 2006, necesitamos evaluar la función para $t = 6$.

Traduzca y realice los cálculos

$$\begin{aligned} f(t) &= 44.584(1.11)^t \\ f(6) &= 44.584(1.11)^6 \approx \$83.39 \end{aligned}$$

Obtenido con una calculadora.

Responda Por lo tanto, la prima mensual en 2006 sería alrededor de \$83.39.

b) Como 2010 es 10 años después de 2000, para determinar la prima mensual necesitamos evaluar la función para $t = 10$.

$$f(t) = 44.584(1.11)^t$$
$$f(10) = 44.584(1.11)^{10} \approx \$126.59 \quad \text{Obtenido con una calculadora.}$$

Responda En consecuencia, la prima mensual en 2010 sería alrededor de \$126.59.

Ahora resuelva el ejercicio 53

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué son las funciones exponenciales?
2. Considere la función exponencial $y = 2^x$.
   a) ¿Qué le sucede a y conforme x crece?
   b) ¿y puede valer 0? Explique.
   c) ¿El valor de y puede ser negativo? Explique.
3. Considere la función exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
   a) ¿Qué le sucede a y conforme x crece?
   b) ¿El valor de y puede ser 0? Explique.
   c) ¿El valor de y puede ser negativo? Explique.
4. Considere la función exponencial $y = 2^{-x}$. Escriba una función exponencial equivalente a la anterior, pero que no tenga signo negativo en el exponente. Explique cómo obtuvo su respuesta.
5. Considere las ecuaciones $y = 2^x$ y $y = 3^x$.
   a) ¿Sus gráficas tienen la misma intersección con el eje y, o ésta es distinta en cada caso? Determine la intersección con el eje y en cada caso.
   b) Compare las gráficas de las dos funciones, ¿cómo son?
6. Considere las ecuaciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
   a) ¿Sus gráficas tienen la misma intersección con el eje y, o ésta es distinta en cada caso? Determine la intersección con el eje y en cada caso.
   b) Compare las gráficas de las dos funciones, ¿cómo son?

Práctica de habilidades

Grafique cada función exponencial.

7. $y = 2^x$
8. $y = 3^x$
9. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
10. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
11. $y = 4^x$
12. $y = 5^x$
13. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
14. $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
15. $y = 3^{-x}$
16. $y = 4^{-x}$
17. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$
18. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$
19. $y = 2^{x-1}$
20. $y = 2^{x+1}$
21. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$
22. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$
23. $y = 2^x + 1$
24. $y = 2^x - 1$
25. $y = 3^x - 1$
26. $y = 3^x + 2$

Resolución de problemas

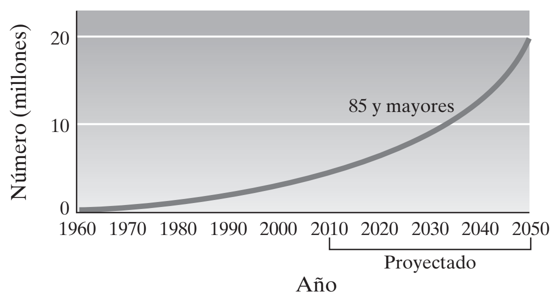
27. Ya antes se dijo que, para funciones exponenciales $f(x) = a^x$, el valor de a no puede ser igual a 1.
   a) Cuando $a = 1$, ¿cómo se ve la gráfica de $f(x) = a^x$?
   b) Cuando $a = 1$, ¿$f(x) = a^x$ es una función?
   c) Cuando $a = 1$, ¿$f(x) = a^x$ tiene función inversa? Explique su respuesta.
28. Compare las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^x + k$, $k > 0$, ¿cómo son?
29. Compare las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^x - k$, $k > 0$, ¿cómo son?
30. Compare las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^{x+1}$, cuando $a > 1$; ¿cómo son?
31. Compare las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^{x+2}$, cuando $a > 1$; ¿cómo son?
32. a) La función $y = x^\pi$, ¿es una función exponencial? Explique.
   b) ¿$y = \pi^x$ es una función exponencial? Explique.

33. Crecimiento poblacional La gráfica siguiente muestra el crecimiento de la población de personas de 85 y más años en Estados Unidos, para los años de 1960 a 2000 y la proyección hasta 2050. La función exponencial que aproxima bien a esta gráfica es

$$f(t) = 0.592(1.042)^t$$

En esta función, $f(t)$ es la población, en millones, de personas de 85 y más años y t es el número de años desde 1960. Si esta tendencia continúa, utilice esta función para estimar el número de personas de 85 o más años en Estados Unidos en **a)** 2060, **b)** 2100.

Población en Estados Unidos de 85 años o más



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos y proyecciones, Ciudadanos mayores 2004, www.agingstats.gov

34. Población mundial La población mundial ha crecido de forma exponencial desde 1650. La función exponencial que aproxima bien la población mundial desde 1650 y con proyección a 2015 es

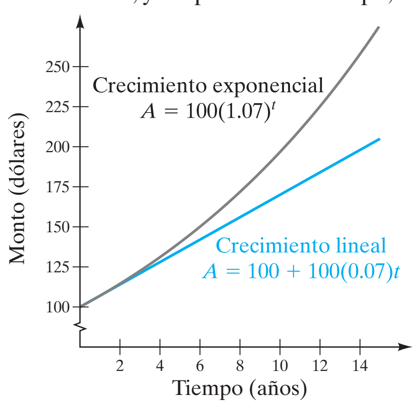
$$f(t) = \frac{1}{2}(2.718)^{0.0072t}$$

En esta función, $f(t)$ es la población mundial, en miles de millones de personas, y t es el número de años contados a partir de 1650. Si continúa esta tendencia, estime la población mundial en **a)** 2010. **b)** 2015.

35. Duplicación Si inicia con \$2 y cada día duplica la cantidad del día anterior, durante 9 días; determine la cantidad el día 9.

36. Duplicación Si inicia con \$2 y cada día duplica la cantidad del día anterior durante 12 días, determine la cantidad el día 12.

37. Interés simple y compuesto La gráfica siguiente muestra el crecimiento lineal de \$100 invertidos a 7% de interés simple, y el crecimiento exponencial de la misma cantidad invertida a 7% de interés compuesto anualmente. En las fórmulas, A representa la cantidad, y t representa el tiempo, en años.



a) Utilice la gráfica para calcular el tiempo de duplicación para \$100 invertidos a 7% de interés simple.

b) Calcule el tiempo de duplicación para \$100 invertidos a 7% de interés compuesto, capitalizable cada año.

c) Calcule la diferencia entre los montos resultante después de 10 años sobre una cantidad de \$100 invertida en cada método.

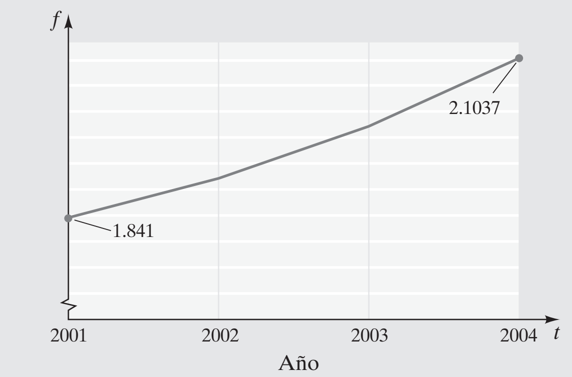
d) En Estados Unidos, casi todos los bancos capitalizan el interés diariamente en lugar de hacerlo cada año. ¿Qué efecto tiene esto sobre el monto total? Explique.

38. Deuda por crédito al consumidor La gráfica siguiente muestra la deuda por crédito al consumidor, en billones de dólares, durante los años 2001 a 2004. La función exponencial que aproxima bien a estos datos es

$$f(t) = 1.841(1.045)^t$$

En esta función, $f(t)$ es la deuda por crédito al consumidor, en billones de dólares, y t es el número de años a partir de 2001. Si esta tendencia continúa, utilice la función para estimar la deuda por crédito al consumidor en **a)** 2007. **b)** 2011

Deuda por créditos al consumidor (billones de dólares)



Fuente: www.federalreserve.gov/releases (con base en dólares de 2004)

39. Bacterias en una placa de Petri Se colocan cinco bacterias en una placa de Petri. La población se triplica diariamente. La fórmula para calcular el número de bacterias que hay en la placa el día t es

$$N(t) = 5(3)^t$$

donde t es el número de días, contados a partir de que se colocaron las bacterias en la placa. ¿Cuántas bacterias habrá en la caja 2 días después que se colocaron las cinco bacterias en la placa?

40. Bacterias en una placa de Petri Consulte el ejercicio 39. ¿Cuántas bacterias habrá en la placa 6 días después de que se colocaron cinco bacterias en ella?

41. Interés compuesto Si Don Gecewicz invierte \$5000 a 6% de interés capitalizable cada trimestre, determine el monto que tendrá después de 4 años (vea el ejemplo 5).

42. Interés compuesto Si Don Treadwell invierte \$8000 a 4% de interés capitalizable cada trimestre, determine el monto que tendrá después de 5 años.

43. Fechado con carbono 14 Si en el hueso de cierto animal había originalmente 12 gramos de carbono 14, ¿cuánto quedará de este elemento al cabo de 1000 años? Utilice $A = A_0 \cdot 2^{-t/5600}$ (vea el ejemplo 6).

44. Fechado con carbono 14 Tim Jonas encontró un fósil en un sitio arqueológico. Si originalmente en este fósil había 60 gramos de carbono 14, ¿cuánto quedará del elemento al cabo de 10,000 años?

45. Sustancia radiactiva La cantidad de sustancia radiactiva presente, en gramos, en el instante t, en años, está dada por la fórmula $y = 80(2)^{-0.4t}$. Determine el número de gramos presentes después de **a)** 10 años, **b)** 100 años.

46. Sustancia radiactiva La cantidad de sustancia radiactiva, en gramos, en el instante t, en años, la da la fórmula $y = 20(3)^{-0.6t}$. Determine el número de gramos presentes después de 3 años.

47. Población La población esperada a futuro en Ackworth, que ahora tiene 2000 residentes, puede aproximarse mediante la fórmula $y = 2000(1.2)^{0.1t}$, donde t es el número de años a partir de hoy. Determine cuántos habitantes tendrá la ciudad dentro de **a)** 10 años, **b)** 50 años.

48. Población La población futura esperada de Antwerp, que actualmente tiene 6800 residentes, puede aproximarse mediante la fórmula $y = 6800(1.4)^{-0.2t}$, donde t es el número de años a partir de hoy. Determine cuántos habitantes tendrá la ciudad dentro de 30 años.

49. Valor de un automóvil deportivo El costo de un automóvil deportivo nuevo es de \$24,000. Si se deprecia a una tasa de 18% anual, su valor dentro de t años puede calcularse mediante la fórmula

$$V(t) = 24{,}000(0.82)^t$$

Determine el valor que tendrá el automóvil deportivo dentro de 4 años.

50. Valor de un vehículo todo terreno El costo de un vehículo todo terreno es de \$6200. Si se deprecia a una tasa de 15% por año, su valor dentro de t años puede calcularse mediante la fórmula

$$V(t) = 6200(0.85)^t$$

Determine el valor que tendrá el vehículo todo terreno dentro de 10 años.

51. Uso del agua El estadounidense promedio usó alrededor de 580,000 galones de agua en 2005. Suponga que cada año, a partir de 2005, el estadounidense promedio es capaz de reducir su consumo de agua en 5%. Entonces, la cantidad de agua que utilizará en t años a partir de 2005, puede determinarse mediante la fórmula $A = 580{,}000(0.95)^t$.

a) Explique por qué esta fórmula puede usarse para determinar la cantidad de agua utilizada por el estadounidense promedio.

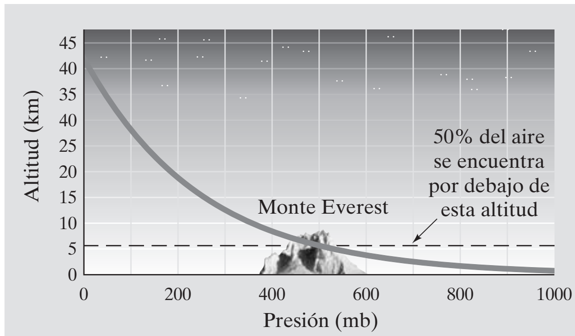
b) ¿Cuál sería el promedio de consumo de agua en el año 2009?

52. Aluminio reciclado Actualmente, cada año se reciclan casi $\frac{2}{3}$ de todas las latas de aluminio, mientras que $\frac{1}{3}$ se envía a depósitos de basura. El aluminio reciclado se utiliza para fabricar nuevas latas. En Estados Unidos, en 2004, se usaron alrededor de 190,000,000 de latas de aluminio. Con la fórmula $A = 190{,}000{,}000\left(\frac{2}{3}\right)^n$. puede calcularse el número de latas fabricadas con aluminio reciclado, n años a partir de 2004.

a) Explique por qué la fórmula puede usarse para calcular el número de latas, n años a partir de 2004, fabricadas con el aluminio reciclado.

b) ¿Cuántas latas se fabricarán en 2011 con el aluminio reciclado en 2004?

53. Presión atmosférica La presión atmosférica varía según la altura. Cuanto mayor sea la altura menor será la presión, como se muestra en la gráfica siguiente.



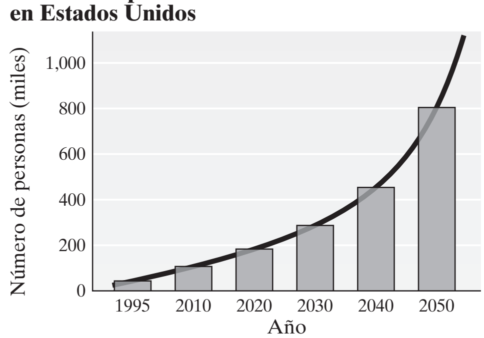
La ecuación $A = 41.97(0.996)^x$ puede usarse para calcular la altura, A, en kilómetros, para una presión dada, x, en milibares (mb). Si la presión atmosférica en la cima del monte Everest es de aproximadamente 389 mb, calcule la altura de la cima del monte Everest.

54. Centenarios De acuerdo con las proyecciones de la Oficina de Censos de Estados Unidos, el número de personas de 100 años de edad o más, aumentará de manera exponencial a partir de 1995 (vea la gráfica siguiente). La función

$$f(t) = 71.24(1.045)^t$$

puede usarse para calcular el número de estas personas, en miles, donde t es el tiempo, en años, a partir de 1995. Utilice esta función para calcular el número de personas de 100 años de edad o más en **a)** 2060, **b)** 2070.

Número de personas de 100 años de edad o más en Estados Unidos



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, proyección de la serie media.

55. En el ejercicio 37 graficamos los montos resultantes en diferentes periodos después de invertir \$100 a 7% de interés simple y a 7% de interés capitalizable cada año.

a) Utilice la fórmula del interés compuesto dada en el ejemplo 5 para determinar el monto que se obtiene después de 10 años, por una inversión de \$100 a una tasa de 7% de interés capitalizable diariamente (suponga que cada año es de 365 días).

b) Calcule la diferencia entre el monto que se obtiene 10 años después de invertir \$100 a 7% de interés simple, y el monto que se obtiene transcurrido el mismo plazo al invertir \$100 a 7% de interés capitalizable diariamente.

56. Grafique $y = 2^x$ y $y = 3^x$ en la misma ventana.

57. a) Grafique $y = 3^{x-5}$.

b) Utilice su calculadora graficadora para resolver la ecuación $4 = 3^{x-5}$. Redondee su respuesta al centésimo más cercano.

58. a) Grafique $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}$.

b) Utilice su calculadora graficadora para resolver la ecuación $-3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}$.

Reto

59. Suponga que Bob Jenkins le da a Carol Dantuma \$1 en el día 1, \$2 en el día 2, \$4 en el día 3, \$8 en el día 4, y continúa duplicando la cantidad durante 30 días.

a) Determine cuánto le dará Bob a Carol el día 15.

b) Determine cuánto le dará Bob a Carol el día 20.

c) Usando la forma exponencial, exprese el monto que Bob le da a Carol el día n.

d) ¿Cuánto le dará Bob a Carol el día 30? Escriba la cantidad en forma exponencial. Luego utilice su calculadora para evaluar.

e) Exprese el monto total que Bob le da a Carol durante los 30 días, como una suma de términos exponenciales. (No determine el valor real.)

Actividad en grupo

60. Las funciones exponenciales o aproximadamente exponenciales son muy comunes.

a) Que cada miembro del grupo determine, de manera individual, una función que no haya sido dada en esta sección y que pueda aproximarse a una función exponencial. Pueden utilizar periódicos, libros y otras fuentes.

b) Analicen en grupo las funciones de todos los miembros. Determinen si cada función presentada es una función exponencial.

c) Escriban en grupo un ensayo en el que analicen cada una de las funciones y establezcan por qué creen que cada una de ellas es exponencial.

Ejercicios de repaso acumulativo

[5.1] **61.** Considere el polinomio

$$2.3x^4y - 6.2x^6y^2 + 9.2x^5y^2$$

a) Escriba el polinomio en orden descendente de la variable x.

b) ¿Cuál es el grado del polinomio?

c) ¿Cuál es su coeficiente principal?

[5.2] **62.** Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 2x + 4$, determine $(f \cdot g)(x)$.

[7.1] **63.** Escriba $\sqrt{a^2 - 8a + 16}$ como un valor absoluto.

[7.3] **64.** Simplifique $\sqrt[4]{\dfrac{32x^5y^9}{2y^3z}}$.

9.3 Funciones logarítmicas

1 Convertir de forma exponencial a forma logarítmica.

2 Graficar funciones exponenciales.

3 Comparar gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas.

4 Resolver problemas de aplicación con funciones logarítmicas.

1 Convertir funciones de forma exponencial a forma logarítmica

Estamos preparados para hablar de **logaritmos**. Considere la función exponencial $y = 2^x$. Como se mencionó en la sección 9.1, para determinar la función inversa intercambiamos x y y y despejamos y en la ecuación resultante. Al intercambiar x y y se obtiene la ecuación $x = 2^y$, pero no hay forma de despejar y en la ecuación $x = 2^y$. A continuación se presenta una nueva definición que nos ayudará a lograrlo.

Logaritmo

Para todos los números positivos a, donde $a \neq 1$,

$$\boldsymbol{y = \log_a x} \text{ significa } \boldsymbol{x = a^y}$$

De acuerdo con la definición de logaritmo, $x = 2^y$ significa $y = \log_2 x$. Por lo tanto, podemos deducir que $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$ son funciones inversas. En general, $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son funciones inversas.

En la ecuación $y = \log_a x$, *log* es una abreviatura de la palabra *logaritmo*; $y = \log_a x$ se lee "y es el logaritmo de x en la base a". La letra y representa el logaritmo, la letra a la base, y la letra x el número.

$$\underset{\substack{\text{logaritmo}\\\text{(exponente)}}}{y} = \log_{\underset{\text{base}}{a}} \underset{\text{número}}{x} \qquad \text{significa} \qquad \underset{\text{número}}{x} = \underset{\text{base}}{a}^{\overset{\text{exponente}}{y}}$$

En otras palabras, el logaritmo del número x en la base a, es el *exponente* al cual debe elevarse ésta para obtener el número x. En resumen, *un logaritmo es un exponente*. Por ejemplo,

$$2 = \log_{10} 100 \text{ significa } 100 = 10^2$$

En $\log_{10} 100 = 2$, el logaritmo es 2, la base es 10 y el número es 100. El logaritmo, 2, es el *exponente* al que debe elevarse la base, 10, para obtener el número, 100. Observe que $10^2 = 100$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de cómo una expresión exponencial puede convertirse en una expresión logarítmica.

Forma exponencial	Forma logarítmica
$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$4^2 = 16$	$\log_4 16 = 2$
$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$	$\log_{1/2} \frac{1}{32} = 5$
$5^{-2} = \frac{1}{25}$	$\log_5 \frac{1}{25} = -2$

Resolvamos algunos ejemplos que requieren la conversión de la forma exponencial a la forma logarítmica, y viceversa.

EJEMPLO 1 ▸ Escriba cada ecuación en forma logarítmica.

a) $3^4 = 81$ **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$ **c)** $2^{-5} = \frac{1}{32}$

Solución

a) $\log_3 81 = 4$ **b)** $\log_{1/5} \frac{1}{125} = 3$ **c)** $\log_2 \frac{1}{32} = -5$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 31**

EJEMPLO 2 ▸ Escriba cada ecuación en forma exponencial.

a) $\log_7 49 = 2$ **b)** $\log_4 64 = 3$ **c)** $\log_{1/3} \frac{1}{81} = 4$

Solución

a) $7^2 = 49$ **b)** $4^3 = 64$ **c)** $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 47**

EJEMPLO 3 ▸ Escriba cada ecuación en la forma exponencial; luego determine el valor desconocido.

a) $y = \log_5 25$ **b)** $2 = \log_a 16$ **c)** $3 = \log_{1/2} x$

Solución

a) $5^y = 25$. Ya que $5^2 = 25$, $y = 2$.

b) $a^2 = 16$. Como $4^2 = 16$, $a = 4$. Observe que a debe ser mayor que 0, por lo que -4 no es un valor posible de a.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = x$. Ya que $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $x = \frac{1}{8}$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 65

2 Graficar funciones exponenciales

Ahora que sabemos cómo convertir ecuaciones de la forma exponencial a la forma logarítmica y viceversa, podemos graficar funciones logarítmicas. Las ecuaciones de la forma $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ y $x > 0$, se denominan **funciones logarítmicas**. Las gráficas de este tipo de funciones pasan la prueba de la recta vertical. Para graficarlas, cambie a la forma exponencial y trace los puntos. Este procedimiento se ilustra en los ejemplos 4 y 5.

Antes de graficar funciones logarítmicas, analizaremos algunas de sus características.

Gráficas de funciones logarítmicas

Para todas las funciones logarítmicas de la forma $y = \log_a x$ o $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$, a $\neq 1$ y $x > 0$:

1. El dominio de la función es $(0, \infty)$.
2. El rango de la función es $(-\infty, \infty)$.
3. La gráfica pasa por los puntos $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

En casi todos los casos puede trazarse una gráfica razonablemente buena de la función logarítmica, precisamente con los tres puntos que se listaron en el paso 3. Cuando $a > 1$, la gráfica se vuelve casi vertical a la izquierda de $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$ y casi horizontal a la derecha de $(a, 1)$, vea el ejemplo 4.

Cuando $0 < a < 1$, la gráfica parece casi vertical a la izquierda de $(a, 1)$, y casi horizontal a la derecha de $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, vea el ejemplo 5.

EJEMPLO 4 ▸ Grafique $y = \log_2 x$. Indique el dominio y el rango de la función.

Solución Ésta es una ecuación de la forma $y = \log_a x$, donde $a = 2$; $y = \log_2 x$ significa $x = 2^y$. Por lo tanto, para empezar construimos la tabla de valores usando $x = 2^y$. La tabla se desarrollará con mayor facilidad para valores seleccionados de y y determinando los valores correspondientes de x. Los tres puntos listados en el paso 3 del recuadro aparecen en rojo en la tabla.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Después trazamos la gráfica (**figura 9.21**). Los tres pares ordenados que se resaltan en la tabla también se resaltan en rojo en la gráfica. El dominio, es decir, el conjunto de valores de x, es $\{x | x > 0\}$. El rango, o conjunto de valores de y, es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$.

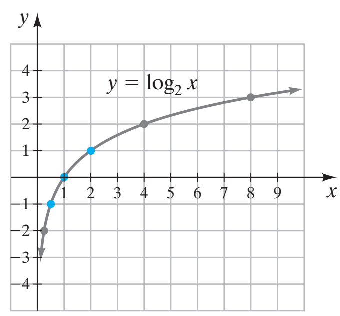


FIGURA 9.21

▸ Ahora resuelva el ejercicio 11

EJEMPLO 5 Grafique $y = \log_{1/2} x$. Indique el dominio y el rango de la función.

Solución Ésta es una ecuación de la forma $y = \log_a x$, donde $a = \dfrac{1}{2}$. $y = \log_{1/2} x$ significa $x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^y$. Primero construimos una tabla de valores seleccionando valores para y y determinando los correspondientes valores de x.

x	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

La gráfica se ilustra en la **figura 9.22**. El dominio es $\{x|x > 0\}$ y el rango es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

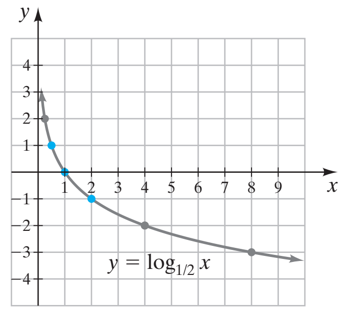


FIGURA 9.22

Ahora resuelva el ejercicio 13

Si analizamos los ejemplos 4 y 5, veremos que el dominios de $y = \log_2 x$ y de $y = \log_{1/2} x$ es $\{x|x > 0\}$. De hecho, **para cualquier función logarítmica $y = \log_a x$, el dominio es $\{x|x > 0\}$**. Observe también que las gráficas de los ejemplos 4 y 5 son gráficas de funciones uno a uno.

3 Comparar gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

Recuerde que para determinar las funciones inversas, intercambiamos x y y y despejamos y en la ecuación resultante. Considere $y = a^x$. Si intercambiamos x y y, obtenemos $x = a^y$. De acuerdo con la definición de logaritmo, podemos reescribir esta función como $y = \log_a x$, que es una ecuación donde y está despejada. Por consiguiente, $y = a^x$ *y* $y = \log_a x$ *son funciones inversas*, y podemos escribir: si $f(x) = a^x$, entonces $f^{-1}(x) = \log_a x$.

En la **figura 9.23** se muestran las gráficas generales de $y = a^x$ y de $y = \log_a x, a > 1$ en los mismos ejes. Observe que son simétricas respecto de la recta $y = x$. Tome en cuenta la información del recuadro siguiente.

Características de las gráficas

	FUNCIÓN EXPONENCIAL		FUNCIÓN LOGARÍTMICA
	$y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$		$y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$
Dominio:	$(-\infty, \infty)$		$(0, \infty)$
Rango:	$(0, \infty)$		$(-\infty, \infty)$
Puntos en la gráfica:	$\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$, $(1, a)$	*x se transforma en y, y se transforma en x*	$\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$, $(a, 1)$

Con base en lo anterior, podemos ver que el rango de la función exponencial es el dominio de la función logarítmica, y viceversa. Además, los valores de x y de y en los pares ordenados están intercambiados en las funciones exponencial y logarítmica.

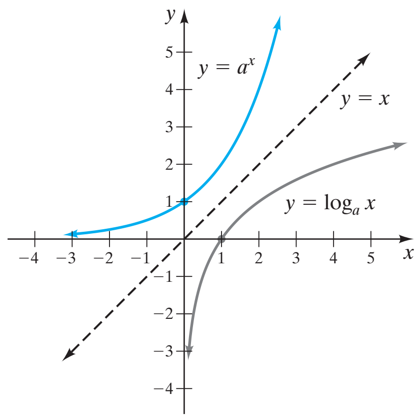


FIGURA 9.23

En la **figura 9.24** se ilustran las gráficas de $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$. En la **figura 9.25** se muestran las gráficas de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $y = \log_{1/2} x$. En cada figura, las gráficas son inversas entre sí y, por lo tanto, simétricas respecto de la recta $y = x$.

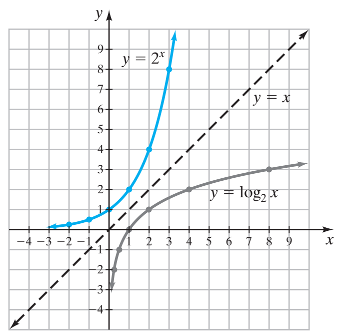


FIGURA 9.24

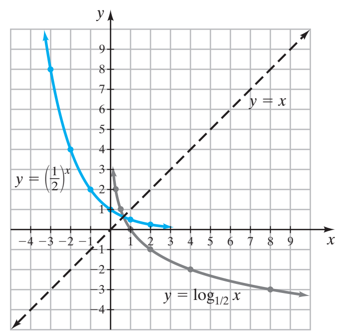


FIGURA 9.25

4 Resolver problemas de aplicación con funciones logarítmicas

Más adelante veremos muchos problemas de aplicación que involucran logaritmos; por lo pronto analizaremos sólo una de sus aplicaciones más importantes.

EJEMPLO 6 ▸ **Terremotos** Los logaritmos se utilizan para medir la magnitud de los terremotos. En la escala Richter, desarrollada por el sismólogo Charles F. Richter, por ejemplo, la magnitud, R, de un terremoto está dada por la fórmula

$$R = \log_{10} I$$

donde I representa el número de veces que el terremoto es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir con un sismógrafo.

a) Si un terremoto mide 4 grados en la escala de Richter, ¿cuántas veces es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir?

b) ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 5 grados que uno que mide 4?

Solución **a)** Entienda el problema El número asignado en la escala Richter, R, es 4. Para determinar cuántas veces es más intenso el terremoto respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse, I, sustituimos $R = 4$ en la fórmula y despejamos I.

Traduzca

$$R = \log_{10} I$$
$$4 = \log_{10} I$$

Realice los cálculos

$$10^4 = I \quad \textit{Cambiar a la forma exponencial.}$$
$$10{,}000 = I$$

Responda Por lo tanto, un terremoto que mide 4 grados es 10,000 veces más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir.

b)

$$5 = \log_{10} I$$
$$10^5 = I \quad \textit{Cambiar a la forma exponencial.}$$
$$100{,}000 = I$$

Como (10,000)(10) = 100,000, un terremoto que mide 5 es 10 veces más intenso que un terremoto que mide 4.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 113

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Considere la función logarítmica $y = \log_a x$.
   a) ¿Qué restricciones hay sobre a?
   b) ¿Cuál es el dominio de la función?
   c) ¿Cuál es el rango de la función?
2. Escriba $y = \log_a x$ en forma exponencial.
3. Si algunos puntos en la gráfica de la función exponencial, $f(x) = a^x$ son $\left(-3, \frac{1}{27}\right)$, $\left(-2, \frac{1}{9}\right)$, $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$, (0, 1), (1, 3), (2, 9) y (3, 27), liste algunos puntos de la gráfica de la función logarítmica $g(x) = \log_a x$. Explique cómo determinó su respuesta.
4. Para la función logarítmica $y = \log_a (x - 3)$, ¿qué debe cumplirse respecto de x? Explique.
5. Analice la relación entre las gráficas de $y = a^x$ y $y = \log_a x$ para $a > 0$ y $a \neq 1$.
6. ¿Cuál es la intersección con el eje x de la gráfica de una ecuación de la forma $y = \log_a x$?

Práctica de habilidades

Grafique las funciones logarítmicas.

7. $y = \log_2 x$
8. $y = \log_3 x$
9. $y = \log_{1/2} x$
10. $y = \log_{1/3} x$
11. $y = \log_5 x$
12. $y = \log_4 x$
13. $y = \log_{1/5} x$
14. $y = \log_{1/4} x$

Grafique cada par de funciones en los mismos ejes.

15. $y = 2^x$, $y = \log_{1/2} x$
16. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \log_2 x$
17. $y = 2^x$, $y = \log_2 x$
18. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \log_{1/2} x$

Escriba cada ecuación en forma logarítmica.

19. $2^3 = 8$
20. $3^5 = 243$
21. $3^2 = 9$
22. $2^6 = 64$
23. $16^{1/2} = 4$
24. $49^{1/2} = 7$
25. $8^{1/3} = 2$
26. $16^{1/4} = 2$
27. $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$
28. $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$
29. $2^{-3} = \frac{1}{8}$
30. $6^{-3} = \frac{1}{216}$
31. $4^{-3} = \frac{1}{64}$
32. $81^{1/2} = 9$
33. $64^{1/3} = 4$
34. $5^{-4} = \frac{1}{625}$
35. $8^{-1/3} = \frac{1}{2}$
36. $16^{-1/2} = \frac{1}{4}$
37. $81^{-1/4} = \frac{1}{3}$
38. $32^{-1/5} = \frac{1}{2}$
39. $10^{0.8451} = 7$
40. $10^{1.0792} = 12$
41. $e^2 = 7.3891$
42. $e^{-1/2} = 0.6065$
43. $a^n = b$
44. $c^b = w$

Escriba cada ecuación en forma exponencial.

45. $\log_2 8 = 3$
46. $\log_5 125 = 3$
47. $\log_{1/3} \frac{1}{27} = 3$
48. $\log_{1/2} \frac{1}{64} = 6$
49. $\log_5 \frac{1}{25} = -2$
50. $\log_5 \frac{1}{625} = -4$
51. $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$
52. $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$
53. $\log_9 \frac{1}{81} = -2$
54. $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$
55. $\log_{10} \frac{1}{1000} = -3$
56. $\log_{10} 1000 = 3$
57. $\log_6 216 = 3$
58. $\log_4 1024 = 5$
59. $\log_{10} 0.62 = -0.2076$
60. $\log_{10} 8 = 0.9031$
61. $\log_e 6.52 = 1.8749$
62. $\log_e 30 = 3.4012$
63. $\log_w s = -p$
64. $\log_r c = -a$

Escriba cada ecuación en forma exponencial; luego determine el valor desconocido.

65. $\log_4 64 = y$
66. $\log_5 25 = y$
67. $\log_a 125 = 3$
68. $\log_a 81 = 4$
69. $\log_3 x = 3$
70. $\log_2 x = 5$
71. $\log_2 \frac{1}{16} = y$
72. $\log_8 \frac{1}{64} = y$
73. $\log_{1/2} x = 6$
74. $\log_{1/3} x = 4$
75. $\log_a \frac{1}{27} = -3$
76. $\log_9 \frac{1}{81} = y$

Evalúe cada una de las siguientes expresiones.

77. $\log_{10} 1$
78. $\log_{10} 10$
79. $\log_{10} 100$
80. $\log_{10} 1000$
81. $\log_{10} \frac{1}{100}$
82. $\log_{10} \frac{1}{1000}$
83. $\log_{10} 10{,}000$
84. $\log_{10} 100{,}000$
85. $\log_4 256$
86. $\log_{13} 169$
87. $\log_3 \frac{1}{81}$
88. $\log_5 \frac{1}{125}$
89. $\log_8 \frac{1}{64}$
90. $\log_{14} \frac{1}{14}$
91. $\log_9 1$
92. $\log_{15} 1$
93. $\log_9 9$
94. $\log_{12} 12$
95. $\log_4 1024$
96. $\log_2 128$

Resolución de problemas

97. Si $f(x) = 5^x$, ¿cuál es el valor de $f^{-1}(x)$?

98. Si $f(x) = \log_6 x$, ¿cuál es el valor de $f^{-1}(x)$?

99. ¿Entre cuáles enteros debe estar $\log_3 62$? Explique.

100. ¿Entre cuáles enteros debe estar $\log_{10} 0.672$? Explique.

101. ¿Entre cuáles enteros debe estar $\log_{10} 425$? Explique.

102. ¿Entre cuáles enteros debe estar $\log_5 0.3256$? Explique.

103. En el caso de $x > 1$, ¿qué valor aumenta más rápido conforme x se incrementa, 2^x o $\log_{10} x$? Explique.

104. En el caso de $x > 1$, ¿qué valor aumenta más rápido conforme x se incrementa, x o $\log_{10} x$? Explique.

Cambie a la forma exponencial y despeje x. En la sección 9.4 analizaremos las reglas para resolver problemas como éstos.

105. $x = \log_{10} 10^6$
106. $x = \log_7 7^9$
107. $x = \log_b b^8$
108. $x = \log_e e^5$

Cambie a la forma logarítmica y despeje x. En la sección 9.4 analizaremos las reglas para resolver problemas como éstos.

109. $x = 10^{\log_{10} 3}$
110. $x = 6^{\log_6 5}$
111. $x = b^{\log_b 9}$
112. $x = c^{\log_c 2}$

113. Terremoto Si la magnitud de un terremoto es de 7 grados en la escala Richter, ¿cuántas veces es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse? Utilice $R = \log_{10} I$ (vea el ejemplo 6).

114. Terremoto Si la magnitud de un terremoto es de 5 grados en la escala Richter, ¿cuántas veces es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse? Utilice $R = \log_{10} I$.

115. Terremoto ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 6 grados en la escala Richter que uno que mide 2?

116. Terremoto ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 4 grados en la escala Richter que uno que mide 1?

117. Grafique $y = \log_2 (x - 1)$.

118. Grafique $y = \log_3 (x - 2)$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[5.4–5.7] *Factorice.*

119. $2x^3 - 6x^2 - 36x$ **120.** $x^4 - 16$ **121.** $40x^2 + 52x - 12$ **122.** $6r^2s^2 + rs - 1$

9.4 Propiedades de los logaritmos

1 Utilizar la regla del producto para logaritmos.
2 Utilizar la regla del cociente para logaritmos.
3 Utilizar la regla de la potencia para logaritmos.
4 Utilizar propiedades adicionales de los logaritmos.

1 Utilizar la regla del producto para logaritmos

Al determinar el logaritmo de una expresión, a ésta se le denomina **argumento** del logaritmo. Por ejemplo, en $\log_{10} 3$, el 3 es el argumento; en $\log_{10} (2x + 4)$, el $(2x + 4)$ es el argumento. Cuando el argumento contiene una variable, suponemos que representa un valor positivo. *Recuerde que sólo existen logaritmos de números positivos*.

Para poder realizar cálculos mediante logaritmos, primero hay que entender sus propiedades. La primera de estas propiedades que estudiaremos es la regla del producto para logaritmos.

Regla del producto para logaritmos

Para números reales positivos, x, y y a, $a \neq 1$,

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \textbf{Propiedad 1}$$

Esta regla nos dice que el logaritmo del producto de dos factores es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

Para demostrar esta propiedad, determinemos $\log_a x = m$ y $\log_a y = n$. Recuerde que los logaritmos son exponentes. A continuación escribimos cada logaritmo en forma exponencial.

$$\log_a x = m \text{ significa } a^m = x$$
$$\log_a y = n \text{ significa } a^n = y$$

Al sustituir y usar las reglas de los exponentes, vemos que

$$xy = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ahora podemos convertir $xy = a^{m+n}$ a la forma logarítmica.

$$xy = a^{m+n} \text{ significa } \log_a xy = m + n$$

Por último, al sustituir m por $\log_a x$ y n por $\log_a y$, obtenemos

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

que es la propiedad 1.

Ejemplos de la propiedad 1

$$\log_3 (6 \cdot 7) = \log_3 6 + \log_3 7$$
$$\log_4 3z = \log_4 3 + \log_4 z$$
$$\log_8 x^2 = \log_8 (x \cdot x) = \log_8 x + \log_8 x \quad \text{o} \quad 2 \log_8 x$$

La propiedad 1, la regla del producto, puede extenderse a tres o más factores, por ejemplo, $\log_a xyz = \log_a x + \log_a y + \log_a z$.

2 Utilizar la regla del cociente para logaritmos

Analicemos ahora la regla del cociente para logaritmos, a la que haremos referencia como propiedad 2.

Regla del cociente para logaritmos

Para números reales positivos x, y y a, $a \neq 1$,

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \textbf{Propiedad 2}$$

Esta regla nos dice que el logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre los logaritmos del numerador y del denominador.

Ejemplos de la propiedad 2

$$\log_3 \frac{19}{4} = \log_3 19 - \log_3 4$$

$$\log_6 \frac{x}{3} = \log_6 x - \log_6 3$$

$$\log_5 \frac{z}{z+2} = \log_5 z - \log_5 (z+2)$$

3 Utilizar la regla de la potencia para logaritmos

La siguiente propiedad que analizaremos es la regla de la potencia para logaritmos.

Regla de la potencia para logaritmos

Si x y a son números reales positivos, $a \neq 1$, y n es cualquier número real, entonces

$$\log_a x^n = n \log_a x \qquad \textbf{Propiedad 3}$$

Esta regla nos dice que el logaritmo de un número elevado a una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del número.

Ejemplos de la propiedad 3

$$\log_2 4^3 = 3 \log_2 4$$

$$\log_3 x^2 = 2 \log_3 x$$

$$\log_5 \sqrt{12} = \log_5 (12)^{1/2} = \frac{1}{2} \log_5 12$$

$$\log_8 \sqrt[5]{z+3} = \log_8 (z+3)^{1/5} = \frac{1}{5} \log_8 (z+3)$$

Las propiedades 2 y 3 pueden demostrarse de una forma análoga a la que se explicó respecto de la propiedad 1 (vea los ejercicios 79 y 80 de la página 623).

EJEMPLO 1 Utilice las propiedades 1 a 3 para desarrollar.

a) $\log_8 \frac{29}{43}$ **b)** $\log_4 (64 \cdot 180)$ **c)** $\log_{10} (22)^{1/5}$

Solución

a) $\log_8 \frac{29}{43} = \log_8 29 - \log_8 43$ *Regla del cociente.*

b) $\log_4 (64 \cdot 180) = \log_4 64 + \log_4 180$ *Regla del producto.*

c) $\log_{10} (22)^{1/5} = \frac{1}{5} \log_{10} 22$ *Regla de la potencia.*

Ahora resuelva el ejercicio 11

A menudo tendremos que utilizar dos o más de estas propiedades en el mismo problema.

EJEMPLO 2 Desarrolle.

a) $\log_{10} 4(x+2)^3$ **b)** $\log_5 \frac{(4-a)^2}{3}$

c) $\log_5 \left(\frac{4-a}{3}\right)^2$ **d)** $\log_5 \frac{[x(x+4)]^3}{8}$

Solución

a) $\log_{10} 4(x+2)^3 = \log_{10} 4 + \log_{10}(x+2)^3$ *Regla del producto.*

$= \log_{10} 4 + 3\log_{10}(x+2)$ *Regla de la potencia.*

b) $\log_5 \dfrac{(4-a)^2}{3} = \log_5 (4-a)^2 - \log_5 3$ *Regla del cociente.*

$= 2\log_5(4-a) - \log_5 3$ *Regla de la potencia.*

c) $\log_5 \left(\dfrac{4-a}{3}\right)^2 = 2\log_5\left(\dfrac{4-a}{3}\right)$ *Regla de la potencia.*

$= 2[\log_5(4-a) - \log_5 3]$ *Regla del cociente.*

$= 2\log_5(4-a) - 2\log_5 3$ *Propiedad distributiva.*

d) $\log_5 \dfrac{[x(x+4)]^3}{8} = \log_5 [x(x+4)]^3 - \log_5 8$ *Regla del cociente.*

$= 3\log_5 x(x+4) - \log_5 8$ *Regla de la potencia.*

$= 3[\log_5 x + \log_5(x+4)] - \log_5 8$ *Regla del producto.*

$= 3\log_5 x + 3\log_5(x+4) - \log_5 8$ *Propiedad distributiva.*

Ahora resuelva el ejercicio 21

Sugerencia útil

En el ejemplo 2**b)**, cuando desarrollamos $\log_5 \dfrac{(4-a)^2}{3}$, primero usamos la regla del cociente. En el ejemplo 2**c)**, cuando desarrollamos $\log_5\left(\dfrac{4-a}{3}\right)^2$, primero usamos la regla de la potencia. ¿Nota la diferencia entre ambos problemas? En $\log_5 \dfrac{(4-a)^2}{3}$, sólo el numerador del argumento está elevado al cuadrado; por lo tanto, primero utilizamos la regla del cociente. En $\log_5\left(\dfrac{4-a}{3}\right)^2$, todo el argumento está elevado al cuadrado, de modo que primero usamos la regla de la potencia.

EJEMPLO 3 Escriba cada una de las siguientes expresiones como el logaritmo de una sola expresión.

a) $3\log_8(z+2) - \log_8 z$

b) $\log_7(x+1) + 2\log_7(x+4) - 3\log_7(x-5)$

Solución

a) $3\log_8(z+2) - \log_8 z = \log_8(z+2)^3 - \log_8 z$ *Regla de la potencia.*

$= \log_8 \dfrac{(z+2)^3}{z}$ *Regla del cociente.*

b) $\log_7(x+1) + 2\log_7(x+4) - 3\log_7(x-5)$

$= \log_7(x+1) + \log_7(x+4)^2 - \log_7(x-5)^3$ *Regla de la potencia.*

$= \log_7(x+1)(x+4)^2 - \log_7(x-5)^3$ *Regla del producto.*

$= \log_7 \dfrac{(x+1)(x+4)^2}{(x-5)^3}$ *Regla del cociente.*

Ahora resuelva el ejercicio 39

Cómo evitar errores comunes

LAS REGLAS CORRECTAS SON

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Observe que:

$$\log_a (x + y) \neq \log_a x + \log_a y \qquad \log_a xy \neq (\log_a x)(\log_a y)$$

$$\log_a (x - y) \neq \log_a x - \log_a y \qquad \log_a \frac{x}{y} \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}$$

4 Utilizar propiedades adicionales de los logaritmos

Las últimas propiedades que analizaremos en esta sección se utilizarán para resolver ecuaciones en la sección 9.6.

Propiedades adicionales de los logaritmos

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

$$\log_a a^x = x \qquad \textbf{Propiedad 4}$$

y $$a^{\log_a x} = x\,(x > 0) \qquad \textbf{Propiedad 5}$$

Ejemplos de la propiedad 4	Ejemplos de la propiedad 5
$\log_6 6^5 = 5$	$3^{\log_3 7} = 7$
$\log_9 9^x = x$	$5^{\log_5 x} = x\,(x > 0)$

EJEMPLO 4 Evalúe. **a)** $\log_5 25$ **b)** $\sqrt{16}^{\,\log_4 9}$

Solución

a) $\log_5 25$ puede escribirse como $\log_5 5^2$ y, de acuerdo con la propiedad 4,

$$\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$$

b) $\sqrt{16}^{\,\log_4 9}$ puede escribirse como $4^{\log_4 9}$. De acuerdo con la propiedad 5,

$$\sqrt{16}^{\,\log_4 9} = 4^{\log_4 9} = 9$$

Ahora resuelva el ejercicio 55

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique la regla del producto para logaritmos.
2. Explique la regla del cociente para logaritmos.
3. Explique la regla de la potencia para logaritmos.
4. Explique por qué fue necesario indicar que x y y son números reales positivos cuando analizamos las reglas del producto y del cociente.
5. ¿Es verdadera la afirmación $\log_a (xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z$? Explique.
6. ¿Es verdadera la afirmación $\log_b (x + y + z) = \log_b x + \log_b y + \log_b z$? Explique.

Práctica de habilidades

Utilice las propiedades 1 a 3 para desarrollar.

7. $\log_4 (3 \cdot 10)$
8. $\log_5 (4 \cdot 7)$
9. $\log_8 7(x + 3)$
10. $\log_9 x(x + 2)$
11. $\log_2 \frac{27}{11}$
12. $\log_5 (41 \cdot 9)$

13. $\log_{10} \dfrac{\sqrt{x}}{x-9}$

14. $\log_5 3^8$

15. $\log_6 x^7$

16. $\log_9 12(4)^6$

17. $\log_4 (r+7)^5$

18. $\log_8 b^3(b-2)$

19. $\log_4 \sqrt{\dfrac{a^3}{a+2}}$

20. $\log_9 (x-6)^3 x^2$

21. $\log_3 \dfrac{d^6}{(a-8)^4}$

22. $\log_7 x^2(x-13)$

23. $\log_8 \dfrac{y(y+4)}{y^3}$

24. $\log_{10}\left(\dfrac{z}{6}\right)^2$

25. $\log_{10} \dfrac{9m}{8n}$

26. $\log_5 \dfrac{\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b}}{\sqrt[4]{c}}$

Escriba como logaritmo de una sola expresión.

27. $\log_5 2 + \log_5 8$

28. $\log_3 4 + \log_3 11$

29. $\log_2 9 - \log_2 5$

30. $\log_7 17 - \log_7 3$

31. $6 \log_4 2$

32. $\dfrac{1}{3} \log_8 7$

33. $\log_{10} x + \log_{10} (x+3)$

34. $\log_5 (a+1) - \log_5 (a+10)$

35. $2 \log_9 z - \log_9 (z-2)$

36. $3 \log_8 y + 2 \log_8 (y-9)$

37. $4(\log_5 p - \log_5 3)$

38. $\dfrac{1}{2} [\log_6 (r-1) - \log_6 r]$

39. $\log_2 n + \log_2 (n+4) - \log_2 (n-3)$

40. $2 \log_5 t + 5 \log_5 (t-6) + \log_5 (3t+7)$

41. $\dfrac{1}{2}[\log_5 (x-8) - \log_5 x]$

42. $6 \log_7 (a+3) + 2 \log_7 (a-1) - \dfrac{1}{2} \log_7 a$

43. $2 \log_9 4 + \dfrac{1}{3} \log_9 (r-6) - \dfrac{1}{2} \log_9 r$

44. $5 \log_6 (x+3) - [2 \log_6 (7x+1) + 3 \log_6 x]$

45. $4 \log_6 3 - [2 \log_6 (x+3) + 4 \log_6 x]$

46. $2 \log_7 (m-4) + 3 \log_7 (m+3) - [5 \log_7 2 + 3 \log_7 (m-2)]$

Determine el valor escribiendo cada argumento mediante los números 2 y/o 5 y usando los valores $\log_a 2 = 0.3010$ *y* $\log_a 5 = 0.6990$.

47. $\log_a 10$

48. $\log_a 2.5$

49. $\log_a 0.4$

50. $\log_a \dfrac{1}{8}$

51. $\log_a 25$

52. $\log_a \sqrt[3]{5}$

Evalúe (vea el ejemplo 4).

53. $5^{\log_5 10}$

54. $\log_3 3$

55. $(2^3)^{\log_8 7}$

56. $\log_8 64$

57. $\log_3 27$

58. $2 \log_9 \sqrt{9}$

59. $5(\sqrt[3]{27})^{\log_3 5}$

60. $\dfrac{1}{2} \log_6 \sqrt[3]{6}$

Resolución de problemas

61. Para $x > 0$ y $y > 0$, ¿se cumple $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a xy^{-1} = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x + \log_a \dfrac{1}{y}$?

62. Lea el ejercicio 61. De acuerdo con la regla del cociente, $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. ¿Podemos concluir por lo tanto que $\log_a x - \log_a y = \log_a x + \log_a \dfrac{1}{y}$?

63. Utilice la regla del producto para demostrar que

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a \frac{1}{y}$$

64. **a)** Explique por qué

$$\log_a \frac{3}{xy} \neq \log_a 3 - \log_a x + \log_a y$$

b) Desarrolle de forma correcta $\log_a \dfrac{3}{xy}$.

65. Exprese $\log_a(x^2 - 4) - \log_a(x + 2)$ como un solo logaritmo y simplifique.

66. Exprese $\log_a(x - 3) - \log_a(x^2 + 5x - 24)$ como un solo logaritmo y simplifique.

67. ¿Es $\log_a(x^2 + 8x + 16) = 2\log_a(x + 4)$? Explique.

68. ¿Es $\log_a(4x^2 - 20x + 25) = 2\log_a(2x - 5)$? Explique.

Si $\log_{10} x = 0.4320$, *determine el valor de las siguientes expresiones*.

69. $\log_{10} x^2$

70. $\log_{10} \sqrt[3]{x}$

71. $\log_{10} \sqrt[4]{x}$

72. $\log_{10} x^{11}$

Si $\log_{10} x = 0.5000$ *y* $\log_{10} y = 0.2000$, *determine*:

73. $\log_{10} xy$

74. $\log_{10}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

75. Usando la información dada en las instrucciones para los ejercicios 73 y 74, ¿es posible determinar $\log_{10}(x + y)$? Explique.

76. ¿Son iguales las gráficas de $y = \log_b x^2$ y $y = 2\log_b x$? Explique su respuesta analizando los dominios de cada ecuación.

Utilice las propiedades 1 a 3 para desarrollar.

77. $\log_2 \dfrac{\sqrt[4]{xy}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{a - b}}$

78. $\log_3 \left[\dfrac{(a^2 + b^2)(c^2)}{(a - b)(b + c)(c + d)}\right]^2$

79. Demuestre la regla del cociente para logaritmos.

80. Demuestre la regla de la potencia para logaritmos.

Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan el ejercicio 81.

81. Consideren $\log_a \dfrac{\sqrt{x^4 y}}{\sqrt{xy^3}}$, en donde $x > 0$ y $y > 0$.

a) Miembro 1: Desarrolle la expresión mediante la regla del cociente.

b) Miembro 2: Desarrolle la expresión mediante la regla del producto.

c) Miembro 3: Simplifique primero $\dfrac{\sqrt{x^4 y}}{\sqrt{xy^3}}$, y luego desarrolle el logaritmo resultante.

d) Comprueben cada uno el trabajo de los demás y asegúrense de que todas las respuestas sean correctas. ¿Estas expresiones pueden simplificarse por los tres métodos?

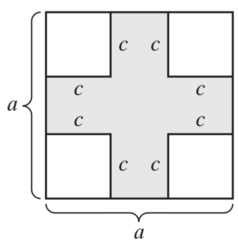
Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] **82.** Resuelva la desigualdad $\dfrac{x - 4}{2} - \dfrac{2x - 5}{5} > 3$ e indique la solución en

a) notación constructiva de conjuntos.

b) notación de intervalos.

[5.7] **83. a)** Escriba una expresión para determinar el área sombreada de la figura.



b) Escriba la expresión de la parte **a)** en forma factorizada.

[6.4] **84.** Despeje x en $\dfrac{15}{x} + \dfrac{9x - 7}{x + 2} = 9$.

[7.7] **85.** Multiplique $(3i + 4)(2i - 5)$.

[8.4] **86.** Despeje a en $a - 6\sqrt{a} = 7$.

Examen de mitad de capítulo: 9.1-9.4

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en donde se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

1. a) Explique cómo determinar $(f \circ g)(x)$.

b) Si $f(x) = 3x + 3$ y $g(x) = 2x + 5$, determine $(f \circ g)(x)$.

2. Sea $f(x) = x^2 + 5$ y $g(x) = \dfrac{6}{x}$; determine

a) $(f \circ g)(x)$

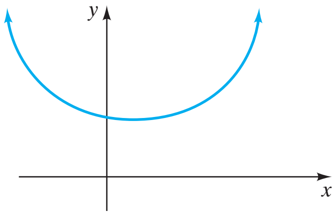
b) $(f \circ g)(3)$

c) $(g \circ f)(x)$

d) $(g \circ f)(3)$

3. a) Explique lo que significa que una función sea uno a uno (o inyectiva).

b) ¿La función representada mediante la gráfica siguiente es uno a uno? Explique.



En los ejercicios del 4 al 6, para cada función, **a)** *determine si es una función uno a uno;* **b)** *si es una función uno a uno, determine su función inversa.*

4. $\{(-3, 2), (2, 3), (5, 1), (6, 8)\}$

5. $p(x) = \frac{1}{3}x - 5$

6. $k(x) = \sqrt{x - 4}, \quad x \geq 4$

7. Sea $m(x) = -2x + 4$. Determine $m^{-1}(x)$ y luego, en los mismos ejes, grafique $m(x)$ y $m^{-1}(x)$.

Grafique cada función exponencial.

8. $y = 2^x$

9. $y = 3^{-x}$

10. Grafique la función logarítmica $y = \log_2 x$.

11. Bacterias El número de bacterias en una placa de Petri es $N(t) = 5(2)^t$, donde t es el número de horas a partir que se colocaron 5 bacterias en la placa. ¿Cuántas bacterias hay en la placa

a) al cabo de una hora?

b) 6 horas después?

12. Escriba en forma logarítmica $27^{2/3} = 9$.

13. Escriba $\log_2 \frac{1}{64} = -6$ en forma exponencial.

14. Evalúe $\log_5 125$.

15. Resuelva la ecuación $\log_{1/4} \frac{1}{16} = x$ para x.

16. Resuelva la ecuación $\log_x 64 = 3$ para x.

Utilice las propiedades 1 a 3 para escribir como una suma o diferencia de logaritmos.

17. $\log_9 x^2(x - 5)$

18. $\log_5 \frac{7m}{\sqrt{n}}$

Escriba como un solo logaritmo.

19. $3 \log_2 x + \log_2 (x + 7) - 4 \log_2 (x + 1)$

20. $\frac{1}{2}[\log_7 (x + 2) - \log_7 x]$

9.5 Logaritmos comunes

1 Determinar logaritmos comunes de potencias de 10.

2 Determinar logaritmos comunes.

3 Determinar antilogaritmos.

1 Determinar logaritmos comunes de potencias de 10

Las propiedades que analizamos en la sección 9.4 pueden usarse con cualquier base válida (un número real mayor que 0 y distinto de 1). Sin embargo, como estamos acostumbrados a trabajar con la base 10, muchas veces utilizaremos dicha base al realizar cálculos con logaritmos. Los **logaritmos de base 10** se denominan **logaritmos comunes**. Cuando trabajemos con logaritmos comunes no es necesario indicar la base; por lo tanto, $\log x$ significa $\log_{10} x$.

A continuación se escriben las propiedades de los logaritmos en términos de logaritmos comunes. Para números reales positivos x y y y cualquier número real n.

1. $\log xy = \log x + \log y$

2. $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$

3. $\log x^n = n \log x$

Los logaritmos de casi todos los números son números irracionales. Incluso los valores dados por calculadoras por lo regular sólo son aproximaciones a los números reales. *Aunque trabajemos con aproximaciones al evaluar casi todos los logaritmos, por lo general escribimos el logaritmo con un signo igual*. Así, en lugar de escribir $\log 6 \approx 0.77815$, escribiremos $\log 6 = 0.77815$. Los valores que damos para los logaritmos son precisos, al menos hasta cuatro decimales.

En el capítulo 1 aprendimos que 1 puede expresarse como 10^0, y que 10 puede expresarse como 10^1. De acuerdo con esto, ya que 5 está entre 1 y 10, entonces también debe estar entre 10^0 y 10^1.

$$1 < 5 < 10$$
$$10^0 < 5 < 10^1$$

El número 5 puede expresarse como la base 10 elevada a un exponente entre 0 y 1. El número 5 es aproximadamente igual a $10^{0.69897}$. Al igual que en el caso de los logaritmos, al escribir expresiones exponenciales con frecuencia usaremos el signo igual, aunque los valores sólo son aproximaciones. Así, por ejemplo, generalmente escribiremos $10^{0.69897} = 5$ en lugar de $10^{0.69897} \approx 5$.

Si evalúa log 5 en una calculadora, como se explicará en breve, ésta mostrará el valor aproximado 0.69897. Observe que

$$\log 5 = 0.69897 \quad \text{y} \quad 5 = 10^{0.69897}$$

Podemos ver que *el logaritmo común*, 0.69897, *es el exponente* de la base 10. Ahora estamos preparados para definir los logaritmos comunes.

Logaritmos comunes

El **logaritmo común** de un número real positivo es el *exponente* al que se debe elevar la base 10 para obtener el número.

$$\text{Si } \log N = L, \text{ entonces } 10^L = N.$$

Por ejemplo, si $\log 5 = 0.69897$, entonces $10^{0.69897} = 5$.

Ahora considere el número 50.

$$10 < 50 < 100$$
$$10^1 < 50 < 10^2$$

El número 50 puede expresarse como la base 10 elevada a un exponente entre 1 y 2. El número $50 = 10^{1.69897}$; por lo tanto, $\log 50 = 1.69897$.

2 Determinar logaritmos comunes

Para determinar logaritmos comunes de números, podemos utilizar una calculadora que tenga la tecla de logaritmo, $\boxed{\text{LOG}}$.

CÓMO USAR SU CALCULADORA Determinación de logaritmos comunes

Calculadora científica

Para determinar logaritmos comunes, ingrese el número y luego presione la tecla de logaritmo.

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determinar log 400	400 $\boxed{\text{LOG}}$	2.60206
Determinar log 0.0538	0.0538 $\boxed{\text{LOG}}$	−1.2692177

Calculadora graficadora

En algunas calculadoras graficadoras, primero se tiene que presionar la tecla $\boxed{\text{LOG}}$ y luego ingresar el número. Por ejemplo, en la TI-84 Plus, se debe hacer lo siguiente:

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determinar log 400	$\boxed{\text{LOG}}$ (400 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	2.602059991

↑ Generado por la calculadora

EJEMPLO 1 ▸ Determine el exponente al que debe elevarse la base 10 para obtener el número 43,600.

Solución *Se nos ha pedido determinar el exponente*, *que es un logaritmo*. Necesitamos determinar log 43,600. Mediante una calculadora, encontramos

$$\log 43{,}600 = 4.6394865$$

Por lo tanto, el exponente es 4.6394865. Observe que $10^{4.6394865} = 43{,}600$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 7**

3 Determinar antilogaritmos

La pregunta que ahora debemos responder es: "si conocemos el logaritmo común de un número, ¿cómo determinamos el número?" Por ejemplo, si $\log N = 3.406$, ¿cuál es el valor de N? Para determinar N, el número, necesitamos determinar primero el valor de $10^{3.406}$. Como

$$10^{3.406} = 2546.830253$$

$N = 2546.830253$. Este número es el *antilogaritmo* de 3.406.

Cuando determinamos el valor del número a partir del logaritmo, decimos que encontramos el **antilogaritmo** o **logaritmo inverso**. Si el logaritmo de N es L, entonces N es el antilogaritmo o logaritmo inverso de L.

Antilogaritmo

Si $\log N = L$, entonces $N = \text{antilog } L$.

Cuando nos dan el logaritmo común, que es el exponente de la base 10, el *antilogaritmo es el número* que se obtiene cuando la base 10 se eleva a ese exponente.

Ejemplos

$$\underbrace{\log 962}_{\text{Número}} = \underbrace{2.9831751}_{\text{Exponente}} \qquad \text{antilog } \underbrace{2.9831751}_{\text{Exponente}} = \underbrace{962}_{\text{Número}}$$

$$\underbrace{\log 0.00046}_{\text{Número}} = \underbrace{-3.3372422}_{\text{Exponente}} \qquad \text{antilog } \underbrace{(-3.3372422)}_{\text{Exponente}} = \underbrace{0.00046}_{\text{Número}}$$

Al determinar un antilogaritmo, empezamos con el logaritmo, o el exponente, y terminamos con el número igual a 10 elevado a ese logaritmo o exponente. Si antilog $(-3.3372422) = 0.00046$ entonces $10^{-3.3372422} = 0.00046$.

CÓMO USAR SU CALCULADORA Determinación de logaritmos

Calculadora científica

Para determinar antilogaritmos en una calculadora científica, introduzca el logaritmo y presione la tecla [2nd], [INV] o [Shift] dependiendo de cual de ellas tenga su calculadora. Luego presione la tecla [LOG] Después de presionar la tecla [LOG], se desplegará el antilogaritmo.

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determinar antilog 2.9831751.	2.9831751 [INV] [LOG]	962.00006*
Determinar antilog (–3.3372422)	3.3372422 [+/−] [INV] [LOG]	0.00046**

Cuando se quiere determinar el antilogaritmo de un valor negativo, primero hay que introducir el valor y luego presionar la tecla [+/−] antes de presionar las teclas de la inversa y de logaritmo.

* Algunas calculadoras dan respuestas ligeramente diferentes, dependiendo de su electrónica.
** Algunas calculadoras pueden mostrar las respuestas en notación científica.

Calculadora graficadora

En casi todas las calculadoras graficadoras, para obtener un antilogaritmo hay que presionar la tecla [2nd] y luego la tecla [LOG] antes de ingresar el logaritmo.

En la TI-84 Plus y en algunas otras calculadoras, 10^x se encuentra impreso directamente arriba de la tecla [LOG]. En realidad, el antilogaritmo es el valor de 10^x, en donde x es el logaritmo. En la TI-84 Plus, cuando se presiona [2nd] [LOG], en la pantalla aparece 10^ seguido de un paréntesis izquierdo. Entonces se ingresa el logaritmo seguido por la tecla [ )]. El antilogaritmo aparecerá en la pantalla después de presionar la tecla [ENTER].

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determinar antilog 2.9831751	[2nd] [LOG]† (2.9831751 [ )] [ENTER]	962.0000619
Determinar antilog (−3.3372422).	[2nd] [LOG] ([(−)] 3.3372422 [ )] [ENTER]	4.599999664E⁻4††

†La TI-84 Plus genera automáticamente el paréntesis izquierdo.
††Recuerde que este número es 0.0004599999664, sólo que está escrito en notación científica.

En vista de que por lo común no necesitamos toda la precisión que proporcionan casi todas las calculadoras, en el siguiente conjunto de ejercicios redondearemos los logaritmos a cuatro decimales y los antilogaritmos a tres **dígitos significativos**. En un número escrito en forma decimal, todos los ceros que preceden al primer dígito distinto de cero son dígitos no significativos. El primer dígito distinto de cero de izquierda a derecha en un número, es el primer dígito significativo.

Ejemplos

0.0063402	El primer dígito significativo aparece sombreado.
3.0424080	Los tres primeros dígitos significativos aparecen sombreados.
0.0000138483	Los tres primeros dígitos significativos aparecen sombreados.
206,435.05	Los cuatro primeros dígitos significativos aparecen sombreados.

Aunque casi todos los antilogaritmos serán números irracionales, cuando los escribamos utilizaremos un signo de igual en lugar de un signo de aproximadamente igual, como hicimos al evaluar logaritmos. Todos los antilogaritmos se aproximarán a tres dígitos significativos, por lo menos.

EJEMPLO 2 Determine el valor obtenido cuando la base 10 se eleva a la potencia -1.052.

Solución Se nos pide determinar el valor de $10^{-1.052}$. Como nos dieron el exponente, o logaritmo, podemos determinar el valor tomando el antilogaritmo de -1.052.

$$\text{antilog}\,(-1.052) = 0.0887156$$

Por lo tanto, $10^{-1.052} = 0.0887$, redondeado a tres dígitos significativos.

Ahora resuelva el ejercicio 55

EJEMPLO 3 Si $\log N = 4.192$, determine N.

Solución Se nos ha dado el logaritmo y nos piden determinar el antilogaritmo, o el número N.

$$\text{antilog}\,4.192 = 15{,}559.6563$$

Así, $N = 15{,}559.6563$.

Ahora resuelva el ejercicio 33

EJEMPLO 4 Determine los siguientes antilogaritmos; redondee las respuestas a tres dígitos significativos.

a) antilog 6.827 **b)** antilog (-2.35)

Solución

a) Con una calculadora, determinamos que $6.827 = 6{,}714{,}288.5$, al redondear a tres dígitos significativos, obtenemos antilog $6.827 = 6{,}710{,}000$.

b) Con ayuda de una calculadora, determinamos que antilog $(-2.35) = 0.0044668$. Al redondear a tres dígitos significativos, obtenemos antilog $(-2.35) = 0.00447$.

Ahora resuelva el ejercicio 25

EJEMPLO 5 **Terremoto** En la escala Richter, la magnitud de un terremoto está dada por la fórmula $R = \log I$, donde I es el número de veces que es más intenso el sismo respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse. ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 6.2 en la escala Richter que la actividad sísmica más pequeña que puede medirse?

Solución Queremos determinar el valor de I; se nos ha dicho que $R = 6.2$. Al sustituir 6.2 por R en la fórmula $R = \log I$, y después de despejar I, tenemos

$$R = \log I$$

$$6.2 = \log I \qquad \text{Sustituir } R \text{ por } 6.2.$$

Para determinar I necesitamos tomar el antilogaritmo en ambos lados de la ecuación.

$$\text{antilog } 6.2 = I$$
$$1{,}580{,}000 = I$$

Por lo tanto, este terremoto es aproximadamente 1,580,000 veces más intenso que la actividad sísmica más pequeña que puede medirse.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 85

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.5

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué son los logaritmos comunes?
2. Escriba $\log N = L$ en forma exponencial.
3. ¿Qué son los antilogaritmos?
4. Si $\log 793 = 2.8993$, ¿cuál es el antilog 2.8993?

Práctica de habilidades

Determine el logaritmo común de cada número. Redondee la respuesta a cuatro decimales.

5. 86
6. 352
7. 19,200
8. 1000
9. 0.0613
10. 941,000
11. 100
12. 0.000835
13. 3.75
14. 0.375
15. 0.0173
16. 0.00872

Determine el antilogaritmo de cada logaritmo. Redondee la respuesta a tres dígitos significativos.

17. 0.2137
18. 1.3845
19. 4.6283
20. 3.5527
21. -1.7086
22. -3.7431
23. 0.0000
24. 5.5922
25. 2.7625
26. -0.1543
27. -4.1390
28. -2.8139

Determine cada número N, redondéelo a tres dígitos significativos.

29. $\log N = 2.0000$
30. $\log N = 1.4612$
31. $\log N = 3.3817$
32. $\log N = 1.9330$
33. $\log N = 4.1409$
34. $\log N = -2.103$
35. $\log N = -1.06$
36. $\log N = -3.1469$
37. $\log N = -0.6218$
38. $\log N = 1.5177$
39. $\log N = -0.1256$
40. $\log N = -1.3206$

¿A qué exponente debe elevarse la base 10 para obtener cada uno de los siguientes números? Redondee su respuesta a cuatro decimales.

41. 3560
42. 817,000
43. 0.0727
44. 0.00612
45. 243
46. 8.16
47. 0.00592
48. 73,700,000

Determine el valor de 10 cuando se le eleva a los siguientes exponentes. Redondee su respuesta a tres dígitos significativos.

49. 2.8316
50. 3.2473
51. -0.5186
52. -3.7081
53. -1.4802
54. 4.5619
55. 1.3503
56. -2.1918

Cambiando de la forma logarítmica a la forma exponencial, evalúe el logaritmo común sin utilizar una calculadora.

57. $\log 1$
58. $\log 100$
59. $\log 0.1$
60. $\log 1000$
61. $\log 0.01$
62. $\log 10$
63. $\log 0.001$
64. 0.0001

En la sección 9.4 se estableció que para $a > 0$ y $a \neq 1$, $\log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x\ (x > 0)$. Al rescribir estas propiedades con logaritmos comunes ($a = 10$), obtenemos $\log 10^x = x$ y $10^{\log x} = x\ (x > 0)$, respectivamente. Utilice estas propiedades para evaluar lo siguiente.

65. $\log 10^7$
66. $\log 10^{3.4}$
67. $10^{\log 7}$
68. $10^{\log 3.4}$
69. $4 \log 10^{5.2}$
70. $8 \log 10^{1.2}$
71. $5(10^{\log 8.3})$
72. $2.3(10^{\log 5.2})$

Resolución de problemas

73. Suponga que utilizó su calculadora para obtener log 462, y el resultado fue 1.6646. ¿Este valor puede ser correcto? Explique.
74. Suponga que utilizó su calculadora para obtener log 6250, y el resultado fue 2.7589. ¿Este valor puede ser correcto? Explique.

75. Con su calculadora, calculó log 0.163 y obtuvo el valor -2.7878. ¿Este valor puede ser correcto? Explique.

76. Suponga que utilizó su calculadora para obtener $\log(-1.23)$, y el resultado fue 0.08991. ¿Este valor puede ser correcto? Explique.

77. ¿Es $\log \frac{y}{4x} = \log y - \log 4 + \log x$? Explique.

78. ¿Es $\log \frac{5x^2}{3} = 2(\log 5 + \log x) - \log 3$? Explique.

Si $\log 25 = 1.3979$ *y* $\log 5 = 0.6990$, *determine la respuesta, si esto es posible; en caso de que no sea posible determinar la respuesta, indíquelo. No determine los logaritmos con su calculadora. Utilícela solamente para verificar las respuestas.*

79. log 125 **80.** log 35 **81.** $\log \frac{1}{5}$

82. $\log \frac{1}{25}$ **83.** log 625 **84.** $\log \sqrt{5}$

Resuelva los ejercicios 85 a 88 mediante $R = \log I$, *(vea el ejemplo 5). Redondee sus respuestas a tres dígitos significativos.*

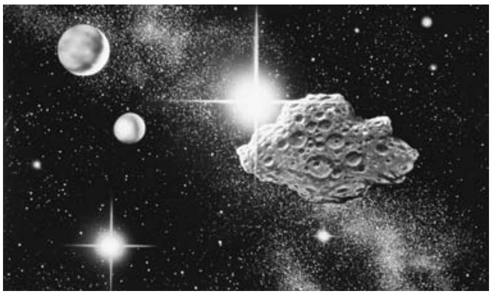
85. Determine I si $R = 3.4$

86. Determine I si $R = 4.9$

87. Determine I si $R = 5.7$

88. Determine I si $R = 8.1$

89. Astronomía Los astrónomos utilizan la fórmula siguiente para determinar el diámetro, en kilómetros, de planetas menores (también llamados asteroides): $\log d = 3.7 - 0.2g$, donde g es una cantidad llamada magnitud absoluta del asteroide. Determine el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es **a)** 11 y **b)** 20. **c)** Determine la magnitud absoluta de un asteroide cuyo diámetro mide 5.8 kilómetros.



90. Exámenes La calificación promedio en un examen es una función del número de horas dedicadas a estudiar para presentarlo. La calificación promedio, $f(x)$, en puntos, puede calcularse mediante $f(x) = \log 0.3x + 1.8$, donde x es el número de horas dedicadas a estudiar para presentarlo. La calificación máxima posible en el examen es 4.0. Determine la calificación que recibe una persona que dedicó al estudió **a)** 15 horas, **b)** 55 horas.

91. Retención de conocimientos Sammy Barcia acaba de terminar un curso de biología. El porcentaje del curso que él recordará dentro de t meses puede calcularse mediante la función

$$R(t) = 94 - 46.8 \log(t + 1)$$

para $0 \le t \le 48$. Determine el porcentaje del curso que Sammy recordará, dentro de **a)** 2 meses y **b)** 48 meses.

92. Retención de conocimientos Karen Frye acaba de terminar un curso de psicología. El porcentaje del curso que recordará dentro de t meses puede calcularse mediante la función

$$R(t) = 85 - 41.9 \log(t + 1)$$

para $0 \le t \le 48$. Determine el porcentaje del curso que Karen recordará dentro de **a)** 10 meses, y **b)** 25 meses.

93. Terremoto ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto de 4.6 grados en la escala Richter, respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse? Vea el ejemplo 5.

94. Vehículos deportivos En Estados Unidos, las ventas de automóviles deportivos han ido aumentando desde 1992. El número de ventas de cada año, $f(t)$, en millones, puede aproximarse mediante la función $f(t) = 0.98 + 1.97 \log(t + 1)$, donde $t = 0$ representa a 1992, $t = 1$ representa a 1993, y así sucesivamente. Si esta tendencia continúa, calcule el número de automóviles deportivos vendidos en **a)** 2003, **b)** 2008.

95. Energía de un terremoto Una fórmula que se utiliza en ocasiones para calcular la energía sísmica liberada por un terremoto es $\log E = 11.8 + 1.5m_s$, donde E es la energía sísmica y m_s es la magnitud de la superficie de la onda.

a) Determine la energía liberada por un terremoto cuya magnitud de la superficie de la onda es 6.

b) Si la energía liberada durante un terremoto es 1.2×10^{15}, ¿cuál es la magnitud de la superficie de la onda?

96. Presión del sonido El nivel de la presión del sonido, s_p, está dada por la fórmula $s_p = 20 \log \frac{p_r}{0.0002}$, donde p_r es la presión del sonido en dinas/cm^2.

a) Determine el nivel si la presión del sonido es de 0.0036 dinas/cm^2.

b) Si el nivel es 10.0, determine la presión del sonido.

97. Terremoto La escala Richter, usada para medir la intensidad (o fuerza) de los terremotos, relaciona la magnitud, M, del terremoto con la energía que libera, E, en ergios, mediante la fórmula

$$M = \frac{\log E - 11.8}{1.5}$$

Si un terremoto libera 1.259×10^{21} ergios de energía, ¿cuál es su magnitud en la escala Richter?

98. pH de una solución El pH es una medida de la acidez o alcalinidad de una solución. Por ejemplo, el pH del agua es 7. En general, las soluciones ácidas tienen números de pH menores que 7, y las soluciones alcalinas mayores que 7. El pH de una solución se define como $\text{pH} = -\log[H_3O^+]$, donde H_3O^+ representa la concentración de ión hidronio en la solución. Determine el pH de una solución cuya concentración de ión hidronio es 2.8×10^{-3}.

Retos

99. Despeje I en la fórmula $R = \log I$.

100. Despeje E en la fórmula $\log E = 11.8 + 1.5m$.

101. Despeje t en la fórmula $R = 26 - 41.9 \log (t + 1)$.

102. Despeje x en la fórmula $f = 76 - \log x$.

Actividad en grupo

103. En la sección 9.7 analizaremos la *fórmula de cambio de base*, $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, donde a y b son bases y x es un número positivo.

a) Miembro 1 del grupo: Utilice la fórmula de cambio de base para evaluar $\log_3 45$. (*Pista:* Haga $b = 10$).

b) Miembro 2: Repita la parte **a)** para $\log_5 30$.

c) Miembro 3: Repita la parte **a)** para $\log_6 40$.

d) Utilicen el hecho de que $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, donde $b = 10$, para graficar en equipo la ecuación $y = \log_2 x$ para $x > 0$. Si tienen una calculadora graficadora, utilícenla.

Ejercicios de repaso acumulativo

[4.3] **104.** **Automóviles** Dos automóviles parten del mismo punto y viajan en direcciones opuestas. Uno viaja 5 millas por hora más rápido que el otro. Al cabo de 4 horas, los dos automóviles están separados por una distancia de 420 millas. Determine la velocidad de cada automóvil.

[4.5] **105.** Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3r &= -4s - 6 \\ 3s &= -5r + 1 \end{aligned}$$

[5.8] **106.** Despeje x en la ecuación $3x^3 + 3x^2 - 36x = 0$.

[7.1] **107.** Escriba $\sqrt{(3x^2 - y)^2}$ como un valor absoluto.

[8.6] **108.** Resuelva $(x - 5)(x + 4)(x - 2) \leq 0$ y proporcione la solución en notación de intervalos.

9.6 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

1 Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

2 Resolver aplicaciones.

1 Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En las secciones 9.2 y 9.3 hablamos de las **ecuaciones exponenciales** y **logarítmicas**; en ésta daremos más ejemplos de su uso, y analizaremos procedimientos adicionales para resolver tales ecuaciones.

Para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, con frecuencia utilizamos las propiedades siguientes.

Propiedades para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas

a. Si $x = y$, entonces $a^x = a^y$.

b. Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$.

c. Si $x = y$, entonces $\log_b x = \log_b y$ $(x > 0, y > 0)$.

d. Si $\log_b x = \log_b y$, entonces $x = y$ $(x > 0, y > 0)$. **Propiedades 6a a 6d**

Cuando expliquemos cómo resolver los ejemplos de esta sección, haremos referencia a estas propiedades.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $8^x = \dfrac{1}{2}$.

Solución Para resolver esta ecuación escribimos ambos lados con la misma base, 2, y luego utilizamos la propiedad 6b.

$$8^x = \frac{1}{2}$$

$$(2^3)^x = \frac{1}{2} \qquad \textit{Escribir 8 como } 2^3.$$

$$2^{3x} = 2^{-1} \qquad \textit{Escribir } \frac{1}{2} \textit{ como } 2^{-1}.$$

Usando la propiedad 6b, podemos escribir

$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

Ahora resuelva el ejercicio 7

Cuando ninguno de los dos lados de la ecuación exponencial pueden escribirse como una potencia de la misma base, con frecuencia empezamos tomando logaritmos de ambos lados de la ecuación, como en el ejemplo 2. En los ejemplos siguientes redondearemos los logaritmos al diezmilésimo más cercano.

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva la ecuación $5^n = 28$.

Solución Tome el logaritmo de ambos lados de la ecuación y despeje n.

$$\log 5^n = \log 28$$
$$n \log 5 = \log 28 \qquad \textit{Regla de la potencia.}$$
$$n = \frac{\log 28}{\log 5} \qquad \textit{Dividir ambos lados entre log 5.}$$
$$\approx \frac{1.4472}{0.6990} \approx 2.0704$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 23**

Algunas ecuaciones logarítmicas pueden resolverse expresándolas en forma exponencial. Pero recuerde: **es necesario comprobar las ecuaciones logarítmicas para ver si tienen soluciones extrañas**. Si al verificar una solución se obtiene el logaritmo de un número no positivo, significa que ésta es extraña.

EJEMPLO 3 ▸ Resuelva la ecuación $\log_2 (x + 3)^3 = 4$.

Solución Escriba la ecuación en forma exponencial.

$$(x + 3)^3 = 2^4 \qquad \textit{Escribir en forma exponencial.}$$
$$(x + 3)^3 = 16$$
$$x + 3 = \sqrt[3]{16} \qquad \textit{Tomar la raíz cúbica de ambos lados.}$$
$$x = -3 + \sqrt[3]{16} \qquad \textit{Despejar x.}$$

Compruebe

$$\log_2 (x + 3)^3 = 4$$
$$\log_2 [(-3 + \sqrt[3]{16}) + 3]^3 \stackrel{?}{=} 4$$
$$\log_2 (\sqrt[3]{16})^3 \stackrel{?}{=} 4$$
$$\log_2 16 \stackrel{?}{=} 4 \qquad (\sqrt[3]{16})^3 = 16$$
$$2^4 \stackrel{?}{=} 16 \qquad \textit{Escribir en forma exponencial.}$$
$$16 = 16 \qquad \textit{Verdadero}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 43**

Otras ecuaciones logarítmicas pueden resolverse mediante las propiedades de los logaritmos explicadas en las secciones anteriores.

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $\log(3x + 2) + \log 9 = \log(x + 5)$.

Solución

$$\begin{aligned}
\log(3x + 2) + \log 9 &= \log(x + 5) \\
\log[(3x + 2)(9)] &= \log(x + 5) && \textit{Regla del producto.} \\
(3x + 2)(9) &= (x + 5) && \textit{Propiedad 6d.} \\
27x + 18 &= x + 5 \\
26x + 18 &= 5 \\
26x &= -13 \\
x &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Compruebe que la solución es $-\frac{1}{2}$.

Ahora resuelva el ejercicio 51

EJEMPLO 5 Resuelva la ecuación $\log x + \log(x + 1) = \log 12$.

Solución

$$\begin{aligned}
\log x + \log(x + 1) &= \log 12 \\
\log x(x + 1) &= \log 12 && \textit{Regla del producto.} \\
x(x + 1) &= 12 && \textit{Propiedad 6d.} \\
x^2 + x &= 12 \\
x^2 + x - 12 &= 0 \\
(x + 4)(x - 3) &= 0
\end{aligned}$$

$$x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -4 \qquad\qquad x = 3$$

Compruebe $x = -4$

$$\begin{aligned}
\log x + \log(x + 1) &= \log 12 \\
\log(-4) + \log(-4 + 1) &\stackrel{?}{=} \log 12 \\
\log(-4) + \log(-3) &\stackrel{?}{=} \log 12
\end{aligned}$$

¡Alto! ↑ ↑

Los logaritmos de números negativos no son números reales.

$x = 3$

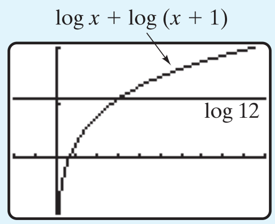
$$\begin{aligned}
\log x + \log(x + 1) &= \log 12 \\
\log 3 + \log(3 + 1) &\stackrel{?}{=} \log 12 \\
\log 3 + \log 4 &\stackrel{?}{=} \log 12 \\
\log[(3)(4)] &\stackrel{?}{=} \log 12 \\
\log 12 &= \log 12 && \textit{Verdadero}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, -4 es una solución extraña. La única solución es 3.

Ahora resuelva el ejercicio 65

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Hemos explicado cómo se pueden resolver de manera gráfica las ecuaciones con una variable. Las ecuaciones logarítmicas y exponenciales también pueden resolverse de forma gráfica; para hacerlo graficamos cada lado de la ecuación y determinamos la coordenada x del punto de intersección de las dos gráficas. En el ejemplo 5 determinamos que la solución a la ecuación $\log x + \log(x + 1) = \log 12$ es 3. La **figura 9.26** muestra la solución gráfica de esta ecuación. La recta horizontal es la gráfica de $y = \log 12$, ya que $\log 12$ es una constante. Observe que la coordenada x del punto de intersección de las dos gráficas, 3, es la solución de la ecuación.



$-2, 10, 1, -1, 2, 1$

FIGURA 9.26

EJEMPLO 6 Resuelva la ecuación $\log(3x - 5) - \log 5x = 1.23$.

Solución

$$\log(3x - 5) - \log 5x = 1.23$$

$$\log \frac{3x-5}{5x} = 1.23 \qquad \textit{Regla del cociente.}$$

$$\frac{3x-5}{5x} = \text{antilog } 1.23 \qquad \textit{Tomar el antilogaritmo de ambos lados.}$$

$$\frac{3x-5}{5x} = 17.0 \qquad \textit{Redondear a tres dígitos significativos.}$$

$$3x - 5 = 5x(17.0) \qquad \textit{Multiplicar ambos lados por 5x.}$$

$$3x - 5 = 85x$$

$$-5 = 82x$$

$$x = -\frac{5}{82} \approx -0.061$$

Compruebe

$$\log(3x - 5) - \log 5x = 1.23$$

$$\log[3(-0.061) - 5] - \log[(5)(-0.061)] \stackrel{?}{=} 1.23$$

$$\log(-5.183) - \log(-0.305) \stackrel{?}{=} 1.23 \qquad \textit{¡Alto!}$$

Como tenemos logaritmos de números negativos, -0.061 es una solución extraña. Por lo tanto, esta ecuación no tiene solución o, en otras palabras, su solución es el conjunto vacío, $\varnothing$.

Ahora resuelva el ejercicio 57

Sugerencia útil

A continuación se muestran algunos de los pasos empleados en las soluciones de los ejemplos 3 y 6 de esta sección.

Ejemplo 3

$$\log_2(x + 3)^3 = 4$$

$$(x + 3)^3 = 2^4 \qquad \textit{Escribir en forma exponencial.}$$

Ejemplo 6

$$\log \frac{3x-5}{5x} = 1.23$$

$$\frac{3x-5}{5x} = \text{antilog } 1.23 \qquad \textit{Tomar el antilogaritmo de ambos lados.}$$

Observe que en cada caso los pasos que se siguieron fueron distintos. En el ejemplo 3 escribimos la ecuación en forma exponencial, mientras que en el ejemplo 6 tomamos el antilogaritmo de ambos lados de la ecuación. En este último ejemplo también podríamos escribir el segundo paso (línea) como $10^{1.23} = \frac{3x-5}{5x}$, y luego evaluar $10^{1.23}$ en una calculadora para obtener 17.0 (redondeado a tres dígitos significativos). Entonces podríamos continuar determinando la solución. Sin embargo, como el ejemplo 6 está dado en la base 10, decidimos tomar sólo el antilogaritmo de ambos lados. Los antilogaritmos de base 10 son fáciles de evaluar con una calculadora. Puede resolver problemas similares al ejemplo 6 por medio de cualquier método.

2 Resolver aplicaciones

Veamos ahora una aplicación que incluye una ecuación exponencial.

EJEMPLO 7 **Bacterias** Si en un inicio hay 1000 bacterias en un cultivo, y este número se duplica cada hora, entonces el número de bacterias al cabo de t horas puede calcularse mediante la fórmula

$$N = 1000(2)^t$$

¿Cuánto tiempo tardará el cultivo en tener 30,000 bacterias?

Solución

$$N = 1000(2)^t$$
$$30{,}000 = 1000(2)^t \quad \textit{Sustituir N por 30,000.}$$
$$30 = (2)^t \quad \textit{Dividir ambos lados entre 1000.}$$

Queremos determinar el valor de t; para hacerlo utilizaremos logaritmos. Comenzamos tomando el logaritmo de ambos lados de la ecuación.

$$\log 30 = \log (2)^t$$
$$\log 30 = t \log 2 \quad \textit{Regla de la potencia.}$$
$$\frac{\log 30}{\log 2} = t \quad \textit{Dividir ambos lados entre log 2.}$$
$$\frac{1.4771}{0.3010} \approx t$$
$$4.91 \approx t$$

Será necesario que transcurran casi 4.91 horas para que el cultivo tenga 30,000 bacterias.

▶ **Ahora resuelva el ejercicio 69**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.6

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Si $\log c = \log d$, ¿cuál es la relación entre c y d?

2. Si $c^r = c^s$, ¿cuál es la relación entre r y s?

3. ¿Qué se debe hacer después de resolver una ecuación logarítmica?

4. En las propiedades 6c y 6d, especificamos que x y y deben ser positivos. Explique por qué.

5. ¿Cómo puede darse cuenta rápidamente de que $\log (x + 4) = \log (-2)$ no tiene solución real?

6. ¿Puede $x = -1$ ser solución de la ecuación $\log_3 x + \log_3 (x - 8) = 2$? Explique.

Práctica de habilidades

Resuelva cada una de estas ecuaciones exponenciales sin utilizar la calculadora.

7. $5^x = 125$ **8.** $2^x = 128$ **9.** $3^x = 81$ **10.** $4^x = 256$

11. $64^x = 8$ **12.** $81^x = 3$ **13.** $7^{-x} = \frac{1}{49}$ **14.** $6^{-x} = \frac{1}{216}$

15. $27^x = \frac{1}{3}$ **16.** $25^x = \frac{1}{5}$ **17.** $2^{x+2} = 64$ **18.** $3^{x-6} = 81$

19. $2^{3x-2} = 128$ **20.** $64^x = 4^{4x+1}$ **21.** $27^x = 3^{2x+3}$ **22.** $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$

Utilice la calculadora para resolver cada ecuación. Redondee sus respuestas al centésimo más cercano.

23. $7^x = 50$ **24.** $1.05^x = 23$ **25.** $4^{x-1} = 35$ **26.** $2.3^{x-1} = 26.2$

27. $1.63^{x+1} = 25$ **28.** $4^x = 9^{x-2}$ **29.** $3^{x+4} = 6^x$ **30.** $5^x = 2^{x+5}$

Resuelva cada ecuación logarítmica. Cuando lo considere apropiado, utilice una calculadora. Si la respuesta es irracional, redondee la respuesta al centésimo más cercano.

31. $\log_{36} x = \frac{1}{2}$ **32.** $\log_{81} x = \frac{1}{2}$ **33.** $\log_{125} x = \frac{1}{3}$

34. $\log_{81} x = \frac{1}{4}$ **35.** $\log_2 x = -4$ **36.** $\log_7 x = -2$

37. $\log x = 2$ **38.** $\log x = 4$ **39.** $\log_2 (5 - 3x) = 3$

40. $\log_4 (3x + 7) = 3$ **41.** $\log_5 (x + 1)^2 = 2$ **42.** $\log_3 (a - 2)^2 = 2$

43. $\log_2 (r + 4)^2 = 4$ **44.** $\log_2 (p - 3)^2 = 6$ **45.** $\log (x + 8) = 2$

46. $\log (3x - 8) = 1$ **47.** $\log_2 x + \log_2 5 = 2$ **48.** $\log_3 2x + \log_3 x = 4$

49. $\log (r + 2) = \log (3r - 1)$

50. $\log 2a = \log (1 - a)$

51. $\log (2x + 1) + \log 4 = \log (7x + 8)$

52. $\log (x - 5) + \log 3 = \log (2x)$

53. $\log n + \log (3n - 5) = \log 2$

54. $\log (x + 4) - \log x = \log (x + 1)$

55. $\log 6 + \log y = 0.72$

56. $\log (x + 4) - \log x = 1.22$

57. $2 \log x - \log 9 = 2$

58. $\log 6000 - \log (x + 2) = 3.15$

59. $\log x + \log (x - 3) = 1$

60. $2 \log_2 x = 4$

61. $\log x = \frac{1}{3} \log 64$

62. $\log_7 x = \frac{3}{2} \log_7 9$

63. $\log_8 x = 4 \log_8 2 - \log_8 8$

64. $\log_4 x + \log_4 (6x - 7) = \log_4 5$

65. $\log_5 (x + 3) + \log_5 (x - 2) = \log_5 6$

66. $\log_7 (x + 6) - \log_7 (x - 3) = \log_7 4$

67. $\log_2 (x + 3) - \log_2 (x - 6) = \log_2 4$

68. $\log (x - 7) - \log (x + 3) = \log 6$

Resolución de problemas

Resuelva cada problema. Redondee sus respuestas al centésimo más cercano.

69. Bacterias Si el número inicial de bacterias, en el cultivo del ejemplo 7, es 4500 bacterias, ¿cuándo habrá en él 50,000 bacterias? Utilice $N = 4500(2)^t$.

70. Bacterias Si después de 4 horas en un cultivo, en el que cada hora se duplica el número de bacterias, hay 2224 bacterias, ¿cuántas bacterias había al principio?

71. Decaimiento radiactivo La cantidad, A, de material radiactivo que queda al cabo de t años en una muestra de 200 gramos, puede determinarse mediante la ecuación $A = 200(0.75)^t$. ¿Cuándo quedarán 80 gramos?

72. Decaimiento radiactivo La cantidad, A, de material radiactivo que queda al cabo de t años en una muestra de 70 gramos, puede determinarse mediante la ecuación $A = 70(0.62)^t$. ¿Cuándo quedarán 10 gramos?

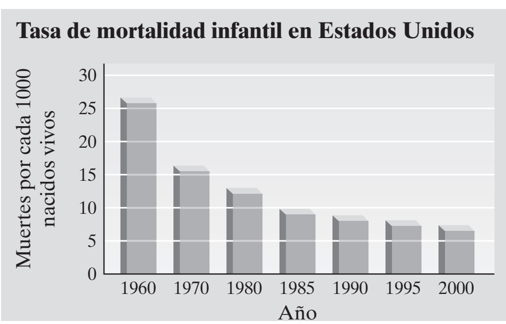
73. Cuenta de ahorros Paul Trapper invierte $2000 en una cuenta de ahorros que genera interés a una tasa de 5% capitalizable anualmente. ¿Cuánto tiempo pasará para que los $2000 se conviertan en $4600? Utilice la fórmula de interés compuesto, $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, que se analizó en la página 606.

74. Cuenta de ahorros Si Tekar Werner invierte $600 en una cuenta de ahorros que genera interés a una tasa de 6% capitalizable semestralmente, ¿cuánto tiempo pasará para que los $600 se conviertan en $1800?

75. Tasa de mortalidad infantil La tasa de mortalidad infantil (muertes por cada 1000 nacidos vivos) en Estados Unidos ha disminuido desde antes de 1959. (Aunque en otros países ha ocurrido lo mismo, la disminución ha sido menos significativa.) La tasa de mortalidad infantil en Estados Unidos puede calcularse mediante la función

$$f(t) = 26 - 12.1 \log (t + 1)$$

donde t es el número de años a partir de 1960 y $0 \le t \le 45$. Utilice esta función para calcular la tasa de mortalidad infantil en Estados Unidos en **a)** 1990, **b)** 2005.



76. Homicidios A partir de 1993, el número de homicidios en la ciudad de Nueva York ha estado disminuyendo. El número de homicidios puede calcularse mediante la función

$$f(t) = 1997 - 1576 \log (t + 1)$$

donde t es el número de años desde 1993. Si esta tendencia continúa, utilice esta función para calcular el número de homicidios en la ciudad de Nueva York en 2008.

77. Depreciación A fin de reducir el pago de impuestos, los empresarios acostumbran calcular la depreciación de la maquinaria de producción. El valor que tiene la maquinaria al final de su vida útil se denomina *valor de desecho*. Cuando la maquinaria se deprecia anualmente en un porcentaje fijo, su valor de desecho es $S = c(1 - r)^n$, donde c es el costo original, r es la tasa anual de depreciación, dada en forma decimal, y n es la vida útil en años. Determine el valor de desecho de una maquinaria que cuesta $50,000, tiene una vida útil de 12 años y su tasa de depreciación anual es de 15%.

78. Depreciación Si la maquinaria del ejercicio 77 cuesta $100,000, tiene una vida útil de 15 años y su tasa de depreciación anual es de 8%, determine su valor de desecho.

79. Ganancia de potencia de un amplificador La ganancia de potencia, P, de un amplificador se define como

$$P = 10 \log \left(\frac{P_{sal}}{P_{ent}}\right)$$

donde P_{sal} es la potencia de salida y P_{ent} es la potencia de entrada, ambas en watts. Si un amplificador tiene una potencia de salida de 12.6 watts y una potencia de entrada de 0.146 watts, determine la ganancia de potencia.

80. Terremoto De acuerdo con la escala Richter, la magnitud, R, de un terremoto de intensidad I se define por $R = \log I$, donde I es el número de veces que es más intenso el terremoto respecto del nivel mínimo que se utiliza para comparar.

a) ¿Cuántas veces fue más intenso el terremoto de San Francisco, que midió 8.25 grados en la escala Richter, que el nivel mínimo de comparación?

b) ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 8.3 grados en la escala Richter que uno que mide 4.7?

81. Magnitud del sonido La escala de decibeles se utiliza para medir la magnitud del sonido. La magnitud d, en decibeles, de un sonido se define como $d = 10 \log I$, donde I es el número de veces que es más intenso respecto de la magnitud del mínimo sonido audible.

a) El sonido del motor de un aeroplano tiene una intensidad de casi 120 decibeles. ¿Cuántas veces es más intenso ese sonido que el mínimo sonido audible?

b) El ruido en la calle de una ciudad con tráfico tiene una intensidad de 50 decibeles. ¿Cuántas veces es más intenso el sonido del motor del aeroplano que el sonido de la calle de la ciudad?

82. En el siguiente procedimiento empezamos con una afirmación verdadera y terminamos con una falsa. ¿Puede encontrar el error?

$$
\begin{array}{rl}
2 < 3 & \text{Verdadero.} \\
2 \log(0.1) < 3 \log(0.1) & \text{Multiplicar ambos lados por } \log(0.1). \\
\log(0.1)^2 < \log(0.1)^3 & \text{Propiedad 3} \\
(0.1)^2 < (0.1)^3 & \text{Propiedad 6d} \\
0.01 < 0.001 & \text{Falso.}
\end{array}
$$

83. Resuelva $8^x = 16^{x-2}$.

84. Resuelva $27^x = 81^{x-3}$.

85. Utilice ecuaciones de forma cuadrática para resolver la ecuación $2^{2x} - 6(2^x) + 8 = 0$.

86. Utilice ecuaciones de forma cuadrática para resolver la ecuación $2^{2x} - 18(2^x) + 32 = 0$.

Cambie la ecuación exponencial o logarítmica a la forma $ax + by = c$, y luego resuelva el sistema de ecuaciones.

87. $2^x = 8^y$
$x + y = 4$

88. $3^{2x} = 9^{y+1}$
$x - 2y = -3$

89. $\log(x + y) = 2$
$x - y = 8$

90. $\log(x + y) = 3$
$2x - y = 5$

Utilice su calculadora para determinar las soluciones al décimo más cercano. Si no existe solución real, indíquelo.

91. $\log(x + 3) + \log x = \log 16$

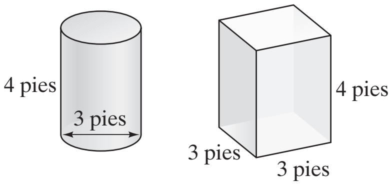
92. $\log(3x + 5) = 2.3x - 6.4$

93. $5.6 \log(5x - 12) = 2.3 \log(x - 5.4)$

94. $5.6 \log(x + 12.2) - 1.6 \log(x - 4) = 20.3 \log(2x - 6)$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **95.** Considere las dos figuras siguientes. ¿Cuál tiene mayor volumen y por cuánto es mayor?



[3.6] **96.** Sea $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = x - 1$. Determine $(g - f)(3)$.

[4.6] **97.** Determine el conjunto solución del sistema de desigualdades.

$$3x - 4y \leq 6$$
$$y > -x + 4$$

[7.5] **98.** Simplifique $\dfrac{2\sqrt{xy} - \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

[8.3] **99.** Despeje c en $E = mc^2$.

[8.5] **100.** Escriba la función para la parábola que tiene la forma de $f(x) = 2x^2$ y vértice en $(3, -5)$.

9.7 Función exponencial natural y función logaritmo natural

1. Identificar la función exponencial natural.
2. Identificar la función logaritmo natural.
3. Determinar valores mediante una calculadora.
4. Determinar logaritmos naturales mediante la fórmula de cambio de base.
5. Resolver ecuaciones logarítmicas naturales y exponenciales naturales.
6. Resolver problemas de aplicación.

La **función exponencial natural** y *su inversa*, la función **logarítmo natural**, son funciones exponenciales y funciones logarítmicas del tipo que se presentó en las secciones anteriores, así que comparten todas las propiedades que hemos venido analizando. La importancia de estas funciones especiales radica en la gran variedad de aplicaciones de la vida real de un número irracional único, designado por la letra *e*.

1 Identificar la función exponencial natural

En la sección 9.2 se indicó que las funciones exponenciales tienen la forma $f(x) = a^x$, $a > 0$ y $a \neq 1$. A continuación, sin embargo, presentaremos una función exponencial muy especial, denominada función exponencial natural, que utiliza el número ***e***. Al igual que el número irracional π, e es un número irracional cuyo valor sólo puede aproximarse mediante un número decimal. El número e desempeña un papel muy importante en cursos de matemáticas superiores, y su valor aproximado es de 2.7183. A continuación se define la función exponencial natural.

La función exponencial natural

La función exponencial natural es

$$f(x) = e^x$$

donde $e \approx 2.7183$.

2 Identificar la función logaritmo natural

En la sección 9.5 comentamos los logaritmos comunes; ahora analizaremos los logaritmos naturales.

Logaritmos naturales

Los **logaritmos naturales** son logaritmos de base e, y se indican mediante las letras ln.

$$\log_e x = \ln x$$

La notación $\ln x$ se lee el "logaritmo natural de x". La función $f(x) = \ln x$ se denomina **función logaritmo natural**.

Recuerde que la base del logaritmo natural es e y que, por lo tanto, cuando cambie un logaritmo natural a forma exponencial, la base de la expresión exponencial será e.

Logaritmo natural en forma exponencial

Para $x > 0$, si $y = \ln x$, entonces $e^y = x$.

EJEMPLO 1 ▸ Determine el valor de la expresión mediante el cambio de la forma logarítmica natural a la forma exponencial.

a) $\ln 1$ **b)** $\ln e$

Solución

a) Sea $y = \ln 1$; entonces $e^y = 1$. Como cualquier valor diferente de cero a la potencia cero es igual a 1, y debe ser igual a 0. Así, $\ln 1 = 0$.

b) Sea $y = \ln e$; entonces $e^y = e$, por lo que y debe ser igual a 1. Así, $\ln e = 1$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 1**

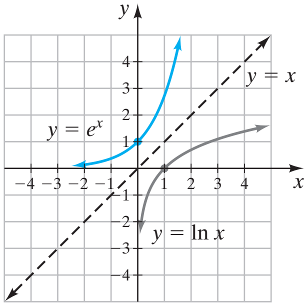


FIGURA 9.27

Las funciones $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son funciones inversas. De manera análoga, las funciones $y = e^x$ y $y = \ln x$ son funciones inversas. (Recuerde, $y = \ln x$ significa $y = \log_e x$.) Es decir, si $f(x) = e^x$, entonces $f^{-1}(x) = \ln x$.

Las gráficas de $y = e^x$ y $y = \ln x$ se ilustran en la **figura 9.27**. Observe que éstas son simétricas respecto de la recta $y = x$, tal como sucede con todas las funciones inversas.

Observe que la gráfica de $y = e^x$ es similar a las gráficas de la forma $y = a^x, a > 1$, y que la gráfica de $y = \ln x$ es similar a las gráficas de la forma $y = \log_a x, a > 1$.

3 Determinar valores mediante una calculadora

Ahora aprenderemos cómo determinar logaritmos naturales con una calculadora.

CÓMO USAR SU CALCULADORA Determinación de logaritmos naturales

Los logaritmos naturales pueden determinarse mediante una calculadora que tenga una tecla $\boxed{\text{LN}}$ Para lograrlo, se sigue un procedimiento semejante al que realizamos para determinar logaritmos comunes, pero esta vez se debe utilizar la tecla del logaritmo natural, $\boxed{\text{LN}}$, en lugar de la tecla del logaritmo común, $\boxed{\text{LOG}}$.

Calculadora científica

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determine ln 242.	242 $\boxed{\text{LN}}$	5.4889377
Determine ln 0.85.	.85 $\boxed{\text{LN}}$	−0.1625189

Calculadora graficadora*

En la TI-84 Plus, después de presionar la tecla $\boxed{\text{LN}}$ en la pantalla se muestra ln(.

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determine ln 242.	$\boxed{\text{LN}}$ (242 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	5.488937726
Determine ln 0.85.	$\boxed{\text{LN}}$ (.85 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	−.1625189295

*Esta secuencia de teclas corresponde a la calculadora TI-84 Plus. Si usted tiene otro modelo de calculadora graficadora, lea su manual para aprender a determinar logaritmos naturales en ella.

Cuando determinamos el logaritmo natural de un número, estamos buscando un exponente. El logaritmo natural de un número es el exponente al que debe elevarse la base e para obtener ese número. Por ejemplo,

$$\text{Si } \ln 242 = 5.4889377, \text{ entonces } e^{5.4889377} = 242.$$
$$\text{Si } \ln 0.85 = -0.1625189, \text{ entonces } e^{-0.1625189} = 0.85.$$

Como $y = \ln x$ y $y = e^x$ son funciones inversas, podemos utilizar la tecla $\boxed{\text{INV}}$, en combinación con la tecla del logaritmo natural, $\boxed{\text{LN}}$, para obtener valores de e^x.

CÓMO USAR SU CALCULADORA Determinación de valores de e^x

Calculadora científica

Para determinar valores de e^x, primero introduzca el exponente de e y luego presione $\boxed{\text{shift}}$, $\boxed{2^{\text{nd}}}$ o $\boxed{\text{INV}}$, dependiendo de su calculadora. A continuación presione la tecla del logaritmo natural, $\boxed{\text{LN}}$. Después de que se presione la tecla $\boxed{\text{LN}}$, el valor de e^x aparecerá en la pantalla.

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determine $e^{5.24}$.	5.24 $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{LN}}$	188.6701
Determine $e^{-1.639}$.	1.639 $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{LN}}$	0.1941741

Calculadora graficadora*

En la TI-84 Plus, después de presionar $\boxed{2^{\text{nd}}}$ $\boxed{\text{LN}}$, en la pantalla se muestra e^.

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determine $e^{5.24}$.	$\boxed{2^{\text{nd}}}$ $\boxed{\text{LN}}$ (5.24 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	188.6701024
Determine $e^{-1.639}$.	$\boxed{2^{\text{nd}}}$ $\boxed{\text{LN}}$ ($\boxed{(-)}$ 1.639 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	.1941741194

*Esta secuencia de teclas corresponde a la calculadora TI-84 Plus. Si usted tiene otro modelo de calculadora graficadora, lea su manual para aprender a determinar expresiones exponenciales naturales en ella.

Recuerde que el valor de e es de aproximadamente 2.7183. Cuando evaluamos $e^{5.24}$ o $(2.7183)^{5.24}$ en el recuadro anterior, obtuvimos un valor cercano a 188.6701. Si determináramos ln 188.6701 en una calculadora, obtendríamos un valor cercano a 5.24. ¿Qué cree que obtendríamos si evaluáramos ln 0.1941741 en una calculadora? Si respondió, "un valor cercano a -1.639", lo hizo correctamente.

EJEMPLO 2 Determine N si **a)** $\ln N = 5.26$ y **b)** $\ln N = -0.0253$.

Solución

a) Si escribimos $\ln N = 5.26$ en forma exponencial, obtenemos $e^{5.26} = N$. Por lo tanto, sólo necesitamos evaluar $e^{5.26}$ para determinar N.

$$e^{5.26} = 192.48149 \qquad \textit{Con una calculadora.}$$

Por lo tanto, $N = 192.48149$.

b) Si escribimos $\ln N = -0.0253$ en forma exponencial, obtenemos $e^{-0.0253} = N$.

$$e^{-0.0253} = 0.9750174 \qquad \textit{Con una calculadora.}$$

Por lo tanto, $N = 0.9750174$.

Ahora resuelva el ejercicio 19

4 Determinar logaritmos naturales mediante la fórmula de cambio de base

Si le dan un logaritmo en una base diferente a 10 o e, no podrá evaluarlo directamente en su calculadora. Cuando esto ocurra, puede utilizar la **fórmula de cambio de base**.

Fórmula de cambio de base

Para cualesquiera bases de logaritmos a y b, y cualquier número positivo x,

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Podemos demostrar la fórmula de cambio de base empezando con $\log_a x = m$.

$$\begin{aligned}
\log_a x &= m \\
a^m &= x && \textit{Cambiar a forma exponencial.} \\
\log_b a^m &= \log_b x && \textit{De acuerdo con la propiedad 6c de la página 630.} \\
m \log_b a &= \log_b x && \textit{Regla de la potencia.} \\
(\log_a x)(\log_b a) &= \log_b x && \textit{Sustituir } m. \\
\log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a} && \textit{Dividir ambos lados entre } \log_b a.
\end{aligned}$$

En la fórmula de cambio de base, con frecuencia se coloca 10 como valor de b, ya que podemos determinar más fácilmente los logaritmos comunes en una calculadora. Al reemplazar b con 10, obtenemos

$$\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} \quad \text{o} \quad \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

EJEMPLO 3 Utilice la fórmula de cambio de base para determinar $\log_3 24$.

Solución Si sustituimos 3 por a y 24 por x en $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$, obtenemos

$$\log_3 24 = \frac{\log 24}{\log 3} \approx \frac{1.3802}{0.4771} \approx 2.8929$$

Observe que $3^{2.8929} \approx 24$.

Ahora resuelva el ejercicio 23

Sugerencia útil

En el ejemplo 3, si calculamos los valores reales del cociente $\frac{\log 24}{\log 3}$ mediante una calculadora, el valor es ≈ 2.8928 en lugar del valor de ≈ 2.8929, que obtuvimos en el ejemplo 3. Para obtener la respuesta de ≈ 2.8929, dividimos la *aproximación* del numerador, 1.3802, entre la *aproximación* del denominador, 0.4771. Cuando, en la sección de respuestas, proporcionemos las respuestas a los ejercicios que incluyen la fórmula de cambio de base, *no* redondearemos los valores del numerador y del denominador. Sólo redondearemos la respuesta final.

Podemos utilizar el mismo procedimiento del ejemplo 3 para determinar logaritmos naturales mediante la fórmula de cambio de base. Por ejemplo, para evaluar ln 20 (o $\log_e 20$), podemos sustituir e por a y 20 por x en la fórmula $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$.

$$\log_e 20 = \frac{\log 20}{\log e} \approx \frac{1.3010}{0.4343} \approx 2.9956$$

Por lo tanto, $\ln 20 \approx 2.9956$. Si determina ln 20 en una calculadora, obtendrá un valor muy cercano.

Como $\log e \approx 0.4343$, para evaluar logaritmos naturales mediante logaritmos comunes utilizamos la fórmula

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e} \approx \frac{\log x}{0.4343}$$

EJEMPLO 4 ▸ Utilice la fórmula de cambio de base para determinar ln 95.

Solución

$$\ln 95 = \frac{\log 95}{\log e} \approx \frac{1.9777}{0.4343} \approx 4.5538$$

Si evalúa ln 95 en su calculadora, obtendrá un valor muy cercano a 4.5538. Hágalo, en consecuencia, y compruebe su resultado.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 33**

5 Resolver ecuaciones logarítmicas naturales y exponenciales naturales

Las propiedades de los logaritmos que analizamos en la sección 9.4 se cumplen también en el caso de los logaritmos naturales. A continuación se muestra un resumen de estas propiedades en la notación de logaritmos naturales.

Propiedades para logaritmos naturales

$\ln xy = \ln x + \ln y$	$(x > 0 \text{ y } y > 0)$	*Regla del producto.*
$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$	$(x > 0 \text{ y } y > 0)$	*Regla del cociente.*
$\ln x^n = n \ln x$	$(x > 0)$	*Regla de la potencia.*

Considere la expresión $\ln e^x$, que significa $\log_e e^x$. De acuerdo con la propiedad 4 de la página 621, $\log_e e^x = x$. Por lo tanto, $\ln e^x = x$. De forma análoga, $e^{\ln x} = e^{\log_e x} = x$ con base en la propiedad 5. Aunque $\ln e^x = x$ y $e^{\ln x} = x$ sólo son casos especiales de las propiedades 4 y 5, respectivamente, debido a su importancia llamaremos a estas propiedades 7 y 8, de modo que podamos hacer referencia a ellas.

Propiedades adicionales para los logaritmos naturales y las expresiones exponenciales naturales

$\ln e^x = x$		**Propiedad 7**
$e^{\ln x} = x,$	$x > 0$	**Propiedad 8**

Usando la propiedad 7, $\ln e^x = x$, podemos establecer que $\ln e^{kt} = kt$ y $\ln e^{-2.06t} = -2.06t$. Y usando la propiedad 8, $e^{\ln x} = x$, podemos establecer, por ejemplo, que $e^{\ln(t+2)} = t + 2$ y $e^{\ln kt} = kt$.

EJEMPLO 5 Despeje y en la ecuación $\ln y - \ln(x + 9) = t$.

Solución

$$\ln y - \ln(x + 9) = t$$

$$\ln \frac{y}{x + 9} = t \qquad \textit{Regla el cociente.}$$

$$\frac{y}{x + 9} = e^t \qquad \textit{Cambiar a la forma exponencial.}$$

$$y = e^t(x + 9) \qquad \textit{Despejar } y.$$

Ahora resuelva el ejercicio 63

EJEMPLO 6 Despeje t en la ecuación $225 = 450e^{-0.4t}$.

Solución Comenzamos dividiendo ambos lados de la ecuación entre 450 para aislar a $e^{-0.4t}$.

$$\frac{225}{450} = \frac{\cancel{450}e^{-0.4t}}{\cancel{450}}$$

$$0.5 = e^{-0.4t}$$

Ahora tomamos el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación para eliminar la expresión exponencial del lado derecho.

$$\ln 0.5 = \ln e^{-0.4t}$$

$$\ln 0.5 = -0.4t \qquad \textit{Propiedad 7.}$$

$$-0.6931472 = -0.4t$$

$$\frac{-0.6931472}{-0.4} = t$$

$$1.732868 = t$$

Ahora resuelva el ejercicio 49

EJEMPLO 7 Despeje t en la ecuación $P = P_0e^{kt}$.

Solución Podemos seguir el mismo procedimiento que se utilizó en el ejemplo 6.

$$P = P_0e^{kt}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\cancel{P_0}e^{kt}}{\cancel{P_0}} \qquad \textit{Dividir ambos lados entre } P_0.$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{kt}$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = \ln e^{kt} \qquad \textit{Tomar el logaritmo natural de ambos lados.}$$

$$\ln P - \ln P_0 = \ln e^{kt} \qquad \textit{Regla del cociente.}$$

$$\ln P - \ln P_0 = kt \qquad \textit{Propiedad 7.}$$

$$\frac{\ln P - \ln P_0}{k} = t \qquad \textit{Despejar } t.$$

Ahora resuelva el ejercicio 59

6 Resolver problemas de aplicación

Veamos ahora algunos problemas cuya solución incluye la aplicación de la función exponencial natural y de los logaritmos naturales.

Cuando una cantidad aumenta o disminuye a una *velocidad exponencial*, una fórmula que se utiliza con frecuencia para determinar el valor de P después de cierto tiempo t, es

$$P = P_0 e^{kt}$$

donde P_0 es el valor inicial y k es la tasa de aumento o disminución constantes. Haremos referencia a esta fórmula como la **fórmula de crecimiento (o decaimiento) exponencial**. En ella pueden usarse otras letras en lugar de P. Cuando $k > 0$, P aumenta conforme t aumenta. Cuando $k < 0$, P disminuye y se acerca cada vez más a cero conforme t aumenta.

EJEMPLO 8 ▸ **Interés capitalizable de forma continua** A menudo los bancos capitalizan el interés de manera continua. Cuando esto ocurre, la modificación del saldo de la cuenta, P, a lo largo del tiempo, t, puede calcularse mediante la fórmula de crecimiento exponencial $P = P_0 e^{kt}$, donde P_0 es el capital inicial que se invirtió y k es la tasa de interés.

a) Suponga que la tasa de interés que paga una cuenta de ahorro es de 6%, capitalizable de manera continua. Si se invierten \$1000, determine el saldo que tendrá la cuenta al cabo de 3 años.

b) ¿Cuánto tiempo pasará para que la cuenta duplique su valor?

Solución **a)** Entienda el problema y traduzca Se nos ha dicho que el capital inicial que se invirtió, P_0 fue de \$1000. También se dice que el tiempo, t, es 3 años, y que la tasa de interés, k, es de 6% o 0.06. Sustituyamos estos valores en la fórmula dada y despejemos P.

$$P = P_0 e^{kt}$$

$$P = 1000e^{(0.06)(3)}$$

Realice los cálculos

$$= 1000e^{0.18} = 1000(1.1972174) \qquad \text{Con una calculadora.}$$

$$\approx 1197.22$$

Responda Al cabo de tres años, el saldo de la cuenta es de ≈ \$1197.22.

b) Entienda el problema y traduzca Para que el valor de la cuenta se duplique, el saldo tendría que ser de \$2000. Por lo tanto, sustituimos P por 2000 y despejamos t.

$$P = P_0 e^{kt}$$

$$2000 = 1000e^{0.06t}$$

$$2 = e^{0.06t} \qquad \text{Dividir ambos lados entre 1000.}$$

Realice los cálculos

$$\ln 2 = \ln e^{0.06t} \qquad \text{Tome el logaritmo natural de ambos lados.}$$

$$\ln 2 = 0.06t \qquad \text{Propiedad 7.}$$

$$\frac{\ln 2}{0.06} = t$$

$$\frac{0.6931472}{0.06} = t$$

$$11.552453 \approx t$$

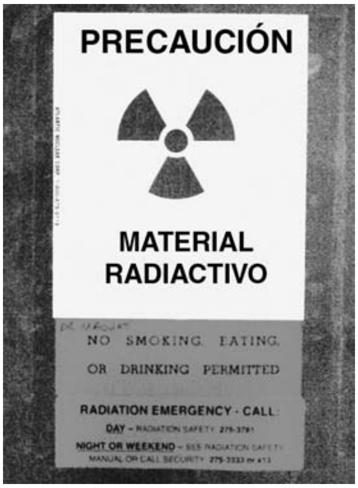
Responda Así, con una tasa de interés de 6% capitalizable de manera continua, la cuenta se duplica en aproximadamente 11.6 años.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 69

EJEMPLO 9 ▸ **Decaimiento radiactivo** El estroncio 90 es un isótopo radiactivo que decae exponencialmente a una velocidad de 2.8% cada año. Suponga que al inicio hay 1000 gramos de estroncio 90 en una sustancia.

a) Determine el número de gramos de estroncio 90 que quedarán después de 50 años.

b) Determine la vida media del estroncio 90.



Solución **a)** Entienda el problema Como el estroncio 90 decae al paso del tiempo, el valor de k en la fórmula $P = P_0e^{kt}$ es negativo. Como la tasa de decaimiento es 2.8% anual, usamos $k = -0.028$. Por lo tanto, la fórmula que usamos es $P = P_0e^{-0.028t}$.

Traduzca
$$P = P_0e^{-0.028t}$$
$$= 1000e^{-0.028(50)}$$

Realice los cálculos
$$= 1000e^{-1.4} = 1000(0.246597) = 246.597$$

Responda Por lo tanto, al cabo de 50 años quedarán 246.597 gramos de estroncio 90.

b) Para determinar la vida media, necesitamos determinar cuándo quedan 500 gramos de estroncio 90.

$$P = P_0e^{-0.028t}$$
$$500 = 1000e^{-0.028t}$$
$$0.5 = e^{-0.028t} \quad \textit{Dividir ambos lados entre 1000.}$$
$$\ln 0.5 = \ln e^{-0.028t} \quad \textit{Tomar el logaritmo natural en ambos lados.}$$
$$-0.6931472 = -0.028t \quad \textit{Propiedad 7.}$$
$$\frac{-0.6931472}{-0.028} = t$$
$$24.755257 \approx t$$

Por lo tanto, la vida media del estroncio 90 es de aproximadamente 24.8 años.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 71**

EJEMPLO 10 ▸ **Venta de juguetes** La fórmula para calcular la cantidad de dinero, A, que se gasta en la publicidad de ciertos juguetes es $A = 350 + 650 \ln n$, en donde n es el número esperado de juguetes que se venderán.

a) Si la compañía desea vender 2200 juguetes, ¿cuánto dinero gastará en publicidad?

b) ¿Cuántos juguetes puede vender si destina $6000 a la publicidad?

Solución

a)
$$A = 350 + 650 \ln n$$
$$= 350 + 650 \ln 2200 \quad \textit{Sustituir n por 2200.}$$
$$= 350 + 650(7.6962126)$$
$$= 5352.54$$

Por lo tanto, la compañía gastará $5352.54 en publicidad.

b) Entienda el problema y traduzca Nos piden determinar el número de juguetes que la compañía puede vender, n, si destinan $6000 a publicidad. Sustituyamos los valores dados en la ecuación y despejemos n.

$$A = 350 + 650 \ln n$$

Realice los cálculos
$$6000 = 350 + 650 \ln n \quad \textit{Sustituir A por 6000.}$$
$$5650 = 650 \ln n \quad \textit{Restar 350 en ambos lados.}$$
$$\frac{5650}{650} = \ln n \quad \textit{Dividir ambos lados entre 650.}$$
$$8.69231 \approx \ln n$$
$$e^{8.69231} \approx n \quad \textit{Cambiar a forma exponencial.}$$
$$5957 \approx n \quad \textit{Obtener la respuesta con una calculadora.}$$

Responda Por lo tanto, si se destinan $6000 a publicidad, la compañía puede esperar vender alrededor de 5957 juguetes.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 75**

CÓMO USAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Las ecuaciones que tienen logaritmos naturales y funciones exponenciales naturales pueden resolverse en una calculadora graficadora. Por ejemplo, para resolver la ecuación $\ln x + \ln(x + 3) = \ln 8$, hacemos

$$Y_1 = \ln x + \ln(x + 3)$$
$$Y_2 = \ln 8$$

y determinamos la intersección de las gráficas, como se muestra en la **figura 9.28**.

En la **figura 9.28** usamos la opción CALC, INTERSECT para determinar la intersección de las gráficas. La solución es la coordenada x de la intersección. Redondeada al diezmilésimo más cercano, la solución de la ecuación es $x = 1.7016$.

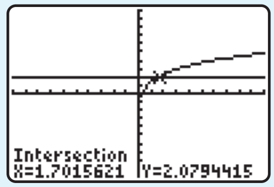


FIGURA 9.28

Para resolver la ecuación $4e^{0.3x} - 5 = x + 3$, hacemos

$$Y_1 = 4e^{0.3x} - 5$$
$$Y_2 = x + 3$$

y determinamos la intersección de las gráficas, como se muestra en la **figura 9.29**. Esta ecuación tiene dos soluciones, ya que hay dos intersecciones.

Las soluciones de la ecuación son aproximadamente $x = -7.5896$ y $x = 3.5284$. En los ejercicios 93 a 97 utilizaremos una calculadora graficadora para comprobar o resolver ecuaciones.

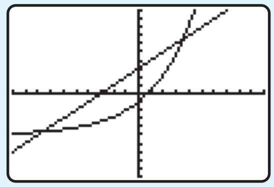


FIGURA 9.29

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.7

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) ¿Cuál es la base de una función exponencial natural?
   b) ¿Cuál es el valor aproximado de e?
2. ¿De qué otra forma escribimos $\log_e x$?
3. ¿Cuál es el dominio de $\ln x$?
4. ¿Bajo qué condiciones será $\ln x < 0$?
5. Enuncie la fórmula de cambio de base.
6. ¿Se cumple $n \log_e x = \ln x^n$? Explique.
7. ¿A qué es igual $\ln e^x$?
8. ¿A qué es igual $e^{\ln x}$?
9. ¿Cuál es la inversa de $\ln x$?
10. En la fórmula $P = P_0 e^{kt}$, ¿bajo qué circunstancias P aumentará cuando t aumente?
11. En la fórmula $P = P_0 e^{kt}$, ¿bajo qué circunstancias P disminuirá cuando t aumente?
12. ¿Es posible determinar el valor de $\ln(-3.52)$? Explique.

Práctica de habilidades

Determine los siguientes valores. Redondee los valores a cuatro lugares decimales.

13. $\ln 62$
14. $\ln 791$
15. $\ln 0.813$
16. $\ln 0.000568$

Determine el valor de N. Redondee los valores a tres dígitos significativos.

17. $\ln N = 1.6$
18. $\ln N = 5.2$
19. $\ln N = -2.85$
20. $\ln N = 0.543$
21. $\ln N = -0.0287$
22. $\ln N = -0.674$

Utilice la fórmula de cambio de base para determinar el valor de los logaritmos siguientes. No redondee los logaritmos en la fórmula. Escriba la respuesta redondeada al diezmilésimo más cercano.

23. $\log_3 56$
24. $\log_3 198$
25. $\log_2 21$
26. $\log_2 89$
27. $\log_4 11$
28. $\log_4 316$
29. $\log_5 82$
30. $\log_5 1893$
31. $\log_6 185$
32. $\log_6 806$
33. $\ln 51$
34. $\ln 3294$
35. $\log_5 0.463$
36. $\log_3 0.0365$

Resuelva las ecuaciones logarítmicas siguientes.

37. $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 12$
38. $\ln(x + 4) + \ln(x - 2) = \ln 16$
39. $\ln x + \ln(x + 4) = \ln 5$
40. $\ln(x + 3) + \ln(x - 3) = \ln 40$
41. $\ln x = 5 \ln 2 - \ln 8$
42. $\ln x = \frac{3}{2}\ln 16$
43. $\ln(x^2 - 4) - \ln(x + 2) = \ln 4$
44. $\ln(x + 12) - \ln(x - 4) = \ln 5$

Cada una de estas ecuaciones está en la forma $P = P_0e^{kt}$. Resuelva para la variable que queda. Recuerde, e es una constante. Escriba la respuesta redondeada al diezmilésimo más cercano.

45. $P = 120e^{2.3(1.6)}$
46. $900 = P_0e^{(0.4)(3)}$
47. $50 = P_0e^{-0.5(3)}$
48. $18 = 9e^{2t}$
49. $60 = 20e^{1.4t}$
50. $29 = 58e^{-0.5t}$
51. $86 = 43e^{k(3)}$
52. $15 = 75e^{k(4)}$
53. $20 = 40e^{k(2.4)}$
54. $100 = A_0e^{-0.02(3)}$
55. $A = 6000e^{-0.08(3)}$
56. $51 = 68e^{-0.04t}$

Despeje la variable que se indica.

57. $V = V_0e^{kt}$, despeje V_0
58. $P = P_0e^{kt}$, despeje P_0
59. $P = 150e^{7t}$, despeje t
60. $361 = P_0e^{kt}$, despeje t
61. $A = A_0e^{kt}$, despeje k
62. $167 = R_0e^{kt}$, despeje k
63. $\ln y - \ln x = 2.3$, despeje y
64. $\ln y + 9 \ln x = \ln 2$, despeje y
65. $\ln y - \ln (x + 6) = 5$ despeje y
66. $\ln (x + 2) - \ln (y - 1) = \ln 5$, despeje y

Resolución de problemas

Utilice una calculadora para resolver los problemas siguientes.

67. Si $e^x = 12.183$, determine el valor de x. Explique cómo obtuvo su respuesta.

68. ¿A qué exponente debe elevar la base e para obtener el valor 184.93? Explique cómo obtuvo su respuesta.

69. Interés compuesto de manera continua Si \$5000 se invierten a 6% compuesto de manera continua,

a) determine el saldo de la cuenta después de 2 años.

b) ¿En cuánto tiempo se duplicará la cuenta? (Vea el ejemplo 8).

70. Interés compuesto de manera continua Si \$3000 se invierten a 3% compuesto de forma continua,

a) determine el saldo de la cuenta después de 30 años.

b) ¿En cuánto tiempo se duplicará la cuenta?

71. Decaimiento radiactivo Consulte el ejemplo 9. Si en un inicio había 70 gramos, determine la cantidad de estroncio 90 que queda después de 20 años.

72. Estroncio 90 Consulte el ejemplo 9. Si en un inicio había 200 gramos, determine la cantidad de estroncio 90 que queda después de 40 años.

73. Sodas El porcentaje del mercado objetivo, $f(t)$, que compra cierta bebida refrescante, es una función del número de días, t, que se le hace publicidad a ésta. La función que describe esta relación es $f(t) = 1 - e^{-0.04t}$.

a) Después de 50 días de publicidad, ¿qué porcentaje del mercado objetivo compra la bebida?

b) ¿Cuántos días de publicidad se necesitan si se quiere que 75% del mercado objetivo compre la bebida?

74. Truchas en un lago En 2005, un lago tenía 300 truchas. El aumento del número de truchas se calcula por medio de la función $g(t) = 300e^{0.07t}$, donde t es el número de años a partir de 2005. ¿Cuántas truchas habrá en el lago en **a)** 2003, **b)** 2015?

75. Velocidad al caminar En un estudio psicológico se determinó que la velocidad promedio al caminar, $f(P)$, de una persona citadina es una función de la población en la ciudad. Para una ciudad con una población P, la velocidad promedio al caminar, en pies por segundo, está dada por $f(P) = 0.37 \ln P + 0.05$. Nashville, Tennessee, tiene una población de 972,000 habitantes.

a) ¿Cuál es la velocidad promedio de una persona al caminar que vive en Nashville?

b) En la ciudad de Nueva York habitan 8,567,000 personas; ¿cuál es la velocidad promedio al caminar de una persona en esta ciudad?

c) Si la velocidad promedio al caminar de una persona en cierta ciudad es de 5.0 pies por segundo, ¿cuál es la población de la ciudad?

76. Publicidad El número de corbatas que se venden, $N(a)$, es una función de la cantidad que se destina a publicitarlas, a, (en miles de dólares). La función que describe esta relación es $N(a) = 800 + 300 \ln a$.

a) ¿Cuántas corbatas se vendieron después de invertir \$1500 (o 1.5 miles de dólares) en publicidad?

b) ¿Cuánto dinero se debe invertir en publicidad para vender 1000 corbatas?

77. Suponga que el valor de la isla de Manhattan ha crecido a una razón exponencial de 8% al año desde 1626, cuando Peter Minuet, de la compañía holandesa de las Indias Occidentales, la compró por \$24. De acuerdo con lo anterior, el valor de Manhattan puede determinarse mediante la ecuación $V = 24e^{0.08t}$, donde t es el número de años a partir de 1626. Determine el valor de la isla de Manhattan en 2008, esto es, cuando $t = 382$ años.

78. Prescripción de un medicamento El porcentaje de médicos que aceptan prescribir un medicamento nuevo está dado por la función $P(t) = 1 - e^{-0.22t}$, donde t es el tiempo, en meses, desde que el medicamento sale al mercado. ¿Qué porcentaje de médicos acepta prescribir un nuevo medicamento 2 meses después de que éste sale al mercado?

79. Población mundial En enero de 2003 se calculaba que la población mundial era de aproximadamente 6.30 mil millones de personas. Suponiendo que la población mundial continuara creciendo exponencialmente a la tasa actual de casi 1.3% anual, la población mundial esperada, en miles de millones de personas, en t años, estaría dada por la función

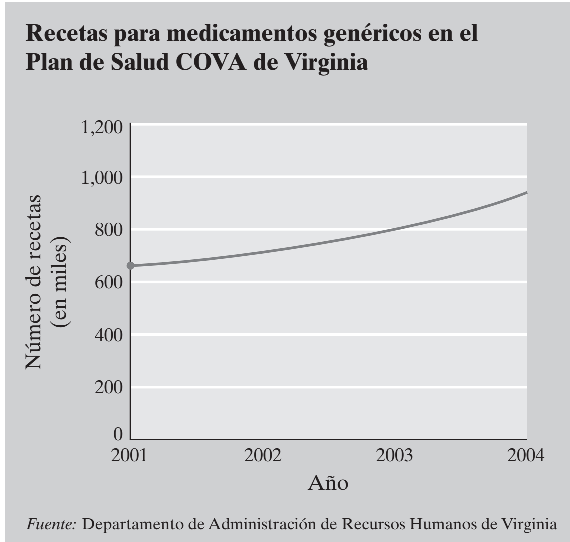
$$P(t) = 6.30e^{0.013t}$$

donde t es el número de años a partir de 2003.

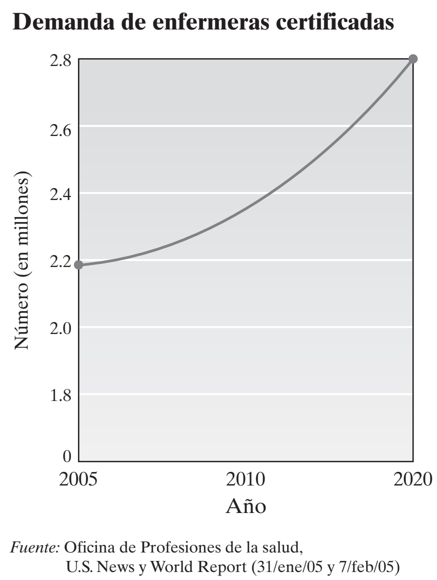
a) Determine la población mundial en 2010.

b) ¿Dentro de cuántos años se duplicará la población mundial?

80. Medicamentos genéricos Desde 2001, el número de recetas para medicamentos genéricos usadas por los miembros del Plan de Salud COVA en el estado de Virginia ha crecido de forma exponencial (vea la gráfica). El número de recetas para medicamentos genéricos, $f(t)$, en cientos de miles, puede aproximarse mediante la función $f(t) = 6.52e^{0.087t}$, donde t es el número de años a partir de 2001. Si supone que esta tendencia continúa, utilice esta función para aproximar el número de recetas para medicamentos genéricos usados por miembros del Plan de Salud COVA en **a)** 2006. **b)** 2008.



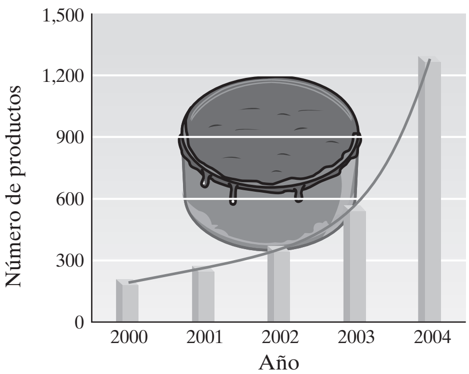
81. Demanda de enfermeras Se espera que la demanda de enfermeras certificadas crezca de forma exponencial de 2005 a 2020. (Vea la gráfica). La demanda de enfermeras certificadas, $d(t)$, en millones, puede aproximarse mediante la función $d(t) = 2.19e^{0.0164t}$, donde t es el número de años a partir de 2005. Si supone que esta tendencia continúa, utilice esta función para aproximar la demanda de enfermeras certificadas en **a)** 2025. **b)** 2040.



82. Productos Splenda® A partir de 2000, el número de productos nuevos que utilizan Splenda cada año, ha crecido de forma exponencial (vea la gráfica en la página siguiente). Este número, $N(t)$, puede aproximarse mediante la función $N(t) = 163.21e^{0.481t}$, donde t es el número de años desde 2000.

Si supone que esta tendencia continúa, utilice esta función para estimar el número de productos nuevos que usan Splenda en **a)** 2007. **b)** 2010.

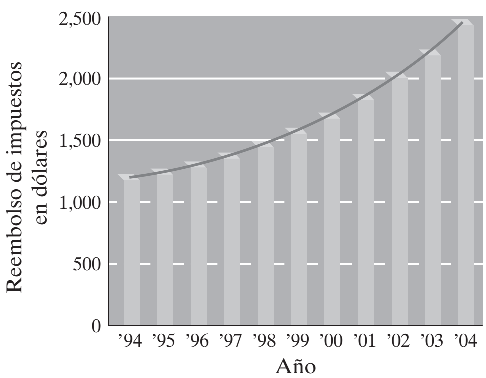
Productos nuevos introducidos por año que usan Splenda



Fuente: Productscan Online, The New York Times (22/dic/04)

83. Reembolso de impuestos anuales Desde 1994, el reembolso promedio anual ha crecido de forma exponencial (vea la gráfica). El reembolso promedio anual, $r(t)$, puede aproximarse mediante la función $r(t) = 1182.3e^{0.0715t}$, donde t es el número de años desde 1994. Si supone que esta tendencia continúa, utilice esta función para aproximar el reembolso promedio anual en **a)** 2006. **b)** 2010.

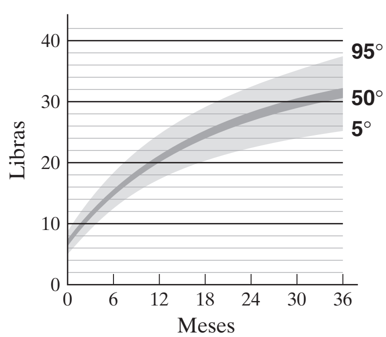
Reembolso promedio de impuestos anuales



Fuente: Servicio de Ingreso Interno, U.S. News y World Report (18/abril/05)

84. Peso de niñas En la gráfica siguiente, el área sombreada muestra el rango normal (del percentil 5 al 95) de peso para niñas de hasta 36 meses de edad. La mediana, o percentil 50, de pesos se indica por la línea central (más gruesa). Para calcular el peso de niñas de 3 a 36 meses, puede utilizarse la función $y = 3.17 + 7.32 \ln x$; úsela para calcular el peso mediano para niñas de **a)** 18 meses, **b)** 30 meses.

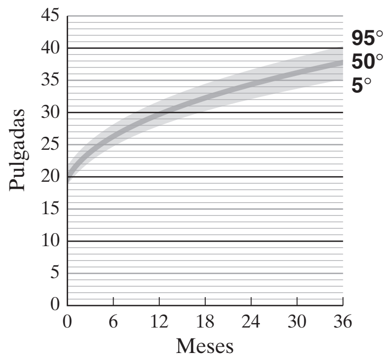
Niñas



Fuente: *Newsweek* Edición especial de 2000, “Su hijo”.

85. Estatura de niños El área sombreada de la gráfica muestra el rango normal (del percentil 5 al 95) de estaturas para niños de hasta 36 meses de edad. La mediana, o percentil 50, de estaturas se indica mediante la línea central (más gruesa). Para calcular la estatura mediana de niños de 3 a 36 meses, puede usarse la función $y = 15.29 + 5.93 \ln x$. Utilice esta función para calcular la estatura mediana para niños de **a)** 18 meses, **b)** 30 meses.

Niños



Fuente: *Newsweek* Edición especial de 2000, “Su hijo”.

86. Decaimiento radiactivo El plutonio, que se usa comúnmente en reactores nucleares, decae exponencialmente a una velocidad de 0.003% por año. Para determinar la cantidad de plutonio que queda de la cantidad inicial, A_0, al cabo de t años, puede usarse la fórmula $A = A_0e^{kt}$. En la fórmula, k se reemplaza con -0.00003.

a) Si en 2003 había 1000 gramos de plutonio, ¿cuántos gramos quedarán en el año 2103, es decir, al cabo de 100 años?

b) Determine la vida media del plutonio.

87. Fechado con carbono El fechado con carbono se utiliza para aproximar la antigüedad de plantas y objetos antiguos. El elemento radiactivo carbono 14 se utiliza con mucha frecuencia para este propósito. El carbono 14 decae exponencialmente a una velocidad de 0.01205% por año. La cantidad de carbono 14 que queda en un objeto después de t años puede determinarse mediante la función $f(t) = v_0e^{-0.0001205t}$, en la que v_0 es la cantidad inicial.

a) Si el hueso de un animal tenía originalmente 20 gramos de carbono 14, y cuando se encontró tenía 9 gramos de carbono 14, ¿cuál es la edad del hueso?

b) ¿Cuál es la edad de un objeto que conserva 50% de la cantidad original de carbono 14?

88. Interés compuesto Si se quiere duplicar una cantidad en 6 años, ¿a qué tasa, compuesta de manera continua, debe invertirse?

89. Interés compuesto Si se invierte dinero a 6% compuesto de manera continua, ¿cuánto debe invertirse ahora para tener $20,000 dentro de 18 años?

90. Radioisótopo La fuente de energía de un satélite es un radioisótopo. La potencia, P, en watts, que le resta a la fuente de energía es una función del tiempo que el satélite ha estado en el espacio.

a) Si en un inicio había 50 gramos del isótopo, la potencia que queda después de t días es $P = 50e^{-0.002t}$. Determine la potencia que queda después de 50 días.

b) ¿Cuándo bajará a 10 watts la potencia que queda en la fuente?

91. Decaimiento radiactivo Durante el accidente nuclear que tuvo lugar en Chernobyl, Ucrania, en 1986, dos de los materiales radiactivos que escaparon a la atmósfera fueron el cesio 137, con velocidad de decaimiento de 2.3%, y el estroncio 90, con velocidad de decaimiento de 2.8%.

a) ¿Cuál material se descompone más rápidamente?

b) ¿Qué porcentaje de cesio quedará en 2036, es decir, 50 años después del accidente?

92. Fechado radiométrico En el estudio de fechado radiométrico (que utiliza isótopos radiactivos para determinar la edad de los objetos), con frecuencia se utiliza la fórmula

$$t = \frac{t_h}{0.693} \ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$$

En la fórmula, t es la edad del objeto, t_h es la vida media del isótopo radiactivo usado, N_0 es el número original de átomos radiactivos presentes, y N es el número que queda después de un tiempo, t. Suponga que una roca originalmente contenía 5×10^{12} átomos de uranio 238, cuya vida media es de 4.5×10^9 años. Si ahora la roca tiene 4×10^{12} átomos, ¿cuál es su edad?

En los ejercicios 93 a 97, utilice su calculadora graficadora. En los ejercicios 95 a 97, redondee sus respuestas al milésimo más cercano.

93. Verifique la respuesta que dio al ejercicio 37.

94. Compruebe la respuesta que dio al ejercicio 39.

95. Resuelva la ecuación $e^{x-4} = 12 \ln (x + 2)$.

96. Resuelva la ecuación $\ln (4 - x) = 2 \ln x + \ln 2.4$.

97. Resuelva la ecuación $3x - 6 = 2e^{0.2x} - 12$.

Retos

En los ejercicios 98 a 101, cuando despeje la variable indicada, escriba la respuesta sin usar logaritmos naturales.

98. Intensidad de la luz Cuando pasa por cierto medio, la intensidad de la luz se determina mediante la fórmula $x = k(\ln I_0 - \ln I)$. Despeje I_0 en esta ecuación.

99. Velocidad A partir de que se detiene el motor de una locomotora, que lleva una velocidad v_0, la distancia que recorre puede calcularse mediante la fórmula $x = \frac{1}{k}\ln (kv_0t + 1)$. Despeje v_0 en esta ecuación.

100. Molécula Una fórmula que se utiliza en el estudio de la acción de una molécula de proteína es $\ln M = \ln Q - \ln(1 - Q)$. Despeje Q en esta ecuación.

101. Circuito eléctrico Una ecuación que relaciona la corriente con el tiempo en un circuito eléctrico es $\ln i - \ln I = \frac{-t}{RC}$. Despeje i en esta ecuación.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.3] **102.** Sea $h(x) = \frac{x^2 + 4x}{x + 6}$. Determine **a)** $h(-4)$. **b)** $h\left(\frac{2}{5}\right)$.

[4.3] **103. Boletos** El boleto de admisión para un juego de hockey sobre hielo cuesta \$15 para adultos y \$11 para niños. Si se vendió un total de 550 boletos, determine cuántos boletos para niño y cuántos para adulto se vendieron, si la recaudación total fue de \$7290.

[5.2] **104.** Multiplique $(3xy^2 + y)(4x - 3xy)$.

[5.6] **105.** Determine dos valores de b para que $4x^2 + bx + 25$ sea un trinomio cuadrado perfecto.

[7.4] **106.** Multiplique $\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^5}\right)$.

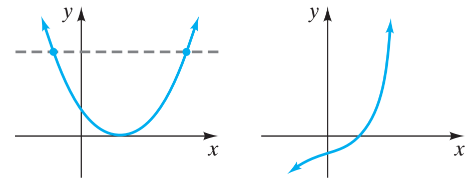
Resumen del capítulo 9

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 9.1	
La **función compuesta** $f \circ g$ está definida como $$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$	Dada $f(x) = x^2 + 3x - 1$ y $g(x) = x - 4$, entonces $$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f[g(x)] &= (x-4)^2 + 3(x-4) - 1 \\ &= x^2 - 8x + 16 + 3x - 12 - 1 \\ &= x^2 - 5x + 3 \\ (g \circ f)(x) = g[f(x)] &= (x^2 + 3x - 1) - 4 \\ &= x^2 + 3x - 5\end{aligned}$$
Una función es una **función uno a uno** (**o inyectiva**), si cada valor en el rango corresponde con exactamente un valor en el dominio.	El conjunto $\{(1, 3), (-2, 5), (6, 2), (4, -1)\}$ es una función uno a uno ya que cada valor en el rango corresponde con exactamente un valor en el dominio.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES — EJEMPLOS

Sección 9.1 (continuación)

Para que una función sea uno a uno, su gráfica debe pasar la **prueba de la recta vertical** (para asegurar que sea una función) y la **prueba de la recta horizontal** (para comprobar el criterio de uno a uno).



No es una función uno a uno   Función uno a uno

Si $f(x)$ es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (x, y), su **función inversa**, $f^{-1}(x)$, es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (y, x). Sólo las funciones uno a uno tienen funciones inversas.

Para determinar la función inversa de una función uno a uno

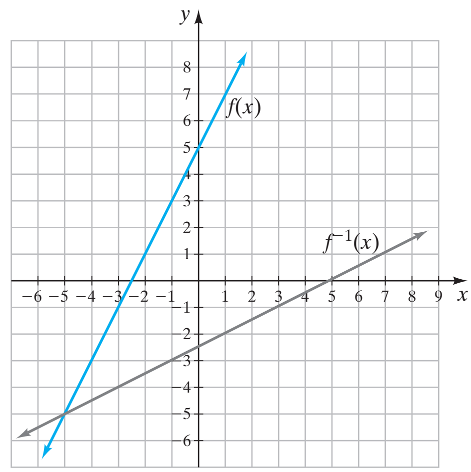
1. Reemplace $f(x)$ con y.
2. Intercambie las dos variables x y y.
3. Despeje a y en la ecuación.
4. Reemplace y con $f^{-1}(x)$ (esto proporciona la función inversa mediante la notación de función inversa).

Determine la función inversa para $f(x) = 2x + 5$. Grafique $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el mismo conjunto de ejes.

Solución:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 5 \\ y &= 2x + 5 \\ x &= 2y + 5 \\ x - 5 &= 2y \\ \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} &= y \end{aligned}$$

$$\text{o} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$



Si dos funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son inversas una de la otra, $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Para el ejemplo anterior con $f(x) = 2x + 5$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] &= 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right) + 5 \\ &= x - 5 + 5 = x \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] &= \frac{1}{2}(2x + 5) - \frac{5}{2} \\ &= x + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = x \end{aligned}$$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 9.2

Para cualquier número real $a > 0$ y $a \neq 1$,

$$f(x) = a^x$$

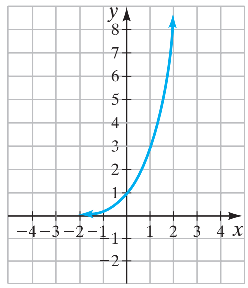
es una **función exponencial**.

Para todas las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ o $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

1. El dominio de la función es $(-\infty, \infty)$.
2. El rango de la función es $(0, \infty)$.
3. La gráfica de la función pasa por los puntos $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$ y $(1, a)$.

Grafique $y = 3^x$.

x	y
-2	$1/9$
-1	$1/3$
0	1
1	3
2	9



Sección 9.3

Logaritmos

Para todos los números positivos a, con $a \neq 1$,

$$\boldsymbol{y = \log_a x} \text{ significa } \boldsymbol{x = a^y}$$

logaritmo (exponente) — número — $y = \log_a x$ — base   significa $x = a^y$ — número — base — exponente

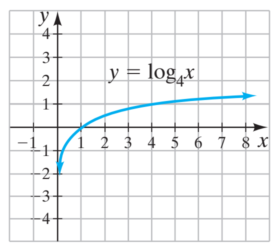
Forma exponencial	Forma logarítmica
$9^2 = 81$	$\log_9 81 = 2$
$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$	$\log_{1/4} \frac{1}{64} = 3$

Funciones logarítmicas

Para todas las funciones logarítmicas de la forma $y = \log_a x$ o $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$.

1. El dominio de la función es $(0, \infty)$.
2. El rango de la función es $(-\infty, \infty)$.
3. La gráfica de la función pasa por los puntos $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

Grafique $y = \log_4 x$.

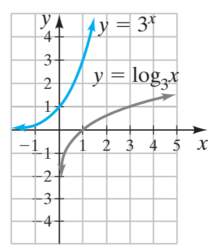


Características de las funciones exponenciales y logarítmicas

	Función exponencial	Función logarítmica
	$y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$	$y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$
Dominio:	$(-\infty, \infty)$	$(0, \infty)$
Rango:	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
Puntos en la gráfica:	$\left(-1, \frac{1}{a}\right)$	$\left(\frac{1}{a}, -1\right)$
	$(0, 1)$	$(1, 0)$
	$(1, a)$	$(a, 1)$

x se convierta en y
y se convierte en x

Grafique $y = 3^x$ y $y = \log_3 x$ en el mismo conjunto de ejes.



HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 9.4	
Regla del producto para logaritmos Para números reales positivos x, y y a, $a \neq 1$, $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ *Propiedad 1*	$\log_5 (9 \cdot 13) = \log_5 9 + \log_5 13$ $\log_7 mn = \log_7 m + \log_7 n$
Regla del cociente para logaritmos Para números reales positivos x, y y a, $a \neq 1$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ *Propiedad 2*	$\log_3 \frac{15}{4} = \log_3 15 - \log_3 4$ $\log_8 \frac{z+1}{z+3} = \log_8 (z+1) - \log_8 (z+3)$
Regla de la potencia para logaritmos Si x y a son números reales positivos, $a \neq 1$, y n es cualquier número real, entonces $\log_a x^n = n \log_a x$ *Propiedad 3*	$\log_9 23^5 = 5 \log_9 23$ $\log_6 \sqrt[3]{x+4} = \log_6 (x+4)^{1/3} = \frac{1}{3} \log_6 (x+4)$
Propiedades adicionales de los logaritmos Si $a > 0$, y $a \neq 1$, entonces $\log_a a^x = x$ *Propiedad 4* y $a^{\log_a x} = x \ (x > 0)$ *Propiedad 5*	$\log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$ $7^{\log_7 3} = 3$
Sección 9.5	
Logaritmo común Los logaritmos de base 10 se denominan logaritmos comunes $\log x$ significa $\log_{10} x$	$\log 17$ significa $\log_{10} 17$ $\log (b + c)$ significa $\log_{10} (b + c)$
El **logaritmo común** de un número real positivo es el *exponente* al cual la base 10 se eleva para obtener el número. Si $\log N = L$, entonces $10^L = N$.	Si $\log 14 = 1.1461$, entonces $10^{1.1461} = 14$. Si $\log 0.6 = -0.2218$, entonces $10^{-0.2218} = 0.6$.
Para determinar un logaritmo común, utilice una calculadora científica o graficadora. Redondee la respuesta a cuatro decimales.	$\log 183 = 2.2625$ (redondeado a 4 decimales) $\log 0.42 = -0.3768$ (redondeado a 4 decimales)
Antilogaritmo Si $\log N = L$, entonces $N = \text{antilog } L$. Para determinar antilogaritmos, utilice una calculadora científica o graficadora.	Si $\log 1890.1662 = 3.2765$, entonces antilog $3.2765 = 1890.1662$. Si $\log 0.0143 = -1.8447$, entonces antilog $(-1.8447) = 0.0143$.
Sección 9.6	
Propiedades para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas **a)** Si $x = y$, entonces $a^x = a^y$. **b)** Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$. **c)** Si $x = y$, entonces $\log_b x = \log_b y$ $(x > 0, y > 0)$. **d)** Si $\log_b x = \log_b y$, entonces $x = y$ $(x > 0, y > 0)$. *Propiedades 6a-6d*	**a)** Si $x = 5$, entonces $3^x = 3^5$. **b)** Si $3^x = 3^5$, entonces $x = 5$. **c)** Si $x = 2$, entonces $\log x = \log 2$. **d)** Si $\log x = \log 2$, entonces $x = 2$.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 9.7

La **función logaritmo natural** es

$$f(x) = e^x$$

donde $e \approx 2.7183$.

Logaritmos naturales son logaritmos con base e. Los logaritmos naturales se indican mediante las letras ln.

$$\log_e x = \ln x$$

Para $x > 0$, si $y = \ln x$, entonces $e^y = x$.

La **función logaritmo natural** es

$$g(x) = \ln x$$

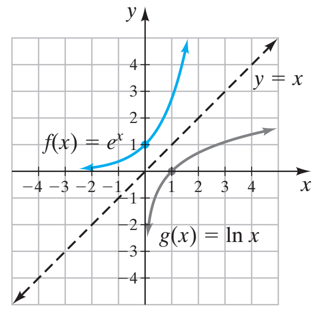
donde la base $e \approx 2.7183$.

Para determinar los valores de exponenciales naturales y de logaritmos naturales, utilice una calculadora científica o graficadora.

La función exponencial natural, $f(x) = e^x$, y la función logaritmo natural, $g(x) = \ln x$, son inversas una de la otra.

Ejemplos:

Grafique $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ en el mismo conjunto de ejes.



$\ln 5.83 = 1.7630$

Si $\ln N = -2.09$, entonces $N = e^{-2.09} = 0.1237$.

Fórmula de cambio de base

Para cualesquiera bases a y b de logaritmos y cualquier número positivo x.

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ejemplo:

$$\log_5 98 = \frac{\log 98}{\log 5} \approx \frac{1.9912}{0.6990} \approx 2.8486$$

Propiedades de los logaritmos naturales

$\ln xy = \ln x + \ln y$ $\quad (x > 0$ y $y > 0)$ *Regla del producto*

$\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$ $\quad (x > 0$ y $y > 0)$ *Regla del cociente*

$\ln x^n = n \ln x$ $\quad (x > 0)$ *Regla de la potencia*

Ejemplos:

$\ln 7 \cdot 30 = \ln 7 + \ln 30$

$\ln \dfrac{x+1}{x+8} = \ln (x+1) - \ln (x+8)$

$\ln m^5 = 5 \ln m$

Propiedades adicionales para expresiones con logaritmos naturales y exponenciales naturales

$\ln e^x = x$ *Propiedad 7*

$e^{\ln x} = x, \quad x > 0$ *Propiedad 8*

Ejemplos:

$\ln e^{19} = 19$

$e^{\ln 2} = 2$

Ejercicios de repaso del capítulo 9

[9.1] *Dadas $f(x) = x^2 - 3x + 4$ y $g(x) = 2x - 5$, determine lo siguiente.*

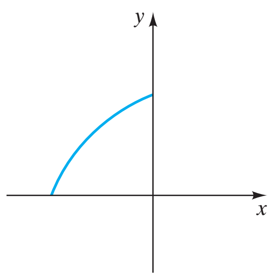
1. $(f \circ g)(x)$ **2.** $(f \circ g)(3)$ **3.** $(g \circ f)(x)$ **4.** $(g \circ f)(-3)$

Dadas $f(x) = 6x + 7$ y $g(x) = \sqrt{x - 3}$, $x \geq 3$, determine lo siguiente.

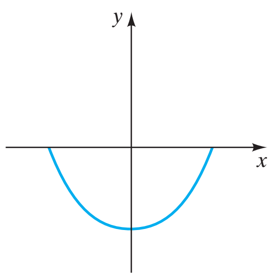
5. $(f \circ g)(x)$ **6.** $(g \circ f)(x)$

Determine si cada función es una función uno a uno.

7.



8.



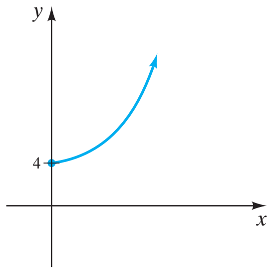
9. $\{(6, 2), (4, 0), (-5, 7), (3, 8)\}$

10. $\left\{(0, -2), (6, 1), (3, -2), \left(\frac{1}{2}, 4\right)\right\}$ **11.** $y = \sqrt{x + 8}$, $x \geq -8$ **12.** $y = x^2 - 9$

En los ejercicios 13 y 14, para cada función, determine el dominio y el rango de $f(x)$ y de $f^{-1}(x)$.

13. $\{(5, 3), (6, 2), (-4, -3), (-1, 8)\}$

14.



En los ejercicios 15 y 16, determine $f^{-1}(x)$ y grafique $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.

15. $y = f(x) = 4x - 2$

16. $y = f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

17. Yardas a pies La función $f(x) = 36x$ convierte yardas, x, en pulgadas. Determine la función inversa que convierte pulgadas en yardas. En la función inversa, ¿qué representan x y $f^{-1}(x)$?

18. Galones a cuartos de galón La función $f(x) = 4x$ convierte galones, x, en cuartos de galón (o simplemente cuartos). Determine la función inversa que convierte cuartos en galones. En la función inversa, ¿qué representan x y $f^{-1}(x)$?

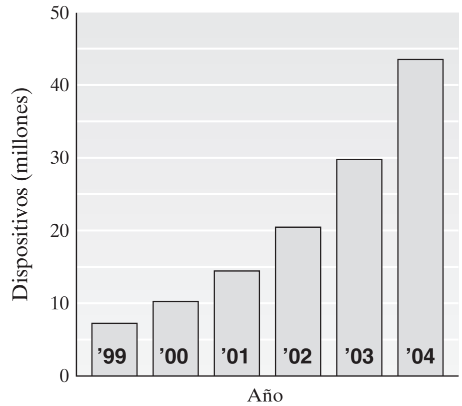
[9.2] *Grafique las funciones siguientes.*

19. $y = 2^x$

20. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

21. Dispositivos inteligentes manuales Desde 1999, las ventas de dispositivos inteligentes manuales ha estado creciendo exponencialmente (vea la gráfica de la derecha). Las ventas, $f(t)$, en millones de dispositivos, puede calcularse mediante la función $f(t) = 7.02e^{0.365t}$, en donde t es el número de años a partir de 1999. Utilice esta función para calcular el número de dispositivos vendidos a nivel mundial en **a)** 2003, **b)** 2005. **c)** 2008.

Envíos mundiales de dispositivos inteligentes manuales



Fuente: International Data Corp.; MSN MoneyCentral; CSI Inc.; investigación adicional.

[9.3] *Escriba cada ecuación en forma logarítmica.*

22. $8^2 = 64$

23. $81^{1/4} = 3$

24. $5^{-3} = \frac{1}{125}$

Escriba cada ecuación en forma exponencial.

25. $\log_2 32 = 5$

26. $\log_{1/4} \frac{1}{16} = 2$

27. $\log_6 \frac{1}{36} = -2$

Escriba cada ecuación en forma exponencial y determine el valor que falta.

28. $3 = \log_4 x$

29. $4 = \log_a 8$

30. $-3 = \log_{1/5} x$

Grafique las funciones siguientes.

31. $y = \log_3 x$

32. $y = \log_{1/2} x$

[9.4] *Utilice las propiedades de los logaritmos para desarrollar cada expresión.*

33. $\log_5 17^8$

34. $\log_3 \sqrt{x - 9}$

35. $\log \frac{6(a + 1)}{19}$

36. $\log \frac{x^4}{7(2x + 3)^5}$

Escriba lo siguiente como el logaritmo de una sola expresión.

37. $5 \log x - 3 \log (x + 1)$

38. $4(\log 2 + \log x) - \log y$

39. $\frac{1}{3}[\ln x - \ln (x + 2)] - \ln 2$

40. $3 \ln x + \frac{1}{2}\ln (x + 1) - 6 \ln (x + 4)$

Evalúe.

41. $8^{\log_8 10}$ **42.** $\log_4 4^5$ **43.** $11^{\log_9 81}$ **44.** $9^{\log_8 \sqrt{8}}$

[9.5, 9.7] *Utilice una calculadora para determinar cada logaritmo. Redondee sus respuestas al diezmilésimo más cercano.*

45. $\log 819$ **46.** $\ln 0.0281$

Utilice una calculadora para determinar el antilogaritmo de cada número. Proporcione el antilogaritmo con tres dígitos significativos.

47. 3.159 **48.** -3.157

Utilice una calculadora para determinar N; redondee su respuesta a tres dígitos significativos.

49. $\log N = 4.063$ **50.** $\log N = -1.2262$

Evalúe.

51. $\log 10^5$ **52.** $10^{\log 9}$ **53.** $7 \log 10^{3.2}$ **54.** $2(10^{\log 4.7})$

[9.6] *Resuelva sin utilizar calculadora.*

55. $625 = 5^x$ **56.** $49^x = \frac{1}{7}$ **57.** $2^{3x-1} = 32$ **58.** $27^x = 3^{2x+5}$

Utilice una calculadora para resolver lo siguiente. Redondee sus respuestas al milésimo más cercano.

59. $7^x = 152$ **60.** $3.1^x = 856$ **61.** $12.5^{x+1} = 381$ **62.** $3^{x+2} = 8^x$

Resuelva la ecuación logarítmica.

63. $\log_7 (2x - 3) = 2$ **64.** $\log x + \log (4x - 19) = \log 5$

65. $\log_3 x + \log_3 (2x + 1) = 1$ **66.** $\ln (x + 1) - \ln (x - 2) = \ln 4$

[9.7] *Despeje la variable restante en cada ecuación exponencial. Redondee su respuesta al milésimo más cercano.*

67. $50 = 25e^{0.6t}$ **68.** $100 = A_0 e^{-0.42(3)}$

Despeje la variable que se indica.

69. $A = A_0 e^{kt}$, despeje t **70.** $200 = 800e^{kt}$, despeje k

71. $\ln y - \ln x = 6$, despeje y **72.** $\ln (y + 1) - \ln (x + 8) = \ln 3$, despeje y

Utilice la fórmula de cambio de base para evaluar. Escriba la respuesta redondeada al milésimo más cercano.

73. $\log_2 196$ **74.** $\log_3 47$

[9.2–9.7]

75. Interés compuesto Determine el monto de dinero, si Justine Elwood invierte \$12,000 durante un periodo de 8 años, en una cuenta de ahorros que produce 6% de interés anual. Utilice $A = p(1 + r)^n$.

76. Interés compuesto de manera continua Si \$6,000 se colocan en una cuenta de ahorros que paga 4% de interés compuesto de manera continua, determine el tiempo que se necesita para que la cuenta duplique su valor.

77. Bacterias Las bacterias *Escherichia coli* por lo regular se encuentran en la vejiga de los humanos. Suponga que hay 2000 bacterias en el instante 0, y que el número de bacterias presentes t minutos después puede determinarse mediante la función $N(t) = 2000(2)^{0.05t}$.

a) ¿Cuándo habrá 50,000 bacterias?

b) Suponga que se cataloga como infectada una vejiga humana que contenga 120,000 bacterias; ¿cuánto tardará en desarrollar una infección de este tipo una persona cuya vejiga contiene inicialmente 2000 bacterias?

78. Presión atmosférica La presión atmosférica, P, en libras por pulgada cuadrada, a una altura de x pies por arriba del nivel del mar, puede determinarse mediante la fórmula $P = 14.7e^{-0.00004x}$. Determine la presión atmosférica a una altitud de 8842 pies.

79. Retención de conocimientos Al final de un curso de historia, los alumnos se sometieron a un examen. Como parte de un proyecto de investigación, los estudiantes seguirán respondiendo pruebas semejantes cada mes durante n meses. La calificación promedio del grupo después de n meses puede determinarse mediante la función $A(n) = 72 - 18 \log(n + 1), n \geq 0$.

a) ¿Cuál fue la calificación promedio del grupo cuando se aplicó el examen original ($n = 0$)?

b) ¿Cuál fue la calificación promedio del grupo a los dos meses?

c) ¿Después de cuántos meses la calificación promedio del grupo fue 58.0?

Examen de práctica del capítulo 9

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección en la que se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en el **Chapter Test Prep Video CD.** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. a) Determine si la siguiente es una función uno a uno.

$$\{(4, 2), (-3, 8), (-1, 3), (6, -7)\}$$

b) Liste el conjunto de pares ordenados de la función inversa.

2. Dadas $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = x + 2$, determine **a)** $(f \circ g)(x)$. **b)** $(f \circ g)(6)$.

3. Dadas $f(x) = x^2 + 8$ y $g(x) = \sqrt{x - 5}$, $x \geq 5$, determine **a)** $(g \circ f)(x)$. **b)** $(g \circ f)(7)$.

En los ejercicios 4 y 5, **a)** *determine $f^{-1}(x)$ y* **b)** *grafique $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.*

4. $y = f(x) = -3x - 5$

5. $y = f(x) = \sqrt{x - 1}$, $x \geq 1$

6. ¿Cuál es el dominio de $y = \log_5 x$?

7. Evalúe $\log_4 \dfrac{1}{256}$.

8. Grafique $y = 3^x$.

9. Grafique $y = \log_2 x$.

10. Escriba $2^{-5} = \dfrac{1}{32}$ en forma logarítmica.

11. Escriba $\log_5 125 = 3$ en forma exponencial.

Escriba los ejercicios 12 y 13 en forma exponencial y determine el valor que falta.

12. $4 = \log_2 (x + 3)$

13. $y = \log_{64} 16$

14. Desarrolle $\log_2 \dfrac{x^3(x - 4)}{x + 2}$.

15. Escriba como el logaritmo de una sola expresión.

$$7 \log_6 (x - 4) + 2 \log_6 (x + 3) - \frac{1}{2} \log_6 x.$$

16. Evalúe $10 \log_9 \sqrt{9}$.

17. a) Determine log 4620 redondeado a 4 lugares decimales.

b) Determine log 0.0692 redondeado a 4 lugares decimales.

18. Resuelva $3^x = 19$ para x.

19. Resuelva $\log 4x = \log (x + 3) + \log 2$ para x.

20. Resuelva $\log (x + 5) - \log (x - 2) = \log 6$ para x.

21. Si $\ln N = 2.79$, determine N; redondee su respuesta a 4 decimales.

22. Evalúe $\log_6 40$; utilice la fórmula de cambio de base y redondee su respuesta a 4 decimales.

23. Resuelva $100 = 250e^{-0.03t}$; redondee a 4 decimales.

24. Cuenta de ahorros Si Kim Lee invierte \$3500 en una cuenta de ahorros que genera 6% de interés compuesto cada trimestre, ¿cuánto dinero tendrá después de 10 años?

25. Carbono 14 La cantidad de carbono 14 que queda después de t años se determina mediante la fórmula $v = v_0e^{-0.0001205t}$, en donde v_0 es la cantidad original de carbono 14. Si al principio un fósil tenía 60 gramos de carbono 14 y ahora contiene 40 gramos de dicho elemento, ¿cuál es la edad del fósil?

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen y verifique sus respuestas con las que aparecen al final. Revise las preguntas que haya respondido incorrectamente. Los números de la sección y el objetivo en donde se analiza el material correspondiente se indican después de cada respuesta.

1. Simplifique $\dfrac{(2xy^2z^{-3})^2}{(3x^{-1}yz^2)^{-1}}$.

2. Evalúe $5^2 - (2 - 3^2)^2 + 4^3$.

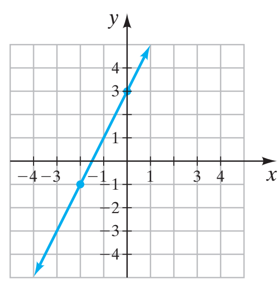
3. Cena Thomas Ferguson llevó a su esposa a cenar a un agradable restaurante. El costo de los alimentos antes de impuestos fue \$92. Si el precio total, incluyendo el impuesto, fue \$98.90, determine la tasa de impuesto.

4. Resuelva la desigualdad $-3 \leq 2x - 7 < 8$ y escriba la respuesta como un conjunto solución y en notación de intervalos.

5. Despeje y en $2x - 3y = 8$.

6. Sea $h(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x + 6}$. Determine $h(-4)$.

7. Determine la pendiente de la recta que se muestra en la figura siguiente. Luego escriba la ecuación de la recta dada.



8. Grafique $4x = 3y - 3$.

9. Grafique $y \leq \frac{1}{3}x + 6$.

10. Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 13$$

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{8}y = 5$$

11. Divida $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 5x + 9}{x + 1}$.

12. Factorice $x^2 - 2xy + y^2 - 64$.

13. Resuelva $(2x + 1)^2 - 9 = 0$.

14. Resuelva $\dfrac{2x + 3}{x + 1} = \dfrac{3}{2}$.

15. Despeje d en $a_n = a_1 + nd - d$.

16. Si L varía inversamente respecto del cuadrado de P. Determine L cuando $P = 4$ y $K = 100$.

17. Simplifique $4\sqrt{45x^3} + \sqrt{5x}$.

18. Resuelva $\sqrt{2a + 9} - a + 3 = 0$.

19. Resuelva $(x^2 - 5)^2 + 3(x^2 - 5) - 10 = 0$.

20. Sea $g(x) = x^2 - 4x - 5$.

a) Exprese a $g(x)$ en la forma $g(x) = a(x - h)^2 + k$.

b) Trace la gráfica y marque el vértice.

10 Secciones cónicas

OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

El objetivo en este capítulo es graficar las secciones cónicas. Éstas incluyen la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola. Ya hemos analizado las parábolas. En este capítulo aprenderemos más sobre ellas. También resolveremos sistemas de ecuaciones no lineales, tanto de forma algebraica como gráfica.

LA FORMA DE UNA ELIPSE le da una característica especial. Cualquier objeto que se lance desde un punto focal hacia una pared con forma elíptica rebotará hacia el otro punto focal. Esta característica se ha utilizado en arquitectura y en medicina, entre otras disciplinas. Un ejemplo es el Salón Nacional de las Estatuas en el Edificio del Capitolio, que tiene una cúpula, o domo, de forma elíptica. Si habla suavemente en uno de los puntos focales, sus murmullos pueden escucharse en el otro punto focal. Del mismo modo, una bola que se golpea en un foco en una mesa de billar de forma elíptica, rebotará hacia el otro punto focal. En el ejercicio 56 de la página 674 determinará la ubicación de los focos de una mesa de billar elíptica.

10.1 La parábola y la circunferencia

1 Identificar y describir las secciones cónicas.

2 Repasar parábolas.

3 Graficar parábolas de la forma $x = a(y - k)^2 + h$.

4 Aprender las fórmulas de la distancia y del punto medio.

5 Graficar circunferencias con centros en el origen.

6 Graficar circunferencias con centros en (h, k).

1 Identificar y describir las secciones cónicas

En los capítulos anteriores analizamos las parábolas y vimos que una **parábola** es un tipo de sección cónica; en este apartado estudiaremos más acerca de las parábolas. Otras secciones cónicas son las circunferencias, las elipses y las hipérbolas. Cada una de estas formas es una sección cónica, ya que se puede construir rebanando un cono y observando la forma de la rebanada. La **figura 10.1** ilustra los métodos para rebanar el cono y obtener cada sección cónica.

FIGURA 10.1 Parábola Circunferencia Elipse Hipérbola

2 Repasar parábolas

En la sección 8.5 analizamos las parábolas. El ejemplo 1 servirá para que recuerde cómo graficar parábolas de la forma $y = ax^2 + bx + c$ y $y = a(x - h)^2 + k$.

EJEMPLO 1 Considere $y = 2x^2 + 4x - 6$.

a) Escriba la ecuación en la forma $y = a(x - h)^2 + k$.
b) Determine si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
c) Determine el vértice de la parábola.
d) Determine la intercepción con el eje y de la parábola.
e) Determine las intercepciones con el eje x de la parábola.
f) Grafique la parábola.

Solución

a) Primero, factorice el 2 en los dos términos que tienen la variable, para que el coeficiente del término cuadrático sea 1. (No factorice el 2 de la constante, -6). Luego complete el cuadrado.

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x^2 + 2x) - 6 \\ &= 2(x^2 + 2x + 1) - 2 - 6 \qquad \textit{Completar el cuadrado.} \\ &= 2(x + 1)^2 - 8 \end{aligned}$$

b) La parábola abre hacia arriba, ya que $a = 2$, que es mayor a 0.

c) El vértice de la gráfica de una ecuación de la forma $y = a(x - h)^2 + k$ es (h, k). Por lo tanto, el vértice de la gráfica de $y = 2(x + 1)^2 - 8$ es $(-1, -8)$. El vértice de una parábola también puede determinarse por medio de

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \quad \text{o} \quad \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Ahora, muestre que estos dos procedimientos dan $(-1, -8)$ como el vértice de la parábola.

d) Para determinar la intercepción con el eje y, haga $x = 0$ y despeje y.

$$\begin{aligned} y &= 2(x+1)^2 - 8 \\ &= 2(0+1)^2 - 8 \\ &= -6 \end{aligned}$$

La intercepción con el eje y es $(0, -6)$.

e) Para determinar las intersecciones con el eje x, haga $y = 0$ y despeje x.

$$\begin{aligned} y &= 2(x+1)^2 - 8 & & \\ 0 &= 2(x+1)^2 - 8 & & \text{Sustituir 0 por } y. \\ 8 &= 2(x+1)^2 & & \text{Sumar 8 a ambos lados.} \\ 4 &= (x+1)^2 & & \text{Dividir ambos lados entre 2.} \\ \pm 2 &= x + 1 & & \text{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ -1 \pm 2 &= x & & \text{Restar 1 de ambos lados.} \end{aligned}$$

$$x = -1 - 2 \quad \text{o} \quad x = -1 + 2$$
$$x = -3 \qquad\qquad x = 1$$

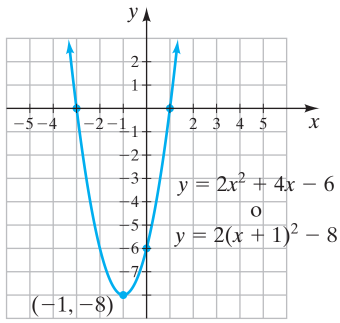


FIGURA 10.2

Las intercepciones con el eje x son $(-3, 0)$ y $(1, 0)$. Estas intercepciones podrían determinarse sustituyendo 0 por y en $y = 2x^2 + 4x - 6$ y resolviendo la ecuación por factorización o mediante la fórmula cuadrática. Haga esto y vea que obtiene las mismas intercepciones con el eje x.

f) Utilizamos el vértice y las intercepciones con el eje x y con el eje y para trazar la gráfica que se muestra en la **figura 10.2**.

Ahora resuelva el ejercicio 19

3 Graficar parábolas de la forma $x = a(y - k)^2 + h$

Las parábolas también pueden abrirse a la derecha o a la izquierda. La gráfica de una ecuación de la forma $x = a(y - k)^2 + h$ será una parábola cuyo vértice está en el punto (h, k). Si a es un número positivo, la parábola abrirá hacia la derecha y si a es un número negativo, la parábola abrirá hacia la izquierda. La **figura 10.3** muestra las cuatro formas diferentes de una parábola.

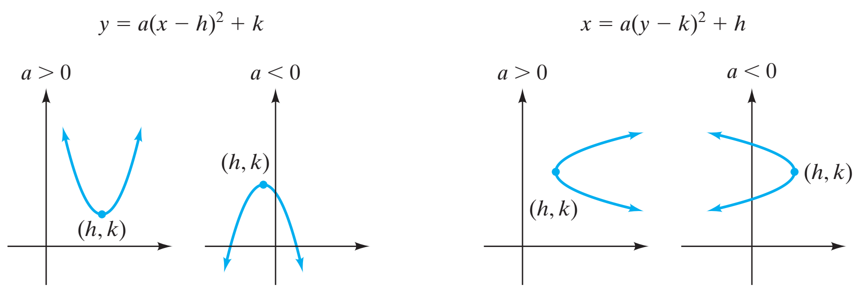


FIGURA 10.3

Parábola con vértice en (h, k)

1. $y = a(x-h)^2 + k$, $a > 0$ (abre hacia arriba)
2. $y = a(x-h)^2 + k$, $a < 0$ (abre hacia abajo)
3. $x = a(y-k)^2 + h$, $a > 0$ (abre hacia la derecha)
4. $x = a(y-k)^2 + h$, $a < 0$ (abre hacia la izquierda)

Observe que las ecuaciones de la forma $y = a(x-h)^2 + k$ son funciones, ya que sus gráficas cumplen el criterio de la recta vertical. Sin embargo, las ecuaciones de la forma $x = a(y-k)^2 + h$ no son funciones, ya que sus gráficas no cumplen el criterio de la recta vertical.

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de $x = -2(y + 4)^2 - 1$.

Solución La gráfica abre hacia la izquierda, ya que la ecuación es de la forma $x = a(y - k)^2 + h$ y $a = -2$, que es menor que 0. La ecuación puede expresarse como $x = -2[y - (-4)]^2 - 1$. Así, $h = -1$ y $k = -4$. El vértice de la gráfica es $(-1, -4)$. Vea la **figura 10.4**. Si hacemos $y = 0$, vemos que la intersección con el eje x está en $-2(0 + 4)^2 - 1 = -2(16) - 1$ o -33. Al sustituir los valores de y puede determinar los valores correspondientes de x, cuando $y = -2$, $x = -9$ y cuando $y = -6$, $x = -9$. Estos puntos están marcados en la gráfica. Observe que esta gráfica no interseca al eje y.

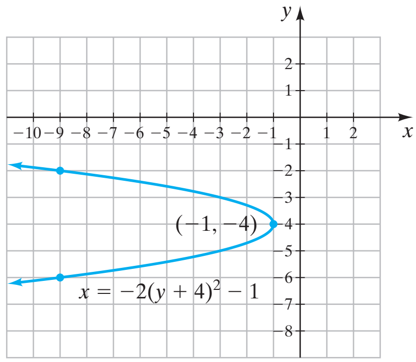


FIGURA 10.4

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 31**

EJEMPLO 3

a) Escriba la ecuación $x = 2y^2 + 12y + 13$ en la forma $x = a(y - k)^2 + h$.

b) Grafique $x = 2y^2 + 12y + 13$.

Solución

a) Primero factorice 2 de los dos primeros términos. Luego complete el cuadrado de la expresión que está dentro de los paréntesis.

$$\begin{aligned} x &= 2y^2 + 12y + 13 \\ &= 2(y^2 + 6y) + 13 \\ &= 2(y^2 + 6y + 9) + (2)(-9) + 13 \\ &= 2(y^2 + 6y + 9) - 18 + 13 \\ &= 2(y + 3)^2 - 5 \end{aligned}$$

b) Como $a > 0$, la parábola abre hacia la derecha; observe que cuando $y = 0$, $x = 2(0)^2 + 12(0) + 13 = 13$. Por lo tanto, la intersección de x es $(13, 0)$. El vértice de la parábola es $(-5, -3)$. Cuando $y = -6$, tenemos que $x = 13$. Así, otro punto en la gráfica es $(13, -6)$, y mediante la fórmula cuadrática podemos determinar que las intersecciones con el eje y son alrededor de $(0, -4.6)$ y $(0, -1.4)$. En la **figura 10.5** se muestra la gráfica.

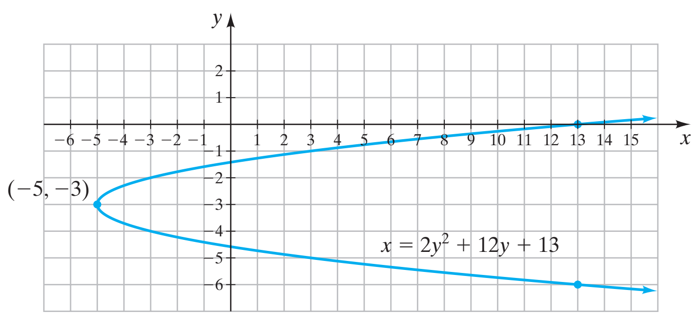


FIGURA 10.5

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 45**

4 Aprender las fórmulas de la distancia y del punto medio

Ahora deduciremos una fórmula para determinar la **distancia** entre dos puntos de una recta. Dentro de poco utilizaremos esta fórmula para desarrollar la fórmula para la **circunferencia**. Considere la **figura 10.6.**

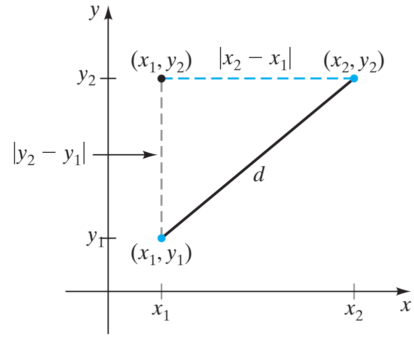


FIGURA 10.6

La distancia horizontal entre los dos puntos (x_1, y_2) y (x_2, y_2), indicada por la línea discontinua horizontal en color rojo, es $|x_2 - x_1|$. Utilizamos el valor absoluto ya que la distancia debe ser positiva. Si x_1 fuese mayor que x_2, entonces $x_2 - x_1$ sería negativo. La distancia vertical entre los puntos (x_1, y_1) y (x_1, y_2), indicada por medio de la línea discontinua vertical en color gris, es $|y_2 - y_1|$. Usando el teorema de Pitágoras, donde d es la distancia entre los dos puntos, obtenemos

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

Como cualquier número distinto de cero elevado al cuadrado es positivo, no necesitamos los signos de valor absoluto. Por lo tanto, podemos escribir

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Por medio de la propiedad de la raíz cuadrada, con la raíz cuadrada principal, obtenemos la distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), que es $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Fórmula de la distancia

La distancia, d, entre cualesquiera dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puede determinarse mediante la fórmula de la distancia

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La distancia entre cualesquiera dos puntos siempre será un número positivo. ¿Puede explicar por qué? Cuando determinamos la distancia, es indistinto cuál punto designemos como punto 1, (x_1, y_1) o como punto 2, (x_2, y_2). Observe que al elevar al cuadrado cualquier número real, el resultado siempre será mayor o igual a 0. Por ejemplo, $(5 - 2)^2 = (2 - 5)^2 = 9$.

EJEMPLO 4 Determine la distancia entre los puntos (4, 5) y (−2, 3).

Solución Como ayuda, trazamos los puntos (vea la **figura 10.7**). Marque (4, 5) como punto 1 y (−2, 3) como punto 2. Así, (x_2, y_2) representa a (−2, 3) y (x_1, y_1) representa a (4, 5). Ahora usemos la fórmula de la distancia para determinar la distancia, d.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-2 - 4)^2 + (3 - 5)^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{36 + 4} \\ &= \sqrt{40} \quad \text{o} \quad \approx 6.32 \end{aligned}$$

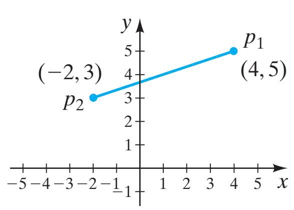


FIGURA 10.7

Por lo tanto, la distancia entre los puntos (4, 5) y (−2, 3) es $\sqrt{40}$ o alrededor de 6.32 unidades.

Ahora resuelva el ejercicio 57

Cómo evitar errores comunes

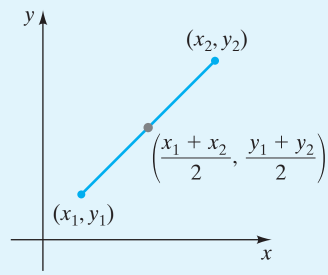
Los estudiantes algunas veces inician bien la determinación de la distancia mediante la fórmula de la distancia, pero olvidan tomar la raíz cuadrada de la suma $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ para obtener la respuesta correcta. Cuando se obtiene la raíz cuadrada, recuerde que $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.

Con frecuencia es necesario encontrar el **punto medio** de un segmento de recta determinado por dos puntos dados. Para hacerlo utilizamos la fórmula del punto medio.

Fórmula del punto medio

Dados cualesquiera dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el punto que se encuentra a la mitad de los puntos dados puede determinarse mediante la fórmula del punto medio:

$$\text{punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Para determinar el punto medio, tomamos el promedio (media) de las coordenadas x y de las coordenadas y.

EJEMPLO 5 ▸ Un segmento de recta que pasa por el centro de una circunferencia la interseca en los puntos $(-3, 6)$ y $(4, 1)$. Determine el centro de la circunferencia.

Solución Para determinar el centro de la circunferencia, determinamos el punto medio del segmento de recta entre $(-3, 6)$ a $(4, 1)$. No importa qué punto se marque como (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Hacemos que $(-3, 6)$ sea (x_1, y_1) y que $(4, 1)$ sea (x_2, y_2). Vea la **figura 10.8**.

$$\text{punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{-3 + 4}{2}, \frac{6 + 1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

El punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ está a la mitad del segmento determinado por los puntos $(-3, 6)$ y $(4, 1)$. También es el centro de la circunferencia.

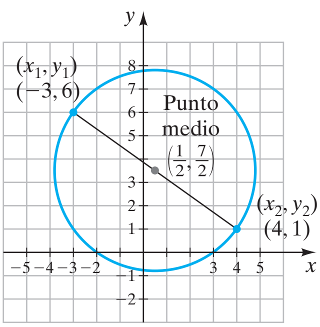


FIGURA 10.8

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 69**

5 Graficar circunferencias con centros en el origen

Una **circunferencia**, puede definirse como el conjunto de puntos en un plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado su **centro**.

La fórmula para la *forma general* de la ecuación de una circunferencia cuyo centro está en el origen puede deducirse utilizando la fórmula de la distancia. Sea (x, y) un punto de una circunferencia de radio r con centro en $(0, 0)$, vea la **figura 10.9**. Mediante la fórmula de la distancia, tenemos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \textit{Fórmula de la distancia.}$$

$$\text{o} \quad r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \qquad \textit{Sustituir r por d, (x, y) por } (x_2, y_2) \textit{ y (0, 0) por } (x_1, y_1).$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \textit{Simplificar el radicando.}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \textit{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$

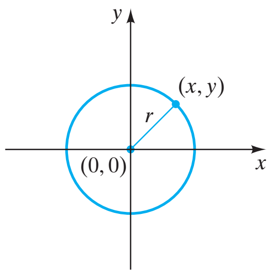


FIGURA 10.9

Circunferencia con centro en el origen y radio r

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Por ejemplo, $x^2 + y^2 = 16$ es una circunferencia con centro en el origen y radio 4, y $x^2 + y^2 = 10$ es una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{10}$. Observe que $4^2 = 16$ y que $(\sqrt{10})^2 = 10$.

EJEMPLO 6 Grafique las ecuaciones siguientes.

a) $x^2 + y^2 = 64$ **b)** $y = \sqrt{64 - x^2}$ **c)** $y = -\sqrt{64 - x^2}$

Solución

a) Si reescribimos la ecuación como

$$x^2 + y^2 = 8^2$$

vemos que el radio de la circunferencia es 8. La **figura 10.10** ilustra la gráfica.

b) Si despejamos y en la ecuación $x^2 + y^2 = 64$, obtenemos

$$y^2 = 64 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{64 - x^2}$$

En la ecuación $y = \pm\sqrt{64 - x^2}$, la ecuación $y = +\sqrt{64 - x^2}$ o simplemente $y = \sqrt{64 - x^2}$, representa la mitad superior de la circunferencia, mientras que la ecuación $y = -\sqrt{64 - x^2}$ representa la semicircunferencia inferior. Por lo tanto, la gráfica de $y = \sqrt{64 - x^2}$, donde y representa la raíz cuadrada principal, se encuentra en y sobre el eje x. Para cualquier valor de x del dominio de la función, el valor de y debe ser mayor o igual que 0. ¿Por qué? La gráfica es la semicircunferencia de la **figura 10.11**.

c) La gráfica de $y = -\sqrt{64 - x^2}$ también es una semicircunferencia. Sin embargo, esta gráfica se encuentra en y bajo el eje x. Para cualquier valor de x del dominio de la función, el valor de y debe ser menor o igual que 0. ¿Por que? La **figura 10.12** muestra la gráfica.

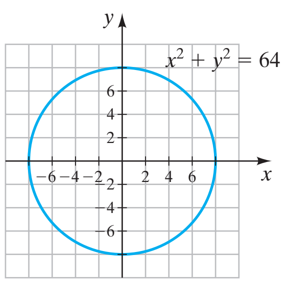


FIGURA 10.10

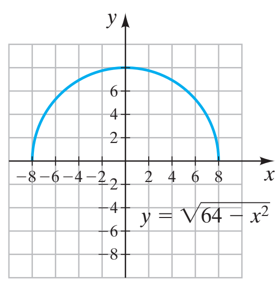


FIGURA 10.11

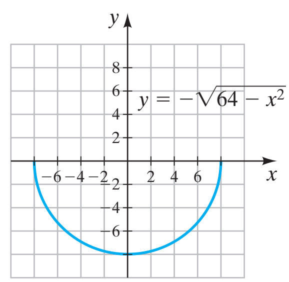


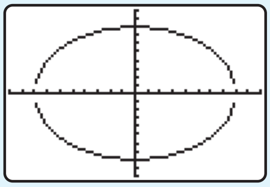
FIGURA 10.12

Ahora resuelva el ejercicio 101

Considere las ecuaciones $y = \sqrt{64 - x^2}$ y $y = -\sqrt{64 - x^2}$ del ejemplo **6 b)** y **6 c)**. Si eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación y reordena los términos, obtendrá $x^2 + y^2 = 64$. Inténtelo y vea que así es.

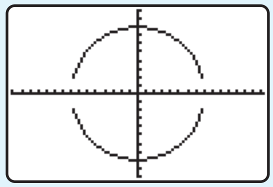
CÓMO USAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Al utilizar su calculadora para obtener una gráfica, usted inserta la función que desea graficar a la derecha de $y =$. Las circunferencias no son funciones, ya que no cumplen el criterio de la recta vertical. Para graficar la ecuación $x^2 + y^2 = 64$, que sabemos es una circunferencia con radio 8, despejamos y en la ecuación para obtener $y = \pm\sqrt{64 - x^2}$. Después graficamos las dos funciones $Y_1 = \sqrt{64 - x^2}$ y $Y_2 = -\sqrt{64 - x^2}$ en los mismos ejes para obtener la circunferencia. La **figura 10.13** ilustra estas gráficas. Por la distorsión (descrita en el recuadro Cómo usar su calculadora graficadora de la sección 9.1), la gráfica no parece ser una circunferencia. Si utiliza la característica SQUARE de su calculadora para hacer que las unidades en ambos ejes tengan la misma longitud, la figura aparece como una circunferencia (vea la **figura 10.14**).



$-10, 10, 1, -10, 10, 1$

FIGURA 10.13



$\approx -15.2, \approx 15.2, 1, -10, 10, 1$

FIGURA 10.14

6 Graficar circunferencias con centros en (h, k)

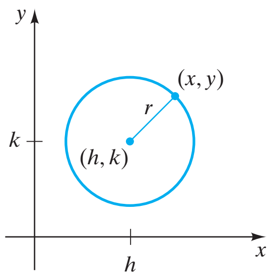


FIGURA 10.15

La forma general de una circunferencia con centro en (h, k) y radio r puede deducirse mediante la fórmula de la distancia. Sea (h, k) el centro de la circunferencia y sea (x, y) cualquier punto de la circunferencia (vea la **figura 10.15**). Si el radio r representa la distancia entre los puntos (x, y), en la circunferencia y el centro de la circunferencia (h, k), entonces la fórmula de la distancia implica

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Ahora elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación para obtener la forma general de una circunferencia con centro en (h, k) y radio r.

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

Circunferencia con centro en (h, k) y radio r

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

EJEMPLO 7 Determine la ecuación de la circunferencia que se muestra en la **figura 10.16**.

Solución El centro es $(-3, 2)$ y el radio es 3.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$[x - (-3)]^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

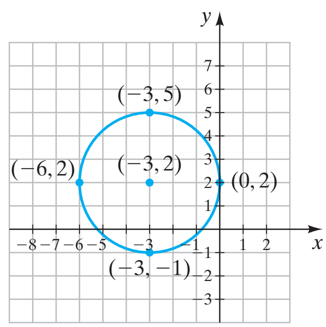


FIGURA 10.16

Ahora resuelva el ejercicio 87

EJEMPLO 8

a) Muestre que la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$ es una circunferencia.
b) Determine el centro y el radio de la circunferencia y luego trácela.
c) Determine el área de la circunferencia.

Solución

a) Escribiremos esta ecuación en la forma general, mediante el proceso de completar cuadrados. Primero reescribimos la ecuación, colocando juntos todos los términos con variables semejantes.

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y - 6 = 0$$

Luego, pase la constante al lado derecho de la ecuación.

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y = 6$$

Ahora completamos dos cuadrados, uno para cada variable. Primero lo hacemos para la variable x.

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y = 6 + 9$$

Y luego para la variable y.

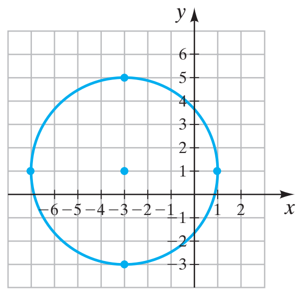
$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 6 + 9 + 1$$

o

$$\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{} + \underbrace{y^2 - 2y + 1}_{} = 16$$

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4^2$$



$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$

FIGURA 10.17

b) El centro de la circunferencia está en $(-3, 1)$ y el radio es 4. La circunferencia está bosquejada en la **figura 10.17**.

c) El área es

$$A = \pi r^2 = \pi(4)^2 = 16\pi \approx 50.3 \text{ unidades cuadradas.}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 111

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Liste el nombre de cada una de las cuatro secciones cónicas. Trace una figura que muestre cómo se forma cada una.
2. Explique cómo determinar la dirección hacia donde abre una parábola, examinando la ecuación.
3. ¿Son funciones las parábolas de la forma $y = a(x - h)^2 + k$, $a > 0$? Explique. ¿Cuál es el dominio y el rango de $y = a(x - h)^2 + k, a > 0$?
4. ¿Son funciones las parábolas de la forma $x = a(y - k)^2 + h$, $a > 0$? Explique. ¿Cuál es el dominio y el rango de $x = a(y - k)^2 + h, a > 0$?
5. Compare las gráficas de $y = 2(x - 3)^2 + 4$ y $y = -2(x - 3)^2 + 4$.
6. Dé la fórmula de la distancia.
7. Cuando se determina la distancia entre dos puntos diferentes mediante la fórmula de la distancia, ¿por qué la distancia siempre debe ser un número positivo?
8. Proporcione la fórmula del punto medio.
9. ¿Cuál es la definición de circunferencia?
10. ¿Cuál es la ecuación de una circunferencia con centro (h, k)?
11. La ecuación $x^2 - y^2 = 9$, ¿es la ecuación de una circunferencia? Explique.
12. La ecuación $-x^2 + y^2 = 25$, ¿es la ecuación de una circunferencia? Explique.
13. La ecuación $2x^2 + 3y^2 = 6$, ¿es la ecuación de una circunferencia? Explique.
14. La ecuación $x = y^2 - 6y + 3$, ¿es la ecuación de una parábola? Explique.
15. La ecuación $x^2 = y^2 - 6y + 3$, ¿es la ecuación de una parábola? Explique.
16. La ecuación $x = y + 2$, ¿es la ecuación de una parábola? Explique.

Práctica de habilidades

Grafique cada ecuación.

17. $y = (x - 2)^2 + 3$ **18.** $y = (x - 2)^2 - 3$ **19.** $y = (x + 3)^2 + 2$ **20.** $y = (x + 3)^2 - 2$

21. $y = (x - 2)^2 - 1$ **22.** $y = (x + 2)^2 + 1$ **23.** $y = -(x - 1)^2 + 1$ **24.** $y = -(x + 4)^2 - 5$

25. $y = -(x + 3)^2 + 4$ **26.** $y = 2(x + 1)^2 - 3$ **27.** $y = -3(x - 5)^2 + 3$ **28.** $x = (y - 1)^2 + 1$

29. $x = (y - 4)^2 - 3$ **30.** $x = -(y - 2)^2 + 1$ **31.** $x = -(y - 5)^2 + 4$ **32.** $x = -2(y - 4)^2 + 4$

33. $x = -5(y + 3)^2 - 6$ **34.** $x = 3(y + 1)^2 + 5$ **35.** $y = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 6$ **36.** $y = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

En los ejercicios 37 a 50, **a)** *escriba la ecuación en la forma $y = a(x - h)^2 + k$, o en la forma $x = a(y - k)^2 + h$.* **b)** *Grafique la ecuación.*

37. $y = x^2 + 2x$
38. $y = x^2 - 2x$
39. $y = x^2 + 6x$
40. $y = x^2 - 4x$
41. $x = y^2 + 4y$
42. $x = y^2 - 6y$
43. $y = x^2 + 7x + 10$
44. $y = x^2 + 2x - 7$
45. $x = -y^2 + 6y - 9$
46. $x = -y^2 - 5y - 4$
47. $y = -x^2 + 4x - 4$
48. $y = 2x^2 - 4x - 4$
49. $x = -y^2 + 3y - 4$
50. $x = 3y^2 - 12y - 36$

Determine la distancia entre cada pareja de puntos. Cuando sea apropiado, utilice una calculadora y redondee sus respuestas al centésimo más cercano.

51. $(5, -1)$ y $(5, -6)$
52. $(-7, 2)$ y $(-3, 2)$
53. $(-1, 6)$ y $(8, 6)$
54. $(1, 8)$ y $(4, 12)$
55. $(-1, -3)$ y $(4, 9)$
56. $(-4, -5)$ y $(2, 3)$
57. $(-4, -5)$ y $(5, -2)$
58. $(6, 7)$ y $(11, 0)$
59. $(3, -1)$ y $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$
60. $\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, 6\right)$
61. $(-1.6, 3.5)$ y $(-4.3, -1.7)$
62. $(5.2, -3.6)$ y $(-1.6, 2.3)$
63. $(\sqrt{7}, \sqrt{3})$ y $(0, 0)$
64. $(-\sqrt{2}, -\sqrt{5})$ y $(0, 0)$

Determine el punto medio del segmento de recta que está entre cada par de puntos.

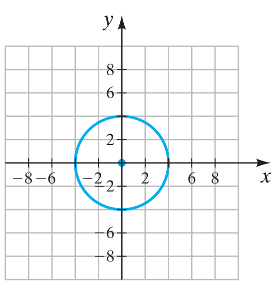
65. $(1, 3)$ y $(5, 9)$
66. $(0, 8)$ y $(4, -6)$
67. $(-7, 2)$ y $(7, -2)$
68. $(4, 7)$ y $(1, -3)$
69. $(-1, 4)$ y $(4, 6)$
70. $(-2, -9)$ y $(-6, -3)$
71. $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ y $(2, -4)$
72. $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ y $\left(2, \frac{9}{2}\right)$
73. $(\sqrt{3}, 2)$ y $(\sqrt{2}, 7)$
74. $(-\sqrt{7}, 8)$ y $(\sqrt{5}, \sqrt{3})$

Escriba la ecuación de cada circunferencia con el centro y radio dados.

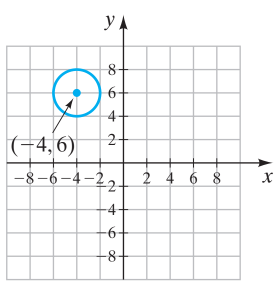
75. Centro $(0, 0)$, radio 4.
76. Centro $(0, 0)$, radio 7.
77. Centro $(2, 0)$, radio 5.
78. Centro $(-3, 0)$, radio 9.
79. Centro $(0, 5)$, radio 1.
80. Centro $(0, -6)$, radio 6.
81. Centro $(3, 4)$, radio 8.
82. Centro $(-5, 2)$, radio 2.
83. Centro $(7, -6)$, radio 10.
84. Centro $(-6, -1)$, radio 7.
85. Centro $(1, 2)$, radio $\sqrt{5}$
86. Centro $(-7, -2)$, radio $\sqrt{13}$

Escriba la ecuación de cada circunferencia. Suponga que el radio es un número entero positivo.

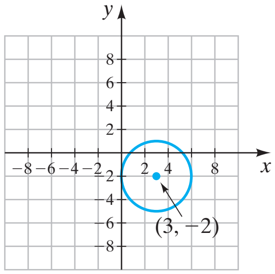
87.



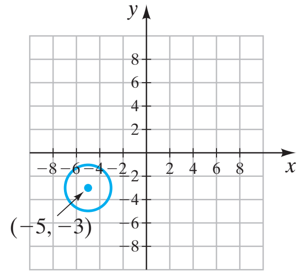
88.



89.



90.



Grafique cada ecuación.

91. $x^2 + y^2 = 16$

92. $x^2 + y^2 = 5$

93. $x^2 + y^2 = 10$

94. $(x - 1)^2 + y^2 = 7$

95. $(x + 4)^2 + y^2 = 25$

96. $x^2 + (y + 1)^2 = 9$

97. $x^2 + (y - 3)^2 = 4$

98. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

99. $(x + 8)^2 + (y + 2)^2 = 9$

100. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$

101. $y = \sqrt{25 - x^2}$

102. $y = \sqrt{16 - x^2}$

103. $y = -\sqrt{4 - x^2}$

104. $y = -\sqrt{49 - x^2}$

En los ejercicios 105 a 112, **a)** *utilice el método de completar el cuadrado para escribir cada ecuación en la forma general.* **b)** *Trace la gráfica.*

105. $x^2 + y^2 + 8x + 15 = 0$

106. $x^2 + y^2 + 4y = 0$

107. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

108. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

109. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$

110. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

111. $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$

112. $x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{3}{2} = 0$

Resolución de problemas

113. Determine el área de la circunferencia del ejercicio 95.

114. Determine el área de la circunferencia del ejercicio 97.

En los ejercicios 115 a 118, determine, si las hay, las intercepciones con los ejes x y y de la gráfica de cada ecuación.

115. $x = y^2 - 6y - 7$

116. $x = -y^2 + 8y - 12$

117. $x = 2(y - 3)^2 + 6$

118. $x = -(y + 2)^2 - 8$

119. Si conoce el punto medio de un segmento de recta, ¿es posible determinar la longitud del segmento de recta? Explique.

120. Si conoce uno de los extremos de un segmento de recta y la longitud del segmento, ¿es posible determinar el otro extremo? Explique.

121. Determine la longitud del segmento de recta cuyo punto medio es $(4, -6)$ y uno de sus extremos está en $(7, -2)$.

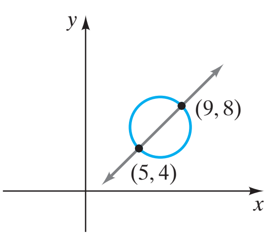
122. Determine la longitud del segmento de recta cuyo punto medio está en $(-2, 4)$ y uno de sus extremos está en $(3, 6)$.

123. Determine la ecuación de una circunferencia con centro en $(-6, 2)$ que es tangente al eje x (esto es, la circunferencia toca al eje x en un solo punto).

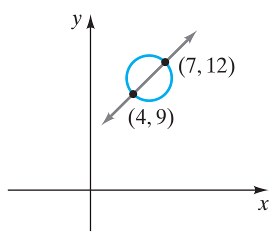
124. Determine la ecuación de una circunferencia con centro en $(-3, 5)$ que es tangente al eje y.

En los ejercicios 125 y 126, determine **a)** *el radio de la circunferencia cuyo diámetro está en la línea que se muestra,* **b)** *el centro de la circunferencia, y* **c)** *la ecuación de la circunferencia.*

125.

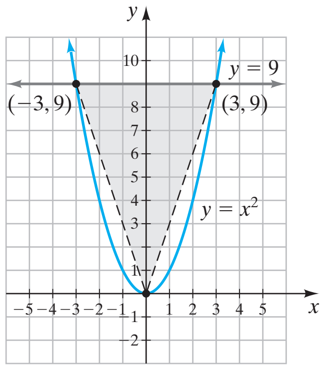


126.



127. Puntos de intersección ¿Cuál es el número máximo y cuál el número mínimo posible de puntos de intersección para las gráficas de $y = a(x - h_1)^2 + k_1$ y $x = a(y - k_2)^2 + h_2$? Explique.

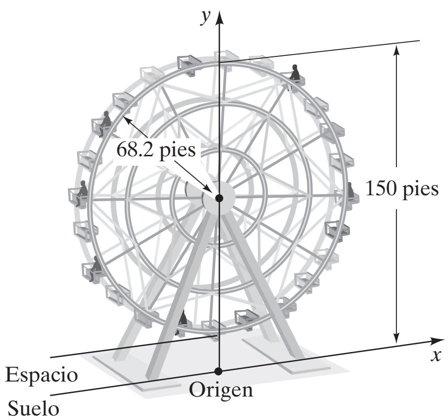
128. Triángulo inscrito Considere la figura siguiente.



a) Determine el área del triángulo sombreado.

b) Cuando se inscribe un triángulo dentro de una parábola, como en la figura, el área que encierra la parábola desde la base del triángulo es $\frac{4}{3}$ del área del triángulo. Determine el área que encierra la parábola desde $x = -3$ hasta $x = 3$.

129. Rueda de la fortuna La rueda de la fortuna en el muelle Navy en Chicago, tiene una altura de 150 pies. El radio de la rueda es 68.2 pies.

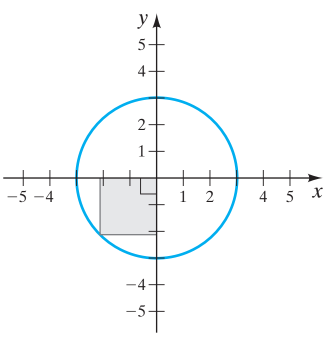


a) ¿Cuál es el espacio libre del suelo a la rueda?

b) ¿A qué distancia del suelo queda el centro de la rueda?

c) Determine la ecuación de la rueda. Suponga que el origen está en el suelo, directamente debajo del centro de la rueda.

130. Área sombreada Determine el área cuadrada sombreada en la figura. La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 9$.



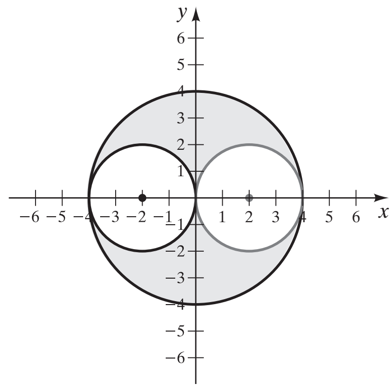
131. Área sombreada Considere la figura siguiente. Escriba una ecuación para:

a) la circunferencia mayor.

b) la circunferencia interna de la derecha.

c) la circunferencia interna de la izquierda.

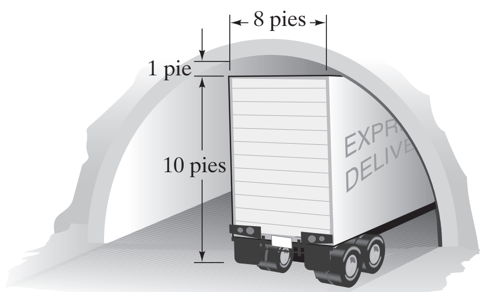
d) Determine el área sombreada.



132. Puntos de intersección Considere las ecuaciones $x^2 + y^2 = 16$ y $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Tomando en cuenta el centro y radio de cada circunferencia, determine el número de puntos de intersección de las dos circunferencias.

133. Circunferencias concéntricas Determine el área de las dos circunferencias concéntricas cuyas ecuaciones son $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16$ y $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 64$. *Circunferencias concéntricas* son aquellas que tienen el mismo centro.

134. Túnel El departamento de autopistas planea construir un túnel semicircular que pase a través de una montaña. El túnel debe ser lo suficientemente grande para que un camión de 8 pies de ancho y 10 pies de alto pase por el centro del túnel con 1 pie de espacio entre las esquina superiores del camión y el túnel (como se muestra en la figura siguiente). Determine el radio mínimo que debe tener el túnel.



Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan la pregunta 135.

135. Ecuación de una parábola La ecuación de una parábola se puede determinar si se conocen tres puntos de ella. Para hacerlo, inicien con $y = ax^2 + bx + c$. Luego sustituyan las coordenadas x y y del primer punto en la ecuación. Esto dará como resultado una ecuación en a, b y c. Repitan el procedimiento para los otros dos puntos. Este proceso da lugar a un sistema de tres ecuaciones con tres variables. Después resuelvan el sistema para a, b y c. Para determinar la ecuación de la parábola, sustituyan los valores que se encontraron para a, b y c en la ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

Tres puntos de una parábola son $(0, 12)$, $(3, -3)$ y $(-2, 32)$.

a) En forma individual, determinen un sistema de ecuaciones con tres variables que pueda usarse para encontrar la ecuación de la parábola. Luego comparen sus respuestas. Si cada miembro del grupo no tiene el mismo sistema, determinen por qué razón.

b) De forma individual, resuelvan el sistema y determinen los valores de a, b y c. Luego comparen sus respuestas.

c) De forma individual, escriban la ecuación de la parábola que pasa por $(0, 12)$, $(3, -3)$ y $(-2, 32)$. Luego comparen sus respuestas.

d) En forma individual, escriban la ecuación en la forma

$$y = a(x - h)^2 + k$$

Luego comparen sus respuestas.

e) De forma individual, grafiquen la ecuación de la parte **d)**. Después comparen sus respuestas.

Ejercicios de repaso acumulativo

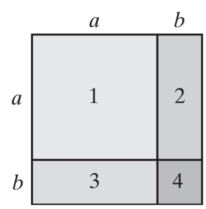
[1.5] **136.** Simplifique $\dfrac{6x^{-3}y^4}{18x^{-2}y^3}$.

[2.5] **137.** Resuelva la desigualdad $-4 < 3x - 4 < 17$. Escriba la solución en notación de intervalos.

[4.5] **138.** Evalúe el determinante.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

[5.2] **139. a)** Escriba expresiones para representar cada una de las cuatro áreas sombreadas en la figura.



b) Exprese el área total mostrada como el cuadrado de un binomio.

[10.1] **140.** Grafique $y = (x - 4)^2 + 1$.

10.2 La elipse

1 Graficar elipses.

2 Graficar elipses con centros en (h, k).

1 Graficar elipses

Una **elipse** puede definirse como un conjunto de puntos de un plano, la suma de cuyas distancias a dos puntos fijos es una constante. Los dos puntos fijos se llaman **focos** (cada uno es un foco) de la elipse (vea la **figura 10.18**). En esta figura, F_1 y F_2 representan los dos focos.

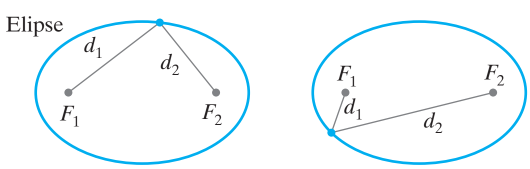


FIGURA 10.18

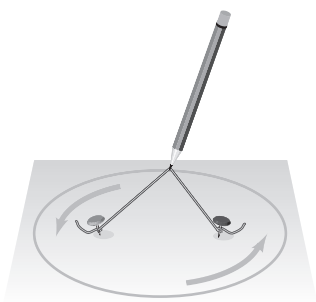


FIGURA 10.19

Podemos construir una elipse utilizando una cuerda y dos clavos. Coloque los dos clavos ligeramente cerca uno de otro (**figura 10.19**). Luego ate los extremos de la cuerda a los clavos. Con un lápiz o un bolígrafo, estire la cuerda y, manteniendo la cuerda tensa, dibuje la elipse moviendo el lápiz alrededor de los clavos.

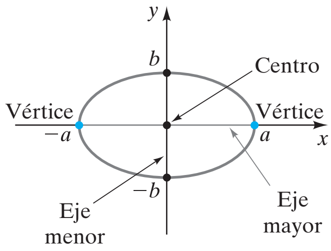


FIGURA 10.20

En la **figura 10.20**, el segmento de $-a$ a a en el eje x es el **eje principal** *o mayor* y el segmento de $-b$ a b en el **eje menor** *o más corto* de la elipse. El eje mayor de una elipse, también podría estar en el eje y. La **figura 10.20** también muestra el centro de la elipse y los dos vértices (los puntos en color rojo). Los vértices son los extremos del eje mayor.

A continuación proporcionamos la forma general de la elipse con su centro en el origen.

Elipse con centro en el origen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son las intersecciones con el eje x y $(0, b)$ y $(0, -b)$ son las intersecciones con el eje y.

Observe que las intersecciones con el eje x se determinan mediante la constante en el denominador del término de x^2, y las intersecciones con el eje y se determinan mediante el denominador del término de y^2. Si $a^2 > b^2$; el eje mayor de la elipse estará en el eje x, y si $b^2 > a^2$, el eje mayor de la elipse estará en el eje y.

En el ejemplo 1, el eje principal de la elipse está en el eje x.

EJEMPLO 1 Grafique $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Solución Podemos rescribir la ecuación como

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Así, $a = 3$ y las intersecciones con el eje x son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Como $b = 2$, las intersecciones con el eje y son $(0, 2)$ y $(0, -2)$. La **figura 10.21** ilustra esta elipse.

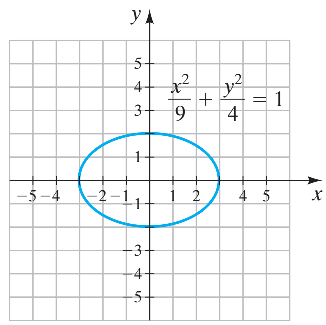


FIGURA 10.21

Ahora resuelva el ejercicio 15

Una ecuación puede estar escrita de tal manera que no sea evidente que su gráfica sea una elipse. Esto se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de $20x^2 + 9y^2 = 180$.

Solución Si dividimos ambos lados de la ecuación entre 180 para igualar a 1 el lado derecho de la ecuación, obtenemos una ecuación que podemos reconocer como una elipse.

$$\frac{20x^2 + 9y^2}{180} = \frac{180}{180}$$

$$\frac{20x^2}{180} + \frac{9y^2}{180} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{20} = 1$$

Ahora la ecuación puede reconocerse como una elipse en forma general.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como $a^2 = 9$, $a = 3$. Sabemos que $b^2 = 20$; así $b = \sqrt{20}$ (o aproximadamente 4.47).

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{20})^2} = 1$$

Las intersecciones con el eje x son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Las intersecciones con el eje y son $(0, -\sqrt{20})$ y $(0, \sqrt{20})$. La **figura 10.22** ilustra la gráfica. Observe que el eje mayor se encuentra a lo largo del eje y en vez de a lo largo del eje x.

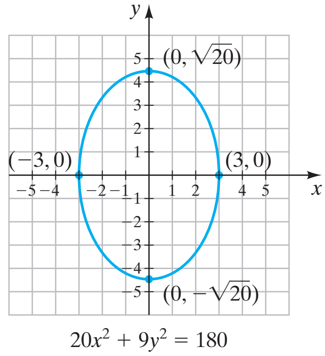


FIGURA 10.22

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 19**

En el ejemplo 1, como $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$ y en consecuencia $a^2 > b^2$, el eje mayor está en el eje x. En el ejemplo 2, como $a^2 = 9$ y $b^2 = 20$, se tiene $b^2 > a^2$, el eje mayor está en el eje y. En el caso específico en que $a^2 = b^2$, la figura es una circunferencia. Así, la circunferencia es un caso especial de una elipse.

EJEMPLO 3 ▸ Escriba la ecuación de la elipse de la **figura 10.23**.

Solución Las intersecciones con el eje x son $(-\sqrt{10}, 0)$ y $(\sqrt{10}, 0)$; así que, $a = \sqrt{10}$ y $a^2 = 10$. Las intersecciones con el eje y son $(0, -12)$ y $(0, 12)$, por lo que $b = 12$ y $b^2 = 144$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{144} = 1$$

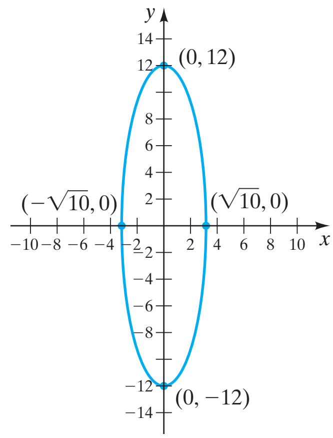


FIGURA 10.23

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 45**

La fórmula para el **área de una elipse** es $A = \pi ab$. En el ejemplo 1, donde $a = 3$ y $b = 2$, el área es $A = \pi(3)(2) = 6\pi \approx 18.8$ unidades cuadradas.

En el ejemplo 2, donde $a = 3$ y $b = \sqrt{20}$, el área es $A = \pi(3)(\sqrt{20}) = \pi(3)(2\sqrt{5}) = 6\pi\sqrt{5} \approx 42.1$ unidades cuadradas.

2 Graficar elipses con centros en (*h*, *k*)

Para obtener la ecuación de una elipse con centro en (h, k), se podría requerir el uso de traslaciones horizontales y verticales, similares a las que se utilizaron en el capítulo 8.

Elipse con centro en (*h*, *k*)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

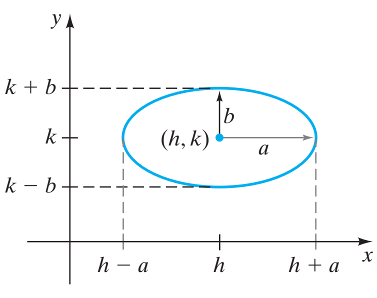


FIGURA 10.24

En la fórmula, la h desplaza la gráfica hacia la izquierda o hacia la derecha del origen y la k hacia arriba o hacia abajo, como se muestra en la **figura 10.24**.

EJEMPLO 4 Grafique $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$.

Solución Ésta es la gráfica de $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ o $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ trasladada de modo que su centro esté en $(2, -3)$. Observe que $a = 5$ y $b = 4$. La gráfica se muestra en la **figura 10.25**.

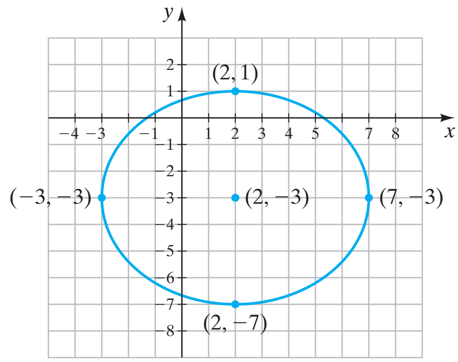


FIGURA 10.25

Ahora resuelva el ejercicio 33

FIGURA 10.26

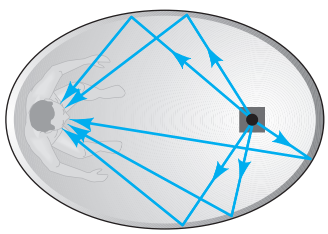


FIGURA 10.27

En muchas áreas es muy útil entender de manera clara las elipses. Los astrónomos saben que los planetas giran alrededor del sol en órbitas elípticas. Los satélites de comunicación se mueven alrededor de la Tierra en órbitas elípticas (vea la **figura 10.26**).

Las elipses se utilizan en medicina para deshacer piedras (cálculos) en los riñones. Cuando una señal sale de un foco de una elipse, la señal se refleja en el otro foco. En las máquinas para deshacer cálculos renales, la persona se coloca de modo que el cálculo que será destruido quede en uno de los focos de una cámara con forma elíptica llamada litotripter (vea la **figura 10.27** y los ejercicios 57 y 58).

En ciertas construcciones con techos elipsoidales, una persona de pie en uno de los focos puede murmurar algo y una persona parada en el otro foco puede oír claramente lo que la primera persona murmure. Existen muchos otros usos de las elipses, como las lámparas que concentran la luz en un punto específico.

CÓMO USAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Las elipses no son funciones. Para graficarlas mediante una calculadora graficadora, despejamos y. Esto dará las dos ecuaciones que usamos para graficar la elipse.

En el ejemplo 1, graficamos $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Al despejar y, obtenemos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$36 \cdot \frac{x^2}{9} + 36 \cdot \frac{y^2}{4} = 1 \cdot 36 \qquad \textit{Multiplicar por el MCD.}$$

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$9y^2 = 36 - 4x^2$$

$$y^2 = \frac{36 - 4x^2}{9}$$

$$y^2 = \frac{4(9 - x^2)}{9} \qquad \textit{Factorizar 4 del numerador.}$$

$$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \qquad \textit{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

Para graficar la elipse, hacemos $Y_1 = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ y $Y_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ y graficamos ambas ecuaciones. Las gráficas de Y_1 y Y_2 se ilustran en la **figura 10.28**.

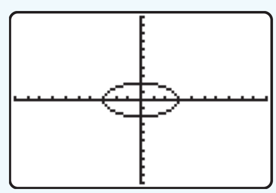


FIGURA 10.28

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cuál es la definición de una elipse?
2. ¿Cuál es la ecuación de una elipse con su centro en el origen?
3. ¿Cuál es la ecuación de una elipse cuyo centro está en (h, k)?
4. Analice las gráficas de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ cuando $a > b$, $a < b$ y cuando $a = b$.
5. Explique por qué la circunferencia es un caso especial de la elipse.
6. En la fórmula $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ¿qué representan a y b?
7. Al graficar la elipse cuya ecuación es $10x^2 + 36y^2 = 180$, ¿cuál es el primer paso que debe hacer?
8. Al graficar la elipse cuya ecuación es $9x^2 + 25y^2 = 225$, ¿cuál es el primer paso que debe hacer?
9. ¿La ecuación $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = 1$ es de una elipse? Explique.
10. ¿La ecuación $-\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{81} = 1$ es de una elipse? Explique.

Práctica de habilidades

Grafique cada ecuación.

11. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$
12. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$
13. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
14. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
15. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
16. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{16} = 1$
17. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$
18. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{49} = 1$
19. $x^2 + 16y^2 = 16$
20. $x^2 + 25y^2 = 25$
21. $49x^2 + y^2 = 49$
22. $9x^2 + 25y^2 = 225$
23. $9x^2 + 16y^2 = 144$
24. $25x^2 + 4y^2 = 100$
25. $25x^2 + 100y^2 = 400$
26. $100x^2 + 25y^2 = 400$
27. $x^2 + 2y^2 = 8$
28. $x^2 + 36y^2 = 36$
29. $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$
30. $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$
31. $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$
32. $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{49} = 1$
33. $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$
34. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$
35. $(x+3)^2 + 9(y+1)^2 = 81$
36. $18(x-1)^2 + 2(y+3)^2 = 72$
37. $(x-5)^2 + 4(y+4)^2 = 4$
38. $4(x-2)^2 + 9(y+2)^2 = 36$
39. $12(x+4)^2 + 3(y-1)^2 = 48$
40. $16(x-2)^2 + 4(y+3)^2 = 16$

Resolución de problemas

41. Determine el área de la elipse del ejercicio 11.
42. Determine el área de la elipse del ejercicio 15.
43. ¿Cuántos puntos tiene la gráfica de $16x^2 + 25y^2 = 0$? Explique.
44. Considere la gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Cuando el valor de b se hace cada vez más cercano al valor de a, ¿qué le sucede a la forma de la gráfica? ¿Cuál es la forma de la gráfica cuando $a = b$?

En los ejercicios del 45 al 48, determine la ecuación de la elipse que tiene los cuatro puntos dados como extremos de los ejes mayor y menor.

45. $(3, 0), (-3, 0), (0, 4), (0, -4)$
46. $(6, 0), (-6, 0), (0, 5), (0, -5)$
47. $(2, 0), (-2, 0), (0, 3), (0, -3)$
48. $(1, 0), (-1, 0), (0, 7), (0, -7)$
49. ¿Cuántos puntos de intersección tendrán las gráficas de las ecuaciones $x^2 + y^2 = 49$ y $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$? Explique.
50. ¿Cuántos puntos de intersección tendrán las gráficas de las ecuaciones $y = 2(x-2)^2 - 3$ y $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$? Explique.

En los ejercicios 51 y 52, escriba la ecuación siguiente en forma general. Determine el centro de la elipse.

51. $x^2 + 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$
52. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$

53. **Galería de arte** Una galería de arte tiene un salón elíptico. La distancia máxima de un foco a la pared es 90.2 pies y la distancia mínima es 20.7 pies. Determine la distancia entre los focos.

54. **Satélite de comunicaciones** Un transbordador espacial transportó un satélite de comunicaciones al espacio. Éste recorre una órbita elíptica alrededor de la Tierra. La distancia máxima del satélite a la Tierra es 23,200 millas y la distancia mínima es 22,800 millas. La Tierra está en un foco de la elipse. Determine la distancia de la Tierra al otro foco.

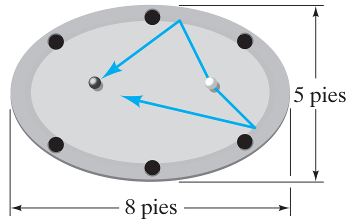
55. **Túnel a través de una montaña** El túnel de la foto tiene una bóveda en forma semielíptica. El túnel tiene 20 pies de ancho y 24 de alto.

a) Si describe una elipse completa con el centro de la elipse como el centro del camino, determine la ecuación de la elipse.

b) Determine el área de la elipse que determinó en la parte **a)**.

c) Determine el área de la abertura del túnel.

56. **Mesa de billar** Una mesa elíptica de billar tiene 8 pies de largo y 5 de ancho. Determine la ubicación de los focos. En tal mesa, si una bola se coloca en cada foco y una de ellas se golpea con la fuerza suficiente, golpeará a la otra, sin importar dónde rebote en la mesa.



57. **Máquina litotripter** Suponga que la máquina litotripter descrita en la página 672 tiene 6 pies de largo y 4 de ancho. Describa la ubicación de los focos.

58. **Litotripter** En la página 672 dimos una breve introducción del litotripter, que utiliza ondas de ultrasonido para deshacer cálculos renales. Investigue y escriba un reporte detallado que describa el procedimiento que se utiliza para deshacer los cálculos renales. Asegúrese de explicar cómo se dirigen las ondas a la piedra.

59. **Galería de los murmullos** El Salón Nacional de las Estatuas en el edificio del Capitolio en Washington, D.C., es una “galería de murmullos”. Investigue y explique por qué una persona parada en cierto punto puede murmurar algo y alguien de pie, alejado una distancia considerable, puede escuchar ese murmullo.

60. Compruebe su respuesta al ejercicio 11 con su graficadora.

61. Compruebe su respuesta al ejercicio 17 con su graficadora.

Retos

Determine la ecuación de la elipse que tiene los cuatro puntos siguientes como extremos de los ejes mayor y menor.

62. $(-7, 3), (5, 3), (-1, 5), (-1, 1)$

63. $(-3, 2), (11, 2), (4, 5), (4, -1)$

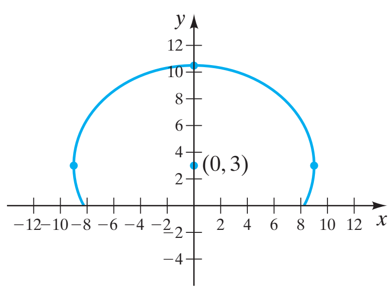
Actividad en grupo

Resuelvan el problema 64 de forma individual y luego comparen sus respuestas.

64. **Túnel** La fotografía muestra un túnel elíptico (la parte inferior de la elipse no se muestra) que se encuentra cerca del centro Rockefeller en la ciudad de Nueva York. El ancho máximo del túnel es de 18 pies y la altura máxima *desde el piso hasta la parte superior* es de 10.5 pies.

a) Si *se completara la elipse* tendría una altura máxima de 15 pies, ¿a qué altura del piso está el centro del túnel elíptico?

b) Considere la gráfica siguiente, que puede utilizarse para representar al túnel.



Si la elipse se continuara, ¿cuál sería la otra intersección con el eje y de la gráfica?

c) Escriba la ecuación de la elipse, si se completa, de la parte **b)**.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **65.** Despeje l de la fórmula $S = \frac{n}{2}(f + l)$.

[5.4] **66.** Divida $\frac{2x^2 + 2x - 7}{2x - 3}$.

[7.6] **67.** Resuelva $\sqrt{3b - 2} = 10 - b$.

[8.6] **68.** Resuelva $\frac{3x + 5}{x - 4} \leq 0$, y proporcione la solución en notación de intervalos.

[9.7] **69.** Determine $\log_8 321$.

Examen de mitad de capítulo: 10.1-10.2

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en la cual se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

Grafique cada ecuación.

1. $y = (x - 2)^2 - 1$

2. $y = -(x + 1)^2 + 3$

3. $x = -(y - 4)^2 + 1$

4. $x = 2(y + 3)^2 - 2$

5. $y = x^2 + 6x + 10$

Determine la distancia entre cada par de puntos. Donde sea apropiado, redondee su respuesta al centésimo más cercano.

6. $(-7, 4)$ y $(-2, -8)$

7. $(5, -3)$ y $(2, 9)$

Determine el punto medio del segmento de recta entre cada par de puntos.

8. $(9, -1)$ y $(-11, 6)$

9. $\left(-\frac{5}{2}, 7\right)$ y $\left(8, \frac{1}{2}\right)$

10. Escriba la ecuación de la circunferencia con centro en $(-3, 2)$ y un radio de 5 unidades.

Grafique cada ecuación.

11. $x^2 + (y - 1)^2 = 16$

12. $y = \sqrt{36 - x^2}$

13. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

14. ¿Cuál es la definición de circunferencia?

Grafique cada ecuación.

15. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

16. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1$

17. $\frac{(x - 1)^2}{49} + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$

18. $36(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$.

19. Determine el área de la elipse del ejercicio 15.

20. Determine la ecuación de la elipse que tienen los cuatro puntos $(8, 0)$, $(-8, 0)$, $(0, 5)$ y $(0, -5)$ como los extremos de los ejes mayor y menor.

10.3 La hipérbola

1 Graficar hipérbolas.

2 Repaso de secciones cónicas.

1 Graficar hipérbolas

Una **hipérbola** es el conjunto de puntos en un plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es una constante. En la **figura 10.29a** se ilustra una hipérbola. En la figura, para cada punto en la hipérbola, la diferencia $M - N$, es la misma constante. Una hipérbola puede parecer como un par de parábolas. Sin embargo, las formas son totalmente diferentes. Una hipérbola tiene dos **vértices**. El punto a la mitad de la distancia entre los dos vértices es el **centro** de la hipérbola. La recta que pasa por los vértices se llama **eje transversal**. En la **figura 10.29b** el eje transversal está a lo largo del eje x, y en la **figura 10.29c** el eje transversal está a lo largo del eje y.

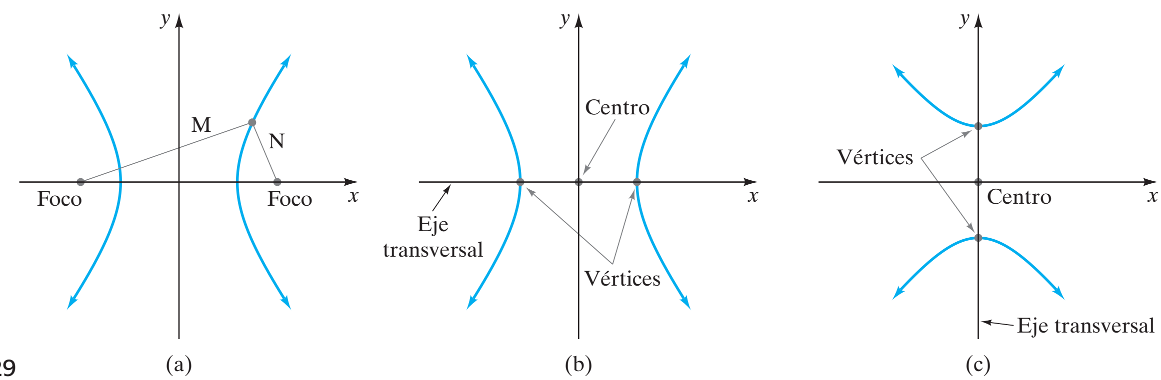


FIGURA 10.29

Las líneas discontinuas en la **figura 10.30** se llaman **asíntotas**. Las asíntotas no son parte de la hipérbola, pero sirven para graficarla. Más adelante analizaremos las asíntotas. La **figura 10.30** también tiene la forma general de la ecuación de cada hipérbola. En la **figura 10.30a**, cada vértice está a a unidades del origen. En la **figura 10.30b**, cada vértice está a b unidades del origen. Observe que en la forma general de la ecuación, el denominador de x^2 siempre es a^2 y el denominador de y^2 siempre es b^2.

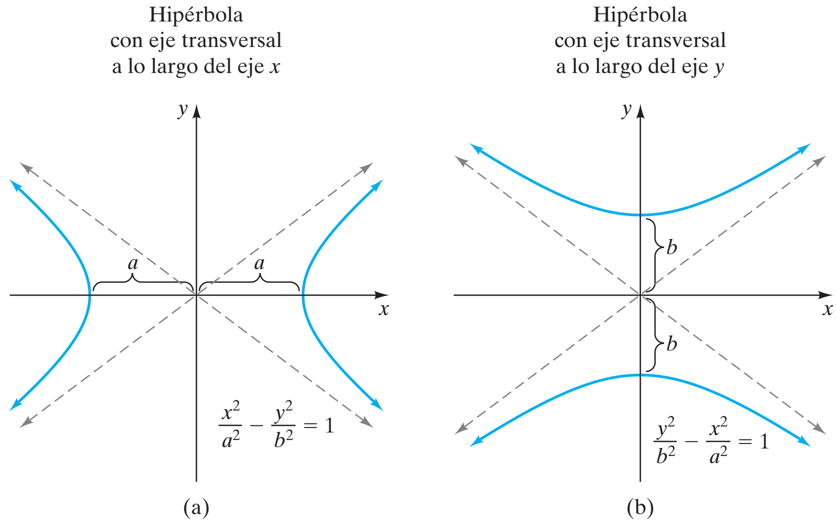


FIGURA 10.30

Una hipérbola con centro en el origen y cuyo eje transversal es uno de los ejes coordenados tiene intersecciones con el eje x (**figura 10.30a**) o intersecciones con el eje y (**figura 10.30b**), pero no ambas. Cuando una hipérbola está centrada en el origen, las intersecciones son los vértices de la hipérbola. Cuando se escribe en la forma general, las intersecciones estarán en el eje indicado por la variable con el coeficiente positivo. Las intersecciones serán las raíces cuadradas positiva y negativa del denominador del término positivo.

Ejemplos	Intersecciones con el	Intersecciones
$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$	eje x	$(-7, 0)$ y $(7, 0)$
$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$	eje y	$(0, -4)$ y $(0, 4)$

Las asíntotas pueden servir para graficar las hipérbolas. Las asíntotas son dos rectas que pasan por el centro de la hipérbola (vea la **figura 10.30**). Cuando los valores de x y y crecen, la gráfica de la hipérbola se aproxima a las asíntotas. Las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola cuyo centro es el origen son

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Podemos trazar las asíntotas rápidamente localizando los cuatro puntos (a, b), $(-a, b)$, $(a, -b)$ y $(-a, -b)$, y luego unir estos puntos con rectas discontinuas para formar un rectángulo. Después trazamos las diagonales del rectángulo para obtener las gráficas de las asíntotas.

Hipérbola con centro en el origen

EJE TRANSVERSAL A LO LARGO DEL EJE x (ABRE HACIA LA DERECHA Y HACIA LA IZQUIERDA)	EJE TRANSVERSAL A LO LARGO DEL EJE y (ABRE HACIA ARRIBA Y HACIA ABAJO)
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$

ASÍNTOTAS

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

EJEMPLO 1

a) Determine ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

b) Trace la hipérbola utilizando las asíntotas.

Solución

a) El valor de a^2 es 9; la raíz cuadrada positiva de 9 es 3. El valor de b^2 es 16; la raíz cuadrada positiva de 16 es 4. Las asíntotas son

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

o

$$y = \frac{4}{3}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{4}{3}x$$

b) Para graficar la hipérbola, primero trazamos las asíntotas. Para graficar las asíntotas podemos trazar los puntos $(3, 4), (-3, 4), (3, -4)$ y $(-3, -4)$ y dibujamos el rectángulo como se ilustra en la **figura 10.31**. Las asíntotas son las diagonales del rectángulo que aparecen con líneas discontinuas.

Como el término en x de la ecuación original es positivo, la gráfica interseca el eje x. Como el denominador del término positivo es 9, los vértices están en $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Ahora trazamos la hipérbola, aproximándola a sus asíntotas (**figura 10.32**). Observe que las asíntotas están dibujadas con líneas discontinuas ya que no son parte de la hipérbola, sólo se utilizan como ayuda para el trazo de la gráfica.

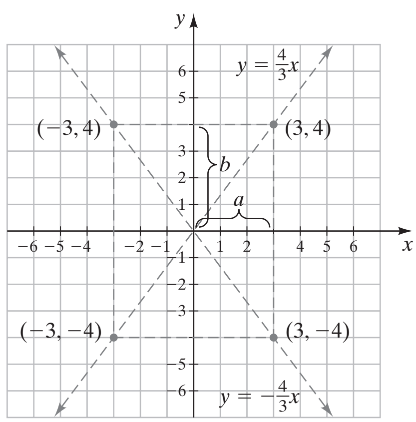
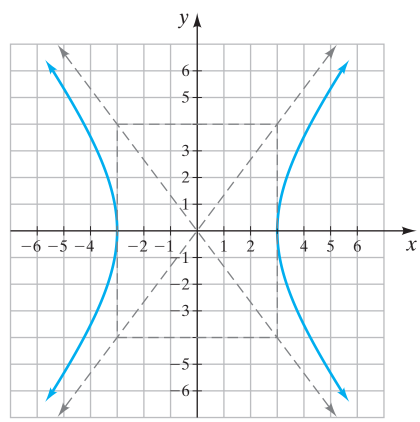


FIGURA 10.31



$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

FIGURA 10.32

Ahora resuelva el ejercicio 21

EJEMPLO 2

a) Muestre que la ecuación $-25x^2 + 4y^2 = 100$ es una hipérbola, expresando la ecuación en forma canónica.

b) Determine las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica.

c) Trace la gráfica.

Solución

a) Dividimos ambos lados de la ecuación entre 100 para obtener 1 del lado derecho de la ecuación.

$$\frac{-25x^2 + 4y^2}{100} = \frac{100}{100}$$
$$\frac{-25x^2}{100} + \frac{4y^2}{100} = 1$$
$$\frac{-x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Reescribimos la ecuación en forma general (primero el término positivo) y obtenemos

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$$

b) Como $a = 2$ y $b = 5$, las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = \frac{5}{2}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{5}{2}x$$

c) La gráfica interseca el eje y en $(0, 5)$ y $(0, -5)$. La **figura 10.33a**, ilustra las asíntotas y la **figura 10.33b** ilustra la hipérbola.

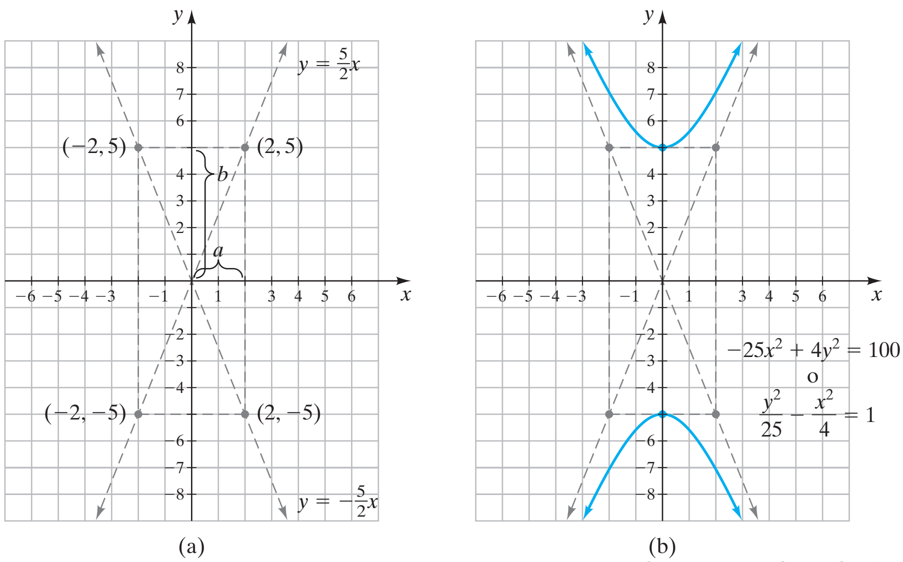


FIGURA 10.33

Ahora resuelva el ejercicio 29

Hemos analizado hipérbolas con centro en el origen; las hipérbolas no tienen por qué tener necesariamente su centro en el origen. En este texto no analizaremos tales hipérbolas.

CÓMO USAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

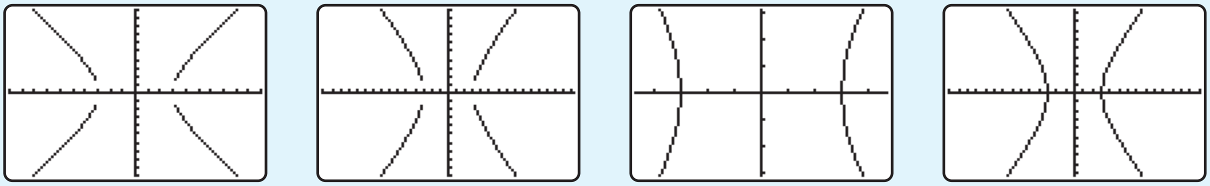
Podemos graficar hipérbolas igual que lo hicimos para circunferencias y elipses. Para hacerlo en una calculadora graficadora, despejamos y y graficamos cada parte. Considere el ejemplo 1,

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Muestre que si despeja y obtiene $y = \pm\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$. Hacemos $Y_1 = \frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$ y $Y_2 = -\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$. Las **figuras 10.34a**, **10.34b**, **10.34c** y **10.34d**, en la página siguiente, muestran las gráficas de Y_1 y Y_2 para diferentes ajustes de la ventana. Los ajustes de la ventana se indican arriba de cada gráfica.

(*continúa en la página siguiente*)

Ajuste estándar	Ajuste ZSquared, ZOOM: opción 5	Ajuste ZDecimal, ZOOM: opción 4	Ajuste la ventana con los valores que se muestran abajo (denominados “ajustes de ventana amigable”)



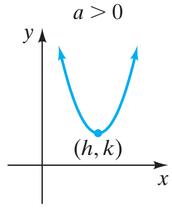
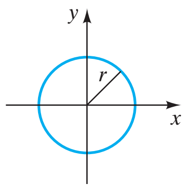
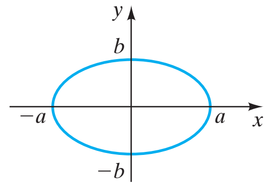
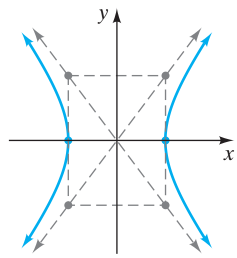
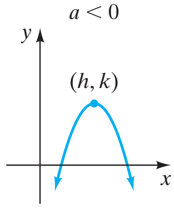
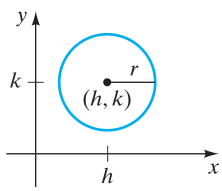
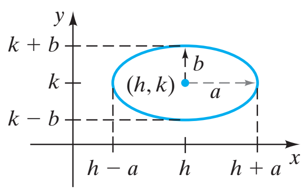
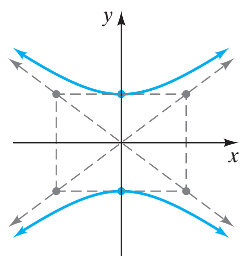
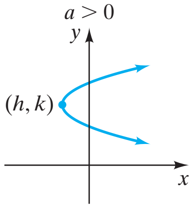
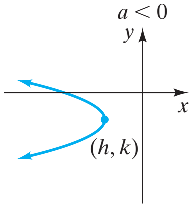
$-10, 10, 1, -10, 10, 1$	$\approx -15.2, \approx 15.2, 1, -10, 10, 1$	$-4.7, 4.7, 1, -3.1, 3.1, 1$	$-14.1, 14.1, 1, -9.3, 9.3, 1$
(a)	(b)	(c)	(d)

FIGURA 10.34

En la parte (d), el “ajuste de ventana amigable”, la razón de la longitud del eje x (28.2 unidades) a la longitud del eje y (18.6 unidades) es de alrededor de 1.516, que es la misma razón de la longitud al ancho de la ventana de visualización de la calculadora TI−84 Plus.

2 Repaso de secciones cónicas

La tabla siguiente muestra un resumen de las secciones cónicas.

Parábola	Circunferencia	Elipse	Hipérbola
$y = a(x - h)^2 + k$ o $y = ax^2 + bx + c$	$x^2 + y^2 = r^2$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
$a > 0$ 			
$a < 0$ 	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ 	$\dfrac{(x - h)^2}{a^2} + \dfrac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ 	$\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ 
$x = a(y - k)^2 + h$ o $x = ay^2 + by + c$			*Asíntotas* $y = \dfrac{b}{a}x$ y $y = -\dfrac{b}{a}x$
$a > 0$ 			
$a < 0$ 			

EJEMPLO 3 Indique si cada ecuación representa una parábola, una circunferencia, una elipse o una hipérbola.

a) $6x^2 = -6y^2 + 48$ **b)** $x - y^2 = 9y + 3$ **c)** $2x^2 = 8y^2 + 72$

Solución

a) Esta ecuación tiene un término cuadrático de x y un término cuadrático de y; coloque todos los términos cuadráticos del lado izquierdo de la ecuación.

$$6x^2 = -6y^2 + 48$$
$$6x^2 + 6y^2 = 48 \qquad \text{Sumar } 6y^2 \text{ a ambos lados.}$$

Como los coeficientes de los dos términos cuadráticos tienen el mismo número, dividimos ambos lados entre este número. Divida ambos lados entre 6.

$$\frac{6x^2 + 6y^2}{6} = \frac{48}{6}$$
$$x^2 + y^2 = 8$$

Esta ecuación es de la forma $x^2 + y^2 = r^2$ donde $r^2 = 8$.

La ecuación $6x^2 = -6y^2 + 48$ representa una circunferencia.

b) Esta ecuación tiene un término cuadrático de y, pero no de x. Despejamos x en la ecuación.

$$x - y^2 = 9y + 3$$
$$x = y^2 + 9y + 3 \qquad \text{Sumar } y^2 \text{ a ambos lados.}$$

Esta ecuación es de la forma $x = ay^2 + by + c$, en la que $a = 1$, $b = 9$ y $c = 3$.

La ecuación $x - y^2 = 9y + 3$ representa una parábola que abre hacia la derecha.

c) Esta ecuación tiene términos cuadráticos de x y de y. Coloque todos los términos cuadráticos del lado izquierdo de la ecuación.

$$2x^2 = 8y^2 + 72$$
$$2x^2 - 8y^2 = 72 \qquad \text{Restar } 8y^2 \text{ de ambos lados.}$$

Como los coeficientes de los términos cuadráticos son números diferentes, necesitamos dividir la ecuación entre la constante del lado derecho. Divida ambos lados entre 72.

$$\frac{2x^2 - 8y^2}{72} = \frac{72}{72}$$
$$\frac{2x^2}{72} - \frac{8y^2}{72} = 1$$
$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Esta ecuación es de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en la que $a^2 = 36$ (o $a = 6$) y $b^2 = 9$ (o $b = 3$).

La ecuación $2x^2 = 8y^2 + 72$ representa una hipérbola.

Ahora resuelva el ejercicio 53

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cuál es la definición de una hipérbola?
2. ¿Qué son las asíntotas? ¿Cómo determina las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola?
3. Analice la gráfica de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ para números reales diferentes de cero a y b. Incluya los ejes transversales, vértices y asíntotas.

4. Analice la gráfica de $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ para números reales diferentes de cero a y b. Incluya los ejes transversales, vértices y asíntotas.

5. ¿Es la ecuación $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{64} = 1$ de una hipérbola? Explique.

6. ¿Es la ecuación $-\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{64} = 1$ de una hipérbola? Explique.

7. ¿Es la ecuación $4x^2 - 25y^2 = 100$ de una hipérbola? Explique.

8. ¿Es la ecuación $36x^2 - 9y^2 = -324$ de una hipérbola? Explique.

9. ¿Cuál es el primer paso al graficar la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - 9y^2 = 81$? Explique.

10. ¿Cuál es el primer paso al graficar la hipérbola cuya ecuación es $4x^2 - y^2 = -64$? Explique.

Práctica de habilidades

a) *Para cada ecuación, determine las ecuaciones de las asíntotas.* **b)** *Grafique la ecuación.*

11. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ **12.** $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ **13.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ **14.** $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$

15. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ **16.** $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$ **17.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ **18.** $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$

19. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{36} = 1$ **20.** $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$ **21.** $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ **22.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

23. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$ **24.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$ **25.** $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{16} = 1$ **26.** $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{81} = 1$

En los ejercicios 27 a 36, **a)** *escriba cada ecuación en la forma general y determine las ecuaciones de las asíntotas.* **b)** *Dibuje la gráfica.*

27. $x^2 - 25y^2 = 25$ **28.** $25y^2 - x^2 = 25$

29. $4y^2 - 16x^2 = 64$ **30.** $16x^2 - 4y^2 = 64$

31. $9y^2 - x^2 = 9$ **32.** $x^2 - 9y^2 = 9$

33. $25x^2 - 9y^2 = 225$ **34.** $9y^2 - 25x^2 = 225$

35. $4y^2 - 36x^2 = 144$ **36.** $64y^2 - 25x^2 = 1600$

En los ejercicios 37 a 60, indique si la ecuación representa una parábola, una circunferencia, una elipse o una hipérbola. Vea el ejemplo 3.

37. $10x^2 + 10y^2 = 40$ **38.** $15x^2 - 5y^2 = 75$ **39.** $x^2 + 16y^2 = 64$

40. $x = 5y^2 + 15y + 1$ **41.** $4x^2 - 4y^2 = 29$ **42.** $11x^2 + 11y^2 = 99$

43. $2y = 12x^2 - 8x + 16$ **44.** $4y^2 - 6x^2 = 72$ **45.** $6x^2 + 9y^2 = 54$

46. $9.2x^2 + 9.2y^2 = 46$ **47.** $3x = -2y^2 + 9y - 15$ **48.** $12x^2 - 3y^2 = 48$

49. $6x^2 + 6y^2 = 36$ **50.** $9x^2 = -9y^2 + 99$ **51.** $14y^2 = 7x^2 + 35$

52. $9x^2 = -18y^2 + 36$ **53.** $x + y = 2y^2 + 6$ **54.** $2x^2 = -2y^2 + 32$

55. $12x^2 = 4y^2 + 48$ **56.** $-8x^2 = -9y^2 - 72$ **57.** $y - x + 4 = x^2$

58. $17x^2 = -2y^2 + 34$ **59.** $-3x^2 - 3y^2 = -27$ **60.** $x - y^2 = 15$

Resolución de problemas

61. Determine una ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $(0, 2)$ y $(0, -2)$ y cuyas asíntotas son $y = \frac{1}{2}x$ y $y = -\frac{1}{2}x$.

62. Determine una ecuación de una hipérbola cuyos vértices son $(0, 6)$ y $(0, -6)$ y cuyas asíntotas son $y = \frac{3}{2}x$ y $y = -\frac{3}{2}x$.

63. Determine una ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ y cuyas asíntotas son $y = 2x$ y $y = -2x$.

64. Determine una ecuación de una hipérbola cuyos vértices son $(7, 0)$ y $(-7, 0)$ y cuyas asíntotas son $y = \frac{4}{7}x$ y $y = -\frac{4}{7}x$.

65. Determine una ecuación de una hipérbola cuyo eje transversal está a lo largo del eje x y cuyas ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{5}{3}x$ y $y = -\frac{5}{3}x$. La solución que encontró, ¿es la única posible? Explique.

66. Determine una ecuación de una hipérbola cuyo eje transversal está a lo largo del eje y y cuyas ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{2}{3}x$ y $y = -\frac{2}{3}x$. La solución que encontró, ¿es la única posible? Explique.

67. Las hipérbolas de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ¿son funciones? Explique.

68. Las hipérbolas de la forma $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, ¿son funciones? Explique.

69. Con base en la gráfica de $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$, determine el dominio y rango de la relación.

70. Considerando la gráfica de $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{9} = 1$, determine el dominio y el rango de la relación.

71. Si se grafica la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > b$, y luego se intercambian los valores de a y b, y se grafica la ecuación que se obtiene, ¿cómo son las gráficas? Compárelas y explique su respuesta.

72. Si se grafica la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > b$, luego se cambian los signos de los términos del lado izquierdo y se grafica la nueva ecuación, ¿cómo son las gráficas? Compárelas y explique su respuesta.

73. Con su calculadora graficadora compruebe su respuesta al ejercicio 15.

74. Con su calculadora graficadora compruebe su respuesta al ejercicio 21.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.4] **75.** Escriba la ecuación, en la forma pendiente intercepción, de la recta que pasa por los puntos $(-6, 4)$ y $(-2, 2)$.

[3.6] **76.** Sea $f(x) = 3x^2 - x + 5$ y $g(x) = 6 - 4x^2$. Determine $(f + g)(x)$.

[4.4] **77.** Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$-4x + 9y = 7$$
$$5x + 6y = -3$$

[6.2] **78.** Sume $\frac{3x}{2x - 3} + \frac{2x + 4}{2x^2 + x - 6}$.

[8.3] **79.** Despeje v de la fórmula $E = \frac{1}{2}mv^2$.

[9.6] **80.** Resuelva la ecuación $\log(x + 4) = \log 5 - \log x$.

10.4 Sistemas de ecuaciones no lineales y sus aplicaciones

1 Resolver sistemas no lineales mediante sustitución.

2 Resolver sistemas no lineales mediante eliminación.

3 Resolver aplicaciones.

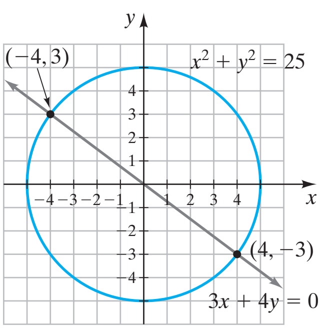


FIGURA 10.35

1 Resolver sistemas no lineales mediante sustitución

En el capítulo 4 estudiamos sistemas de ecuaciones lineales. Aquí analizamos sistemas de ecuaciones no lineales. Un **sistema de ecuaciones no lineales** es un sistema de ecuaciones en el que al menos una ecuación no es lineal (esto es, una cuya gráfica no es una línea recta).

La solución a un sistema de ecuaciones es el punto o puntos que satisfacen todas las ecuaciones del sistema. Considere el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$3x + 4y = 0$$

En la **figura 10.35**, ambas ecuaciones se grafican en los mismos ejes. Observe que las gráficas parece que se intersecan en los puntos $(-4, 3)$ y $(4, -3)$. La comprobación muestra que estos puntos satisfacen ambas ecuaciones del sistema y por lo tanto son soluciones para el sistema.

Compruebe $(-4, 3)$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ (-4)^2 + 3^2 &\stackrel{?}{=} 25 \\ 16 + 9 &\stackrel{?}{=} 25 \\ 25 &= 25 \quad \text{Verdadero} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x + 4y &= 0 \\ 3(-4) + 4(3) &\stackrel{?}{=} 0 \\ -12 + 12 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

Compruebe $(4, -3)$

$$4^2 + (-3)^2 = 25 \qquad 3(4) + 4(-3) = 0$$
$$16 + 9 \stackrel{?}{=} 25 \qquad 12 - 12 \stackrel{?}{=} 0$$
$$25 = 25 \quad \textit{Verdadero} \qquad 0 = 0 \quad \textit{Verdadero}$$

El procedimiento gráfico para resolver un sistema de ecuaciones puede ser impreciso ya que tenemos que estimar el punto o puntos de intersección. Una solución exacta se puede obtener de forma algebraica.

Para resolver un sistema de ecuaciones de forma algebraica, con frecuencia despejamos una variable de una o varias de las ecuaciones y luego utilizamos la sustitución. Este procedimiento se ilustra en los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 1 Resuelva el sistema de ecuaciones anterior de forma algebraica usando el método de sustitución.

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$3x + 4y = 0$$

Solución Primero despejamos x o y de la ecuación lineal $3x + 4y = 0$. Lo haremos para y,

$$3x + 4y = 0$$
$$4y = -3x$$
$$y = -\frac{3x}{4}$$

Ahora sustituimos $-\frac{3x}{4}$ por y en la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ y resolvemos la ecuación para x.

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$x^2 + \left(-\frac{3x}{4}\right)^2 = 25$$
$$x^2 + \frac{9x^2}{16} = 25$$
$$16\left(x^2 + \frac{9x^2}{16}\right) = 16(25)$$
$$16x^2 + 9x^2 = 400$$
$$25x^2 = 400$$
$$x^2 = \frac{400}{25} = 16$$
$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

A continuación, sustituyendo cada valor de x (uno a la vez) en la ecuación en que está despejada y, determinamos los valores correspondientes para y.

$$x = 4 \qquad\qquad x = -4$$
$$y = -\frac{3x}{4} \qquad\qquad y = -\frac{3x}{4}$$
$$= -\frac{3(4)}{4} \qquad\qquad = -\frac{3(-4)}{4}$$
$$= -3 \qquad\qquad = 3$$

Las soluciones son $(4, -3)$ y $(-4, 3)$. Esto coincide con las soluciones que obtuvimos de forma gráfica en la **figura 10.35**.

Ahora resuelva el ejercicio 9

Nuestro objetivo al usar la sustitución es obtener una sola ecuación con una sola variable.

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

En esta sección utilizaremos el método de sustitución y el método de eliminación (o de suma) para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Ambos métodos se introdujeron en el capítulo 4 para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Si no recuerda cómo utilizarlos, es buen momento para repasar el capítulo 4.

En los ejemplos 1 y 2 resolvemos sistemas mediante el método de sustitución, mientras que en los ejemplos 3 y 4, resolvemos los sistemas mediante el método de eliminación.

Si el método de eliminación no lleva a una ecuación que pueda resolverse con facilidad, puede elegir el método de sustitución, como es el caso con los sistemas de los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método de sustitución.

$$y = x^2 - 3$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

Solución Como ambas ecuaciones tienen a x^2, despejamos x^2 de una de las ecuaciones. Elegimos hacerlo de $y = x^2 - 3$,

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 3 \\ y + 3 &= x^2 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $y + 3$ por x^2 en la ecuación $x^2 + y^2 = 9$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9 \\ y + 3 + y^2 &= 9 \\ y^2 + y + 3 &= 9 \\ y^2 + y - 6 &= 0 \\ (y + 3)(y - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$y + 3 = 0 \quad \text{o} \quad y - 2 = 0$$
$$y = -3 \qquad\qquad y = 2$$

Ahora determinamos los valores correspondientes para x sustituyendo los valores que se encontraron para y.

$$\begin{aligned} y &= -3 \\ y &= x^2 - 3 \\ -3 &= x^2 - 3 \\ 0 &= x^2 \\ 0 &= x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} y &= 2 \\ y &= x^2 - 3 \\ 2 &= x^2 - 3 \\ 5 &= x^2 \\ \pm\sqrt{5} &= x \end{aligned}$$

Este sistema tiene tres soluciones $(0, -3)$, $(\sqrt{5}, 2)$ y $(-\sqrt{5}, 2)$.

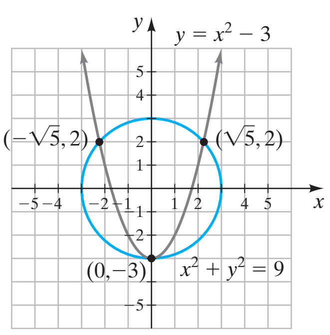


FIGURA 10.36

Observe que la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 3$ es una parábola y la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ es una circunferencia. Ambas gráficas se ilustran en la **figura 10.36**.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 19**

Sugerencia útil

En ocasiones los estudiantes resuelven para una variable y suponen que tienen la solución. Recuerde que la solución, si existe, para un sistema con dos variables, consiste en una o más parejas ordenadas.

2 Resolver sistemas no lineales mediante eliminación

Con frecuencia podemos resolver sistemas de ecuaciones con mayor facilidad mediante el método de eliminación que se analizó en la sección 4.1. Al igual que en el método de sustitución, nuestro objetivo es obtener una sola ecuación con una sola variable.

EJEMPLO 3 ▸ Resuelva el sistema de ecuaciones mediante el método de eliminación.

$$x^2 + y^2 = 9$$
$$2x^2 - y^2 = -6$$

Solución Si sumamos las dos ecuaciones, obtendremos una ecuación que sólo tiene una variable

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9 \\ \underline{2x^2 - y^2} &= \underline{-6} \\ 3x^2 &= 3 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Ahora resolvemos para y sustituyendo $x = \pm 1$ en *cualquiera* de las ecuaciones originales.

$$\begin{array}{cc} x = 1 & x = -1 \\ x^2 + y^2 = 9 & x^2 + y^2 = 9 \\ 1^2 + y^2 = 9 & (-1)^2 + y^2 = 9 \\ 1 + y^2 = 9 & 1 + y^2 = 9 \\ y^2 = 8 & y^2 = 8 \\ y = \pm\sqrt{8} & y = \pm\sqrt{8} \\ = \pm 2\sqrt{2} & = \pm 2\sqrt{2} \end{array}$$

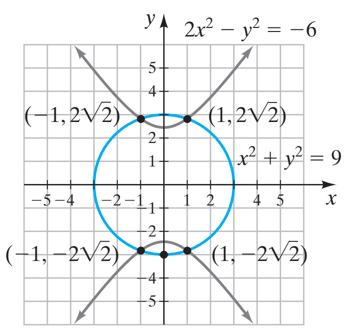


FIGURA 10.37

Existen cuatro soluciones para este sistema de ecuaciones:

$$(1, 2\sqrt{2}), (1, -2\sqrt{2}), (-1, 2\sqrt{2}) \text{ y } (-1, -2\sqrt{2})$$

En la **figura 10.37** se muestran las gráficas de las ecuaciones del sistema. Observe los cuatro puntos de intersección de las dos gráficas.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 25

Es posible que un sistema de ecuaciones no tenga solución real (por lo tanto, las gráficas no se intersecan). Tal caso se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 ▸ Resuelva el sistema de ecuaciones mediante el método de eliminación.

$$x^2 + 4y^2 = 16 \quad (ec.\ 1)$$
$$x^2 + y^2 = 1 \quad (ec.\ 2)$$

Solución Multiplique la (*ec.* 2) por -1 y sume la ecuación resultante a la (*ec.* 1).

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 16 \\ \underline{-x^2 - y^2} &= \underline{-1} \quad (ec.\ 2) \text{ multiplicada por } -1. \\ 3y^2 &= 15 \\ y^2 &= 5 \\ y &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Ahora resuelva x.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{5} & y &= -\sqrt{5} \\ x^2 + y^2 &= 1 & x^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 + (\sqrt{5})^2 &= 1 & x^2 + (-\sqrt{5})^2 &= 1 \\ x^2 + 5 &= 1 & x^2 + 5 &= 1 \\ x^2 &= -4 & x^2 &= -4 \\ x &= \pm\sqrt{-4} & x &= \pm\sqrt{-4} \\ x &= \pm 2i & x &= \pm 2i \end{aligned}$$

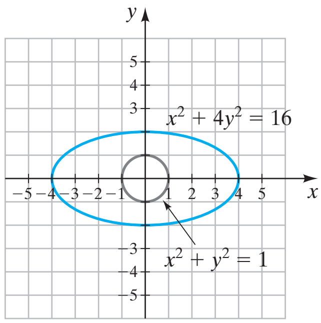


FIGURA 10.38

Como x es un número imaginario para ambos valores de y, este sistema de ecuaciones no tiene solución real. Al resolver sistemas de ecuaciones no lineales lo que nos interesa es encontrar todas las soluciones que son números reales.

En la **figura 10.38** se muestran las gráficas de las ecuaciones. Observe que las dos gráficas no se intersecan; por lo tanto, no existe solución real. Esto coincide con la respuesta que obtuvimos de forma algebraica.

Ahora resuelva el ejercicio 37

3 Resolver aplicaciones

Ahora estudiaremos algunas aplicaciones de sistemas no lineales.

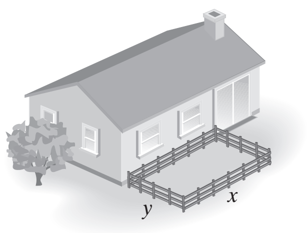


FIGURA 10.39

EJEMPLO 5 **Jardín floral** Fred y Judy Vespucci quieren construir un jardín floral rectangular atrás de su casa. Fred compró suficiente mantillo para cubrir 150 metros cuadrados de terreno. Judy compró 50 metros de cerca para el perímetro del jardín. ¿Cómo deben construir el jardín para utilizar todo el mantillo y toda la cerca que compraron?

Solución **Entienda el problema y traduzca** Empezamos haciendo un bosquejo (vea la **figura 10.39**).

Sea x = longitud del jardín,
y = ancho del jardín.

Como $A = xy$ y Fred compró mantillo para cubrir 150 metros cuadrados, tenemos

$$xy = 150$$

Como $P = 2x + 2y$ y Judy compró 50 metros de cerca para el perímetro del jardín, tenemos

$$2x + 2y = 50$$

El sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} xy &= 150 \\ 2x + 2y &= 50 \end{aligned}$$

Realice los cálculos Resolveremos el sistema mediante sustitución. La ecuación $2x + 2y = 50$ es lineal, de la cual despejaremos y. (Podríamos también despejar x).

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 50 \\ 2y &= 50 - 2x \\ y &= \frac{50 - 2x}{2} = \frac{50}{2} - \frac{2x}{2} = 25 - x \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $25 - x$ por y en la ecuación $xy = 150$.

$$\begin{aligned} xy &= 150 \\ x(25 - x) &= 150 \\ 25x - x^2 &= 150 \\ 0 &= x^2 - 25x + 150 \\ 0 &= (x - 10)(x - 15) \end{aligned}$$

$$x - 10 = 0 \quad \text{o} \quad x - 15 = 0$$
$$x = 10 \qquad\qquad x = 15$$

Responda Si $x = 10$, entonces $y = 25 - 10 = 15$. Y, si $x = 15$, entonces $y = 25 - 15 = 10$. Así, que en cualquier caso, las dimensiones del jardín floral son de 10 por 15 metros.

Ahora resuelva el ejercicio 43

EJEMPLO 6 **Bicicletas** Una compañía que produce y vende bicicletas tiene una ecuación de costo semanal $C = 50x + 400$, $0 \le x \le 160$, y una ecuación de ingreso semanal $R = 100x - 0.3x^2$, $0 \le x \le 160$, donde x es el número de bicicletas producidas y vendidas cada semana. Determine el número de bicicletas que debe producir y vender para estar en el punto de equilibrio.

Solución **Entienda el problema y traduzca** Una compañía está en el punto de equilibrio cuando sus costos y sus ingresos son iguales. Cuando el costo es mayor que los ingresos, la compañía tiene pérdidas. Cuando el ingreso excede a los costos, la compañía tiene una ganancia.

El sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} C &= 50x + 400 \\ R &= 100x - 0.3x^2 \end{aligned}$$

Para que la compañía esté en el punto de equilibrio, sus costos deben ser iguales a sus ingresos. Por lo tanto, escribimos

$$\begin{aligned} C &= R \\ 50x + 400 &= 100x - 0.3x^2 \end{aligned}$$

Realice los cálculos Al escribir esta ecuación cuadrática en la forma general, obtenemos

$$0.3x^2 - 50x + 400 = 0, \quad 0 \le x \le 160$$

Resolveremos esta ecuación mediante la fórmula cuadrática.

$$a = 0.3, \quad b = -50, \quad c = 400$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4(0.3)(400)}}{2(0.3)} \\ &= \frac{50 \pm \sqrt{2020}}{0.6} \end{aligned}$$

$$x = \frac{50 + \sqrt{2020}}{0.6} \approx 158.2 \quad \text{o} \quad x = \frac{50 - \sqrt{2020}}{0.6} \approx 8.4$$

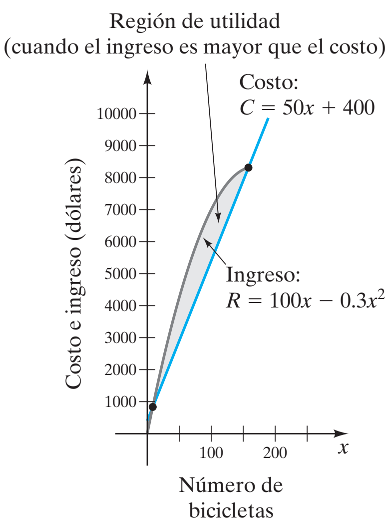


FIGURA 10.40

Responda El costo será igual a los ingresos y la compañía estará en el punto de equilibrio cuando se vendan aproximadamente 8 bicicletas. El costo también será igual a los ingresos cuando se vendan aproximadamente 158 bicicletas. La compañía tendrá ganancias cuando se vendan entre 9 y 158 bicicletas. Cuando se vendan menos de 9 y más de 158 bicicletas la compañía tendrá pérdidas (vea la **figura 10.40**).

Ahora resuelva el ejercicio 55

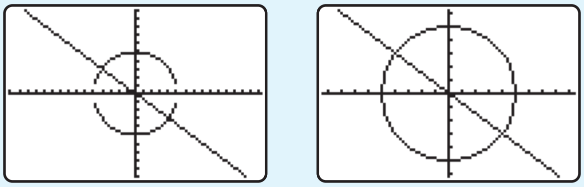
CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Para resolver sistemas de ecuaciones no lineales de forma gráfica, grafique las ecuaciones y determine las intersecciones de las gráficas. Considere el sistema del ejemplo 1, $x^2 + y^2 = 25$ y $3x + 4y = 0$. Para graficar $x^2 + y^2 = 25$, utilizamos $Y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ $Y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$.

Si resolvemos $3x + 4y = 0$ para y obtenemos $y = -\frac{3}{4}x$. Así que usamos $Y_3 = -\frac{3}{4}x$. Por lo tanto, para resolver este sistema determinamos las intersecciones de

$$Y_1 = \sqrt{25 - x^2}$$
$$Y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$$
$$Y_3 = -\frac{3}{4}x$$

En la **figura 10.41a**, el sistema se graficó con la característica ZOOM:5 (ZSquared)*. En la **figura 10.41b**, graficamos estas ecuaciones utilizando los "números adecuados" que se muestran debajo de la figura. Por medio de la calculadora con la característica TRACE o ZOOM, o la característica INTERSECT, determinará que las soluciones son $(4, -3)$ y $(-4, 3)$.



$\approx -15.2, \approx 15.2, 1, -10, 10, 1$ — $-9.4, 9.4, 1, -6.2, 6.2, 1$

(a) (b)

FIGURA 10.41

*Para obtener esta gráfica, inicie con la ventana estándar y luego seleccione ZOOM:5.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es un sistema de ecuaciones no lineales?
2. Explique cómo pueden resolverse gráficamente sistemas de ecuaciones no lineales.
3. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales tener exactamente una solución? Si es así, proporcione un ejemplo. Explique.
4. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales tener exactamente dos soluciones? Si es así, proporcione un ejemplo. Explique.
5. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales tener exactamente tres soluciones? Si es así, proporcione un ejemplo. Explique.
6. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales carecer de soluciones reales? Si es así, proporcione un ejemplo. Explique.

Práctica de habilidades

Mediante el método de sustitución, determine todas las soluciones reales para cada sistema de ecuaciones.

7. $x^2 + y^2 = 18$, $x + y = 0$
8. $x^2 + y^2 = 18$, $x - y = 0$
9. $x^2 + y^2 = 9$, $x + 2y = 3$
10. $x^2 + y^2 = 4$, $x - 2y = 4$
11. $y = x^2 - 5$, $3x + 2y = 10$
12. $x + y = 4$, $x^2 - y^2 = 4$
13. $x^2 + y = 6$, $y = x^2 + 4$
14. $y - x = 2$, $x^2 - y^2 = 4$
15. $2x^2 + y^2 = 16$, $x^2 - y^2 = -4$
16. $x + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 6$
17. $x^2 + y^2 = 4$, $y = x^2 - 6$
18. $x^2 - 4y^2 = 36$, $x^2 + 2y^2 = 5$
19. $x^2 + y^2 = 9$, $y = x^2 - 3$
20. $x^2 + y^2 = 16$, $y = x^2 - 4$
21. $2x^2 - y^2 = -8$, $x - y = 6$
22. $x^2 + y^2 = 1$, $y - x = 3$

Por medio del método de eliminación (suma), determine todas las soluciones reales para cada sistema de ecuaciones.

23. $x^2 - y^2 = 4$, $2x^2 + y^2 = 8$
24. $x^2 + y^2 = 36$, $x^2 - y^2 = 36$
25. $x^2 + y^2 = 16$, $2x^2 - 5y^2 = 25$
26. $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 - 2y^2 = 7$

27. $3x^2 - y^2 = 4$
$x^2 + 4y^2 = 10$

28. $3x^2 + 2y^2 = 30$
$x^2 + y^2 = 13$

29. $4x^2 + 9y^2 = 36$
$2x^2 - 9y^2 = 18$

30. $x^2 + 4y^2 = 16$
$-9x^2 + y^2 = 4$

31. $2x^2 - y^2 = 7$
$x^2 + 2y^2 = 6$

32. $5x^2 - 2y^2 = -13$
$3x^2 + 4y^2 = 39$

33. $x^2 + y^2 = 25$
$2x^2 - 3y^2 = -30$

34. $x^2 - 2y^2 = 7$
$x^2 + y^2 = 34$

35. $x^2 + y^2 = 9$
$16x^2 - 4y^2 = 64$

36. $3x^2 + 4y^2 = 35$
$2x^2 + 5y^2 = 42$

37. $x^2 + y^2 = 4$
$16x^2 + 9y^2 = 144$

38. $x^2 + y^2 = 1$
$9x^2 - 4y^2 = 36$

39. $x^2 + 4y^2 = 4$
$10y^2 - 9x^2 = 90$

40. $x^2 + y^2 = 81$
$25x^2 + 4y^2 = 100$

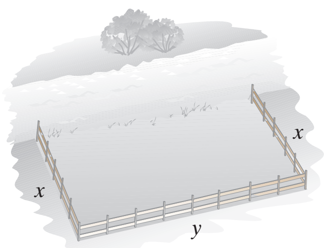
Resolución de problemas

41. Construya su propio sistema de ecuaciones no lineales cuya solución sea el conjunto vacío. Explique cómo sabe que el sistema no tiene solución.

42. Si un sistema de ecuaciones consiste en una elipse y una hipérbola, ¿cuál es el número máximo de puntos de intersección? Haga un bosquejo para ilustrar esto.

43. **Pista de baile** Kris Hundley quiere construir una pista rectangular de baile en su gimnasio. La pista tendrá un perímetro de 84 metros y un área de 440 metros cuadrados. Determine las dimensiones de la pista de baile.

44. **Región rectangular** Ellen Dupree cerca un área rectangular a lo largo de la orilla de un río, como se ilustra. Si 20 pies de cerca encierran un área de 48 pies cuadrados, determine las dimensiones del área encerrada.



45. **Hortaliza** James Cannon planea construir una hortaliza rectangular atrás de su casa; tendrá un perímetro de 78 pies y un área de 270 pies cuadrados. Determine las dimensiones de la hortaliza.

46. **Región rectangular** Un área rectangular que está a lo largo de un río, será cercada, como se ilustró en el ejercicio 44. Si 20 pies de cerca encierran un área de 50 pies cuadrados, determine las dimensiones del área encerrada.

47. **Moneda** Las monedas en circulación de un país incluyen un billete que tiene un área de 112 centímetros cuadrados con una diagonal de $\sqrt{260}$ centímetros. Determine la longitud y el ancho del billete.

48. **Pista de patinaje** Una pista rectangular de patinaje sobre hielo tiene un área de 3000 pies cuadrados. Si la diagonal de la pista es de 85 pies, determine las dimensiones de la pista.

Plaza Rockefeller, Ciudad de Nueva York

49. **Pieza de madera** Frank Samuelson, un carpintero, tiene una pieza rectangular de madera. Mide su diagonal y determina que es de 34 pulgadas. Cuando corta la madera a lo largo de la diagonal, el perímetro de cada triángulo que se forma es de 80 pulgadas. Determine las dimensiones de la pieza original de madera.

50. **Velero** Una vela de un velero tiene la forma de un triángulo rectángulo con perímetro de 36 metros y una hipotenusa de 15 metros. Determine la longitud de los catetos del triángulo.

51. Beisbol y futbol Paul Martin lanza hacia arriba un balón de fútbol, desde el piso. La altura del balón, con respecto al piso en cualquier instante, t, está dada por la fórmula $d = -16t^2 + 64t$. Al mismo tiempo que se lanza el balón de fútbol, Shannon Ryan lanza una pelota de béisbol hacia arriba desde lo alto de un edificio de 80 pies de altura. La altura con respecto al piso en cualquier instante, t, está dada por la fórmula $d = -16t^2 + 16t + 80$. Determine el instante en el que la pelota y el balón estarán a la misma altura respecto al piso. (No tome en cuenta la resistencia del aire).

52. Pelota de tenis y una bola de nieve Robert Snell deja caer una pelota de tenis desde un helicóptero que vuela a una altura de 950 pies. La altura de la pelota con respecto al piso en cualquier instante está dada por la fórmula $d = -16t^2 - 10t + 950$. En el instante en que se deja caer la pelota desde el helicóptero, Ramón Sánchez lanza una bola de nieve hacia arriba desde lo alto de un edificio de 750 pies de altura. La altura con respecto al piso de la bola de nieve en cualquier instante, t, se determina mediante la fórmula $d = -16t^2 + 80t + 750$. ¿En qué instante la pelota y la bola están a la misma altura? (No tome en cuenta la resistencia del aire).

53. Interés simple El interés simple se calcula mediante la fórmula de interés simple, interés = capital · tasa · tiempo, o $i = prt$. Si Seana Hayden invierte cierto capital a una tasa específica de interés durante 1 año, el interés que ella obtiene es \$7.50. Si aumenta el capital en \$25 y la tasa de interés disminuye en 1%, el interés permanece igual. Determine el capital y la tasa de interés.

54. Interés simple Si Claire Brooke invierte cierto capital a una tasa específica de interés durante 1 año, el interés que obtiene es \$72. Si aumenta el capital en \$120 y la tasa de interés disminuye en 2%, el interés que recibe no cambia. Determine el capital y la tasa de interés. Utilice $i = prt$.

Para las ecuaciones de costo y de ingreso dadas, determine el o los puntos de equilibrio.

55. $C = 10x + 300, R = 30x - 0.1x^2$

56. $C = 0.6x^2 + 9, R = 12x - 0.2x^2$

57. $C = 12.6x + 150, R = 42.8x - 0.3x^2$

58. $C = 80x + 900, R = 120x - 0.2x^2$

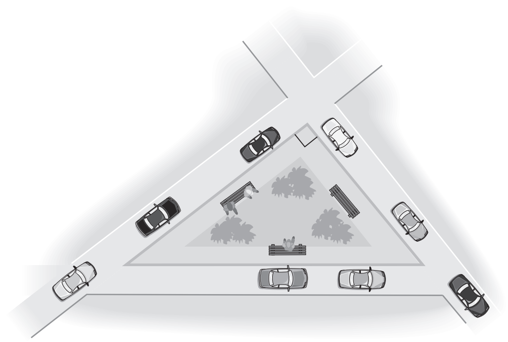
Con su calculadora graficadora, resuelva los sistemas siguientes. Redondee sus respuestas al centésimo más cercano.

59. $3x - 5y = 12$
$x^2 + y^2 = 10$

60. $y = 2x^2 - x + 2$
$4x^2 + y^2 = 36$

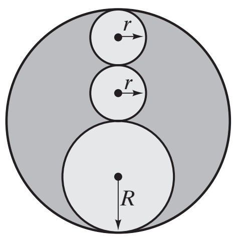
Retos

61. Intersección de caminos La intersección de tres caminos forma un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura.



Si la hipotenusa es de 26 yardas y el área es de 120 yardas cuadradas, determine la longitud de los dos catetos del triángulo.

62. En la figura que se muestra, R representa el radio del círculo interior más grande y r representa el radio de los círculos internos más pequeños. Si $R = 2r$ y si el área sombreada es de 122.5π, determine r y R.



Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **63.** Liste el orden que seguimos al evaluar una expresión.

[5.6] **64.** Factorice $(x + 1)^3 + 1$.

[6.6] **65.** Sabe que x varía inversamente con el cuadrado de P. Si $x = 10$ cuando P es 6, determine x cuando $P = 20$.

[7.5] **66.** Simplifique $\dfrac{5}{\sqrt{x+2} - 3}$.

[9.7] **67.** Despeje a k de $A = A_0e^{kt}$.

Resumen del capítulo 10

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 10.1

Las cuatro **secciones cónicas** son la parábola, la circunferencia, la elipse y la hipérbola, que se obtienen al realizar cortes en un cono.

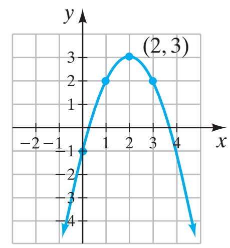
Parábola Circunferencia Elipse Hipérbola

Las cuatro formas diferentes para ecuaciones de parábolas se resumen a continuación.*

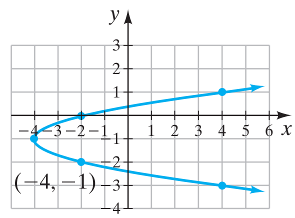
Parábola con vértice en (h, k)

1. $y = a(x - h)^2 + k, a > 0$ (abre hacia arriba)
2. $y = a(x - h)^2 + k, a < 0$ (abre hacia abajo)
3. $x = a(y - k)^2 + h, a > 0$ (abre hacia la derecha)
4. $x = a(y - k)^2 + h, a < 0$ (abre hacia la izquierda)

$y = -(x - 2)^2 + 3$



$x = 2(y + 1)^2 - 4$



Fórmula de la distancia

La distancia, d, entre cualesquiera dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puede determinarse mediante la fórmula de la distancia:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La distancia entre $(-1, 3)$ y $(4, 15)$ es

$$d = \sqrt{[4 - (-1)]^2 + (15 - 3)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Fórmula del punto medio

Dados cualesquiera dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el punto que se encuentra a la mitad de los puntos dados se puede determinar mediante la fórmula del punto medio:

$$\text{punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

El punto medio del segmento de recta que une $(7, 6)$ y $(-11, 10)$ es

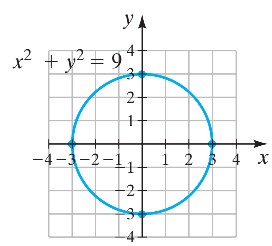
$$\text{punto medio} = \left(\frac{7 + (-11)}{2}, \frac{6 + 10}{2}\right) = \left(\frac{-4}{2}, \frac{16}{2}\right) = (-2, 8)$$

Una **circunferencia** es un conjunto de puntos en un plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado su **centro**.

Circunferencia con su centro en el origen y radio r

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Haga un bosquejo de la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$.
La gráfica es una circunferencia con su centro en $(0, 0)$ y radio $r = 3$.



* Si la parábola está inclinada, como verá en cursos más avanzados, se tienen otras ecuaciones. (N. del T.)

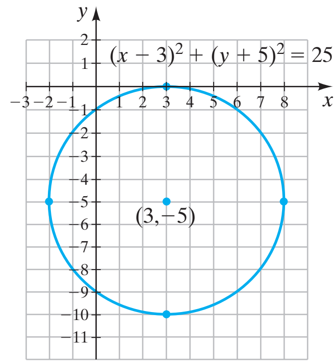
HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 10.1 (continuación)

Circunferencia con su centro en (h, k) y radio r

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Haga un bosquejo de la gráfica de $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$.
La gráfica es una circunferencia con su centro en $(3, -5)$ y radio $r = 5$.



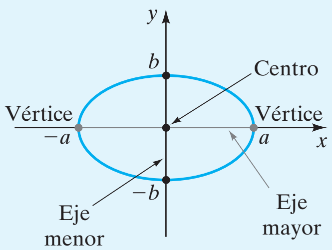
Sección 10.2

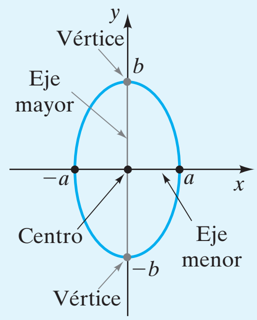
Una **elipse** es un conjunto de puntos en un plano, la suma de cuyas distancias a dos puntos fijos (denominados **focos**) es una constante.

Elipse con centro en el origen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

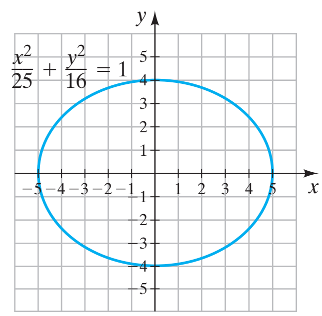
donde $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son las intersecciones con el eje x y $(0, b)$ y $(0, -b)$ son las intersecciones con el eje y.





Bosqueje la gráfica de $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

La gráfica es una elipse. Como $a = 5$, las intersecciones con el eje x son $(-5, 0)$ y $(5, 0)$. Como $b = 4$, las intersecciones con el eje y son $(0, -4)$ y $(0, 4)$.

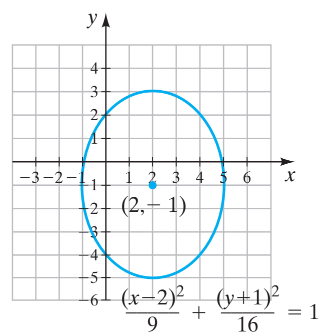


Elipse con centro en (h, k)

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Haga un bosquejo de la gráfica de $\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$.

La gráfica es una elipse con su centro en $(2, -1)$, donde $a = 3$ y $b = 4$.



HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES — EJEMPLOS

Sección 10.2 (continuación)

El área, A, de una elipse es $A = \pi ab$.

El área de la segunda elipse de la página 692 es

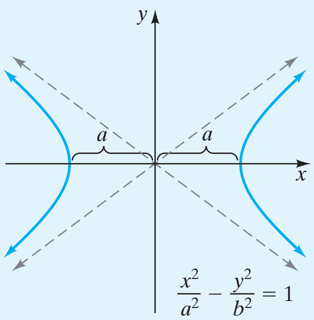
$$A = \pi ab = \pi \cdot 3 \cdot 4 = 12\pi \approx 37.70 \text{ unidades cuadradas.}$$

Sección 10.3

Una **hipérbola** es un conjunto de puntos en un plano, cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (llamados **focos**) es una constante.

Hipérbola con su centro en el origen

Hipérbola
con eje transversal
a lo largo del eje x



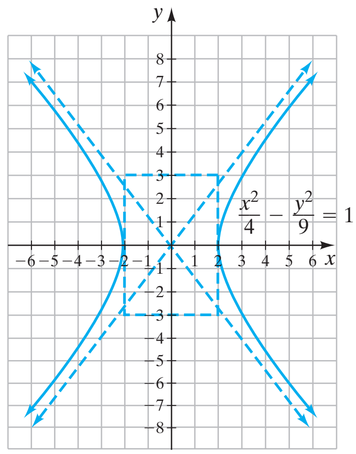
Asíntotas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

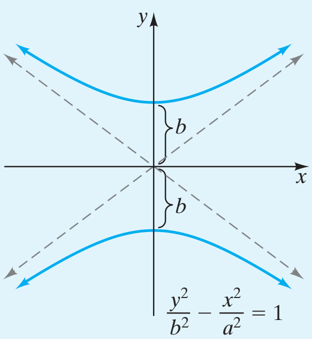
Determine las ecuaciones de las asíntotas y bosqueje una gráfica de $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

La gráfica es una hipérbola con $a = 2$ y $b = 3$.

Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{3}{2}x$ y $y = -\frac{3}{2}x$.



Hipérbola
con eje transversal
a lo largo del eje y

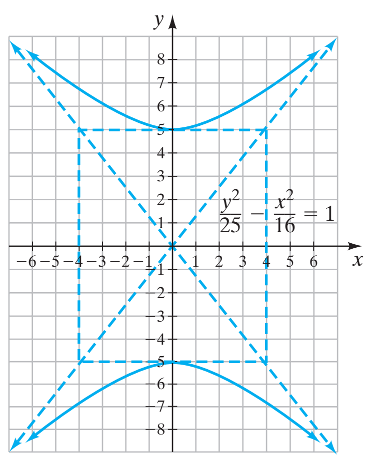


Asíntotas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Determine las ecuaciones de las asíntotas y bosqueje una gráfica de $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$.

La gráfica es una hipérbola con $a = 4$ y $b = 5$. Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{5}{4}x$ y $y = -\frac{5}{4}x$.



HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 10.4	
Un **sistema no lineal de ecuaciones** es un sistema de ecuaciones en donde al menos una ecuación no es lineal. La solución de un sistema no lineal de ecuaciones es el punto o puntos que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.	Resuelva el sistema de ecuaciones. $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 14 \\ 5x^2 - y^2 &= -2 \end{aligned}$$ Resolveremos este sistema mediante el método de eliminación (suma). $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 14 \\ 5x^2 - y^2 &= -2 \\ \hline 6x^2 \qquad &= 12 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$ Para obtener el valor o valores para y, utilizamos la ecuación $x^2 + y^2 = 14$. $$\begin{array}{rr} x = \sqrt{2} & x = -\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 14 & x^2 + y^2 = 14 \\ (\sqrt{2})^2 + y^2 = 14 & (-\sqrt{2})^2 + y^2 = 14 \\ 2 + y^2 = 14 & 2 + y^2 = 14 \\ y^2 = 12 & y^2 = 12 \\ y = \pm\sqrt{12} & y = \pm\sqrt{12} \\ = \pm 2\sqrt{3} & = \pm 2\sqrt{3} \end{array}$$ El sistema tiene cuatro soluciones: $(\sqrt{2}, 2\sqrt{3}), (\sqrt{2}, -2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, 2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, -2\sqrt{3})$

Ejercicios de repaso del capítulo 10

[10.1] *Determine la longitud y el punto medio del segmento de recta definido por cada pareja de puntos.*

1. $(0, 0), (5, -12)$ **2.** $(-4, 1), (-1, 5)$ **3.** $(-9, -5), (-1, 10)$ **4.** $(-4, 3), (-2, 5)$

Grafique cada ecuación.

5. $y = (x - 2)^2 + 1$ **6.** $y = (x + 3)^2 - 4$ **7.** $x = (y - 1)^2 + 4$ **8.** $x = -2(y + 4)^2 - 3$

En los ejercicios 9 a 12, **a)** *escriba cada ecuación en la forma* $y = a(x - h)^2 + k$ *o* $x = a(y - k)^2 + h$. **b)** *Grafique la ecuación.*

9. $y = x^2 - 8x + 22$ **10.** $x = -y^2 - 2y + 5$ **11.** $x = y^2 + 5y + 4$ **12.** $y = 2x^2 - 8x - 24$

En los ejercicios 13 a 18, **a)** *escriba la ecuación de cada circunferencia en la forma general.* **b)** *Trace la gráfica.*

13. Centro $(0, 0)$, radio 4. **14.** Centro $(-3, 4)$, radio 1. **15.** $x^2 + y^2 - 4y = 0$

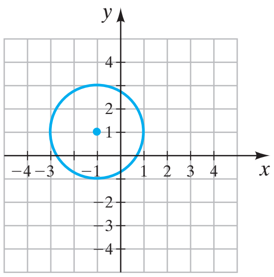
16. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ **17.** $x^2 - 8x + y^2 - 10y + 40 = 0$ **18.** $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 17 = 0$

Grafique cada ecuación.

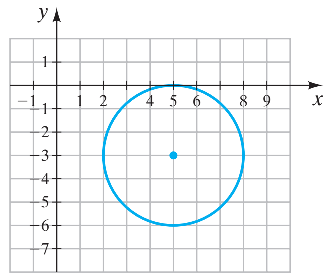
19. $y = \sqrt{9 - x^2}$ **20.** $y = -\sqrt{36 - x^2}$

Determine la ecuación de cada circunferencia.

21.



22.



[10.2] *Grafique cada ecuación.*

23. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

24. $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

25. $4x^2 + 9y^2 = 36$

26. $9x^2 + 16y^2 = 144$

27. $\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$

28. $\dfrac{(x+3)^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

29. $25(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 225$

30. Para la elipse del ejercicio 23, determine el área.

[10.3] *En los ejercicios 31 a 34,* **a)** *determine las ecuaciones de las asíntotas para cada ecuación.* **b)** *Trace la gráfica.*

31. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

32. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

33. $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{36} = 1$

34. $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

En los ejercicios 35 a 38, **a)** *escriba cada ecuación en la forma general.* **b)** *Determine las ecuaciones de las asíntotas.* **c)** *Trace la gráfica.*

35. $x^2 - 9y^2 = 9$

36. $25x^2 - 16y^2 = 400$

37. $4y^2 - 25x^2 = 100$

38. $49y^2 - 9x^2 = 441$

[10.1–10.3] *Identifique la gráfica de cada ecuación como circunferencia, parábola, elipse o hipérbola.*

39. $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

40. $4x^2 + 8y^2 = 32$

41. $5x^2 + 5y^2 = 125$

42. $4x^2 - 25y^2 = 25$

43. $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

44. $y = (x-2)^2 + 1$

45. $12x^2 + 9y^2 = 108$

46. $x = -y^2 + 8y - 9$

[10.4] *Mediante el método de sustitución, determine todas las soluciones reales para cada sistema de ecuaciones.*

47. $x^2 + 2y^2 = 25$
$x^2 - 3y^2 = 25$

48. $x^2 = y^2 + 4$
$x + y = 4$

49. $x^2 + y^2 = 9$
$y = 3x + 9$

50. $x^2 + 2y^2 = 9$
$x^2 - 6y^2 = 36$

Mediante el método de eliminación (suma), determine todas las soluciones reales para cada sistema de ecuaciones.

51. $x^2 + y^2 = 36$
$x^2 - y^2 = 36$

52. $x^2 + y^2 = 25$
$x^2 - 2y^2 = -2$

53. $-4x^2 + y^2 = -15$
$8x^2 + 3y^2 = -5$

54. $3x^2 + 2y^2 = 6$
$4x^2 + 5y^2 = 15$

55. Mesa de billar Jerry y Dennis tienen una mesa de billar en su casa. Tiene un área de 45 pies cuadrados y un perímetro de 28 pies. Determine las dimensiones de la mesa de billar.

56. Botellas de pegamento Una compañía tiene una ecuación de costos dada por $C = 20.3x + 120$ y una ecuación de ingresos dada por $R = 50.2x - 0.2x^2$, en donde x es el número de botellas de pegamento que vende. Determine el número de botellas de pegamento que la compañía debe vender para estar en el punto de equilibrio.

57. Cuenta de ahorros Si Kien Kempter invierte cierto capital a una tasa específica de interés durante 1 año, el interés es de \$120. Si aumenta el capital en \$2000 y la tasa de interés se disminuye en 1%, el interés que recibiría no cambia. Determine el capital y la tasa de interés. Utilice $i = prt$.

Examen de práctica del capítulo 10

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección en la que se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en el **Chapter Test Prep Video CD.** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. ¿Por qué las parábolas, circunferencias, elipses e hipérbolas se denominan secciones cónicas?

2. Determine la longitud del segmento de recta cuyos extremos son $(-1, 8)$ y $(6, 7)$.

3. Determine el punto medio del segmento de recta cuyos extremos son $(-9, 4)$ y $(7, -1)$.

4. Determine el vértice de la gráfica de $y = -2(x + 3)^2 + 1$ y luego grafique la ecuación.

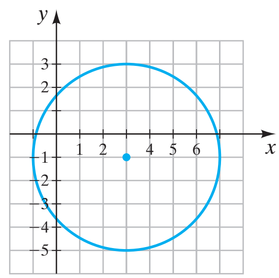
5. Grafique $x = y^2 - 2y + 4$.

6. Escriba la ecuación $x = -y^2 - 4y - 5$ en la forma $x = a(y - k)^2 + h$, y luego trace la gráfica.

7. Escriba la ecuación de la circunferencia con centro en $(2, 4)$ y radio 3 y luego trace la gráfica de la circunferencia.

8. Determine el área de la circunferencia cuya ecuación es $(x + 2)^2 + (y - 8)^2 = 9$.

9. Escriba una ecuación de la circunferencia que se muestra.

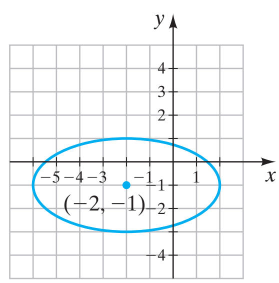


10. Grafique $y = -\sqrt{16 - x^2}$.

11. Escriba la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ en forma general, y luego trace la gráfica.

12. Grafique $4x^2 + 25y^2 = 100$.

13. ¿La gráfica siguiente es la gráfica de $\frac{(x + 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$? Explique su respuesta



14. Grafique $4(x - 4)^2 + 36(y + 2)^2 = 36$.

15. Determine el centro de la elipse dada por la ecuación $3(x - 8)^2 + 6(y + 7)^2 = 18$.

16. Explique cómo determina si el eje transversal de la hipérbola está a lo largo del eje x o del eje y.

17. ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{49} = 1$?

18. Grafique $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{1} = 1$.

19. Grafique $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

En los ejercicios 20 y 21, determine si la gráfica de la ecuación es una parábola, circunferencia, elipse o hipérbola.

20. $4x^2 - 15y^2 = 30$

21. $25x^2 + 4y^2 = 100$

Resuelva cada sistema de ecuaciones.

22. $x^2 + y^2 = 7$

$2x^2 - 3y^2 = -1$

23. $x + y = 8$

$x^2 + y^2 = 4$

24. **Hortaliza** En su rancho, Tom Wilson tiene una hortaliza rectangular con un área de 1500 metros cuadrados. Si el perímetro es de 160 metros, determine las dimensiones de la hortaliza.

25. **Plataforma de un camión** Gina Chang posee un camión. La plataforma rectangular del camión tiene un área de 60 pies cuadrados, y la diagonal mide 13 pies. Determine las dimensiones de la plataforma del camión.

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen siguiente y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revise las preguntas que haya respondido en forma incorrecta. La sección y objetivo donde se estudia el material está indicado después de la respuesta.

1. Simplifique $(9x^2y^5)(-3xy^4)$.

2. Resuelva $4x - 2(3x - 7) = 2x - 5$.

3. Determine el conjunto solución de:
$2(x - 5) + 2x = 4x - 7$.

4. Determine el conjunto solución de: $|3x + 1| > 4$

5. Grafique $y = -2x + 2$.

6. Si $f(x) = x^2 + 3x + 9$, determine $f(10)$.

7. Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 2$$
$$\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y = 6$$

8. Factorice $x^4 - x^2 - 42$.

9. Un gran letrero de forma triangular tiene una altura que es 6 pies menor que su base. Si el área del letrero es de 56 pies cuadrados, determine la longitud de la base y la altura del letrero.

10. Multiplique $\dfrac{3x^2 - x - 4}{4x^2 + 7x + 3} \cdot \dfrac{2x^2 - 5x - 12}{6x^2 + x - 12}$.

11. Reste $\dfrac{x}{x + 3} - \dfrac{x + 5}{2x^2 - 2x - 24}$.

12. Resuelva $\dfrac{3}{x + 3} + \dfrac{5}{x + 4} = \dfrac{12x + 19}{x^2 + 7x + 12}$.

13. Simplifique $\left(\dfrac{18x^{1/2}y^3}{2x^{3/2}}\right)^{1/2}$.

14. Simplifique $\dfrac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x} - y}$.

15. Resuelva $3\sqrt[3]{2x + 2} = \sqrt[3]{80x - 24}$.

16. Resuelva $3x^2 - 4x + 5 = 0$ mediante la fórmula cuadrática.

17. Resuelva $\log(3x - 4) + \log 4 = \log(x + 6)$.

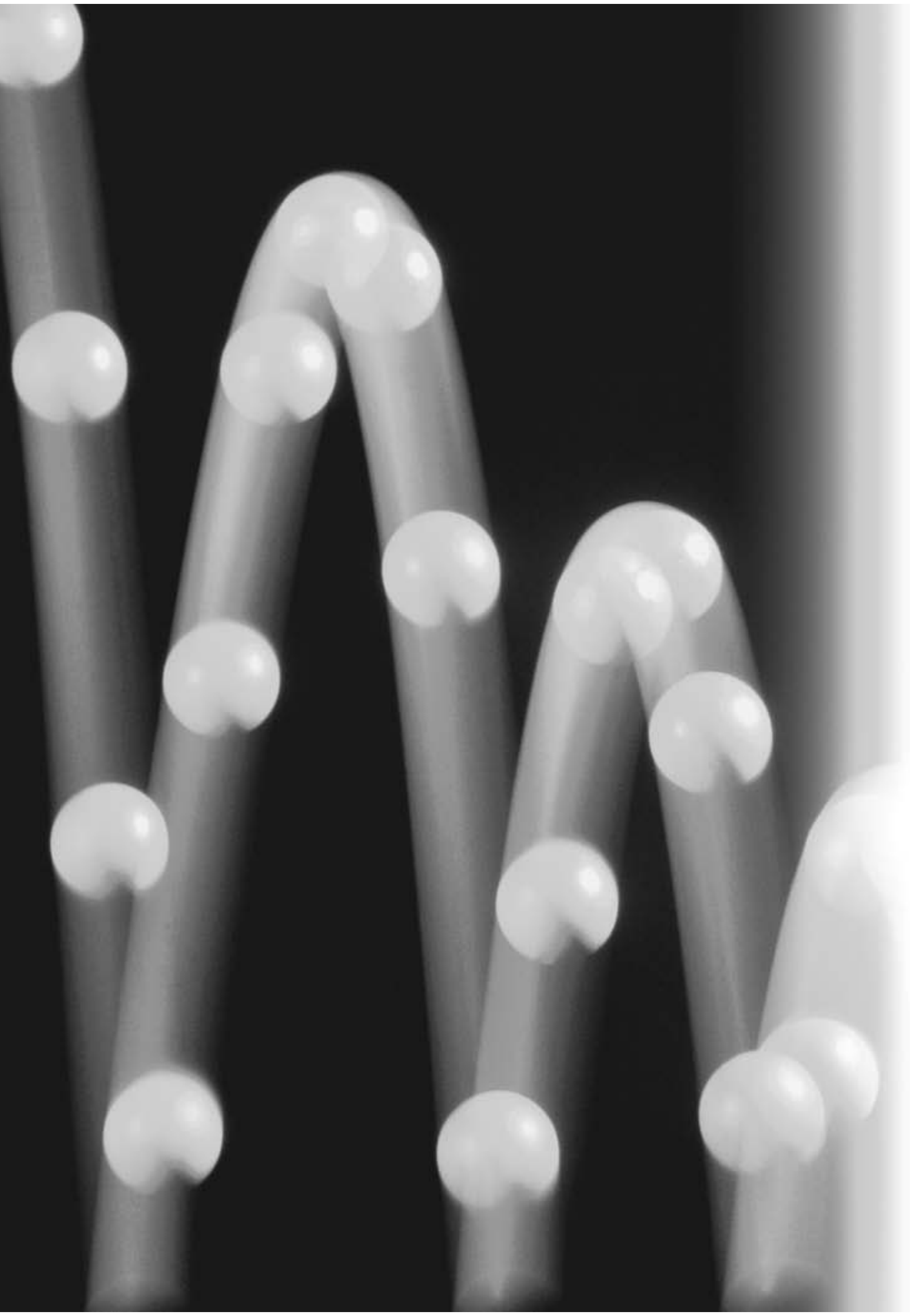
18. Resuelva $35 = 70e^{-0.3t}$.

19. Grafique $9x^2 + 4y^2 = 36$.

20. Grafique $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{16} = 1$.

Sucesiones, series y el teorema del binomio

11



OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En este capítulo analizaremos las sucesiones y series. Una sucesión es una lista de números en un orden específico y una serie es la suma de los números de una sucesión. En este libro analizaremos dos tipos de sucesiones y series: aritméticas y geométricas. Las sucesiones y las series se pueden utilizar para resolver muchos problemas de la vida real, como veremos en este capítulo.

También utilizaremos el símbolo de la suma, Σ, que con frecuencia se utiliza en estadística y otros cursos de matemáticas. Asimismo, en la sección 11.4 presentaremos el teorema del binomio para desarrollar una expresión de la forma $(a + b)^n$.

SI UNA PELOTA REBOTA 4 pies cuando se deja caer desde una altura de 6 pies, ha rebotado $66\frac{2}{3}\%$ de su altura original. En teoría, cada rebote tendrá otro rebote y la pelota nunca dejaría de rebotar. ¿Será posible calcular la distancia total de una pelota que nunca para de rebotar? En el ejercicio 705 de la página 722, calculará la distancia total de una pelota que rebota.

11.1 Sucesiones y series

1 Determinar los términos de una sucesión.

2 Escribir una serie.

3 Determinar sumas parciales.

4 Usar la notación de suma, Σ.

1 Determinar los términos de una sucesión

Muchas veces vemos patrones en los números. Por ejemplo, suponga que le ofrecen un trabajo con un salario inicial de \$30,000. Le dan dos opciones para su aumento salarial anual. Una opción es un aumento de \$2000 cada año. Con esta opción recibiría el salario que se muestra a continuación.

Año	1	2	3	4	...
	↓	↓	↓	↓	
Salario	\$30,000	\$32,000	\$34,000	\$36,000	...

Cada año, el salario es \$2000 mayor que el año anterior. Los tres puntos a la derecha de la lista de números indican que la lista continúa de la misma manera.

La segunda opción es un aumento del 5% cada año. El salario que recibiría con esta opción se muestra a continuación.

Año	1	2	3	4	...
	↓	↓	↓	↓	
Salario	\$30,000	\$31,500	\$33,075	\$34,728.75	...

Con esta opción, el salario en cualquier año a partir del año 2 es 5% mayor que el salario del año anterior.

Las dos listas de números que ilustran los salarios son ejemplos de sucesiones. Una **sucesión** (o **progresión**) de números es una lista de números con un orden específico. Considere la lista de números dados a continuación, que es una sucesión.

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots$$

El primer término es 5. Indicamos esto escribiendo $a_1 = 5$. Como el segundo término es 10, $a_2 = 10$, y así sucesivamente. Los tres puntos, indican que la sucesión continúa de manera indefinida y es una **sucesión infinita**.

Sucesión infinita

Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de números naturales.

Considere la sucesión 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ...

$$\begin{array}{rccccccccccc}
\text{Dominio} & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots, & n, & \ldots\} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\text{Rango} & \{5, & 10, & 15, & 20, & 25, & 30, & 35, & \ldots, & 5n, & \ldots\}
\end{array}$$

Observe que los términos de la sucesión 5, 10, 15, 20, ... se determinan multiplicando cada número natural por 5. Para cualquier número natural n, el término correspondiente de la sucesión es $5 \cdot n$ o $5n$. El **término general de una sucesión**, a_n, que define la sucesión, es $a_n = 5n$.

$$a_n = f(n) = 5n$$

Para determinar el término decimosegundo de la sucesión, sustituimos 12 en vez de n en el término general de la sucesión, $a_{12} = 5 \cdot 12 = 60$. Así, el decimosegundo término de la sucesión es 60, Observe que los términos de la sucesión son los valores de la función, o los números en el rango de la función. Al escribir la sucesión, no utilizamos las llaves de conjunto. La forma general de una sucesión es

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

Para la sucesión infinita $2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^n, \ldots$ podemos escribir

$$a_n = f(n) = 2^n$$

Observe que cuando $n = 1, a_1 = 2^1 = 2$; cuando $n = 2, a_2 = 2^2 = 4$; cuando $n = 3, a_3 = 2^3 = 8$; cuando $n = 4, a_4 = 2^4 = 16$; y así, sucesivamente. ¿Cuál es el séptimo término de esta sucesión? La respuesta es $a_7 = 2^7 = 128$.

Una sucesión también puede ser **finita**.

Sucesión finita

Una **sucesión finita** es una función cuyo demonio incluye solamente los primeros n números naturales.

Una sucesión finita tiene sólo un número finito de términos.

Ejemplos de sucesiones finitas

5, 10, 15, 20	dominio es $\{1, 2, 3, 4\}$
2, 4, 8, 16, 32	dominio es $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

EJEMPLO 1 Escriba la sucesión finita definida por $a_n = 2n + 3$, para $n = 1, 2, 3, 4$.

Solución

$$\begin{aligned} a_n &= 2n + 3 \\ a_1 &= 2(1) + 3 = 5 \\ a_2 &= 2(2) + 3 = 7 \\ a_3 &= 2(3) + 3 = 9 \\ a_4 &= 2(4) + 3 = 11 \end{aligned}$$

Así, la sucesión es 5, 7, 9, 11.

Ahora resuelva el ejercicio 17

Como cada término de la sucesión del ejemplo 1 es mayor que el término anterior, la sucesión es una **sucesión creciente**.

EJEMPLO 2 Dado $a_n = \dfrac{2n + 3}{n^2}$,

a) determine el primer término de la sucesión.
b) determine el tercer término de la sucesión.
c) determine el quinto término de la sucesión.
d) determine el décimo término de la sucesión.

Solución

a) Cuando $n = 1$, $a_1 = \dfrac{2(1) + 3}{1^2} = \dfrac{5}{1} = 5$.

b) Cuando $n = 3$, $a_3 = \dfrac{2(3) + 3}{3^2} = \dfrac{9}{9} = 1$.

c) Cuando $n = 5$, $a_5 = \dfrac{2(5) + 3}{5^2} = \dfrac{13}{25} = 0.52$.

d) Cuando $n = 10$, $a_{10} = \dfrac{2(10) + 3}{10^2} = \dfrac{23}{100} = 0.23$.

Ahora resuelva el ejercicio 33

Observe en el ejemplo 2 que, como no hay restricción alguna sobre n, a_n es el término general de una sucesión infinita.

En el ejemplo 2, los primeros cuatro términos de la sucesión son $5, \frac{7}{4} = 1.75, 1, \frac{11}{16} = 0.6875$. Ya que cada término de la sucesión generada por $a_n = \dfrac{2n + 3}{n^2}$ es menor que el término que le precede, la sucesión es una **sucesión decreciente**.

EJEMPLO 3 ▸ Determine los primeros cuatro términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = (-1)^n(n)$.

Solución

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n(n) \\ a_1 &= (-1)^1(1) = -1 \\ a_2 &= (-1)^2(2) = 2 \\ a_3 &= (-1)^3(3) = -3 \\ a_4 &= (-1)^4(4) = 4 \end{aligned}$$

Si escribimos la sucesión, obtenemos $-1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n(n)$. Observe que cada término alterna el signo. Ésta es una **sucesión alternante**.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 25

2 Escribir una serie

Una **serie** es la suma de los términos de una sucesión. Una serie puede ser finita o infinita, según se base en una sucesión finita o infinita.

Ejemplos

Sucesión finita

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

Serie finita

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

Sucesión infinita

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots$

Serie infinita

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n + \cdots$

EJEMPLO 4 ▸ Escriba los primeros ocho términos de la sucesión; después escriba la serie que representan la suma de esa sucesión si

a) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **b)** $a_n = (-2)^n$

Solución

a) Comenzamos con $n = 1$; así, los primeros ocho términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ son

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^7, \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

o bien

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$$

La serie que representa la suma de la sucesión es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$$

b) De nuevo comenzamos con $n = 1$; así, los primeros ocho términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = (-2)^n$ son

$$(-2)^1, (-2)^2, (-2)^3, (-2)^4, (-2)^5, (-2)^6, (-2)^7, (-2)^8$$

o

$$-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256$$

La serie que representan la suma de esta sucesión es

$$-2 + 4 + (-8) + 16 + (-32) + 64 + (-128) + 256 = 170$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 49

3 Determinar sumas parciales

Para una sucesión infinita con términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, una **suma parcial** es la suma de un número finito de términos consecutivos de la sucesión, comenzando con el primer término.

$$s_1 = a_1 \qquad \textit{Primera suma parcial.}$$
$$s_2 = a_1 + a_2 \qquad \textit{Segunda suma parcial.}$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \qquad \textit{Tercera suma parcial.}$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \qquad \textit{n-ésima suma parcial.}$$

La suma de todos los términos de la sucesión infinita se denomina **serie infinita**, y está dada por

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

EJEMPLO 5 ▸ Dada una sucesión infinita definida por $a_n = \frac{3 + n^2}{n}$, determine las sumas parciales que se indican.

a) s_1 y **b)** s_4

Solución

a) $s_1 = a_1 = \frac{3 + 1^2}{1} = \frac{3 + 1}{1} = 4$

b) $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$$= \frac{3 + 1^2}{1} + \frac{3 + 2^2}{2} + \frac{3 + 3^2}{3} + \frac{3 + 4^2}{4}$$
$$= 4 + \frac{7}{2} + \frac{12}{3} + \frac{19}{4}$$
$$= \frac{48}{12} + \frac{42}{12} + \frac{48}{12} + \frac{57}{12}$$
$$= \frac{195}{12} \text{ o } 16\frac{1}{4}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 39

4 Usar la notación de suma, Σ

Cuando se conoce el término general de una sucesión, puede usarse la letra griega **sigma**, Σ, para escribir una serie. La suma de los primeros n términos de la sucesión cuyo n-ésimo término es a_n se representa por

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

donde i se denomina **índice de la suma** o simplemente **índice**, n es el **límite superior de la suma**, y 1 es el **límite inferior de la suma**. En este ejemplo, usamos i para el índice; sin embargo, puede usarse cualquier letra para el índice.

Considere la sucesión $7, 9, 11, 13, \ldots, 2n + 5, \ldots$. La suma de los primeros cinco términos puede representarse por medio de la **notación de suma o notación sigma**, también conocida como notación de sumatoria.

$$\sum_{i=1}^{5} (2i + 5)$$

Esta notación se lee “la suma desde i igual a 1 hasta 5 de $2i + 5$”.

Para evaluar la serie representada por $\sum_{i=1}^{5}(2i + 5)$, primero sustituimos 1 en vez de i de $2i + 5$ y listamos el valor que se obtuvo. Luego sustituimos 2 por i en $2i + 5$ y listamos el valor. Seguimos este procedimiento para los valores de 1 a 5. Después sumamos estos valores para obtener el valor de la serie.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5}(2i + 5) &= (2\cdot 1 + 5) + (2\cdot 2 + 5) + (2\cdot 3 + 5) + (2\cdot 4 + 5) + (2\cdot 5 + 5)\\ &= 7 + 9 + 11 + 13 + 15\\ &= 55\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 ▸ Desarrolle la serie $\sum_{i=1}^{6}(i^2 + 1)$ y evalúe la serie.

Solución

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6}(i^2 + 1) &= (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1) + (4^2 + 1) + (5^2 + 1) + (6^2 + 1)\\ &= 2 + 5 + 10 + 17 + 26 + 37\\ &= 97\end{aligned}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 61**

EJEMPLO 7 ▸ Considere el término general de una sucesión $a_n = 2n^2 - 9$. Represente la tercera suma parcial, s_3, en notación sigma.

Solución La tercera suma parcial será la suma de los primeros tres términos, $a_1 + a_2 + a_3$. Podemos representar la tercera suma parcial como $\sum_{i=1}^{3}(2i^2 - 9)$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 69**

EJEMPLO 8 ▸ Para el siguiente conjunto de valores $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5, x_4 = 6,$ y $x_5 = 7$, ¿se cumple que $\sum_{i=1}^{5}(x_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2$?

Solución

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5}(x_i)^2 &= (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 + (x_5)^2\\ &= 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2\\ &= 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 135\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2 &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2\\ &= (3 + 4 + 5 + 6 + 7)^2 = (25)^2 = 625\end{aligned}$$

Como $135 \neq 625$, $\sum_{i=1}^{5}(x_i)^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 75**

Cuando un símbolo de suma se escribe sin límites superior e inferior, esto significa que debemos sumar todos los datos.

EJEMPLO 9 Una fórmula utilizada para determinar la media aritmética, $\overline{x}$ (se lee x barra) de un conjunto de datos es $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n}$, donde n es el número de datos.

Las calificaciones de los exámenes de Joan Sally son 70, 95, 83, 74 y 92. Determine la media aritmética de sus calificaciones.

Solución

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{70 + 95 + 83 + 74 + 92}{5} = \frac{414}{5} = 82.8$$

Ahora resuelva el ejercicio 79

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una sucesión?
2. ¿Qué es una sucesión infinita?
3. ¿Qué es una sucesión finita?
4. ¿Qué es una sucesión creciente?
5. ¿Qué es una sucesión decreciente?
6. ¿Qué es una sucesión alternante?
7. ¿Qué es una serie?
8. ¿Cuál es la n-ésima suma parcial de una serie?
9. Escriba con palabras lo que significa: $\sum_{i=1}^{5} (i + 4)$.
10. Considere la suma $\sum_{k=1}^{5} (k + 3)$.
    a) ¿Cómo se denomina al 1?
    b) ¿Cómo se denomina al 5?
    c) ¿Cómo se denomina a la k?
11. Sea $a_n = 2n - 1$. ¿Es una sucesión creciente o decreciente? Explique.
12. Sea $a_n = -3n + 7$. ¿Es una sucesión creciente o decreciente? Explique.
13. Sea $a_n = 1 + (-2)^n$. ¿Es una sucesión alternante? Explique.
14. Sea $a_n = (-1)^{2n}$. ¿Es una sucesión alternante? Explique.

Práctica de habilidades

Escriba los primeros cinco términos de la sucesión cuyo término n-ésimo se muestra.

15. $a_n = 6n$
16. $a_n = -5n$
17. $a_n = 4n - 1$
18. $a_n = 2n + 5$
19. $a_n = \frac{7}{n}$
20. $a_n = \frac{8}{n^2}$
21. $a_n = \frac{n + 2}{n + 1}$
22. $a_n = \frac{n - 5}{n + 6}$
23. $a_n = (-1)^n$
24. $a_n = (-1)^{2n}$
25. $a_n = (-2)^{n+1}$
26. $a_n = 3^{n-1}$

Determine el término indicado de la sucesión, cuyo término n-ésimo se muestra.

27. $a_n = 2n + 7$, décimo segundo término.
28. $a_n = 3n + 2$, sexto término.
29. $a_n = \frac{n}{4} + 8$, décimo sexto término.
30. $a_n = \frac{n}{2} - 13$, décimo cuarto término.
31. $a_n = (-1)^n$, octavo término.
32. $a_n = (-2)^n$, cuarto término.
33. $a_n = n(n + 2)$, noveno término.
34. $a_n = (n - 1)(n + 4)$, quinto término.
35. $a_n = \frac{n^2}{2n + 7}$, noveno término.
36. $a_n = \frac{n(n + 6)}{n^2}$, décimo término.

Para cada sucesión, determine la primera y la tercera sumas parciales, s_1 y s_3.

37. $a_n = 3n - 1$
38. $a_n = 2n + 3$
39. $a_n = 2^n + 1$
40. $a_n = 3^n - 8$
41. $a_n = \frac{n - 1}{n + 2}$
42. $a_n = \frac{n}{n + 3}$
43. $a_n = (-1)^n$
44. $a_n = (-3)^n$
45. $a_n = \frac{n^2}{2}$
46. $a_n = \frac{n^2}{n + 4}$

Escriba los siguientes tres términos de cada sucesión.

47. $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

48. $10, 15, 20, 25, 30, \ldots$

49. $7, 9, 11, 13, 15, \ldots$

50. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

51. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

52. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$

53. $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

54. $-10, -20, -30, -40, \ldots$

55. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

56. $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \ldots$

57. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

58. $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \ldots$

59. $37, 32, 27, 22, \ldots$

60. $7, -1, -9, -17, \ldots$

Desarrolle cada serie y luego evalúela.

61. $\sum_{i=1}^{5} (3i - 1)$

62. $\sum_{i=1}^{4} (4i + 5)$

63. $\sum_{i=1}^{6} (i^2 + 1)$

64. $\sum_{i=1}^{5} (2i^2 - 7)$

65. $\sum_{i=1}^{4} \frac{i^2}{2}$

66. $\sum_{i=1}^{3} \frac{i^2}{5}$

67. $\sum_{i=4}^{9} \frac{i^2 + i}{i + 1}$

68. $\sum_{i=2}^{5} \frac{i^3}{i + 1}$

Para el término general dado, a_n, escriba una expresión, con Σ, para representar la suma parcial que se indica.

69. $a_n = n + 8$, quinta suma parcial.

70. $a_n = n^2 + 3$, cuarta suma parcial.

71. $a_n = \frac{n^2}{4}$, tercera suma parcial.

72. $a_n = \frac{n^2 + 13}{n + 9}$, tercera suma parcial.

Para el conjunto de valores $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = -1$ y $x_5 = 4$, determine cada una de las sumas siguientes.

73. $\sum_{i=1}^{5} x_i$

74. $\sum_{i=1}^{5} (x_i + 5)$

75. $\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2$

76. $\sum_{i=1}^{5} 2x_i$

77. $\sum_{i=1}^{5} (x_i)^2$

78. $\sum_{i=1}^{4} (x_i^2 + 3)$

Determine la media aritmética, $\bar{x}$, de los conjuntos de datos siguientes.

79. 15, 20, 25, 30, 35

80. 16, 22, 96, 18, 28

81. 72, 83, 4, 60, 18, 20

82. 5, 13, 9, 12, 23, 36, 70

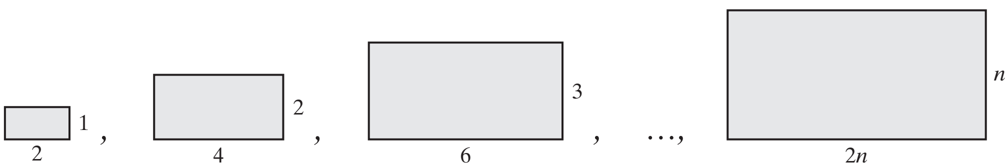
Resolución de problemas

En los ejercicios 83 y 84, considere los rectángulos siguientes. Para el rectángulo n-ésimo, la longitud es 2n y el ancho es n.

83. Perímetro

a) Determine los perímetros para los primeros cuatro rectángulos y luego liste los perímetros en una sucesión.

b) Determine el término general para el perímetro del rectángulo n-ésimo en la sucesión. Utilice p_n para el perímetro.



84. Área

a) Determine las áreas de los cuatro rectángulos, y luego liste las áreas en una sucesión.

b) Determine el término general para el área del n-ésimo rectángulo de la sucesión. Utilice a_n para el área.

85. Idee su propia sucesión que sea creciente, y liste los primeros cinco términos.

86. Idee su propia sucesión que sea decreciente, y liste los primeros cinco términos.

87. Idee su propia sucesión que sea alternante, y liste los primeros cinco términos.

88. Escriba

a) $\sum_{i=1}^{n} x_i$ como una suma de términos y

b) $\sum_{j=1}^{n} x_j$ como una suma de términos.

c) Para un conjunto dado de valores de x, desde x_1 hasta x_n, ¿se cumplirá $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$? Explique.

89. Despeje Σx de $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$.

90. Despeje n de $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$.

91. ¿Es $\sum_{i=1}^{n} 4x_i = 4\sum_{i=1}^{n} x_i$? Ilustre su respuesta con un ejemplo.

92. ¿Es $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{3} = \dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} x_i$? Ilustre su respuesta con un ejemplo.

93. Sean $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 2$ y $y_1 = 4, y_2 = 1, y_3 = 6$. Determine lo siguiente. Observe que $\Sigma x = x_1 + x_2 + x_3$, $\Sigma y = y_1 + y_2 + y_3$ y $\Sigma xy = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

a) Σx,
b) Σy,
c) $\Sigma x \cdot \Sigma y$,
d) Σxy,
e) ¿Es $\Sigma x \cdot \Sigma y = \Sigma xy$?

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.6] **94.** Resuelva $\left|\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{5}\right| = \left|\dfrac{1}{2}x - 1\right|$.

[5.6] **95.** Factorice $8y^3 - 64x^6$.

[7.6] **96.** Resuelva $\sqrt{x+5} - 1 = \sqrt{x-2}$.

[8.3] **97.** Despeje r de $V = \pi r^2 h$.

11.2 Sucesiones y series aritméticas

1 Determinar la diferencia común en una sucesión aritmética.

2 Determinar el n-ésimo término de una sucesión aritmética.

3 Determinar la n-ésima suma parcial de una serie aritmética.

1 Determinar la diferencia común en una sucesión aritmética

En la sección anterior empezamos nuestro análisis suponiendo que obtenía un trabajo con un salario inicial de $30,000. Una opción para el aumento de salario era un aumento de $2000 anuales. Esto tendría como resultado la sucesión

$$\$30{,}000, \$32{,}000, \$34{,}000, \$36{,}000, \ldots$$

Éste es un ejemplo de una sucesión aritmética.

Sucesión aritmética

Una **sucesión aritmética** es una sucesión en la que cada término, después del primero, difiere del término que le precede en una cantidad constante.

La cantidad constante en que difiere cada par de términos sucesivos se denomina **diferencia común**, d. La diferencia común puede determinarse restando cualquier término del término que le sigue directamente.

Sucesión aritmética	Diferencia común
$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$	$d = 3 - 1 = 2$
$5, 1, -3, -7, -11, -15, \ldots$	$d = 1 - 5 = -4$
$\frac{7}{2}, \frac{2}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{8}{2}, -\frac{13}{2}, -\frac{18}{2}, \ldots$	$d = \frac{2}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{5}{2}$

Observe que la diferencia común puede ser un número positivo o un número negativo. Si la sucesión es creciente, entonces d es un número positivo. Si la sucesión es decreciente, entonces d es un número negativo.

EJEMPLO 1 Escriba los primeros cinco términos de la sucesión aritmética con

a) el primer término 6 y diferencia común 4.
b) el primer término 3 y diferencia común -2.
c) el primer término 1 y diferencia común $\dfrac{1}{3}$.

Solución

a) Comience con 6 y siga sumando 4. La sucesión es 6, 10, 14, 18, 22.

b) $3, 1, -1, -3, -5$

c) $1, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}, 2, \dfrac{7}{3}$

Ahora resuelva el ejercicio 13

2 Determinar el *n*-ésimo término de una sucesión aritmética

En general, una sucesión aritmética con el primer término a_1 y diferencia común d tiene los términos siguientes:

$$a_1 = a_1, \quad a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_1 + 2d, \quad a_4 = a_1 + 3d, \quad \text{y así sucesivamente.}$$

Si continuamos este proceso, podemos ver que el n-ésimo término, a_n, se puede determinar mediante la fórmula siguiente:

n-ésimo término de una sucesión aritmética

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

EJEMPLO 2

a) Escriba una expresión para el término general (o n-ésimo), a_n, de una sucesión aritmética cuyo primer término es -3 y cuya diferencia común es 2.

b) Determine el décimo segundo término de la sucesión.

Solución

a) El n-ésimo término de la sucesión es $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Sustituyendo $a_1 = -3$ y $d = 2$ obtenemos

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ &= -3 + (n - 1)2 \\ &= -3 + 2(n - 1) \\ &= -3 + 2n - 2 \\ &= 2n - 5 \end{aligned}$$

Así, $a_n = 2n - 5$.

b) $a_n = 2n - 5$

$a_{12} = 2(12) - 5 = 24 - 5 = 19$

El décimo segundo término de la sucesión es 19.

Ahora resuelva el ejercicio 11

EJEMPLO 3

Determine el número de términos en la sucesión aritmética 5, 9, 13, 17, . . . , 41.

Solución El primer término, a_1, es 5; el n-ésimo término es 41, y la diferencia común, d, es 4. Al sustituir los valores apropiados en la fórmula para el término n-ésimo, y despejando a n, tenemos:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ 41 &= 5 + (n - 1)4 \\ 41 &= 5 + 4n - 4 \\ 41 &= 4n + 1 \\ 40 &= 4n \\ 10 &= n \end{aligned}$$

La sucesión tiene 10 términos.

Ahora resuelva el ejercicio 51

3 Determinar la *n*-ésima suma parcial de una serie aritmética

Una **serie aritmética** es la suma de los términos de una sucesión aritmética. Una serie aritmética finita puede escribirse como

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

Si consideramos el último término como a_n, el penúltimo término será $a_n - d$, el antepenúltimo término será $a_n - 2d$, y así sucesivamente.

Una fórmula para la n-ésima suma parcial, s_n, se puede obtener sumando s_n a sí mismo, pero siguiendo el orden inverso.

$$
\begin{array}{rcl}
s_n &=& a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \\
s_n &=& a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \\
\hline
2s_n &=& (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)
\end{array}
$$

Como el lado derecho de la ecuación contiene n términos iguales a $(a_1 + a_n)$, podemos escribir

$$2s_n = n(a_1 + a_n)$$

Ahora dividimos ambos lados de la ecuación entre 2, para obtener la fórmula siguiente.

n-ésima suma parcial de una sucesión aritmética

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

EJEMPLO 4 Determine la suma de los primeros 25 números naturales.

Solución La sucesión aritmética es 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . , 25. El primer término, a_1, es 1; el último término, a_n, es 25. Hay 25 términos; así, $n = 25$. Mediante la fórmula para la n-ésima suma parcial, tenemos

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{25(1 + 25)}{2} = \frac{25(26)}{2} = 25(13) = 325$$

La suma de los primeros 25 números naturales es 325, Así, $s_{25} = 325$.

Ahora resuelva el ejercicio 57

EJEMPLO 5 El primer término de una sucesión aritmética es 4 y el último término es 31, y si además, $s_n = 175$, determine el número de términos en la sucesión y la diferencia común.

Solución Sustituimos los valores apropiados, $a_1 = 4$, $a_n = 31$ y $s_n = 175$, en la fórmula para la n-ésima suma parcial y despejamos n.

$$
\begin{aligned}
s_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\
175 &= \frac{n(4 + 31)}{2} \\
175 &= \frac{35n}{2} \\
350 &= 35n \\
10 &= n
\end{aligned}
$$

Existen 10 términos en la sucesión. Podemos determinar ahora la diferencia común mediante la fórmula para el n-ésimo término de una sucesión aritmética.

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n - 1)d \\
31 &= 4 + (10 - 1)d \\
31 &= 4 + 9d \\
27 &= 9d \\
3 &= d
\end{aligned}
$$

La diferencia común es 3, la sucesión es 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31.

Ahora resuelva el ejercicio 31

Los ejemplos 6 y 7 ilustran algunas aplicaciones de las sucesiones y series aritméticas.

EJEMPLO 6 ▸ **Salario** Mary Tufts recibe un salario inicial de \$35,000 y se le promete un aumento de \$1200 después de cada uno de los 8 años siguientes. Determine su salario durante su octavo año de trabajo.

Solución Entienda el problema Su salario después de los primeros años sería

$$\$35,000, \$36,200, \$37,400, \$38,600, \ldots$$

Ya que se suma una cantidad constante cada año, ésta es una sucesión aritmética. El término general de una sucesión aritmética es $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Traduzca En este ejemplo, $a_1 = 35,000$ y $d = 1200$. Así, para $n = 8$, el salario de Mary sería

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} a_8 &= 35,000 + (8 - 1)1200 \\ &= 35,000 + 7(1200) \\ &= 35,000 + 8400 \\ &= 43,400 \end{aligned}$$

Responda Durante su octavo año de trabajo, el salario de Mary sería de \$43,400. Si enumeramos todos los salarios para el periodo de 8 años, éstos serían \$35,000, \$36,200, \$37,400, \$38,600, \$39,800, \$41,000, \$42,200, \$43,400

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 83**

EJEMPLO 7 ▸ **Péndulo** Cada oscilación de un péndulo (de derecha a izquierda o de izquierda a derecha) es 3 pulgadas menor que la anterior. La primera oscilación es de 8 pies.

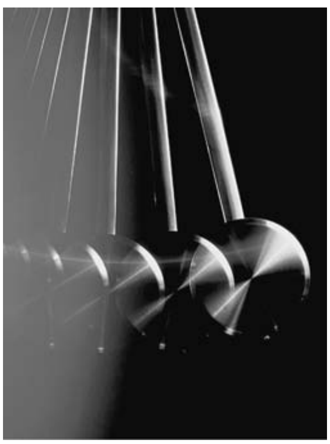
a) Determine la longitud de la décimo segunda oscilación.

b) Determine la distancia total recorrida por el péndulo durante las primeras 12 oscilaciones.

Solución **a)** Entienda el problema Como cada oscilación decrece en una cantidad constante, este problema puede representarse como una serie aritmética. Como la primera oscilación está dada en pies y la disminución de las oscilaciones está dada en pulgadas, cambiaremos 3 pulgadas a 0.25 pies $(3 \div 12 = 0.25)$. La décimo segunda oscilación puede considerarse como a_{12}. La diferencia, d, es negativa, ya que la distancia es decreciente con cada oscilación.

Traduzca

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ a_{12} &= 8 + (12 - 1)(-0.25) \end{aligned}$$



Realice los cálculos

$$\begin{aligned} &= 8 + 11(-0.25) \\ &= 8 - 2.75 \\ &= 5.25 \text{ pies} \end{aligned}$$

Responda La décimo segunda oscilación es de 5.25 pies.

b) Entienda el problema y traduzca La distancia total recorrida durante las primeras 12 oscilaciones puede determinarse mediante la fórmula para la n-ésima suma parcial. La primera oscilación, a_1, es de 8 pies y la décimo segunda, a_{12}, es de 5.25 pies.

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$s_{12} = \frac{12(a_1 + a_{12})}{2}$$

Realice los cálculos

$$= \frac{12(8 + 5.25)}{2} = \frac{12(13.25)}{2} = 6(13.25) = 79.5 \text{ pies.}$$

Responda El péndulo recorre 79.5 pies durante sus primeras 12 oscilaciones.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 75**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una sucesión aritmética?
2. ¿Qué es una serie aritmética?
3. ¿Cómo llamamos a la diferencia constante entre dos términos sucesivos en una sucesión aritmética?
4. ¿Cómo puede determinarse la diferencia común en una sucesión aritmética?
5. Si una sucesión aritmética es creciente, ¿el valor de d es un número positivo o un número negativo?
6. Si una sucesión aritmética es decreciente, ¿el valor de d es un número positivo o un número negativo?
7. ¿Una sucesión aritmética, puede constar sólo de números negativos? Explique.
8. ¿Una sucesión aritmética, puede constar sólo de números impares? Explique.
9. ¿Una sucesión aritmética, puede constar sólo de números pares? Explique.
10. ¿Una sucesión alternante, puede ser una sucesión aritmética? Explique.

Práctica de habilidades

Escriba los primeros cinco términos de la sucesión aritmética con el primer término y diferencia común dados. Escriba la expresión para el término general, o n-ésimo, a_n, de la sucesión aritmética.

11. $a_1 = 4, d = 3$
12. $a_1 = -11, d = 4$
13. $a_1 = 7, d = -2$
14. $a_1 = 3, d = -5$
15. $a_1 = \frac{1}{2}, d = \frac{3}{2}$
16. $a_1 = -\frac{5}{3}, d = -\frac{1}{3}$
17. $a_1 = 100, d = -5$
18. $a_1 = \frac{7}{4}, d = -\frac{3}{4}$

Determine la cantidad indicada de la sucesión aritmética.

19. $a_1 = 5, d = 3$; determine a_4
20. $a_1 = 10, d = -3$; determine a_5
21. $a_1 = -9, d = 4$; determine a_{10}
22. $a_1 = -1, d = -2$; determine a_{12}
23. $a_1 = -8, d = \frac{5}{3}$; determine a_{13}
24. $a_1 = 5, a_8 = -21$; determine d
25. $a_1 = 11, a_9 = 27$; determine d
26. $a_1 = \frac{1}{2}, a_7 = \frac{19}{2}$; determine d
27. $a_1 = 4, a_n = 28, d = 3$; determine n
28. $a_1 = -9, a_n = -27, d = -3$; determine n
29. $a_1 = 82, a_n = 42, d = -8$; determine n
30. $a_1 = -\frac{4}{3}, a_n = -\frac{14}{3}, d = -\frac{2}{3}$; determine n

Determine la suma, s_n, y la diferencia común, d, de cada sucesión.

31. $a_1 = 1, a_{10} = 19, n = 10$
32. $a_1 = -8, a_7 = 10, n = 7$
33. $a_1 = \frac{3}{5}, a_8 = 2, n = 8$
34. $a_1 = 12, a_8 = -23, n = 8$
35. $a_1 = -5, a_6 = 13.5, n = 6$
36. $a_1 = \frac{7}{5}, a_5 = \frac{23}{5}, n = 5$
37. $a_1 = 7, a_{11} = 67, n = 11$
38. $a_1 = 14.25, a_{31} = 18.75, n = 31$

Escriba los primeros cuatro términos de cada sucesión; luego determine a_{10} y s_{10}.

39. $a_1 = 4, d = 3$
40. $a_1 = 11, d = -6$
41. $a_1 = -6, d = 2$
42. $a_1 = -7, d = -4$
43. $a_1 = -8, d = -5$
44. $a_1 = -15, d = 4$
45. $a_1 = \frac{7}{2}, d = \frac{5}{2}$
46. $a_1 = \frac{9}{5}, d = \frac{3}{5}$
47. $a_1 = 100, d = -7$
48. $a_1 = 35, d = 6$

Determine el número de términos en cada sucesión y determine s_n.

49. $1, 4, 7, 10, \ldots, 43$

50. $-10, -8, -6, -4, \ldots, 40$

51. $-9, -5, -1, 3, \ldots, 31$

52. $6, 13, 20, 27, \ldots, 62$

53. $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{17}{2}$

54. $-\frac{5}{6}, -\frac{7}{6}, -\frac{9}{6}, -\frac{11}{6}, \ldots, -\frac{21}{6}$

55. $7, 10, 13, 16, \ldots, 91$

56. $-11, -15, -19, \ldots, -51$

Resolución de problemas

57. Determine la suma de los primeros 50 números naturales.

58. Determine la suma de los primeros 50 números naturales pares.

59. Determine la suma de los primeros 50 números naturales impares.

60. Determine la suma de los primeros 40 múltiplos positivos de 5.

61. Determine la suma de los primeros 30 múltiplos positivos de 3.

Las pirámides aparecen en todos lados; en eventos deportivos, las porristas pueden formar una pirámide en la que las personas de arriba se paran sobre los hombros de las personas de abajo. La ilustración de la derecha muestra una pirámide con 1 porrista en la parte superior, 2 en la fila de en medio y 3 porristas en la fila de abajo. Observe que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_3 = 3$. También note que $d = 1$, $n = 3$ y $s_3 = 6$.

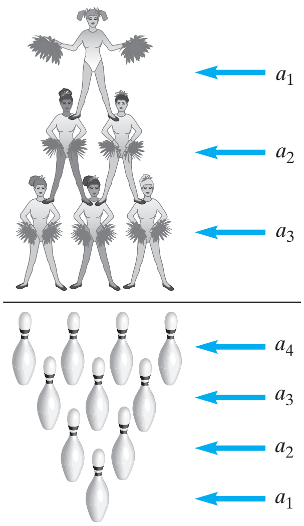
En una pista de boliche, los bolos forman una pirámide. La primera fila tiene 1 bolo, la segunda fila tiene 2 bolos, la tercera fila tiene 3 bolos y la cuarta tiene 4. Así, $a_1 = 1$, $d = 1$, $n = 4$ y $s_4 = 10$.

Utilice la idea de una pirámide para resolver los ejercicios 65 a 70.

62. Determine la suma de los números entre 50 y 150, inclusive.

63. Determine cuántos números entre 7 y 1610 son divisibles entre 6.

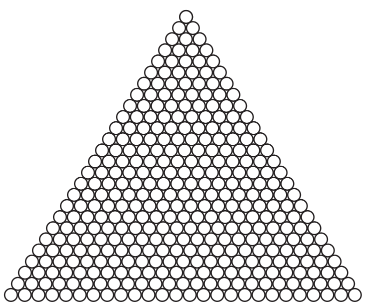
64. Determine cuántos números entre 14 y 1470 son divisibles entre 8.



65. Auditorio Un auditorio tiene 20 asientos en la primera fila. Cada fila sucesiva tiene dos asientos más que la fila anterior. ¿Cuántos asientos hay en la fila décimo segunda? ¿Cuántos asientos hay en las primeras 12 filas?

66. Auditorio Un auditorio tiene 22 asientos en la primera fila. Cada fila sucesiva tiene cuatro asientos más que la fila anterior. ¿Cuántos asientos hay en la novena fila? ¿Cuántos asientos hay en las primeras nueve filas?

67. Troncos Wolfang Schmidt apila troncos de modo que hay 26 troncos en la parte inferior, y cada fila tiene un tronco menos que la fila anterior. ¿Cuántos troncos hay en la pila?



68. Troncos Suponga que Wolfgang, en el ejercicio 67, deja de apilar troncos después de terminar con la fila que tiene 8 troncos. ¿Cuántos troncos hay en la pila?

69. Copas apiladas En su 50 aniversario de bodas, el señor y la señora Carlson están a punto de verter champaña en la copa superior, como se muestra en la foto. La fila superior tiene 1 copa, la segunda fila tiene 3 copas, la tercera fila tiene 5 copas, y así sucesivamente. Cada fila tiene 2 copas más que la fila superior anterior. Esta pirámide tiene 14 filas.

a) ¿Cuántas copas hay en la décimo cuarta fila (la fila inferior)?

b) ¿Cuántas copas hay en total?

70. Dulces en una pila Unos dulces que están envueltos de forma individual, se apilan en filas de modo que la fila superior tiene un dulce, la segunda fila tiene 3 dulces, la tercera fila tiene 5 dulces, y así sucesivamente. Cada fila tiene 2 dulces más que la fila arriba de ella. En total hay siete filas de dulces.

a) ¿Cuántos dulces hay en la séptima fila (la fila inferior)?

b) ¿Cuántos dulces hay en total?

71. Suma de números Karl Friedrich Gauss (1777−1855), un famoso matemático, cuando era niño determinó mentalmente y de forma rápida la suma de los primeros 100 números naturales $(1 + 2 + 3 + \ldots + 100)$. Explique cómo podría haberlo hecho y determine de esa forma la suma de los primeros 100 números naturales como cree que lo pudo haber hecho Gauss. (*Sugerencia:* $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, etcétera).

72. Suma de números Utilice el mismo proceso del ejercicio 71 para determinar la suma de los números del 101 al 150.

73. Suma de números Determine una fórmula para la suma de los primeros n números impares consecutivos iniciando con 1.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

74. Suma de números pares Determine una fórmula para la suma de los primeros n números pares consecutivos iniciando con 2.

$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$$

75. Balanceándose en una liana Una larga liana se ata a la rama de un árbol. Sally Wyn se columpia en la liana y cada oscilación (izquierda a derecha o derecha a izquierda) es $\frac{1}{2}$ pie menor que la oscilación anterior. Si su primera oscilación es de 22 pies, determine

a) la longitud de la séptima oscilación.

b) la distancia recorrida durante las siete oscilaciones.

76. Péndulo Cada oscilación de un péndulo es 2 pulgadas más corta que la oscilación que le precede (izquierda a derecha o de derecha a izquierda). La primera oscilación es de 6 pies. Determine

a) la longitud de la octava oscilación y

b) la distancia total recorrida por el péndulo durante las ocho oscilaciones.

77. Rebote de una pelota Frank Holyton deja caer una pelota desde una ventana que está en un segundo piso. Cada vez que la pelota rebota, la altura que alcanza es 6 pulgadas menor que la del rebote anterior. Si el primer rebote alcanza una altura de 6 pies, determine la altura que alcanza la pelota en el décimo primer rebote.

78. Pelota de ping-pong Una pelota de ping-pong cae de la mesa y rebota a una altura de 3 pies. Si cada rebote sucesivo es 3 pulgadas menor que el rebote que le precede, determine la altura que alcanza la pelota en el décimo rebote.

79. Paquetes El lunes 17 de marzo, Brian Nguyen inició un nuevo trabajo en una compañía de paquetería. Ese día, él fue capaz de preparar 105 paquetes para envío. Su jefe espera que con la experiencia que vaya obteniendo Brian sea más productivo. Cada día de la primera semana, se espera que Brian prepare 10 paquetes más que el total del día anterior.

a) ¿Cuántos paquetes se espera que prepare Brian el 22 de marzo?

b) ¿Cuántos paquetes se espera que prepare Brian en sus primeros seis días de trabajo?

80. Salario Marion Nickelson gana un salario anual de \$37,500 en la compañía en que trabaja. Su jefe le ha prometido un aumento de \$1500 a su salario en cada año, durante los siguientes 10 años.

a) ¿Dentro de 10 años, cuál será el salario de Marion?

b) ¿Cuánto ganará en total durante esos 11 años?

81. Dinero Si Craig Campanella ahorra \$1 el día 1, \$2 el día 2, \$3 el día 3, y así sucesivamente, en total, ¿cuánto habrá ahorrado al final de 1 año (365 días)?

82. Dinero Si Dan Currier ahorra 50 centavos el día 1, \$1.00 el día 2, \$1.50 el día 3, y así sucesivamente, ¿cuánto habrá ahorrado al final de 1 año (365 días)?

83. Dinero Carrie Dereshi, recientemente jubilada, se entrevistó con su asesor financiero. Acordó recibir \$42,000 el primer año, y debido a la inflación, cada año recibiría \$400 más de lo que recibiera el año anterior.

a) ¿Cuál fue el ingreso que recibió en su décimo año de retiro?

b) ¿Cuánto dinero recibirá en total durante los primeros 10 años de retiro?

84. Salario A Susan Forman se le da un salario inicial de \$23,000 y le dicen que recibirá un aumento de \$1000 al final de cada año.

a) Determine el salario de ella durante el año 12.

b) En total, ¿cuánto recibirá durante sus primeros 12 años?

85. Ángulos La suma de los ángulos interiores de un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono y un hexágono, son 180°, 360°, 540° y 720°, respectivamente. Utilice este patrón para determinar una fórmula para la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.

86. Otra fórmula que puede usarse para determinar la n-ésima suma parcial de una serie aritmética es

$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

Deduzca esta fórmula, usando las dos fórmulas que se presentaron en esta sección.

Actividad en grupo

En cálculo un tema muy importante es el de límites. Considere $a_n = \frac{1}{n}$. *Los primeros cinco términos de esta sucesión son* $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. *Como el valor de* $\frac{1}{n}$ *se acerca cada vez más a 0 conforme n se hace cada vez más grande, decimos que el límite de* $\frac{1}{n}$ *cuando n tiende a infinito es 0. Escribimos esto como* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *o* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. *Observe que* $\frac{1}{n}$ *nunca es igual a 0, pero su valor se aproxima a 0 cuando n se hace cada vez más grande.*

a) *Miembro 1 del grupo: Determine* $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *para los ejercicios 87 y 88.* **b)** *Miembro 2: Determine* $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *para los ejercicios 89 y 90.*

c) *Miembro 3: Determine* $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *para los ejercicios 91 y 92.* **d)** *Intercambien sus trabajos y verifiquen las respuestas de los demás.*

87. $a_n = \dfrac{1}{n-2}$ **88.** $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ **89.** $a_n = \dfrac{1}{n^2+2}$

90. $a_n = \dfrac{2n+1}{n}$ **91.** $a_n = \dfrac{4n-3}{3n+1}$ **92.** $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **93.** Despeje r de $A = P + Prt$.

[4.1] **94.** Resuelva el sistema de ecuaciones

$$y = 2x + 1$$
$$3x - 2y = 1$$

[5.4] **95.** Factorice $12n^2 - 6n - 30n + 15$.

[10.1] **96.** Grafique $(x + 4)^2 + y^2 = 25$.

11.3 Sucesiones y series geométricas

1 Determinar la razón común en una sucesión geométrica.
2 Determinar el n-ésimo término de una sucesión geométrica.
3 Determinar la n-ésima suma parcial de una serie geométrica.
4 Identificar series geométricas infinitas.
5 Determinar la suma de una serie geométrica infinita.
6 Estudiar aplicaciones de series geométricas.

1 Determinar la razón común en una sucesión geométrica

En la sección 11.1 supusimos que obtenía un trabajo con un salario inicial de \$30,000. También mencionamos que una opción de aumento salarial era 5% de aumento cada año. Esto daría como resultado la sucesión siguiente.

$$\$30{,}000,\quad \$31{,}500,\quad \$33{,}075,\quad \$34{,}728.75, \ldots$$

Éste es un ejemplo de una sucesión geométrica.

Sucesión geométrica

Una **sucesión o progresión geométrica** es una sucesión donde cada término después del primero es el mismo múltiplo del término que le precede.

El múltiplo común es la **razón común**.

La razón común, r, de cualquier sucesión geométrica puede determinarse dividiendo cualquier término, excepto el primero, entre el término que le precede. En la sucesión geométrica anterior, la razón común es $\frac{31{,}500}{30{,}000} = 1.05$ (o 105%).

Considere la sucesión geométrica

$$1, 3, 9, 27, 81, \ldots, 3^{n-1}, \ldots$$

La razón común es 3, ya que $3 \div 1 = 3$ (o $9 \div 3 = 3$, y así sucesivamente).

Sucesión geométrica	Razón común
$4, 8, 16, 32, 64, \ldots, 4(2^{n-1}), \ldots$	2
$3, 12, 48, 192, 768, \ldots, 3(4^{n-1}), \ldots$	4
$7, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}, \frac{7}{16}, \ldots, 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots$	$\frac{1}{2}$
$5, -\frac{5}{3}, \frac{5}{9}, -\frac{5}{27}, \frac{5}{81}, \ldots, 5\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \ldots$	$-\frac{1}{3}$

EJEMPLO 1 Determine los primeros cinco términos de la sucesión geométrica si $a_1 = 6$ y $r = \frac{1}{2}$.

Solución $a_1 = 6,\quad a_2 = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3,\quad a_3 = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\quad a_4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4},\quad a_5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Así, los primeros cinco términos de la sucesión geométrica son

$$6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$$

Ahora resuelva el ejercicio 15

2 Determinar el *n*-ésimo término de una sucesión geométrica

En general, una sucesión geométrica con primer término a_1 y razón común r tiene los términos siguientes:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Primer} \\ \text{término, } a_1}}{a_1,} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Segundo} \\ \text{término, } a_2}}{a_1 r,} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tercer} \\ \text{término, } a_3}}{a_1 r^2,} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cuarto} \\ \text{término, } a_4}}{a_1 r^3,} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Quinto} \\ \text{término, } a_5}}{a_1 r^4,} \ldots, \quad \underset{\substack{\uparrow \\ n-\text{ésimo} \\ \text{término, } a_n}}{a_1 r^{n-1},} \ldots$$

Así, podemos ver que el *n*-ésimo término de una sucesión geométrica está dado por la fórmula siguiente.

_n_-ésimo término de una sucesión geométrica

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

EJEMPLO 2

a) Escriba una expresión para el término general (o *n*-ésimo), a_n de la sucesión geométrica con $a_1 = 3$ y $r = -2$.
b) Determine el décimo segundo término de esta sucesión.

Solución

a) El término *n*-ésimo de la sucesión es $a_n = a_1 r^{n-1}$. Al sustituir $a_1 = 3$ y $r = -2$, obtenemos

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 3(-2)^{n-1}$$

Así, $a_n = 3(-2)^{n-1}$.

b)
$$a_n = 3(-2)^{n-1}$$
$$a_{12} = 3(-2)^{12-1} = 3(-2)^{11} = 3(-2048) = -6144$$

El décimo segundo término de la sucesión es -6144. Los primeros doce términos de la sucesión son $3, -6, 12, -24, 48, -96, 192, -384, 768, -1536, 3072, -6144$.

Ahora resuelva el ejercicio 35

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

En este capítulo trabajará con exponentes y utilizará las reglas de los exponentes. Las reglas de los exponentes se analizaron en la sección 1.5 y nuevamente en el capítulo 6. Si no las recuerda, ahora es un buen momento para revisar la sección 1.5.

EJEMPLO 3 Determine r y a_1 para la sucesión geométrica con $a_2 = 12$ y $a_5 = 324$.

Solución La sucesión puede representarse con espacios en blanco para los términos faltantes.

$$\_\_, \underset{\substack{\uparrow \\ a_2}}{12}, \_\_, \_\_, \underset{\substack{\uparrow \\ a_5}}{324}$$

Si suponemos que a_2 es el primer término de la sucesión con la misma razón común, obtenemos

$$\underset{\substack{\text{Primer}\\\text{término}}}{\underset{\uparrow}{12}}, \_\_, \_\_, \underset{\substack{\text{Cuarto}\\\text{término}}}{\underset{\uparrow}{324}}$$

Ahora utilizamos la fórmula para el n-ésimo término de una sucesión geométrica para determinar r. Sea el primer término, a_1, 12 y el número de términos n, 4.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ 324 &= 12r^{4-1} \\ 324 &= 12r^3 \\ \frac{324}{12} &= r^3 \\ 27 &= r^3 \\ 3 &= r \end{aligned}$$

Así, la razón común es 3.

El primer término de la sucesión original es $12 \div 3$, es decir, 4. Así, $a_1 = 4$. El primer término también podría determinarse utilizando la fórmula con $a_n = 324$, $r = 3$ y $n = 5$. Ahora, determine a_1 mediante la fórmula.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 83**

3 Determinar la *n*-ésima suma parcial de una serie geométrica

Una **serie geométrica** es la suma de los términos de una sucesión geométrica. La suma de los primeros n términos, s_n, de una sucesión geométrica se puede expresar como

$$s_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \qquad (ec.\ 1)$$

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación por r, obtenemos

$$rs_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \qquad (ec.\ 2)$$

Ahora restamos los lados correspondientes de la (ec. 2) de la (ec. 1). Los términos en color rojo se anulan, dejando

$$s_n - rs_n = a_1 - a_1 r^n$$

Ahora, despejamos s_n.

$$\begin{aligned} s_n(1 - r) &= a_1(1 - r^n) && \text{Factorizar.} \\ s_n &= \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} && \text{Dividir ambos lados entre } 1 - r. \end{aligned}$$

Así, tenemos la fórmula siguiente para la n-ésima suma parcial de una serie geométrica.

n-ésima suma parcial de una serie geométrica

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, \qquad r \neq 1$$

EJEMPLO 4 ▸ Determine la séptima suma parcial de una serie geométrica cuyo primer término es 16 y cuya razón común es $-\frac{1}{2}$.

Solución Al sustituir los valores apropiados para a, r y r, tenemos:

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$s_7 = \frac{16\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{16\left(1 + \frac{1}{128}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{16\left(\frac{129}{128}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{129}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{129}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{43}{4}$$

Así, $s_7 = \frac{43}{4}$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 41**

EJEMPLO 5 Dados $s_n = 93$, $a_1 = 3$ y $r = 2$, determine n.

Solución

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$93 = \frac{3(1 - 2^n)}{1 - 2} \quad \textit{Sustituir los valores para } s_n, a_1 \textit{ y } r.$$

$$93 = \frac{3(1 - 2^n)}{-1}$$

$$-93 = 3(1 - 2^n) \quad \textit{Ambos lados se multiplicaron por } -1.$$

$$-31 = 1 - 2^n \quad \textit{Ambos lados se dividieron entre 3.}$$

$$-32 = -2^n \quad \textit{Se restó 1 de ambos lados.}$$

$$32 = 2^n \quad \textit{Ambos lados se dividieron entre } -1.$$

$$2^5 = 2^n \quad \textit{Escribir 32 como } 2^5.$$

Por lo tanto, $n = 5$.

Ahora resuelva el ejercicio 65

Al trabajar con una serie geométrica, r puede ser un número positivo como vimos en el ejemplo 5, o un número negativo como vimos en el ejemplo 4.

4 Identificar series geométricas infinitas

Todas las sucesiones geométricas que hemos analizado hasta ahora han sido finitas, pues tenían un último término. La siguiente sucesión es un ejemplo de una sucesión geométrica infinita.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots$$

Observe que los tres puntos suspensivos al final de la sucesión indican que ésta continúa de manera indefinida de la misma forma. La suma de los términos de una sucesión geométrica infinita forma una **serie geométrica infinita**. Por ejemplo,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$$

es una serie geométrica infinita. Calculemos algunas sumas parciales.

Suma parcial	Serie	Suma
Segunda	$1 + \frac{1}{2}$	1.5
Tercera	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	1.75
Cuarta	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	1.875
Quinta	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	1.9375
Sexta	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$	1.96875

Para cada suma parcial sucesiva, la cantidad que se le añade es menor que la de la suma parcial que le precede. Además, la suma parece acercarse cada vez más a 2. En el ejemplo 6, mostraremos que la suma de esta serie geométrica infinita en realidad es 2.

5 Determinar la suma de una serie geométrica infinita

Consideremos la fórmula para la suma de los primeros n términos de una serie geométrica:

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, \qquad r \neq 1$$

¿Qué ocurre con r^n, si $|r| < 1$ y n cada vez que se hace más grande? Supongamos que $r = \frac{1}{2}$; entonces

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0.5, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.125, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0.000001$$

Podemos ver que cuando $|r| < 1$ el valor de r^n se acerca mucho a 0 cuando n es cada vez más grande. Así, al considerar la suma de una serie geométrica infinita, que denotamos como s_∞, la expresión r^n tiende a 0 cuando $|r| < 1$. Por lo tanto, si reemplazamos r^n con 0 en la fórmula $s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ obtenemos la fórmula siguiente.

Suma de una serie geométrica infinita

$$s_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \quad \text{donde} \quad |r| < 1$$

EJEMPLO 6 Determine la suma de la serie geométrica infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots.$$

Solución $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$. Observe que $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

$$s_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Así, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots = 2$.

Ahora resuelva el ejercicio 69

EJEMPLO 7 Determine la suma de la serie geométrica infinita

$$3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} - \frac{24}{125} + \frac{48}{625} + \cdots$$

Solución Los términos de la sucesión correspondiente son $3, -\frac{6}{5}, \frac{12}{25}, -\frac{24}{125}, \ldots$ Observe que $a_1 = 3$. Para determinar la razón común, r, podemos dividir el segundo término, $-\frac{6}{5}$, entre el primer término, 3.

$$r = -\frac{6}{5} \div 3 = -\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{5}.$$

Como $\left|-\frac{2}{5}\right| < 1$,

$$\begin{aligned} s_\infty &= \frac{a_1}{1 - r} \\ &= \frac{3}{1 - \left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{3}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{3}{\frac{7}{5}} = \frac{15}{7} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 71

EJEMPLO 8 Escriba 0.343434 . . . como una razón de dos enteros.

Solución Podemos escribir este decimal como

$$0.34 + 0.0034 + 0.000034 + \cdots + (0.34)(0.01)^{n-1} + \cdots$$

Ésta es una serie geométrica infinita, con $r = 0.01$. Puesto que $|r| < 1$,

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.34}{1-0.01} = \frac{0.34}{0.99} = \frac{34}{99}$$

Si divide 34 entre 99 en una calculadora, verá el valor 0.34343434.

Ahora resuelva el ejercicio 81

¿Cuál es la suma de una serie geométrica cuando $|r| > 1$? Considere la sucesión geométrica en la que $a_1 = 1$ y $r = 2$.

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^{n-1}, \ldots$$

La suma de sus términos es

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$$

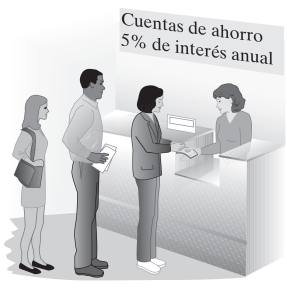
¿Cuál es la suma de esta serie? Conforme n crece, la suma se hace cada vez más grande. Por lo tanto, decimos que la suma "no existe". Para $|r| > 1$, la suma de una serie geométrica no existe.

6 Estudiar aplicaciones de series geométricas

Ahora veamos algunas aplicaciones de sucesiones y series geométricas.

EJEMPLO 9 **Cuenta de ahorros** Jean Simmons invierte, en una cuenta de ahorros, \$1000 al 5% de interés compuesto cada año. Determine la cantidad en su cuenta y el monto de interés generado al final de 10 años.

Solución **Entienda el problema** Suponga que P representa el capital invertido. Al inicio del segundo año, el monto crece a $P + 0.05P$ o $1.05P$. Este monto será el capital invertido durante el segundo año. Al inicio del tercer año, el capital del segundo año crecerá 5% a $(1.05P)(1.05)$ o $(1.05)^2P$. El monto en la cuenta de Jean al inicio de los años sucesivos es



Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
P	$1.05P$	$(1.05)^2P$	$(1.05)^3P$

y así sucesivamente. Ésta es una serie geométrica con $r = 1.05$. El monto en su cuenta al final de 10 años, será la misma cantidad en su cuenta al inicio del año 11. Por lo tanto, utilizamos la fórmula,

$$a_n = a_1 r^{n-1}, \quad \text{con} \quad r = 1.05 \quad \text{y} \quad n = 11$$

Traduzca Tenemos una sucesión geométrica con $a_1 = 1000$, $r = 1.05$ y $n = 11$. Al sustituir estos valores en la fórmula, obtenemos lo siguiente

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1000(1.05)^{11-1} \\ &= 1000(1.05)^{10} \\ &\approx 1000(1.62889) \\ &\approx 1628.89 \end{aligned}$$

Responda Al cabo de 10 años, el monto en la cuenta es alrededor de \$1628.89. El monto del interés es \$1628.89 − \$1000 = \$628.89.

Ahora resuelva el ejercicio 95

EJEMPLO 10 ▸ **Dinero** Suponga que alguien le ofrece \$1000 diarios por cada día de un mes de 30 días. O podría elegir un centavo el día 1, 2 centavos el día 2, 4 centavos el día 3, 8 centavos el día 4, y así sucesivamente. El monto continuaría duplicándose cada día durante 30 días.

a) Sin hacer cálculos, tome una decisión de cuál de las dos ofertas le proporcionaría el mayor ingreso total en los 30 días.

b) Calcule el monto total que recibiría si prefiriera \$1000 diarios durante 30 días.

c) Calcule el monto que recibiría el día 30, si eligiera 1 centavo el día 1 y la cantidad se duplicara cada día durante 30 días.

d) Calcule el monto total que recibiría si eligiera 1 centavo el día 1 y se duplica la cantidad cada día durante 30 días.

Solución

a) Cada quien tendrá su propia respuesta para la parte **a)**.

b) Si recibiera \$1000 diarios durante 30 días, recibiría 30(\$1000) = \$30,000.

c) Entienda el problema Como la cantidad se duplica cada día, esto representa una serie geométrica con $r = 2$. La tabla siguiente muestra la cantidad que recibiría en cada uno de los primeros 7 días. También muestra las cantidades escritas con base 2, la razón común.

Día	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad (centavos	1	2	4	8	16	32	64
Cantidad (centavos)	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6

Observe que para cualquier día dado, el exponente en el 2 es 1 menos que el número del día. Por ejemplo, el día 7, la cantidad es 2^6. En general, la cantidad en el día n es 2^{n-1}.

Traduzca Para determinar la cantidad que se recibe el día 30, evaluamos $a_n = a_1r^{n-1}$ para $n = 30$.

$$a_n = a_1r^{n-1}$$
$$a_{30} = 1(2)^{30-1}$$

Realice los cálculos

$$a_{30} = 1(2)^{29}$$
$$= 1(536{,}870{,}912)$$
$$= 536{,}870{,}912$$

Responda El día 30, la cantidad que recibiría es 536,870,912 centavos o \$5,368,709.12.

d) Entienda el problema y traduzca Para determinar el monto total recibido durante los 30 días, determinaremos la trigésima suma parcial.

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$
$$s_{30} = \frac{1(1 - 2^{30})}{1 - 2}$$

Realice los cálculos

$$= \frac{1(1 - 1{,}073{,}741{,}824)}{-1}$$
$$= 1{,}073{,}741{,}823$$

Responda Por lo tanto, durante los 30 días el monto total que recibiría por este método sería 1,073,741,823 centavos o \$10,737,418.23. El monto recibido por este método sobrepasa por mucho los \$30,000 que recibiría si eligiera \$1000 diarios durante 30 días.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 87**

EJEMPLO 11 **Péndulo** En cada oscilación (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda), cierto péndulo recorre el 90% de la distancia recorrida en la oscilación anterior. Por ejemplo, si la oscilación a la derecha fue de 10 pies, la oscilación de regreso hacia la izquierda es de $0.9 \times 10 = 9$ pies (vea la **figura 11.1**). Si la primera oscilación es de 10 pies, determine la distancia total recorrida por el péndulo hasta el momento en que se detiene.

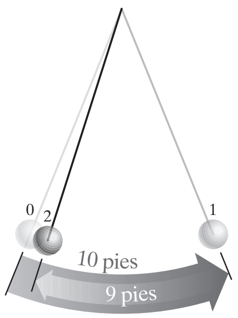


FIGURA 11.1

Solución Entienda el problema Este problema se puede considerar como una serie geométrica infinita, con $a_1 = 10$ y $r = 0.9$. Por lo tanto, podemos utilizar la fórmula $s_\infty = \dfrac{a_1}{1-r}$ para determinar la distancia total recorrida por el péndulo.

Traduzca y realice los cálculos

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{10}{1-0.9} = \frac{10}{0.1} = 100 \text{ pies}$$

Responda Cuando el péndulo se detenga, habrá recorrido 100 pies.

Ahora resuelva el ejercicio 99

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una sucesión geométrica?
2. ¿Qué es una serie geométrica?
3. Explique cómo determinar la razón común en una sucesión geométrica.
4. ¿Qué es una serie geométrica infinita?
5. En una serie geométrica, si $|r| < 1$, ¿hacia dónde se aproxima r^n cuando n se hace cada vez más grande?
6. ¿La suma de una serie geométrica infinita existe cuando $|r| > 1$?
7. En una serie geométrica, ¿puede ser negativo el valor de r?
8. En una serie geométrica, ¿puede ser positivo el valor de r?
9. En una serie geométrica, si $a_1 = 6$ y $r = 1/4$, ¿existe s_∞? Si es así, ¿cuál es su valor? Explique.
10. En una serie geométrica, si $a_1 = 6$ y $r = -2$, ¿existe s_∞? Si es así, ¿cuál es su valor? Explique.

Práctica de habilidades

Determine los primeros cinco términos de cada sucesión geométrica.

11. $a_1 = 2, r = 3$
12. $a_1 = 2, r = -3$
13. $a_1 = 6, r = -\frac{1}{2}$
14. $a_1 = 6, r = \frac{1}{2}$
15. $a_1 = 72, r = \frac{1}{3}$
16. $a_1 = \frac{1}{8}, r = 4$
17. $a_1 = 90, r = -\frac{1}{3}$
18. $a_1 = 32, r = -\frac{1}{4}$
19. $a_1 = -1, r = 3$
20. $a_1 = -1, r = -3$
21. $a_1 = 5, r = -2$
22. $a_1 = -13, r = -1$
23. $a_1 = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{2}$
24. $a_1 = \frac{1}{2}, r = -\frac{1}{3}$
25. $a_1 = 3, r = \frac{3}{2}$
26. $a_1 = 60, r = -\frac{2}{5}$

Para cada sucesión geométrica, determine el término que se pide.

27. $a_1 = 4, r = 2$; determine a_6.
28. $a_1 = 4, r = -2$; determine a_6.
29. $a_1 = -12, r = \frac{1}{2}$; determine a_9.
30. $a_1 = 27, r = \frac{1}{3}$; determine a_7.
31. $a_1 = \frac{1}{4}, r = 2$; determine a_{10}.
32. $a_1 = 3, r = 3$; determine a_6.
33. $a_1 = -3, r = -2$; determine a_{12}.
34. $a_1 = -10, r = -2$; determine a_{10}.
35. $a_1 = 2, r = \frac{1}{2}$; determine a_8.

36. $a_1 = 5, r = \frac{2}{3}$; determine a_9.

37. $a_1 = 50, r = \frac{1}{3}$; determine a_7.

38. $a_1 = -7, r = -\frac{3}{4}$; determine a_7.

Determine la suma indicada.

39. $a_1 = 3, r = 2$; determine s_5.

40. $a_1 = 7, r = -3$; determine s_5.

41. $a_1 = 2, r = 5$; determine s_6.

42. $a_1 = 9, r = \frac{1}{2}$; determine s_6.

43. $a_1 = 80, r = 2$; determine s_7.

44. $a_1 = 2, r = -2$; determine s_{12}.

45. $a_1 = -15, r = -\frac{1}{2}$; determine s_9.

46. $a_1 = \frac{3}{4}, r = 3$; determine s_7.

47. $a_1 = -9, r = \frac{2}{5}$; determine s_5.

48. $a_1 = 35, r = \frac{1}{5}$; determine s_{12}.

Para cada sucesión geométrica, determine la razón común, r, y luego escriba una expresión para el término general (n-ésimo), a_n.

49. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$

50. $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \ldots$

51. $9, 18, 36, 72, \ldots$

52. $2, 6, 18, 54, \ldots$

53. $2, -6, 18, -54, \ldots$

54. $-1, -3, -9, -18, \ldots$

55. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$

56. $\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \frac{32}{3}, \ldots$

Determine la suma de los términos en cada sucesión geométrica.

57. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

58. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

59. $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots$

60. $1, -\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots$

61. $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$

62. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

63. $5, 2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}, \ldots$

64. $-\frac{4}{3}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, -\frac{4}{81}, \ldots$

Dados s_n, a_1 y r, determine n en cada serie geométrica.

65. $s_n = 93, a_1 = 3$ y $r = 2$

66. $s_n = 80, a_1 = 2$ y $r = 3$

67. $s_n = \frac{189}{32}, a_1 = 3$ y $r = \frac{1}{2}$

68. $s_n = \frac{121}{9}, a_1 = 9$ y $r = \frac{1}{3}$

Determine la suma de cada serie geométrica infinita.

69. $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

70. $8 + 4 + 2 + 1 + \cdots$

71. $8 + \frac{16}{3} + \frac{32}{9} + \frac{64}{27} + \cdots$

72. $6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \cdots$

73. $-60 + 20 - \frac{20}{3} + \frac{20}{9} - \cdots$

74. $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \cdots$

75. $-12 - \frac{12}{5} - \frac{12}{25} - \frac{12}{125} - \cdots$

76. $5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \cdots$

Escriba cada número con decimales periódicos (o que se repiten) como la razón de dos enteros.

77. 0.242424 . . .

78. 0.454545 . . .

79. 0.8888 . . .

80. 0.375375 . . .

81. 0.515151 . . .

82. 0.742742 . . .

Resolución de problemas

83. En una sucesión geométrica, $a_2 = 15$ y $a_5 = 405$; determine r y a_1.

84. En una sucesión geométrica, $a_2 = 27$ y $a_5 = 1$; determine r y a_1.

85. En una sucesión geométrica, $a_3 = 28$ y $a_5 = 112$; determine r y a_1.

86. En una sucesión geométrica, $a_2 = 12$ y $a_5 = -324$; determine r y a_1.

87. **Barra de pan** Actualmente una hogaza de pan cuesta \$1.40. Determine su precio al cabo de 8 años (inicio del noveno año), si la inflación creciera a una razón constante de 3% al año. *Sugerencia:* Después de 1 año (al inicio del segundo año), el costo de la hogaza es \$1.40(1.03). Después de 2 años (al inicio del tercer año), el costo sería $\$1.40(1.03)^2$ y así sucesivamente.

88. **Bicicleta** Actualmente cierto tipo de bicicleta cuesta \$400. Determine su costo después de 12 años, si la inflación creciera a una tasa constante de 4% anual.

89. **Masa** Una sustancia pierde la mitad de su masa cada día. Si al inicio hay 300 gramos de la sustancia, determine

a) el número de días para que sólo queden 37.5 gramos de la sustancia.

b) la cantidad de la sustancia que queda después de 9 días.

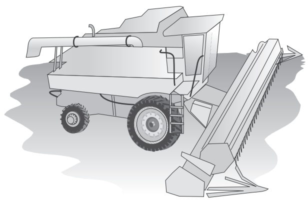
90. **Bacterias** El número de cierto tipo de bacterias se duplica cada hora. Si al inicio había 1000 bacterias, ¿después de cuántas horas el número de bacterias será 64,000?

91. Población El 1 de julio de 2005, la población de Estados Unidos era alrededor de 296.5 millones de personas. Si la población crece a una tasa de 1.1% por año, determine

a) la población al cabo de 10 años.

b) el número de años para que la población se duplique.

92. Equipo para granja Un equipo para la granja cuesta \$105,000 y su valor disminuye 15% cada año. Determine el valor del equipo al cabo de 4 años.



93. Luz filtrada La cantidad de luz que se filtra a través de un lago, disminuye un medio por cada metro de profundidad.

a) Escriba una sucesión que indique la cantidad de luz que se tiene en las profundidades de 1, 2, 3, 4 y 5 metros.

b) ¿Cuál es el término general de la sucesión?

c) ¿Cuál es la cantidad de luz que llega a una profundidad de 7 metros?

94. Péndulo En cada oscilación (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda), un péndulo recorre 80% de la oscilación que le precede. Si la primera oscilación es de 10 pies, determine la distancia total que recorrió el péndulo hasta el momento que se detuvo.

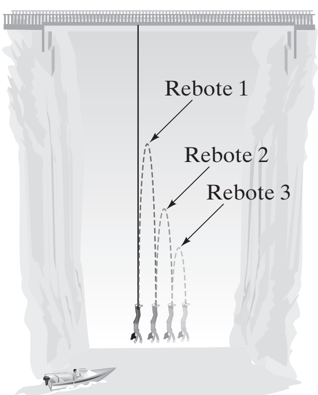
95. Inversión Usted invierte \$10,000 en una cuenta de ahorros que paga 6% de interés anual. Determine la cantidad en su cuenta al cabo de 8 años.

96. Líquido de contraste Por razones médicas, un líquido de contraste se inyecta a Mark Damion. Después de cada hora quedan dos tercios del líquido de contraste que había una hora antes. Después de 10 horas, ¿cuánto líquido permanece en el sistema de Mark?

97. Salto de bungee Shawn Kelly salta de un bungee desde un puente. En el salto inicial, la cuerda del bungee se estira 220 pies. Suponga que el primer rebote alcanza una altura del 60% del salto original y que cada rebote adicional alcanza una altura del 60% del rebote anterior.

a) ¿Cuál es la altura del cuarto rebote?

b) En teoría, Shawna nunca pararía de rebotar, pero en la realidad, sí lo hará. Utilice la serie geométrica infinita para estimar la distancia total que Shawna recorre en dirección *descendente*.



98. Salto de bungee Repita el ejercicio 97 **b)**, pero esta vez determine la distancia total recorrida en dirección *ascendente*.

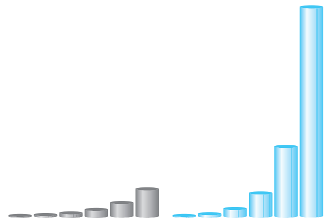
99. Pelota de ping-pong Una pelota de ping-pong cae de una mesa de 30 pulgadas de altura. Suponga que el primer rebote alcanza 70% de la distancia desde que cayó y cada rebote adicional alcanza 70% de la altura del rebote anterior.

a) ¿A qué altura llegará la pelota en el tercer rebote?

b) En teoría, la pelota nunca dejaría de rebotar, pero en la realidad lo hará. Estime la distancia total que recorre la pelota en dirección *descendente*.

100. Pelota de ping-pong Repita el ejercicio 99 **b)**, pero esta vez determine la distancia total recorrida en dirección *ascendente*.

101. Montón de fichas Suponga que forma montones de fichas de color negro, de tal forma que en cada montón hay el doble de fichas que en el montón anterior. Así, tendría montones con 1, 2, 4, 8, etcétera de fichas negras. También forma pilas de fichas rojas, iniciando con una ficha roja y luego triplicando el número de fichas en cada montón sucesivo. Así, los montones tendrían 1, 3, 9, 27, etcétera fichas rojas. ¿Cuántas fichas más habrá en el sexto montón de fichas rojas que en el sexto montón de fichas negras?



102. Montón de monedas Si inicia con \$1 y duplica su dinero cada día, ¿cuántos días tardará en superar \$1,000,000?

103. Depreciación Un método de depreciación de un artículo en los impuestos a los ingresos es el método de disminución de saldo. Con este método se deprecia cada año un porcentaje dado del costo del artículo. Suponga que un artículo tiene una vida de 5 años y se deprecia por medio del método de disminución de saldo. Entonces, al final del primer año, pierde $\frac{1}{5}$ de su valor y conserva $\frac{4}{5}$ de su valor. Al final del segundo año pierde $\frac{1}{5}$ de los $\frac{4}{5}$ restantes y así sucesivamente. Un automóvil tiene una expectativa de vida de 5 años y cuesta \$15,000.

a) Escriba una sucesión que muestre el valor del automóvil para cada uno de los primeros 3 años.

b) ¿Cuál es el término general de esta sucesión?

c) Determine el valor del automóvil al final de los 5 años.

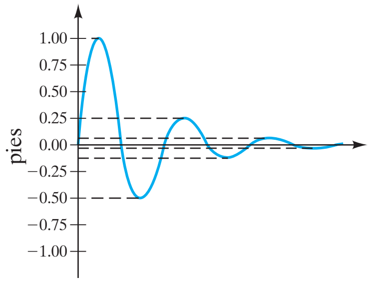
104. Valor de desecho En el ejercicio 77, de la página 635, en el conjunto de ejercicios 9.6, se dio una fórmula para el valor de desecho. Este valor, S, es $S = c(1 - r)^n$ donde c es el costo original, r es la tasa de depreciación anual y n es el número de años que el objeto se deprecia.

a) Si no ha resuelto el problema 103 anterior, hágalo ahora para determinar el valor del automóvil al final de los 5 años.

b) Utilice la fórmula dada para determinar el valor de desecho del automóvil al final de los 5 años y compare esta respuesta con la respuesta que encontró en la parte **a)**.

105. Rebote de una pelota Una pelota se deja caer desde una altura de 10 pies. La pelota rebota hasta una altura de 9 pies. En cada rebote sucesivo, la pelota se eleva hasta el 90% de la altura anterior. Determine la *distancia vertical total* que recorre la pelota hasta que se detiene.

106. Acción de las ondas Una partícula sigue la trayectoria que se muestra en la onda. Determine la *distancia vertical total* que recorre la partícula.



107. La fórmula para el n-ésimo término de la sucesión geométrica es $a_n = a_1r^{n-1}$. Si $a_1 = 1$, $a_n = r^{n-1}$.

a) Compare las gráficas de $y_1 = 2^{n-1}$ y $y_2 = 3^{n-1}$. ¿Cómo son?

b) Grafique y_1 y y_2 y determine si su respuesta a la parte **a)** fue correcta.

108. Utilice su calculadora graficadora para decidir el valor de n, al centésimo más cercano, de modo que $100 = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Reto

109. Determine la suma de la sucesión $1, 2, 4, 8, \ldots, 1{,}048{,}576$ y el número de términos en la sucesión.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.6] **110.** Sea $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x - 3$. Determine $(f \cdot g)(4)$.

[5.2] **111.** Multiplique $(2x - 3y)(3x^2 + 4xy - 2y^2)$.

[6.4] **112.** Despeje r de $S = \dfrac{2a}{1 - r}$.

[9.1] **113.** Sea $g(x) = x^3 + 9$. Determine $g^{-1}(x)$.

[9.6] **114.** Resuelva $\log x + \log (x - 1) = \log 20$.

[10.4] **115. Vela de un velero** Una vela de un velero tiene la forma de un triángulo rectángulo con un perímetro de 36 metros y una hipotenusa de 15 metros. Determine la longitud de cada cateto del triángulo.

Examen de mitad de capítulo: 11.1-11.3

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en la que se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

1. Escriba los primeros cinco términos de la sucesión cuyo n-ésimo término es $a_n = -3n + 5$.

2. Si $a_n = n(n + 6)$, determine el séptimo término.

3. Determine la primera y la tercera suma parcial, s_1 y s_3, para la sucesión cuyo término n-ésimo es $a_n = 2^n - 1$.

4. Escriba los tres términos siguientes de la sucesión $5, 1, -3, -7, -11, \ldots$.

5. Evalúe la serie $\sum_{i=1}^{5} (4i - 3)$.

6. Si el término general de una sucesión es $a_n = \frac{1}{3}n + 7$, escriba una expresión mediante Σ para representar la quinta suma parcial.

7. Escriba los primeros cuatro términos de la sucesión aritmética con $a_1 = -6$ y $d = 5$. Determine una expresión para el término general a_n.

8. Determine d para la sucesión aritmética con $a_1 = \frac{11}{2}$ y $a_7 = -\frac{1}{2}$.

9. Determine n para la sucesión aritmética con $a_1 = 22$, $a_n = -3$ y $d = -5$.

10. Determine la diferencia común, d, y la suma, s_6, para la sucesión aritmética con $a_1 = -8$ y $a_6 = 7$.

11. Determine s_{10} para la sucesión aritmética con $a_1 = \frac{5}{2}$ y $d = \frac{1}{2}$.

12. Determine el número de términos en la sucesión aritmética $-7, 0, 7, 14, \ldots, 63$.

13. Se apilan troncos en una pila con 16 troncos en la fila inferior, 15 en la siguiente, 14 en la otra, y así sucesivamente hasta que la fila superior termina con un tronco. Cada fila tiene un tronco menos que la fila que le precede. ¿Cuántos troncos hay en la pila?

14. Escriba los primeros cinco términos de la serie geométrica con $a_1 = 80$ y $r = -\frac{1}{2}$.

15. Determine a_7 para la sucesión geométrica con $a_1 = 81$ y $r = \frac{1}{3}$.

16. Determine s_6 para la sucesión geométrica con $a_1 = 5$ y $r = 2$.

17. Para la sucesión geométrica $8, -\frac{16}{3}, \frac{32}{9}, -\frac{64}{27}, \ldots$, determine r.

18. Determine la suma de la serie infinita $12, 4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$.

19. Escriba el decimal periódico 0.878787… como un cociente de dos enteros.

20. **a)** ¿Qué es una sucesión?
b) ¿Qué es una sucesión aritmética?
c) ¿Qué es una sucesión geométrica?
d) ¿Qué es una serie?

11.4 Teorema del binomio

1 Evaluar factoriales.

2 Utilizar el triángulo de Pascal.

3 Utilizar el teorema del binomio.

1 Evaluar factoriales

Para comprender el teorema del binomio debe entender lo que son los **factoriales**. La notación $n!$ se lee "n factorial". Su definición es la siguiente.

n factorial

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(1)$$

para cualquier entero positivo n.

Ejemplos

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

Observe que, por definición, **0! es 1**.

A continuación explicamos cómo determinar factoriales por medio de una calculadora.

CÓMO USAR SU CALCULADORA

Calculadora científica

Los factoriales se pueden obtener en calculadoras que tienen una tecla $\boxed{n!}$ o $\boxed{x!}$ Con frecuencia, la tecla de factorial es una tecla de segunda función. En los ejemplos siguientes, las respuestas aparecen después de $\boxed{n!}$.

Evaluar 6! 6 $\boxed{2^{\text{nd}}}$ $\boxed{n!}$ 720

Evaluar 9! 9 $\boxed{2^{\text{nd}}}$ $\boxed{n!}$ 362880

Calculadora graficadora

Las calculadoras graficadoras no tienen una tecla de factorial. En algunas calculadoras graficadoras los factoriales se determinan en $\boxed{\text{MATH}}$, en el menú de funciones de probabilidad.

En la calculadora TI-84 Plus, para obtener el menú de funciones de probabilidad, PRB, presione $\boxed{\text{MATH}}$, y luego desplácese hacia la derecha, con la tecla de flecha $\boxed{\blacktriangleright}$, tres veces hasta que obtenga PRB. La $n!$ (o !) es el cuarto elemento del menú descendente.

Para determinar 5! o 6!, siga esta secuencia de teclas.

SECUENCIA DE TECLAS	RESPUESTA
$\boxed{5}$ $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	120
$\boxed{6}$ $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	720

2 Utilizar el triángulo de Pascal

Mediante la multiplicación de polinomios podemos obtener los siguientes desarrollos de las potencias del binomio $a + b$:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Blaise Pascal

Observe que al desarrollar un binomio de la forma $(a + b)^n$,

1. Existen $n + 1$ términos en el desarrollo.
2. El primer término es a^n y el último término es b^n.
3. Si se leen de izquierda a derecha, los exponentes de a decrecen en 1 de un término a otro, mientras que los exponentes de b aumentan en 1 de un término a otro.
4. La suma de los exponentes de las variables de cada término es n.
5. Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales.

Si sólo examinamos las variables en $(a + b)^5$, tenemos a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 y b^5.

Podemos determinar los coeficientes numéricos de cada término del desarrollo de $(a + b)^n$ con el **triángulo de Pascal**, llamado así en honor de Blaise Pascal, matemático francés del siglo diecisiete. Por ejemplo, si $n = 5$, podemos determinar los coeficientes numéricos de $(a + b)^5$ como sigue.

Exponente en el binomio	Triángulo de Pascal
$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1

Examinemos el renglón 5 ($n = 4$) y el renglón 6 ($n = 5$).

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1$$

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

Observe que el primero y el último número de cada renglón son 1, y que los números interiores se obtienen sumando los dos números del renglón anterior (a la izquierda y a la derecha). Los coeficientes numéricos de $(a + b)^5$ son 1, 5, 10, 10, 5 y 1. Así, podemos escribir el desarrollo de $(a + b)^5$ mediante la información de los incisos 1 a 5 anteriores para las variables y sus exponentes, y utilizando el triángulo de Pascal para sus coeficientes.

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Este método de desarrollo de un binomio no es práctico cuando n es grande.

3 Utilizar el teorema del binomio

En breve presentaremos un método más práctico, llamado teorema del binomio, para desarrollar expresiones de la forma $(a + b)^n$. Sin embargo, antes de presentar esta fórmula necesitamos explicar cómo determinar los *coeficientes binomiales* de la forma $\binom{n}{r}$.

Coeficientes binomiales

Para n y r enteros no negativos, $n \geq r$.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$

El coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ se lee "el número de *combinaciones* de n elementos tomando r a la vez". Las combinaciones se utilizan en muchas áreas de las matemáticas, incluyendo el estudio de la probabilidad.

EJEMPLO 1 Evalúe $\binom{6}{2}$.

Solución Por la definición, si sustituimos 5 en vez de n y 2 en vez de r, obtenemos

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{(2 \cdot 1) \cdot (\cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1})} = 15$$

Así, $\binom{6}{2}$ es igual a 15.

Ahora resuelva el ejercicio 9

EJEMPLO 2 Evalúe

a) $\binom{7}{4}$ **b)** $\binom{8}{8}$ **c)** $\binom{5}{0}$

Solución

a) $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{(\cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1})(3 \cdot 2 \cdot 1)} = 35$

b) $\binom{8}{8} = \frac{8!}{8!\,(8-8)!} = \frac{\cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot 0!} = \frac{1}{1} = 1$ *Recuerde que 0! = 1.*

c) $\binom{5}{0} = \frac{5!}{0! \cdot (5-0)!} = \frac{\cancel{5!}}{0! \cdot \cancel{5!}} = \frac{1}{1} = 1$

Ahora resuelva el ejercicio 17

Al estudiar los ejemplos 2 **b)** y **c)** puede deducir que para cualquier entero positivo n,

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{n}{0} = 1$$

CÓMO USAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Todas las calculadoras graficadoras pueden evaluar los coeficientes binomiales. En la mayoría se utiliza ${}_nC_r$ en lugar de $\binom{n}{r}$. Así, $\binom{7}{4}$ se representaría como ${}_7C_4$ en esas calculadoras.

En la calculadora TI-84 Plus, la notación ${}_nC_r$ se puede encontrar en el menú de funciones de probabilidad, PRB. En esta ocasión, el elemento 3 es ${}_nC_r$. Para determinar ${}_7C_4$ o bien ${}_8C_2$ utilice la secuencia de teclas siguiente:

	Secuencia de teclas	Respuesta
${}_7C_4$	7 MATH ▶ ▶ ▶ 3 4 ENTER	35
${}_8C_2$	8 MATH ▶ ▶ ▶ 3 2 ENTER	28

Si utiliza una calculadora graficadora diferente, consulte el manual para aprender a evaluar combinaciones.

Ahora presentaremos el teorema del binomio.

Teorema del binomio

Para cualquier entero positivo n,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Observe en el teorema del binomio que la suma de los exponentes de las variables en cada término es n. En la combinación, el número de arriba siempre es n y el número inferior siempre es igual al del exponente de la segunda variable del término.

Por ejemplo, si consideramos el término $\binom{n}{3}a^{n-3}b^3$, la suma de los exponentes de las variables es $(n-3)+3=n$. Además, el exponente de la variable b es 3, y el número inferior de la combinación también es 3.

Si las variables y los exponentes en un término del teorema del binomio son a^7b^5, entonces n debe ser $7+5=12$. También, la combinación que precede a a^7b^5 debe ser $\binom{12}{5}$. Así, el término sería $\binom{12}{5}a^7b^5$.

Ahora desarrollaremos $(a+b)^5$ mediante el teorema del binomio y veremos si obtenemos la misma expresión que cuando utilizamos la multiplicación de polinomios y el triángulo de Pascal.

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \binom{5}{0}a^5b^0+\binom{5}{1}a^{5-1}b^1+\binom{5}{2}a^{5-2}b^2+\binom{5}{3}a^{5-3}b^3+\binom{5}{4}a^{5-4}b^4+\binom{5}{5}a^{5-5}b^5\\ &= \binom{5}{0}a^5b^0+\binom{5}{1}a^4b^1+\binom{5}{2}a^3b^2+\binom{5}{3}a^2b^3+\binom{5}{4}a^1b^4+\binom{5}{5}a^0b^5\\ &= \frac{5!}{0!\cdot 5!}a^5+\frac{5!}{1!\cdot 4!}a^4b+\frac{5!}{2!\cdot 3!}a^3b^2+\frac{5!}{3!\cdot 2!}a^2b^3+\frac{5!}{4!\cdot 1!}ab^4+\frac{5!}{5!\cdot 0!}b^5\\ &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\end{aligned}$$

Ésta es la misma expresión que obtuvimos antes.

En el teorema del binomio, el primero y último términos de un desarrollo contienen un factor elevado a la potencia cero. Como cualquier número distinto de cero elevado a la potencia 0 es igual a uno, podríamos haber omitido esos factores, pero los hemos incluido para que observe mejor el patrón.

EJEMPLO 3 Utilice el teorema del binomio para desarrollar $(2x+3)^6$.

Solución Si utilizamos $2x$ como a y 3 como b, obtenemos

$$\begin{aligned}(2x+3)^6 &= \binom{6}{0}(2x)^6(3)^0+\binom{6}{1}(2x)^5(3)^1+\binom{6}{2}(2x)^4(3)^2+\binom{6}{3}(2x)^3(3)^3+\binom{6}{4}(2x)^2(3)^4+\binom{6}{5}(2x)^1(3)^5+\binom{6}{6}(2x)^0(3)^6\\ &= 1(2x)^6+6(2x)^5(3)+15(2x)^4(9)+20(2x)^3(27)+15(2x)^2(81)+6(2x)(243)+1(729)\\ &= 64x^6+576x^5+2160x^4+4320x^3+4860x^2+2916x+729\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 19

EJEMPLO 4 Utilice el teorema del binomio para desarrollar $(5x-2y)^4$.

Solución Escribimos $(5x-2y)^4$ como $[5x+(-2y)]^4$. En el teorema del binomio, utilizamos $5x$ en vez de a y $-2y$ en vez de b.

$$\begin{aligned}[5x+(-2y)]^4 &= \binom{4}{0}(5x)^4(-2y)^0+\binom{4}{1}(5x)^3(-2y)^1+\binom{4}{2}(5x)^2(-2y)^2+\binom{4}{3}(5x)^1(-2y)^3+\binom{4}{4}(5x)^0(-2y)^4\\ &= 1(5x)^4+4(5x)^3(-2y)+6(5x)^2(-2y)^2+4(5x)(-2y)^3+1(-2y)^4\\ &= 625x^4-1000x^3y+600x^2y^2-160xy^3+16y^4\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 25

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique cómo construir el triángulo de Pascal. Construya los primeros cinco renglones del triángulo de Pascal.
2. Explique cómo determinar $n!$ para cualquier entero no negativo.
3. Proporcione el valor de $1!$
4. Proporcione el valor de $0!$
5. ¿Puede evaluar $(-3)!$? Explique.
6. ¿Puede evaluar $(-6)!$? Explique.
7. ¿Cuántos términos hay en el desarrollo de $(a+b)^{13}$? Explique.
8. ¿Cuántos términos hay en el desarrollo de $(x+y)^{20}$? Explique.

Práctica de habilidades

Evalúe cada una de las combinaciones.

9. $\binom{5}{2}$
10. $\binom{6}{3}$
11. $\binom{5}{5}$
12. $\binom{9}{3}$
13. $\binom{7}{0}$
14. $\binom{10}{7}$
15. $\binom{8}{4}$
16. $\binom{12}{3}$
17. $\binom{8}{2}$
18. $\binom{11}{4}$

Utilice el teorema del binomio para desarrollar cada expresión.

19. $(x+4)^3$
20. $(x-4)^3$
21. $(2x-3)^3$
22. $(2x+3)^3$
23. $(a-b)^4$
24. $(2r+s^2)^4$
25. $(3a-b)^5$
26. $(x+2y)^5$
27. $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^4$
28. $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}\right)^4$
29. $\left(\frac{x}{2}-3\right)^4$
30. $(3x^2+y)^5$

Escriba los cuatro primeros términos de cada desarrollo.

31. $(x+10)^{10}$
32. $(2x+3)^8$
33. $(3x-y)^7$
34. $(3p-2q)^{11}$
35. $(x^2-3y)^8$
36. $\left(2x+\frac{y}{7}\right)^9$

Resolución de problemas

37. ¿$n!$ es igual a $n\cdot(n-1)!$? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.
38. ¿$(n+1)!$ es igual a $(n+1)\cdot n!$? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.
39. ¿Es $(n-3)!$ igual a $(n-3)(n-4)(n-5)!$ para $n\geq 5$? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.
40. ¿Es $(n+2)!$ igual a $(n+2)(n+1)(n)(n-1)!$ para $n\geq 1$? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.
41. ¿Bajo qué condiciones $\binom{n}{m}$, tendrá un valor de 1? Considere que n y m son enteros no negativos.
42. ¿Puede $\binom{n}{m}$ llegar a tener un valor de 0? Explique.
43. ¿Cuáles son el primero, segundo, penúltimo y último términos del desarrollo de $(x+3)^8$?
44. ¿Cuáles son el primero, segundo, penúltimo y último términos del desarrollo de $(2x+5)^6$?
45. Escriba el teorema del binomio usando notación de suma.
46. Demuestre que $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ para cualesquiera enteros no negativos n y r, con $r\leq n$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.4] 47. Determine la intersección con el eje y de la recta $2x+y=10$.

[4.1] 48. Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}y=4$$
$$\frac{2}{3}x-y=\frac{8}{3}$$

[5.8] 49. Resuelva $x(x-11)=-18$.

[7.4] 50. Simplifique $\sqrt{20xy^4}\,\sqrt{6x^5y^7}$.

[9.1] 51. Determine $f^{-1}(x)$ si $f(x)=3x+8$.

Resumen del capítulo 11

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 11.1	
Una **sucesión** de números es una lista de números acomodados en un orden específico. Cada número se denomina **término** de la sucesión.	2, 6, 10, 14, 18, 22, . . . es una sucesión. 7, 14, 21, 28, 35, 42, . . . es una sucesión.
Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.	$$\begin{array}{lccccccc} \text{Dominio:} & \{1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{Rango:} & \{7, & 14, & 21, & 28, & \ldots & 7n, & \ldots\} \end{array}$$ La sucesión infinita es 7, 14, 21, 28, ...
Una **sucesión finita** es una función cuyo dominio sólo incluye a los primeros n números naturales.	$$\begin{array}{lcccc} \text{Dominio:} & \{1, & 2, & 3, & 4\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Rango:} & \{4, & 8, & 12, & 16\} \end{array}$$ La sucesión finita es 4, 8, 12, 16.
El **término general de una sucesión, a_n**, puede determinar la sucesión.	Sea $a_n = n^2 - 3$. Escriba los primeros tres términos de esta sucesión $$\begin{aligned} a_1 &= 1^2 - 3 = -2 \\ a_2 &= 2^2 - 3 = 1 \\ a_3 &= 3^2 - 3 = 6 \end{aligned}$$ Los primeros tres términos de la sucesión son $-2, 1, 6$.
Una **sucesión creciente** es una sucesión en la que cada término es mayor que el término que le precede. Una **sucesión decreciente** es una sucesión en la que cada término es menor que el término que le precede.	$-2, 5, 7, 11$ es una sucesión creciente. 50, 48, 46, 44 es una sucesión decreciente.
Una **serie** es la suma de los términos de una sucesión. Una serie puede ser finita o infinita.	Si la sucesión es 1, 3, 5, 7, 9, entonces la serie es $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$. Si la sucesión es $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \ldots$ entonces la serie es $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \ldots.$
Una **suma parcial**, s_n, de una sucesión infinita, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ es la suma de los primeros n términos. Esto es, $$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$	Sea $a_n = \frac{5+n}{n^2}$. Calcule s_1 y s_3. $$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = \frac{5+1}{1^2} = \frac{6}{1} = 6 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &= \frac{5+1}{1^2} + \frac{5+2}{2^2} + \frac{5+3}{3^2} \\ &= \frac{6}{1} + \frac{7}{4} + \frac{8}{9} = 8\frac{23}{36} \end{aligned}$$
Una serie puede escribirse mediante la **notación de suma**: $$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$ i es el **índice de la suma**, n es el **límite superior de la suma** y 1 es el **límite inferior de la suma**.	$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} (3i - 7) &= (3 \cdot 1 - 7) + (3 \cdot 2 - 7) + (3 \cdot 3 - 7) + (3 \cdot 4 - 7) \\ &= -4 - 1 + 2 + 5 = 2 \end{aligned}$$ Si $a_n = 6n^2 + 11$, la tercera suma parcial, s_3, en la notación de suma, se escribe como $\sum_{i=1}^{3} (6i^2 + 11)$.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 11.2	
Una **sucesión aritmética** es una sucesión en la que cada término después del primero difiere del término que le precede en una **diferencia común**, ***d***.	**Sucesión aritmética** / **Diferencia común, *d*** $3, 8, 13, 18, 23, \ldots$ — $d = 8 - 3 = 5$ $20, 14, 8, 2, -4, \ldots$ — $d = 14 - 20 = -6$
El ***n*-ésimo término**, a_n, de una sucesión aritmética es $a_n = a_1 + (n-1)d$	El n-ésimo término de la sucesión aritmética con $a_1 = 7$ y $d = -5$ es $a_n = 7 + (n-1)(-5) = 7 - 5n + 5 = -5n + 12$ Para esta sucesión, el vigésimo término es $a_{20} = -5(20) + 12 = -100 + 12 = -88$
Una **serie aritmética** es la suma de los términos de una sucesión aritmética. La suma de los primeros n términos, s_n, de una sucesión aritmética, también conocida como la ***n*-ésima suma parcial** es $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ Para una serie aritmética, esta suma está determinada por la fórmula $s_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$	Determine la suma de los primeros 30 números naturales. Esto es, determine la suma de $1 + 2 + 3 + \cdots + 30$ Como $a_1 = 1$, $a_{30} = 30$ y $n = 30$, la suma es $s_{30} = \dfrac{30(1+30)}{2} = \dfrac{30(31)}{2} = 465$
Sección 11.3	
Una **sucesión geométrica** es una sucesión en la que cada término, a partir del segundo, es un múltiplo común del término que le precede. El múltiplo común se denomina **razón común**, *r*.	**Sucesión geométrica** / **Razón común, *r*** $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$ — $r = \dfrac{6}{2} = 3$ $8, -2, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{32}, \ldots$ — $r = \dfrac{-2}{8} = -\dfrac{1}{4}$
El ***n*-ésimo término**, a_n, de una sucesión geométrica es $a_n = a_1 r^{n-1}$	Para la sucesión geométrica con $a_1 = 5$, $r = \dfrac{1}{2}$ y $n = 6$, a_6 se determina como sigue. $a_6 = 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6-1} = 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{5}{32}$
Una **serie geométrica** es la suma de los términos de una sucesión geométrica. La suma de los primeros n términos, s_n, de una sucesión geométrica también conocida como la ***n*-ésima suma parcial**, es $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. Para una serie geométrica, esta suma está determinada por la fórmula $s_n = \dfrac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, r \neq 1$	Para determinar la suma de los seis términos de una sucesión geométrica con $a_1 = 12$ y $r = \dfrac{1}{3}$, utilice la fórmula con $n = 6$ para obtener $s_6 = \dfrac{12\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6\right]}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{12\left[1 - \frac{1}{729}\right]}{\frac{2}{3}} = \dfrac{12\left(\frac{728}{729}\right)}{\frac{1}{3}}$ $= 12\left(\dfrac{728}{729}\right)\left(\dfrac{3}{1}\right) = \dfrac{2912}{81}$ o $35\dfrac{77}{81}$
La suma de una serie geométrica infinita es $s_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r}$ donde $\lvert r \rvert < 1$	Para determinar la suma de la serie infinita $4 - 2 + 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots$, utilice la fórmula con $a_1 = 4$ y $r = -\dfrac{1}{2}$ para obtener $s_\infty = \dfrac{4}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{4}{\frac{3}{2}} = 4 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3}$ or $2\dfrac{2}{3}$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 11.4	
***n* factorial** $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(1)$ para cualquier entero positivo n. Observe que $0!$ se define como 1.	$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40{,}320$
Coeficientes binomiales Para n y r enteros no negativos, $n \geq r$. $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ $\binom{n}{n} = 1$ y $\binom{n}{0} = 1$	$\binom{7}{3} = \dfrac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \dfrac{7!}{3! \cdot 4!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 35$ $\binom{10}{10} = 1, \quad \binom{10}{0} = 1$
Teorema del binomio Para cualquier entero positivo, n. $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}a^0b^n$	$(x+2y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3(2y) + \binom{4}{2}x^2(2y)^2 + \binom{4}{3}x(2y)^3 + \binom{4}{4}(2y)^4$ $= 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3(2y) + 6 \cdot x^2(4y^2) + 4 \cdot x(8y^3) + 1 \cdot 16y^4$ $= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$

Ejercicios de repaso del capítulo 11

[11.1] *Escriba los primeros cinco términos de cada sucesión.*

1. $a_n = n + 5$ **2.** $a_n = n^2 + n - 3$ **3.** $a_n = \dfrac{6}{n}$ **4.** $a_n = \dfrac{n^2}{n+4}$

Determine el término indicado de cada sucesión.

5. $a_n = 3n - 10$, séptimo término.

6. $a_n = (-1)^n + 5$, séptimo término.

7. $a_n = \dfrac{n+17}{n^2}$, noveno término.

8. $a_n = (n)(n-3)$, décimo primer término.

Para cada sucesión, determine la primera y la tercera suma parcial, s_1 y s_3.

9. $a_n = 2n + 5$

10. $a_n = n^2 + 8$

11. $a_n = \dfrac{n+3}{n+2}$

12. $a_n = (-1)^n(n+8)$

Escriba los siguientes tres términos de cada sucesión. Luego escriba una expresión para el término general, a_n.

13. $2, 4, 8, 16, \ldots$

14. $-27, 9, -3, 1, \ldots$

15. $\dfrac{1}{7}, \dfrac{2}{7}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{8}{7}, \ldots$

16. $13, 9, 5, 1, \ldots$

Desarrolle cada serie. Luego determine la suma de cada serie.

17. $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} i^2 + 9$

18. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i(i+5)$

19. $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{i^2}{6}$

20. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{i}{i+1}$

Para el conjunto de valores $x_1 = 3, x_2 = 9, x_3 = 7, x_4 = 10$, evalúe la suma que se indica.

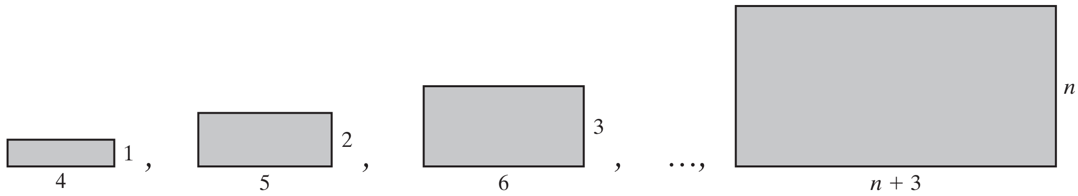
21. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i$

22. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} (x_i)^2$

23. $\displaystyle\sum_{i=2}^{3} (x_i^2 + 1)$

24. $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2$

En los ejercicios 25 y 26, considere los rectángulos siguientes. Para el rectángulo n-ésimo, la longitud es $n + 3$ y el ancho es n.



25. Perímetro

a) Determine los perímetros de los cuatro rectángulos, y luego liste los perímetros en una sucesión.

b) Determine el término general para el perímetro del rectángulo n-ésimo en la sucesión. Utilice p_n para el perímetro.

26. Área

a) Determine las áreas para los cuatro rectángulos, y luego liste las áreas en una sucesión.

b) Determine el término general para el área del rectángulo n-ésimo en la sucesión. Utilice a_n para el área.

[11.2] *Escriba los primeros cinco términos de la sucesión aritmética con el primer término y la diferencia común indicados.*

27. $a_1 = 5, d = 3$

28. $a_1 = 5, d = -\frac{1}{3}$

29. $a_1 = \frac{1}{2}, d = -2$

30. $a_1 = -100, d = \frac{1}{5}$

Para cada sucesión aritmética, determine el valor que se indica.

31. $a_1 = 6, d = 3$; determine a_9

32. $a_1 = 10, a_8 = -18$; determine d.

33. $a_1 = -3, a_{11} = 2$; determine d.

34. $a_1 = 22, a_n = -3, d = -5$; determine n.

Determine s_n y d para cada sucesión aritmética.

35. $a_1 = 7, a_8 = 21, n = 8$

36. $a_1 = -12, a_7 = -48, n = 7$

37. $a_1 = \frac{3}{5}, a_6 = \frac{13}{5}, n = 6$

38. $a_1 = -\frac{10}{3}, a_9 = -6, n = 9$

Escriba los primeros cuatro términos de cada sucesión aritmética. Luego determine a_{10} y s_{10}.

39. $a_1 = -7, d = 4$

40. $a_1 = 4, d = -3$

41. $a_1 = \frac{5}{6}, d = \frac{2}{3}$

42. $a_1 = -60, d = 5$

Determine el número de términos en cada sucesión aritmética. Luego determine s_n.

43. $4, 9, 14, \ldots, 64$

44. $-7, -4, -1, \ldots, 11$

45. $\frac{6}{10}, \frac{9}{10}, \frac{12}{10}, \ldots, \frac{36}{10}$

46. $-9, -3, 3, 9, \ldots, 45$

[11.3] *Determine los primeros cinco términos de cada sucesión geométrica.*

47. $a_1 = 6, r = 2$

48. $a_1 = -12, r = \frac{1}{2}$

49. $a_1 = 20, r = -\frac{2}{3}$

50. $a_1 = -20, r = \frac{1}{5}$

Determine el término que se indica de cada sucesión geométrica.

51. $a_1 = 6, r = \frac{1}{3}$; determine a_5

52. $a_1 = 15, r = 2$; determine a_6

53. $a_1 = -8, r = -3$; determine a_4

54. $a_1 = \frac{1}{12}, r = \frac{2}{3}$; determine a_5

Determine cada suma.

55. $a_1 = 7, r = 2$; determine s_6

56. $a_1 = -84, r = -\frac{1}{4}$; determine s_5

57. $a_1 = 9, r = \frac{3}{2}$; determine s_4

58. $a_1 = 8, r = \frac{1}{2}$; determine s_7

Para cada sucesión geométrica, determine la razón común, r, y luego escriba una expresión para el término general, a_n.

59. $6, 12, 24, \ldots$

60. $-4, -20, -100, \ldots$

61. $10, \frac{10}{3}, \frac{10}{9}, \ldots$

62. $\frac{9}{5}, \frac{18}{15}, \frac{36}{45}, \ldots$

Determine la suma de los términos en cada sucesión geométrica infinita.

63. $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$

64. $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}, \frac{4}{25}, \ldots$

65. $-8, \frac{8}{3}, -\frac{8}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$

66. $-6, -4, -\frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \ldots$

Determine la suma de cada serie infinita.

67. $16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \cdots$

68. $9 + \frac{9}{3} + \frac{9}{9} + \frac{9}{27} + \cdots$

69. $5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \cdots$

70. $-4, -\frac{8}{3} - \frac{16}{9}, -\frac{32}{27}, \ldots$

Escriba cada número con decimales periódicos como una razón de enteros.

71. $0.363636\ldots$

72. $0.621621\ldots$

[11.4] *Utilice el teorema del binomio para desarrollar la expresión.*

73. $(3x + y)^4$

74. $(2x - 3y^2)^3$

Escriba los cuatro primeros términos del desarrollo.

75. $(x - 2y)^9$

76. $(2a^2 + 3b)^8$

[11.2]

77. Suma de enteros Determine la suma de los enteros entre 101 y 200, inclusive.

78. Barriles de petróleo Los barriles de petróleo están apilados con 21 barriles en la fila inferior, 19 barriles en la segunda fila, 18 barriles en la tercera fila, y así sucesivamente, hasta la fila superior que sólo tiene un barril. ¿Cuántos barriles hay?

79. Salario Ahmed Mocanda acaba de iniciar en un trabajo nuevo con un salario anual de \$36,000. Se le ha dicho que su salario aumentará \$1000 por año durante los próximos 10 años.

a) Escriba una sucesión que muestre su salario para los primeros 4 años.

b) Escriba un término general de esta sucesión.

c) ¿Cuál será su salario dentro de 6 años?

d) ¿Cuánto dinero obtendrá en total en los primeros 11 años?

[11.3]

80. Dinero Usted inicia con \$100, lo duplica para obtener \$200, nuevamente lo duplica para obtener \$400, y así sucesivamente. ¿Cuánto tendrá después de realizar este proceso 10 veces?

81. Salario Gertude Dibble inició un trabajo nuevo el día 1 de enero de 2006, con un salario mensual de \$1600. Su jefa ha acordado darle 4% de aumento cada mes, durante el resto del año.

a) ¿Cuál será el salario de Gertude en julio?

b) ¿Cuál será el salario de Gertude en diciembre?

c) ¿Cuánto dinero ganará Gertude en 2006?

82. Inflación Si la tasa de inflación fuese constante del 8% anual (cada año el costo de la vida es 8% mayor que el año anterior), ¿cuánto costaría dentro de 12 años un producto que ahora cuesta \$200?

83. Péndulo En cada oscilación (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda), un péndulo recorre el 92% de lo que recorrió en la oscilación que le precede. Si la primera oscilación es de 12 pies, determine la distancia recorrida por el péndulo hasta el momento en que se detiene.

Examen de práctica del capítulo 11

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección donde se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en el **Chapter Test Prep Video CD.** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. ¿Qué es una serie?
2. **a)** ¿Qué es una serie aritmética?
   b) ¿Qué es una serie geométrica?
3. Escriba los cinco primeros términos de la sucesión, si $a_n = \dfrac{n-2}{3n}$.
4. Determine la primera y la tercera sumas parciales, si $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2}$.
5. Desarrolle la serie siguiente y determine la suma de la serie.
$$\sum_{i=1}^{5} (2i^2 + 3)$$
6. Para $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 8$ y $x_4 = 10$, determine $\sum_{i=1}^{4} (x_i)^2$.
7. Escriba el término general de la sucesión aritmética siguiente.
$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$$
8. Escriba el término general de la sucesión geométrica siguiente.
$$5, 10, 20, 40, \ldots$$

En los ejercicios 9 y 10, escriba los primeros cuatro términos de cada sucesión.

9. $a_1 = 15, d = -6$
10. $a_1 = \dfrac{5}{12}, r = \dfrac{2}{3}$
11. Determine a_{11} cuando $a_1 = 40$ y $d = -8$.
12. Determine s_8 para la sucesión aritmética con $a_1 = 7$ y $a_8 = -12$.
13. Determine el número de términos en la sucesión aritmética $-4, -16, -28, \ldots, -136$.
14. Determine a_6 cuando $a_1 = 8$ y $r = \dfrac{2}{3}$.
15. Determine s_7 cuando $a_1 = \dfrac{3}{5}$ y $r = -5$.
16. Determine la razón común y escriba una expresión para el término general de la sucesión $15, 5, \dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{9}, \ldots$.
17. Determine la suma de esta serie geométrica infinita.
$$4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \cdots$$
18. Escriba 0.3939. . . como una razón de enteros.
19. Evalúe $\dbinom{8}{3}$.
20. Utilice el teorema del binomio para desarrollar $(x + 2y)^4$.
21. **Media aritmética** Las calificaciones de los exámenes de Paul Misselwitz son 76, 93, 83, 87 y 71. Utilice $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$ para determinar la media aritmética de las calificaciones de Paul.
22. **Una pila de troncos** Se apilan troncos con 13 piezas en la fila inferior, 12 troncos en la segunda fila, 11 troncos en la tercera fila, y así sucesivamente hasta la parte superior. ¿Cuántos troncos hay?
23. **Ahorro para el retiro** Con la finalidad de ahorrar para su retiro, Jamie Monroe planea ahorrar \$1000 el primer año, \$2000 el segundo año, \$3000 el tercer año, e incrementar la cantidad ahorrada en \$1000 en cada año sucesivo. ¿Cuánto habrá ahorrado al final del vigésimo año de estar ahorrando?
24. **Ingresos** Yolanda Rivera gana \$700 a la semana trabajando en una oficina de seguros. Su jefe le ha garantizado un aumento de 4% a la semana durante las siguientes 7 semanas. ¿Cuánto recibirá en la sexta semana?
25. **Cultivo de bacterias** El número de bacterias en un cultivo se triplica cada hora. Si al inicio había 500 bacterias en el cultivo, ¿cuántas bacterias habrá en el cultivo al final de la sexta hora?

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen siguiente y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revise las preguntas que haya respondido en forma incorrecta. La sección y objetivo donde se estudia el material se indica después de la respuesta.

1. Despeje b de $A = \dfrac{1}{2}bh$.
2. Determine una ecuación de la recta que pasa por $(4, -2)$ y $(1, 9)$. Escriba la ecuación en la forma pendiente intercepción.
3. Resuelva el sistema de ecuaciones.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x + 3y + 3z &= 3 \end{aligned}$$
4. Multiplique $(5x^3 + 4x^2 - 6x + 2)(x + 5)$.
5. Factorice $x^3 + 2x - 6x^2 - 12$.
6. Factorice $(a + b)^2 + 8(a + b) + 16$.
7. Reste $5 - \dfrac{x-1}{x^2 + 3x - 10}$.
8. y varía directamente con el cuadrado de z. Si y es 80 cuando z es 20, determine y cuando z es 50.
9. Si $f(x) = 2\sqrt[3]{x-3}$ y $g(x) = \sqrt[3]{5x - 15}$, determine todos los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$.

10. Resuelva $\sqrt{6x - 5} - \sqrt{2x + 6} - 1 = 0$.

11. Resuelva completando el cuadrado.

$$x^2 + 2x + 15 = 0$$

12. Resuelva por medio de la fórmula cuadrática

$$x^2 - \frac{x}{5} - \frac{1}{3} = 0$$

13. **Números** El doble del cuadrado de un número positivo, disminuido en nueve veces el mismo número da como resultado 5. Determine el número.

14. Grafique $y = x^2 - 4x$ y etiquete los vértices.

15. Despeje a de $\log_a \frac{1}{64} = 6$.

16. Grafique $y = 2^x - 1$.

17. Determine una ecuación de una circunferencia con centro en $(-6, 2)$ y radio 7.

18. Grafique $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

19. Grafique $9x^2 + 16y^2 = 144$.

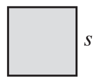
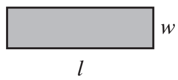
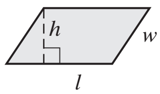
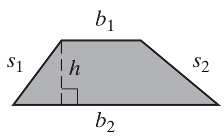
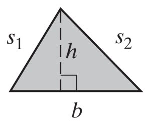
20. Determine la suma de la serie geométrica infinita.

$$6 + 4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \cdots$$

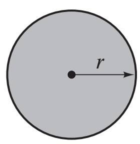
Apéndice

Fórmulas geométricas

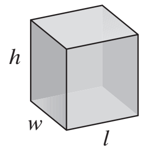
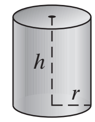
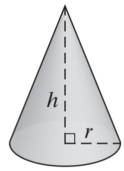
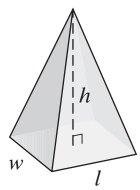
Áreas y perímetros

Figura	Dibujo	Área	Perímetro
Cuadrado		$A = s^2$	$P = 4s$
Rectángulo		$A = lw$	$P = 2l + 2w$
Paralelogramo		$A = lh$	$P = 2l + 2w$
Trapecio		$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	$P = s_1 + s_2 + b_1 + b_2$
Triángulo		$A = \frac{1}{2}bh$	$P = s_1 + s_2 + b$

Área y circunferencia de un círculo

Círculo		$A = \pi r^2$	$C = 2\pi r$

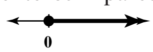
Volumen y área de la superficie de cuerpos tridimensionales

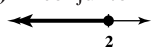
Figura	**Dibujo**	**Volumen**	**Área de la superficie**
Sólido rectangular		$V = lwh$	$s = 2lh + 2wh + 2wl$
Cilindro circular recto		$V = \pi r^2 h$	$s = 2\pi rh + 2\pi r^2$
Esfera		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$s = 4\pi r^2$
Cono circular recto		$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$s = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$
Pirámide rectangular o cuadrada		$V = \frac{1}{3}lwh$	

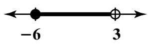
Respuestas

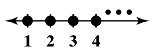
Capítulo 1

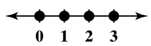
Conjunto de ejercicios 1.1 **1–11.** Las respuestas variarán. **13.** Haga toda la tarea y revise el material nuevo que se cubrirá en la clase. **15.** Vea los pasos en la página 4 de su texto. **17.** Cuanto más empeño ponga en el curso, mayor provecho obtendrá de él. **19.** Las respuestas variarán.

Conjunto de ejercicios 1.2 **1.** Una variable es una letra que se emplea para representar diferentes números. **3.** Un conjunto es una colección de objetos. **5.** Un conjunto que no tiene elementos. **7.** $>$, es mayor que; $\geq$ es mayor o igual a; $<$, es menor que; $\leq$, es menor o igual a; $\neq$, es diferente a **9.** $\{4, 5, 6\}$ **11.** Un entero puede escribirse con un denominador igual a 1. **13.** Verdadero **15.** Verdadero **17.** Falso **19.** Verdadero **21.** Verdadero **23.** $>$ **25.** $>$ **27.** $>$ **29.** $<$ **31.** $>$ **33.** $<$ **35.** $>$ **37.** $>$ **39.** $A = \{0\}$ **41.** $C = \{18, 20\}$ **43.** $E = \{0, 1, 2\}$ **45.** $H = \{0, 7, 14, 21, \ldots\}$ **47.** $J = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ o $J = N$ **49. a)** 4 **b)** 4, 0 **c)** $-2, 4, 0$ **d)** $-2, 4, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, 0, -1.23, \frac{78}{79}$ **e)** $\sqrt{2}, \sqrt{8}$ **f)** $-2, 4, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{8}, -1.23, \frac{78}{79}$ **51.** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A \cap B = \{\ \}$ **53.** $A \cup B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 3\}$; $A \cap B = \{-3, -1\}$ **55.** $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$; $A \cap B = \{\ \}$ **57.** $A \cup B = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30\}$; $A \cap B = \{\ \}$ **59.** $A \cup B = \{-1, 0, 1, e, i, \pi\}$; $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$ **61.** El conjunto de los números naturales **63.** El conjunto de enteros no negativos múltiplos de 3 **65.** El conjunto de enteros impares **67. a)** El conjunto A es el conjunto de todas las x tal que x es un número natural menor que 7 **b)** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,\}$ **69.** 

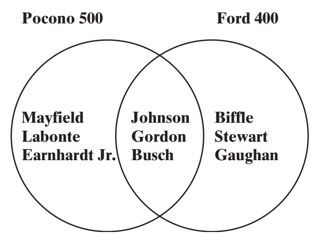
71. 

73. 

75. 

77. 

79. $\{x|x \geq 1\}$ **81.** $\{x|x < 5 \text{ y } x \in I\}$ o $\{x|x \leq 4 \text{ y } x \in I\}$ **83.** $\{x|-3 < x \leq 5\}$ **85.** $\{x|-2.5 \leq x < 4.2\}$ **87.** $\{x|-3 \leq x \leq 1 \text{ y } x \in I\}$ **89.** Sí **91.** No **93.** Sí **95.** No **97.** Un ejemplo es $\left\{\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}\right\}$ **99.** Un ejemplo es $A = \{2, 4, 5, 8, 9\}$, $B = \{4, 5, 6, 9\}$ **101. a)** {Johnson, Mayfield, Labonte, Gordon, Busch, Earnhardt Jr., Biffle, Stewart, Gaughan} **b)** Unión **c)** {Johnson, Gordon, Busch} **d)** Intersección **103. a)** $A =$ {Albert, Carmen, Frank, Linda, Barbara, Jason, David, Earl, Kate, Ingrid} **b)** Unión **c)** {Frank, Linda} **d)** Intersección **105. a)** {China, India, Estados Unidos, Indonesia, Brasil, Nigeria} **b)** {China, India, Estados Unidos, Rusia, Japón, Indonesia, Nigeria} **c)** {China, India, Estados Unidos} **d)** {China, India, Estados Unidos, Indonesia} **e)** {China, India, Estados Unidos} **107. a)** $A =$ {Alex, James}, $B =$ {Alex, James, George, Connor}, $C =$ {Alex, Stephen}, $D =$ {Alex, George, Connor} **b)** {Alex} **c)** Sólo Alex **109. a)** $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **b)** $\{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$ **c)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **d)** $\{3, 4, 6\}$ **111. a)** $\{x|x > 1\}$ incluye las fracciones y los números decimales que el otro conjunto no contiene. **b)** $\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ **c)** No, ya que no es posible listar a todos los números reales mayores que 1 en forma de lista **113.**



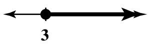
Conjunto de ejercicios 1.3 **1.** Dos números cuya suma es cero **3.** No; $|0|$ no es positivo **5.** Como a y $-a$ están a la misma distancia del 0 en una recta numérica, $|a| = |-a|$ para todos los números reales, $\mathbb{R}$. **7.** Como $|6| = 6$ y $|-6| = 6$, los valores deseados para a son 6 y -6. **9.** $\{\ \}$, el valor absoluto para cualquier número real debe ser mayor o igual a 0. **11.** Las respuestas variarán. **13.** Las respuestas variarán. **15.** $-\frac{a}{b}$ o $\frac{-a}{b}$ **17. a)** $a + b = b + a$ **b)** Las respuestas variarán. **19.** Las respuestas variarán. Un ejemplo es $2 + (3 \cdot 4) \neq (2 + 3) \cdot (2 + 4)$, $14 \neq 30$ **21.** 5 **23.** 7 **25.** $\frac{7}{8}$ **27.** 0 **29.** -7 **31.** $-\frac{5}{9}$ **33.** $=$ **35.** $>$ **37.** $>$ **39.** $>$ **41.** $>$ **43.** $<$ **45.** $-|5|, -2, -1, |-3|, 4$ **47.** $-32, -|4|, 4, |-7|, 15$ **49.** $-|-6.5|, -6.1, |-6.3|, |6.4|, 6.8$ **51.** $-2, \frac{1}{3}, \left|-\frac{1}{2}\right|, \left|\frac{3}{5}\right|, \left|-\frac{3}{4}\right|$ **53.** 3 **55.** -22 **57.** -4 **59.** $-\frac{2}{35}$ **61.** -0.99 **63.** 7.92 **65.** -16.2 **67.** 2 **69.** -2 **71.** $\frac{17}{20}$ **73.** -40 **75.** $\frac{5}{4}$ **77.** 12 **79.** 235.9192 **81.** 11 **83.** 1 **85.** $-\frac{3}{64}$ **87.** $\frac{7}{3}$ **89.** -4 **91.** 20 **93.** 5 **95.** -20.6 **97.** 11 **99.** -6 **101.** $\frac{81}{16}$ **103.** -1 **105.** $-\frac{17}{45}$ **107.** 77 **109.** -39 **111.** 0 **113.** Propiedad conmutativa de la suma **115.** Propiedad multiplicativa del cero. **117.** Propiedad asociativa de la suma. **119.** Propiedad de la identidad en la multiplicación. **121.** Propiedad asociativa de la multiplicación. **123.** Propiedad distributiva. **125.** Propiedad de la identidad en la suma **127.** Propiedad del inverso en la suma. **129.** Propiedad del doble negativo. **131.** $-6, \frac{1}{6}$

133. $\frac{22}{7}, -\frac{7}{22}$ **135.** 49°F **137.** 148.2 pies abajo del punto de inicio, o -148.2 pies **139.** 10.1°F **141.** Ganancia de $1207 **143.** Las respuestas variarán. **145.** $24,000 **147.** 84 **149.** 1 **150.** Verdadero **151.** $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ **152. a)** $3, 4, -2, 0$ **b)** $3, 4, -2, \frac{5}{6}, 0$ **c)** $\sqrt{11}$ **d)** $3, 4, -2, \frac{5}{6}, \sqrt{11}, 0$ **153. a)** $\{1, 4, 7, 9, 12, 15\}$ **b)** $\{4, 7\}$ **154.** 

Conjunto de ejercicios 1.4

1. a) Base **b)** Exponente **3. a)** Índice **b)** Radicando **5.** El número positivo cuyo cuadrado es igual al radicando **7.** Un número negativo elevado a una potencia impar es un número negativo. **9.** Paréntesis, exponentes y radicales, multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha, sumas y restas de izquierda a derecha. **11. a)** Las respuestas variarán. **b)** 24 **13.** 9 **15.** -9 **17.** 9 **19.** $-\frac{81}{625}$ **21.** 7 **23.** -6 **25.** -3 **27.** 0.1 **29.** 0.015 **31.** 1.897 **33.** 76,183.335 **35.** 2.962 **37.** 3.250 **39.** -0.723 **41. a)** 9 **b)** -9 **43. a)** 100 **b)** -100 **45. a)** 1 **b)** -1 **47. a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $-\frac{1}{9}$ **49. a)** 27 **b)** -27 **51. a)** -125 **b)** 125 **53. a)** -8 **b)** 8 **55. a)** $\frac{8}{125}$ **b)** $-\frac{8}{125}$ **57.** -7 **59.** -19 **61.** -22.221 **63.** $-\frac{5}{16}$ **65.** 43 **67.** 25 **69.** 0 **71.** $\frac{1}{2}$ **73.** -10 **75.** 5 **77.** 64 **79.** 16 **81.** $\frac{27}{5}$ **83.** Indefinida **85.** -4 **87.** 0 **89.** $-\frac{10}{3}$ **91.** $\frac{242}{5}$ **93.** $\frac{1}{4}$ **95.** 28 **97.** -41 **99.** -9 **101.** -90 **103.** 33 **105.** -5 **107.** $\frac{3}{2}$ **109.** $\frac{7y - 14}{2}, 14$ **111.** $6(3x + 6) - 9, 81$ **113.** $\left(\frac{x + 3}{2y}\right)^2 - 3, 1$ **115. a)** 24.6 millas **b)** 57.4 millas **117. a)** 102 pies **b)** 54 pies **119. a)** $623.05 **b)** $837.97 **121. a)** 9.51 mil millones de viajes **b)** 22.51 mil millones de viajes **123. a)** $297.83 mil millones **b)** $405.83 mil millones **125. a)** 7.62% **b)** 21.78% **127. a)** $1.262 mil millones **b)** $19,438 mil millones **129. a)** $A \cap B = \{b, c, f\}$ **b)** $A \cup B = \{a, b, c, d, f, g, h\}$ **130.** Todos los números reales, $\mathbb{R}$ **131.** $a \geq 0$ **132.** $6, -6$ **133.** $-|6|, -4, -|-2|, 0, |-5|$ **134.** Propiedad asociativa de la suma.

Examen de mitad de capítulo*

1. Las respuestas variarán. [1.1] **2.** $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5\}$, $A \cap B = \{-1, 1\}$ [1.2] **3.** El conjunto de enteros no negativos múltiplos de 5. [1.2] **4.** 

[1.2] **5.** $>$ [1.2] **6.** $\{x|-5 \leq x < 2\}$ [1.2] **7.** No [1.2] **8.** $-15, |-6|, 7, |-17|$ [1.2] **9.** 9.2 [1.3] **10.** $\frac{7}{30}$ [1.3] **11.** 256 [1.3] **12.** $-\frac{4}{13}$ [1.3] **13.** -3 [1.3] **14.** Propiedad distributiva [1.3] **15.** 0.9 [1.4] **16. a)** 36 **b)** -36 [1.4] **17. a)** 1) Símbolos de agrupación, 2) Exponentes y radicales, 3) Multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha, 4) Sumas y restas de izquierda a derecha **b)** -14 [1.4] **18.** 26 [1.4] **19.** 4 [1.4] **20.** $\frac{5}{2}$ [1.4]

Conjunto de ejercicios 1.5

1. a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ **b)** Las respuestas variarán. **3. a)** $a^0 = 1, a \neq 0$ **b)** Las respuestas variarán. **5. a)** $(ab)^m = a^m b^m$ **b)** Las respuestas variarán. **7. a)** $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0$ **b)** Las respuestas variarán. **9.** $x = \frac{1}{5}$, ya que si $\frac{1}{x} = 5$, entonces $x = \frac{1}{5}$ **11. a)** El opuesto de x es $-x$; el recíproco de x es $\frac{1}{x}$ **b)** $x^{-1}; \frac{1}{x}$ **c)** $-x$ **13.** 32 **15.** 9 **17.** $\frac{1}{81}$ **19.** 125 **21.** 1 **23.** 64 **25.** 64 **27.** $\frac{16}{49}$ **29. a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{1}{9}$ **c)** $-\frac{1}{9}$ **d)** $-\frac{1}{9}$ **31. a)** 2 **b)** -2 **c)** -2 **d)** 2 **33. a)** 5 **b)** -5 **c)** 1 **d)** -1 **35. a)** $3xy$ **b)** 1 **c)** $3x$ **d)** 3 **37.** $\frac{7}{y^3}$ **39.** $9x^4$ **41.** $2ab^3$ **43.** $\frac{13}{2m^2n^3}$ **45.** $\frac{5z^4}{x^2y^3}$ **47.** $\frac{1}{9xy}$ **49.** $\frac{1}{4}$ **51.** x^2 **53.** 64 **55.** $\frac{1}{49}$ **57.** $\frac{1}{m^{11}}$ **59.** $5w^5$ **61.** $\frac{12}{a^8}$ **63.** $3p$ **65.** $-10r^7$ **67.** $8x^7y^2$ **69.** $\frac{3x^2}{y^6}$ **71.** $-\frac{3x^3z^2}{y^5}$ **73. a)** 4 **b)** 8 **c)** 1 **d)** 0 **75. a)** $-\frac{1}{12}$ **b)** $\frac{7}{12}$ **c)** $\frac{11}{10}$ **d)** $\frac{23}{120}$ **77.** 81 **79.** $\frac{1}{81}$ **81.** b^6 **83.** $-c^3$ **85.** $\frac{16}{x^6}$ **87.** $\frac{7}{10}$ **89.** $\frac{21}{16}$ **91.** $\frac{9}{16b^2}$ **93.** $\frac{16x^4}{y^4}$ **95.** $\frac{q^{12}}{125p^6}$ **97.** $-\frac{g^{12}}{27h^9}$ **99.** $\frac{9j^2}{16k^4}$ **101.** $8r^6s^{15}$ **103.** $\frac{y^6}{64x^3}$ **105.** $125x^9y^3$ **107.** $\frac{z^3}{8x^3y^3}$ **109.** $\frac{x^{20}}{y^{10}}$ **111.** $\frac{x^4y^8}{4z^{12}}$ **113.** $-\frac{64b^{12}}{a^6c^3}$ **115.** $\frac{27}{8x^{21}y^9}$ **117.** x^{7a+3} **119.** w^{5a-7} **121.** x^{w+7} **123.** x^{5p+2} **125.** x^{2m+2} **127.** $\frac{5m^{2b}}{n^{2a}}$ **129. a)** $x < 0$ o $x > 1$ **b)** $0 < x < 1$ **c)** $x = 0$ o $x = 1$ **d)** No es verdadero para $0 \leq x \leq 1$ **131. a)** El producto de un número par de factores negativos es positivo **b)** El producto de un número impar de factores negativos es negativo **133. a)** Sí **b)** Sí, ya que $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ y $(-x)^{-2} = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$ **135.** -3, ya que $(y^{-2}/y^{-3})^2 = y^2$ **137.** $-1, 3$, porque $(x^{-1}/x^4)^{-1} = x^5$, y $(y^5/y^3)^{-1} = 1/y^2$ **139.** $x^{9/8}$ **141.** $\frac{1}{x^{9/2}y^{19/6}}$ **144. a)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ **b)** $A \cap B = \{\ \}$ **145.** 

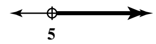
146. -4 **147.** -5

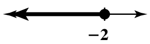
* Los números entre corchetes después de la respuesta, indican la sección en que se estudió el material.

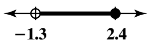
Conjunto de ejercicios 1.6

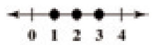
1. Un número mayor o igual a 1 y menor que 10 multiplicado por una potencia de 10 **3.** 1×10^{-2}, ya que $1 \times 10^{-2} = 0.01$ y $1 \times 10^{-3} = 0.001$. **5.** 3.7×10^3 **7.** 4.1×10^{-2} **9.** 7.6×10^5 **11.** 1.86×10^{-6} **13.** 5.78×10^6 **15.** 1.06×10^{-4} **17.** 31,000 **19.** 0.0000213 **21.** 0.917 **23.** 8,000,000 **25.** 203,000 **27.** 1,000,000 **29.** 240,000,000 **31.** 0.021 **33.** 0.000027 **35.** 11,480 **37.** 0.0003 **39.** 0.0000006734 **41.** 1.5×10^{-5} **43.** 5.0×10^3 **45.** 3.0×10^{-8} **47.** 1.645×10^{12} **49.** 4.8×10^5 **51.** 3.0×10^0 **53.** 9.369×10^{14} **55.** 1.056×10^3 **57.** 5.337×10^2 **59.** 3.115×10^{-25} **61.** 7.604×10^{-27} **63.** 3.333×10^{60} **65.** 8.5×10^8 **67.** 2.4×10^6 **69.** 5.28×10^{10} **71.** 9.1×10^{12} **73.** 1.0×10^{-5} **75.** 1.58×10^{-5} **77.** 1.0×10^{-9} **79. a)** Reste 1 del exponente **b)** Reste 2 del exponente **c)** Reste 6 del exponente **d)** 6.58×10^{-10} **81. a)** 1.0×10^4 o 10,000 **b)** 4.725×10^5 o 472,500 **c)** El error en la parte **d)** ya que la respuesta se redondea por más **83.** 30,000 horas **85. a)** $\approx 6.1485 \times 10^9$ personas **b)** $\approx 4.6\%$ **87. a)** 1.1728×10^{13}, 2.965×10^8 **b)** $\approx \$39{,}554.81$ **89.** 132 personas/kilómetro cuadrado **91. a)** 2.1×10^8 libras **b)** 3.99×10^9 libras **93. a)** 994 millones **b)** $\approx 20.01\%$ **c)** ≈ 348.6 personas/milla cuadrada **d)** ≈ 81.8 personas/milla cuadrada **95. a)** $\$6.9 \times 10^{10}$ **b)** $\$8.28 \times 10^{11}$ **c)** $\$2.139 \times 10^{12}$ **97. a)** 6.03×10^7 kilómetros cuadrados **b)** 4.4×10^6 kilómetros cuadrados.

Ejercicios de repaso del capítulo 1

1. $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ **2.** $\{0, 3, 6, 9, \ldots\}$ **3.** Sí **4.** Sí **5.** No **6.** Sí **7.** 4, 6 **8.** 4, 6, 0 **9.** $-2, 4, 6, 0$ **10.** $-2, 4, 6, \frac{1}{2}, 0, \frac{15}{27}, -\frac{1}{5}, 1.47$ **11.** $\sqrt{7}, \sqrt{3}$ **12.** $-2, 4, 6, \frac{1}{2}, \sqrt{7}, \sqrt{3}, 0, \frac{15}{27}, -\frac{1}{5}, 1.47$ **13.** Falso **14.** Verdadero **15.** Verdadero **16.** Verdadero **17.** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$; $A \cap B = \{2, 4, 6\}$ **18.** $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $A \cap B = \{\ \}$ **19.** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$; $A \cap B = \{\ \}$ **20.** $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$; $A \cap B = \{9, 10\}$ **21.** 

22. 

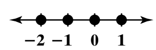
23. 

24. 

25. $<$ **26.** $<$ **27.** $<$ **28.** $=$ **29.** $<$ **30.** $>$ **31.** $>$ **32.** $>$ **33.** $-\pi, -3, 3, \pi$ **34.** $0, \frac{3}{5}, 2.7, |-3|$ **35.** $-2, 3, |-5|, |-10|$ **36.** $-7, -3, |-3|, |-7|$ **37.** $-4, -|-3|, 5, 6$ **38.** $-2, 0, |16|, |-2.3|$ **39.** Propiedad distributiva **40.** Propiedad conmutativa de la multiplicación **41.** Propiedad asociativa de la suma **42.** Propiedad de la identidad para la suma **43.** Propiedad asociativa de la multiplicación **44.** Propiedad del doble negativo **45.** Propiedad multiplicativa del cero **46.** Propiedad del inverso de la suma **47.** Propiedad del inverso en la multiplicación **48.** Propiedad de la identidad para la suma **49.** 14 **50.** 9 **51.** 11 **52.** -5 **53.** 1 **54.** 21 **55.** 9 **56.** -49 **57.** 15 **58.** 34 **59.** 6 **60.** 64 **61.** Indefinida **62.** $\frac{8}{3}$ **63.** 22 **64.** -67 **65. a)** \$816.37 millones **b)** \$7,223.73 millones **66. a)** 944.53 toneladas-millas **b)** 2135.65 toneladas millas **67.** 32 **68.** x^5 **69.** a^8 **70.** y^7 **71.** b^9 **72.** $\frac{1}{c^3}$ **73.** $\frac{1}{125}$ **74.** 8 **75.** $81m^6$ **76.** $\frac{7}{4}$ **77.** $\frac{27}{8}$ **78.** $\frac{y^2}{x}$ **79.** $-15x^3y^4$ **80.** $\frac{14}{v^3w^3}$ **81.** $\frac{3y^7}{x^5}$ **82.** $\frac{3}{xy^9}$ **83.** $\frac{g^5}{h^5j^{14}}$ **84.** $\frac{3m}{n^4}$ **85.** $64a^3b^3$ **86.** $\frac{x^{10}}{9y^2}$ **87.** $\frac{p^{14}}{q^{12}}$ **88.** $-\frac{8a^3}{b^9c^6}$ **89.** $\frac{z^4}{25x^2y^6}$ **90.** $\frac{m^9}{27}$ **91.** $\frac{n^6}{4m^4}$ **92.** $\frac{625x^4y^4}{z^{20}}$ **93.** $\frac{9x^{10}}{4y^{14}z^{12}}$ **94.** $-\frac{x^6z^2}{8y^2}$ **95.** 7.42×10^{-5} **96.** 4.6×10^5 **97.** 1.83×10^5 **98.** 1.0×10^{-6} **99.** 30,000 **100.** 0.03 **101.** 200,000,000 **102.** 2000 **103. a)** $\$1.7 \times 10^6$ **b)** $\$4.6 \times 10^6$ **c)** ≈ 1.28 **104. a)** 14,000,000,000 **b)** 14 mil millones de kilómetros **c)** 5.0×10^8 kilómetros o 500,000,000 kilómetros **d)** 8.4×10^9 millas u 8,400,000,000 millas

Ejercicios de práctica del capítulo 1

1. $A = \{6, 7, 8, 9, \ldots\}$ [1.2] **2.** Falso [1.2] **3.** Verdadero [1.2] **4.** $-\frac{3}{5}, 2, -4, 0, \frac{19}{12}, 2.57, -1.92$ [1.2] **5.** $-\frac{3}{5}, 2, -4, 0, \frac{19}{12}, 2.57, \sqrt{8}, \sqrt{2}, -1.92$ [1.2] **6.** $A \cup B = \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 14\}$: $A \cap B = \{8, 10\}$ [1.2] **7.** $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$; $A \cap B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ [1.2] **8.** 

[1.2] **9.** 

[1.2] **10.** $-|4|, -2, |3|, 9$ [1.3] **11.** Propiedad asociativa de la suma [1.3] **12.** Propiedad conmutativa de la suma [1.3] **13.** 2 [1.4] **14.** 33 [1.4] **15.** Indefinida [1.4] **16.** $-\frac{37}{22}$ [1.4] **17.** 17 [1.4] **18. a)** 304 pies **b)** 400 pies [1.4] **19.** $\frac{1}{9}$ [1.5] **20.** $\frac{16}{m^6n^4}$ [1.5] **21.** $\frac{4c^2}{5ab^5}$ [1.5] **22.** $-\frac{y^{21}}{27x^{12}}$ [1.5] **23.** 3.89×10^8 [1.6] **24.** 260,000,000 [1.6] **25. a)** 9.2×10^9 **b)** 0–14: 1.794×10^9, 15–64: 5.8052×10^9, 65 y mayores: 1.6008×10^9 [1.6]

Capítulo 2

Cómo usar su calculadora, 2.1

1. No **2.** Sí

Conjunto de ejercicios 2.1

1. Los términos de una expresión son las partes que se suman. **3. a)** $\frac{1}{4}$ **b)** -1 **c)** $-\frac{3}{5}$ **5. a)** Los términos semejantes tienen las mismas variables y exponentes. **b)** No; el exponente de x en cada término es diferente. **7.** No, 4 no hace que la ecuación sea verdadera. **9.** Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$. **11. a)** Un número infinito de soluciones. **b)** $\mathbb{R}$ **13. a)** Las respuestas variarán. **b)** -12 **15.** Propiedad simétrica **17.** Propiedad transitiva **19.** Propiedad reflexiva **21.** Propiedad de suma de la igualdad

23. Propiedad de multiplicación de la igualdad **25.** Propiedad de multiplicación de la igualdad **27.** Tres **29.** Dos **31.** Cero **33.** Uno **35.** Siete **37.** Doce **39.** No puede simplificarse **41.** $5x^2 - x - 5$ **43.** $8.7c^2 + 3.6c$ **45.** No puede simplificarse **47.** $-pq + p + q$ **49.** $8d + 2$ **51.** $\frac{8}{3}x + \frac{13}{2}$ **53.** $-17x - 4$ **55.** $11x - 6y$ **57.** $-9b + 93$ **59.** $4r^2 - 2rs + 3r + 4s$ **61.** 3 **63.** $\frac{3}{2}$ **65.** 2 **67.** 16 **69.** 5 **71.** $\frac{3}{5}$ **73.** 1 **75.** 0 **77.** 3 **79.** -1 **81.** 5 **83.** 5 **85.** -1 **87.** $-\frac{1}{2}$ **89.** 6 **91.** 2 **93.** 68 **95.** -64 **97.** -4 **99.** 24 **101.** 10 **103.** -4 **105.** $\frac{15}{16}$ **107.** 5 **109.** 1.00 **111.** 1.18 **113.** 0.43 **115.** 1701.39 **117.** -1.85 **119.** $\varnothing$; contradicción **121.** $\{0\}$; condicional **123.** $\mathbb{R}$; identidad **125.** $\mathbb{R}$; identidad **127.** $\varnothing$; contradicción **129. a)** ≈85 personas por milla cuadrada. **b)** ≈2026. **131. a)** 58.96% **b)** 2010 **133. a)** ≈2.4 horas **b)** ≈2.08 horas **135.** Las respuestas variarán. Una posible respuesta es: $x = \frac{5}{2}, 2x - 4 = 1, 4x = 10$ **137.** Las respuestas variarán. Una posible respuesta es: $2x - 4 = 5x - 3(1 + x)$ **139.** Las respuestas variarán. Una posible respuesta es: $3p + 3 = \frac{3}{2}p + p + 6$ **141.** -22, sustituya -2 por a y despeje a n. **143.** $\triangle = \frac{\odot + \square}{*}$ **145.** $\odot = \frac{\otimes - \triangle}{\square}$ **147. a)** Las respuestas variarán. **b)** $|a| = \begin{cases} a \text{ si; también } a \geq 0 \\ -a \text{ si; también } a < 0 \end{cases}$ **148. a)** -9 **b)** 9 **149.** -5 **150.** $\frac{4}{49}$

Conjunto de ejercicios 2.2

1. Una ecuación es un modelo matemático de una situación de la vida real. **3.** Entender el problema, traducir, realizar los cálculos, comprobar, responder. **5. a)** $l = 5$ **b)** $l = \frac{P - 2w}{2}$ **c)** no **d)** debe obtener la misma respuesta. **7.** 6300 **9.** 300 **11.** 201.06 **13.** 70 **15.** 176 **17.** $\frac{7}{4}$ **19.** 66.67 **21.** 4 **23.** 119.10 **25.** $y = -3x + 5$ **27.** $y = \frac{1}{7}x - \frac{13}{7}$ **29.** $y = 3x - 8$ **31.** $y = \frac{3}{4}x - 5$ **33.** $y = x + 2$ **35.** $y = -\frac{4}{3}x + 11$ **37.** $t = \frac{d}{r}$ **39.** $d = \frac{C}{\pi}$ **41.** $l = \frac{P - 2w}{2}$ **43.** $h = \frac{V}{lw}$ **45.** $r = \frac{A - P}{Pt}$ **47.** $l = \frac{3V}{wh}$ **49.** $m = \frac{y - b}{x}$ **51.** $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ **53.** $\mu = x - z\sigma$ **55.** $T_2 = \frac{T_1 P_2}{P_1}$ **57.** $h = \frac{2A}{b_1 + b_2}$ **59.** $n = \frac{2S}{f + l}$ **61.** $F = \frac{9}{5}C + 32$ **63.** $m_1 = \frac{Fd^2}{km_2}$ **65. a)** $p = 9.11d$ **b)** $d = \frac{p}{9.11}$ **c)** Las respuestas variarán. **67.** \$308 **69.** 6.5 años **71. a)** 3.14 pulgadas cuadradas **b)** 78.54 pulgadas cuadradas **73. a)** 75 pies cúbicos **b)** 2.78 yardas cúbicas **c)** \$105 **75.** El cilindro, la diferencia es 0.22 pulgadas cúbicas. **77.** \$11,264.93 **79.** \$4958.41 **81.** ≈4.12% **83. a)** ≈7.08% **b)** ≈6.39% **85. a)** 4 libras por semana **b)** 2500 calorías **87. a)** $S = 100 - a$ **b)** 40% **89. a)** $s = \frac{rt^2}{u}$ **b)** $u = \frac{rt^2}{s}$ **90.** -40 **91.** 1 **92.** -125 **93.** $\frac{4}{3}$

Conjunto de ejercicios 2.3

1. $x - 3$ **3.** $v + 6$ **5.** $d + 2$ **7.** $19.95y$ **9.** $0.096x$ **11.** $x, 12 - x$ **13.** $w, w + 29$ **15.** $p, 165 - p$ **17.** $z, z + 1.3$ **19.** $e, e + 0.22e$ **21.** $A = 72°, B = 18°$ **23.** $A = 36°, B = 144°$ **25.** 40°, 60°, 80°, **27.** \$32 **29.** 25 viajes **31.** 225 millas **33.** 13 veces **35.** 10 veces **37.** \$1600 **39.** Noreste: \$2.145 millones; Sudeste: \$2.455 millones **41.** \$8845.48 **43.** \$3.10 por hora **45.** pastos: 12, malezas: 19, árboles: 26 **47.** \$16.15 **49. a)** ≈63.49 meses o 5.29 años **b)** First National **51.** ≈28 meses o 2.33 años **53.** Estados Unidos: 103, China: 63, Rusia: 92, Australia: 49, Alemania: 48 **55.** animales: 250,000, plantas: 350,000, insectos no escarabajos: 540,000, escarabajos: 360,000 **57.** 9 pulgadas, 12 pulgadas, 15 pulgadas **59.** 10 pies, 24 pies, 26 pies **61.** 13 metros por 13 metros **63.** 3 pies por 6 pies **65.** \$ 60 **67.** 3 **69.** \$ 16 **71. a)** $\frac{88 + 92 + 97 + 96 + x}{5} = 90$ **b)** Las respuestas variarán **c)** 77 **73. a), b)** Las respuestas variarán. **75.** 220 millas **78.** $\frac{13}{5}$ **79.** -2.7 **80.** $\frac{5}{32}$ **81.** -10 **82.** $\frac{y^{18}}{8x^{12}}$

Examen de mitad de capítulo

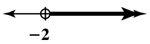
1. 12 [2.1] **2.** $5x^2 - 2x - 11$ [2.1] **3.** $6.4a - 9.6$ [2.1] **4.** -6 [2.1] **5.** 14 [2.1] **6.** $-\frac{11}{3}$ [2.1] **7.** 5 [2.1] **8.** $\mathbb{R}$, identidad [2.1] **9.** $\varnothing$, contradicción [2.1] **10.** 80 [2.2] **11.** $\frac{100}{3}$ [2.2] **12.** $x = \frac{y - 13}{7}$ [2.2] **13.** $x_3 = nA - 2x_1 - x_2$ [2.2] **14.** \$942.80 [2.2] **15.** $A = 62°, B = 28°$ [2.3] **16.** 10 días [2.3] **17.** 15 pies, 25 pies, 60 pies [2.3] **18.** 4.5% [2.3] **19.** 40 meses [2.3] **20.** Multiplicar ambos lados por el mismo número, 12; $-\frac{10}{3}$ [2.3]

Conjunto de ejercicios 2.4

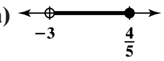
1. 11.4 millas **3.** 4 horas **5.** 6 horas **7. a)** 6 millas por hora **b)** 12 millas por hora **9. a)** 0.15 horas o 9 minutos **b)** 3.6 millas **11.** 13.8 horas **13.** ≈ 0.58 horas o 35 minutos **15.** \$12,570 al 3%, \$17,430 al 4.1% **17.** 54 libras **19. a)** 2200 acciones de Johnson & Johnson y 4400 acciones de AOL. **b)** \$4480 **21.** 30 onzas **23.** 2.8 cucharadas al 30%, 1.2 cucharadas al 80% **25.** 35% **27.** 4 libras de hojas, 8 libras de rebanadas **29.** ≈25.77 horas **31.** 500 minutos o bien $8\frac{1}{3}$ horas **33.** 6 cuartos **35. a)** ≈3.71 horas **b)** ≈2971.43 millas **37.** 8 pinturas pequeñas y 4 grandes **39.** 9.6 onzas de solución al 80%, 118.4 onzas de agua

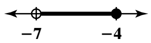
41. ≈35.6 onzas de solomillo, ≈28.4 onzas de cordero **43.** 3 millas **45.** ≈11.4 onzas **47. a), b), c)** Las respuestas variarán. **49.** ≈149 millas **51.** 6 cuartos **52.** 7.0×10^{12} **53.** -5.7 **54.** $\frac{21}{4}$ **55.** $y = \frac{x - 42}{30}$ **56.** 140 millas

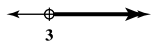
Conjunto de ejercicios 2.5

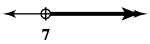
1. Es necesario cambiar el sentido del símbolo de la desigualdad cuando divida entre o multiplique por un número negativo ambos lados de la desigualdad. **3. a)** Cuando los puntos extremos no están incluidos **b)** Cuando los puntos extremos sí están incluidos **c)** Las respuestas variarán. Un ejemplo es $x > 4$. **d)** Las respuestas variarán. Un ejemplo es $x \geq 4$ **5.** $a < x$ y $x < b$ **7. a)** 

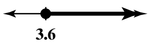
b) $(-2, \infty)$ **c)** $\{x|x > -2\}$ **9. a)** 

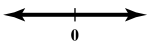
b) $(-\infty, \pi]$ **c)** $\{w|w \leq \pi\}$ **11. a)** 

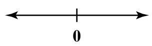
b) $\left(-3, \frac{4}{5}\right]$ **c)** $\left\{q \middle| -3 < q \leq \frac{4}{5}\right\}$ **13. a)** 

b) $(-7, -4]$ **c)** $\{x|-7 < x \leq -4\}$ **15.** 

17. 

19. 

21. 

23. 

25. 

27. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ **29.** $[2, \infty)$ **31.** $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ **33.** $(-\infty, \infty)$ **35.** $[-5, 1)$ **37.** $[-4, 5]$ **39.** $\left[4, \frac{11}{2}\right)$ **41.** $\left(-\frac{13}{3}, -4\right]$ **43.** $\{x|3 \leq x < 7\}$ **45.** $\{x|0 < x \leq 3\}$ **47.** $\left\{u \middle| 4 \leq u \leq \frac{19}{3}\right\}$ **49.** $\{c|-3 < c \leq 1\}$ **51.** $\varnothing$ **53.** $\{x|-5 < x < 2\}$ **55.** $(-\infty, 2) \cup [7, \infty)$ **57.** $[0, 2]$ **59.** $(-\infty, 0) \cup (6, \infty)$ **61.** $[0, \infty)$ **63. a)** $l + g \leq 130$ **b)** $l + 2w + 2d \leq 130$ **c)** 24.5 pulgadas **65.** 11 cajas **67.** 77 minutos **69.** 1881 libros **71.** 41 onzas **73.** Para ventas de más de \$5000 a la semana **75.** 24 **77.** $76 \leq x \leq 100$ **79. a)** \$12,885.25 **b)** \$79,998.39 **81. a)** $[0, 3]$ **b)** $[3, 10]$ **83. a)** $[0, 5]$ **b)** $[5, 13]$ **85. a)** $[0, 8]$ **b)** Ninguno **87.** $6.97 < x < 8.77$ **89. a)** Enero, Febrero, Marzo, Mayo **b)** Marzo, Abril, Mayo **c)** Abril **91.** Las respuestas variarán. **93. a)** $[17.5, 23.5]$ **b)** $[23.5, 31]$ **c)** $[27.2, 36.5]$ **95.** $84 \leq x \leq 100$ **97. a)** Las respuestas variarán. **b)** $(-3, \infty)$ **99. a)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ **b)** $A \cap B = \{1, 8\}$ **100. a)** 4 **b)** 0, 4 **c)** $-3, 4, \frac{5}{2}, 0, -\frac{13}{29}$ **d)** $-3, 4, \frac{5}{2}, \sqrt{7}, 0, -\frac{13}{29}$ **101.** Propiedad asociativa de la suma **102.** Propiedad conmutativa de la suma **103.** $V = \frac{R - L + Dr}{r}$

Conjunto de ejercicios 2.6

1. Haga $x = a$ o $x = -a$ **3.** $-a < x < a$ **5.** $x < -a$ o $x > a$ **7.** Todos los números reales excepto 0; el valor absoluto de todos los números reales, exceptuando al 0, es mayor a 0. **9.** Haga $x = y$ o $x = -y$ **11. a)** Dos **b)** Número infinito **c)** Número infinito **13. a)** D **b)** B **c)** E **d)** C **e)** A **15.** $\{-2, 2\}$ **17.** $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ **19.** $\varnothing$ **21.** $\{-13, 3\}$ **23.** $\{-7\}$ **25.** $\left\{\frac{3}{2}, \frac{11}{6}\right\}$ **27.** $\{-17, 23\}$ **29.** $\{3\}$ **31.** $\{w|-11 < w < 11\}$ **33.** $\{q|-13 \leq q \leq 3\}$ **35.** $\{b|1 < b < 5\}$ **37.** $\{x|-9 \leq x \leq 6\}$ **39.** $\left\{x \middle| \frac{1}{3} < x < \frac{13}{3}\right\}$ **41.** $\varnothing$ **43.** $\{j|-22 < j < 6\}$ **45.** $\{x|-1 \leq x \leq 7\}$ **47.** $\{y|y < -2$ o $y > 2\}$ **49.** $\{x|x < -9$ o $x > 1\}$ **51.** $\left\{b \middle| b < \frac{2}{3} \text{ o } b > 4\right\}$ **53.** $\{h|h < 1$ o $h > 4\}$ **55.** $\{x|x < 2$ o $x > 6\}$ **57.** $\{x|x \leq -18$ o $x \geq 2\}$ **59.** $\mathbb{R}$ **61.** $\{x|x < 2$ o $x > 2\}$ **63.** $\{-1, 15\}$ **65.** $\{-3, 1\}$ **67.** $\left\{-23, \frac{13}{7}\right\}$ **69.** $\{10\}$ **71.** $\{-1, 1\}$ **73.** $\{q|q < -8$ o $q > -4\}$ **75.** $\{w|-1 \leq w \leq 8\}$ **77.** $\left\{-\frac{8}{5}, 2\right\}$ **79.** $\left\{x \middle| x < -\frac{5}{2} \text{ o } x > -\frac{5}{2}\right\}$ **81.** $\left\{x \middle| -\frac{13}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}\right\}$ **83.** $\varnothing$ **85.** $\{w|-16 < w < 8\}$ **87.** $\mathbb{R}$ **89.** $\left\{2, \frac{22}{3}\right\}$ **91.** $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{9}{7}\right\}$ **93. a)** $[0.085, 0.093]$ **b)** 0.085 pulgadas **c)** 0.093 pulgadas **95. a)** $[132, 188]$ **b)** 132 a 188 pies por debajo del nivel del mar, inclusive **97.** $|x| = 5$ **99.** $|x| \geq 5$ **101.** $x = -\frac{b}{a}$; $|ax + b|$ nunca es menor que 0, así que haga $|ax + b| = 0$ y resuelva para x. **103. a)** Haga $ax + b = -c$ o $ax + b = c$ y resuelva cada ecuación para x. **b)** $x = \frac{-c - b}{a}$ o $x = \frac{c - b}{a}$ **105. a)** Escriba $ax + b < -c$ o $ax + b > c$ y resuelva cada desigualdad para x. **b)** $x < \frac{-c - b}{a}$ o $x > \frac{c - b}{a}$ **107.** $\mathbb{R}$; ya que $3 - x = -(x - 3)$ **109.** $\{x|x \geq 0\}$; por definición de valor absoluto **111.** $\{2\}$; haga $x + 1 = 2x - 1$ o $x + 1 = -(2x - 1)$ **113.** $\{x|x \leq 4\}$; por definición $|x - 4| = -(x - 4)$ si $x \leq 4$ **115.** $\{4\}$ **117.** $\varnothing$ **119.** $\frac{29}{72}$ **120.** 25 **121.** ≈1.33 millas **122.** $\{x|x < 4\}$

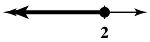
Ejercicios de repaso del capítulo 2

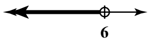
1. Ocho **2.** Uno **3.** Siete **4.** $a^2 - a + 4$ **5.** $7x^2 + 2xy - 13$ **6.** No puede simplificarse **7.** $4x - 3y + 10$ **8.** -4 **9.** 20 **10.** $-\frac{13}{3}$ **11.** -10 **12.** $-\frac{9}{2}$ **13.** No tiene solución **14.** $\mathbb{R}$ **15.** $-\frac{1}{2}$ **16.** $\frac{1}{4}$ **17.** 69 **18.** -4

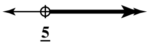
19. $R = \frac{E}{I}$ **20.** $w = \frac{P - 2l}{2}$ **21.** $h = \frac{A}{\pi r^2}$ **22.** $h = \frac{2A}{b}$ **23.** $m = \frac{y - b}{x}$ **24.** $y = \frac{2x - 5}{3}$ **25.** $R_2 = R_T - R_1 - R_3$

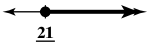
26. $a = \frac{2S - b}{3}$ **27.** $l = \frac{K - 2d}{2}$ **28.** \$30 **29.** 7 años **30.** \$6800 **31.** 150 millas **32.** \$260 **33.** \$2570 al 3.5%, \$2430 al 4%

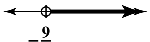
34. 187.5 galones del 20%, 62.5 galones del 60% **35.** $6\frac{1}{2}$ horas **36. a)** 3000 millas por hora **b)** 16,500 millas **37.** 15 libras de café de \$6.00; 25 libras de café de \$6.80 **38.** \$36 **39. a)** 1 hora **b)** 14.4 millas **40.** 40°; 65°; 75° **41.** 300 galones por hora; 450 galones por hora **42.** 40°, 50° **43.** 7.5 onzas **44.** \$4500 al 10%; \$7500 al 6% **45.** Más de 5 **46.** 40 millas por hora, 50 millas por hora

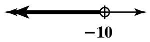
47. 

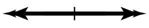
48. 

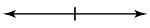
49. 

50. 

51. 

52. 

53. 

54. 

55. 6 cajas **56.** 7 minutos **57.** $\approx$15.67 semanas **58.** $\{x|81 \le x \le 100\}$ **59.** $(5, 11)$

60. $(-3, 5]$ **61.** $\left(\frac{7}{2}, 8\right)$ **62.** $\left(\frac{8}{3}, 6\right)$ **63.** $(-3, 1]$ **64.** $(2, 14)$ **65.** $\{h|-3 < h \le 1\}$ **66.** $\mathbb{R}$ **67.** $\{x|x \le -4\}$

68. $\{g|g < -6 \text{ o } g \ge 11\}$ **69.** $\{-2, 2\}$ **70.** $\{x|-8 < x < 8\}$ **71.** $\{x|x \le -9 \text{ o } x \ge 9\}$ **72.** $\{-18, 8\}$

73. $\{x|x \le -3 \text{ o } x \ge 7\}$ **74.** $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right\}$ **75.** $\{q|1 < q < 8\}$ **76.** $\{-1, 4\}$ **77.** $\{x|-14 < x < 22\}$ **78.** $\left\{-5, -\frac{4}{5}\right\}$ **79.** $\mathbb{R}$

80. $\left[-5, -\frac{1}{3}\right]$ **81.** $(4, 8]$ **82.** $\left(-\frac{17}{2}, \frac{27}{2}\right]$ **83.** $[-2, 6)$ **84.** $(-\infty, \infty)$ **85.** $\left(\frac{2}{3}, 10\right]$

Ejercicios de práctica del capítulo 2

1. Siete [2.1] **2.** $16p - 3q - 4pq$ [2.1] **3.** $10q + 42$ [2.1] **4.** -26 [2.1] **5.** $\frac{4}{3}$ [2.1] **6.** $-\frac{35}{11}$ [2.1] **7.** $\varnothing$ [2.1] **8.** $\mathbb{R}$ [2.1] **9.** $\frac{13}{3}$ [2.2] **10.** $b = \frac{a - 2c}{5}$ [2.2] **11.** $b_2 = \frac{2A - hb_1}{h}$ [2.2] **12.** \$625 [2.3–2.4] **13.** 80 visitas [2.3–2.4] **14.** 4.2 horas [2.3–2.4] **15.** 6.25 litros [2.3–2.4] **16.** \$7000 al 8%; \$5000 al 7% [2.3–2.4]

17. 

[2.5] **18.** 

[2.5] **19.** $\left(\frac{9}{2}, 7\right]$ [2.5] **20.** $[13, 16)$ [2.5]

21. $\{-7, 2\}$ [2.6] **22.** $\left\{-\frac{14}{3}, \frac{26}{5}\right\}$ [2.6] **23.** $\{-3\}$ [2.6] **24.** $\{x|x < -1 \text{ o } x > 4\}$ [2.6] **25.** $\left\{x\middle|\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}\right\}$ [2.6]

Examen de repaso acumulativo

1. a) $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ **b)** $\{3, 5, 7, 11, 13\}$ [1.2] **2. a)** Propiedad conmutativa de la suma **b)** Propiedad asociativa de la multiplicación **c)** Propiedad distributiva [1.3] **3.** -63 [1.4] **4.** -6 [1.4] **5.** 7 [1.4] **6.** $\frac{1}{25x^8y^6}$ [1.5] **7.** $\frac{16m^{10}}{n^{12}}$ [1.5] **8.** $\approx$545.8 veces [1.6] **9.** 5 [2.1] **10.** 1.15 [2.1] **11.** $\frac{3}{4}$ [2.1] **12.** La ecuación lineal condicional es verdadera sólo para un valor, una ecuación lineal que es una identidad siempre es verdadera, una ecuación lineal que es inconsistente nunca es verdadera [2.1]

13. 3 [2.2] **14.** $x = \frac{y - y_1 + mx_1}{m}$ [2.2] **15. a)** 

b) $\left\{x\middle|-2 < x < \frac{8}{5}\right\}$ **c)** $\left(-2, \frac{8}{5}\right)$ [2.5] **16.** $\left\{-\frac{7}{3}, 3\right\}$ [2.6]

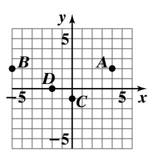
17. $\{x|x \le -10 \text{ o } x \ge 14\}$ [2.6] **18.** \$35 [2.3] **19.** 40 millas por hora, 60 millas por hora [2.4]
20. Castañas: 15 libras; cacahuates: 25 libras [2.4]

Capítulo 3

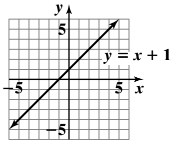
Conjunto de ejercicios 3.1

1. a) Una línea recta **b)** Dos; dos puntos determinan de manera única a una recta

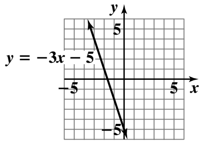
3. Están en una línea recta. **5.** $A(3, 1)$, $B(-6, 0)$, $C(2, -4)$, $D(-2, -4)$, $E(0, 3)$, $F(-8, 1)$, $G\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ **7.**



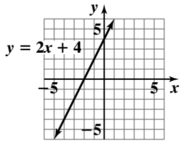
9. I **11.** IV **13.** II **15.** III **17.** No **19.** No **21.** Sí **23.** Sí **25.** No **27.**



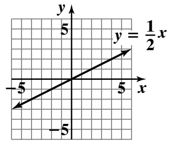
29.



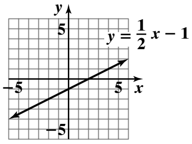
31.



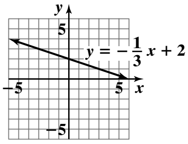
33.



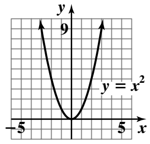
35.



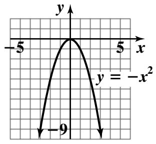
37.



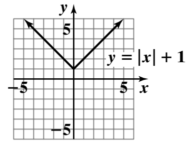
39.



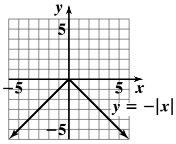
41.



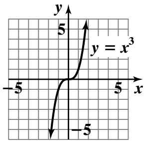
43.



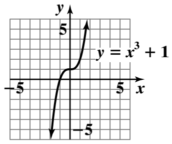
45.



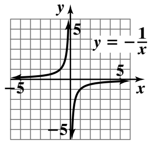
47.



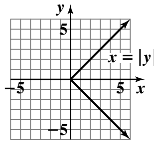
49.



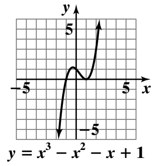
51.



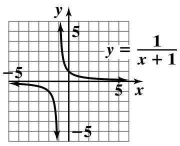
53.



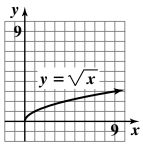
55.



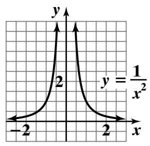
57.



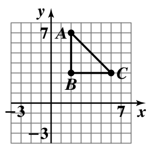
59.



61.



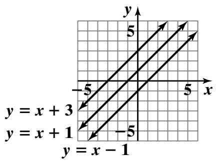
63. Sí, las coordenadas satisfacen la ecuación
65. a)



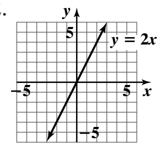
b) 8 unidades cuadradas

67. a) 6975 yardas **b)** 7300 yardas **c)** 1990, 2000, 2005 **d)** no

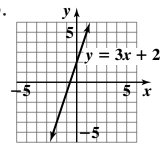
69.



a) Cada gráfica cruza al eje y en el punto que corresponde al término constante en la ecuación de la gráfica **b)** Sí **71.** La tasa de cambio es 2.

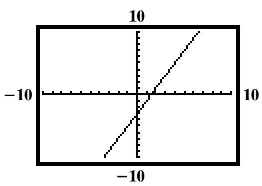


73. La tasa de cambio es 3.

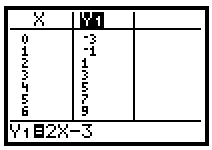


75. (4, −3), (5, 1), son posibles otras respuestas **77.** c **79.** a **81.** d **83.** b **85.** b **87.** d **89.** b **91.** d

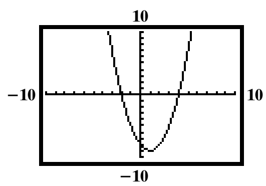
93. a)



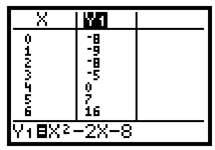
b)



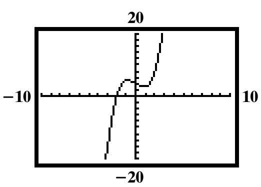
95. a)



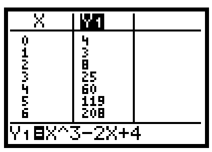
b)



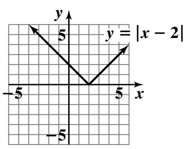
97. a)



b)



99.



103. $\frac{3}{2}$ **104.** ≈71 millas
105. $\{x|-2 < x \le 2\}$
106. $\left\{x \middle| x < -3 \text{ o } x > \frac{5}{3}\right\}$

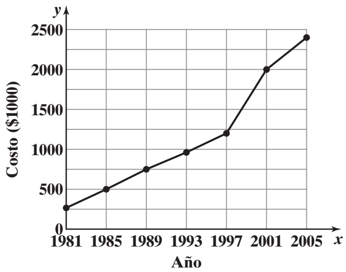
Conjunto de ejercicios 3.2

1. Una correspondencia donde a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un elemento del rango **3.** Sí, una relación es cualquier conjunto de parejas ordenadas. **5.** Si una recta vertical trazada en alguna parte de la gráfica interseca a la gráfica en más de un punto, la gráfica no es una función. **7.** El conjunto de valores de la variable dependiente. **9.** Dominio: $\{x|x \neq 0\}$, Rango: $\{y|y \neq 0\}$; x no puede ser 0, ya que no puede dividir entre 0. y no puede ser 0, ya que el numerador es 1. **11.** Dominio: $\mathbb{R}$, Rango: $\{y|y \geq 0\}$; x puede ser cualquier número real, $|x|$ nunca puede ser negativo. **13.** Si y depende de x, entonces x es la variable independiente. **15. a)** Función **b)** Dominio: {3, 5, 11}, Real: {6, 10, 22} **17. a)** Función **b)** Dominio: {Cameron, Tyrone, Vishnu}, Rango: {3, 6} **19. a)** No es función **b)** Dominio: {1990, 2001, 2002}; Rango: {20, 34, 37} **21. a)** Función **b)** Dominio: {1, 2, 3, 4, 5}; Rango: {1, 2, 3, 4, 5} **23. a)** Función **b)** Dominio: {1, 2, 3, 4, 5, 7}; Rango: {−1, 0, 2, 4, 9} **25. a)** No es función **b)** Dominio: {1, 2, 3}; Rango: {1, 2, 4, 5, 6} **27. a)** No es función **b)** Dominio: {0, 1, 2}; Rango: {−7, −1, 2, 3} **29. a)** Función **b)** Dominio: $\mathbb{R}$; Rango: $\mathbb{R}$ **c)** 2 **31. a)** No es función **b)** Dominio: $\{x|0 \leq x \leq 2\}$, Rango: $\{y|-3 \leq y \leq 3\}$ **c)** ≈1.5 **33. a)** Función **b)** Dominio: $\mathbb{R}$, Rango: $\{y|y \geq 0\}$ **c)** −3, −1 **35. a)** Función **b)** Dominio: {−1, 0, 1, 2, 3}, Rango: {−1, 0, 1, 2, 3} **c)** 2 **37. a)** No es función **b)** Dominio: $\{x|x \geq 2\}$, Rango: $\mathbb{R}$ **c)** 3 **39. a)** Función **b)** Dominio: $\{x|-2 \leq x \leq 2\}$, Rango: $\{y|-1 \leq y \leq 2\}$ **c)** −2, 2 **41. a)** 3 **b)** 13 **43. a)** −6 **b)** −4 **45. a)** 2 **b)** 2 **47. a)** 7 **b)** 0 **49. a)** 0 **b)** 3 **51. a)** 1 **b)** Indefinida **53. a)** 24 pies cuadrados **b)** 39 pies cuadrados **55. a)** $A(r) = \pi r^2$ **b)** ≈452.4 yardas cuadradas

57. a) $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$ **b)** $-35°C$ **59. a)** 18.23°C **b)** 27.68°C **61. a)** 78.32° **b)** 73.04° **63. a)** 91 naranjas **b)** 204 naranjas

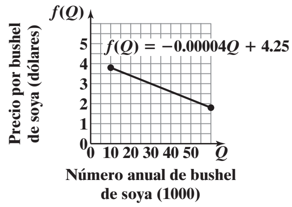
65. Las respuestas variarán. Una posible interpretación es: La persona calienta lentamente, quizá caminando durante 5 minutos. Luego la persona empieza a trotar lentamente durante un periodo de 5 minutos. Los siguientes 15 minutos trota. Después camina lentamente durante los siguientes 5 minutos y su ritmo cardiaco disminuye a su nivel normal. Este ritmo permanece constante durante los siguientes minutos. **67.** Las respuestas variarán. Una posible interpretación es: Durante 5 minutos, el hombre camina en terreno plano, que se encuentra a 30 pies sobre el nivel del mar. Los siguientes 5 minutos camina colina arriba hasta 45 pies sobre el nivel del mar. Durante 5 minutos camina en terreno plano, y luego camina rápidamente colina abajo durante 3 minutos hasta una elevación de 20 pies sobre el nivel del mar. Siete minutos camina en terreno plano. Luego sube rápidamente colina arriba durante 5 minutos. **69.** Las respuestas variarán. Una posible interpretación es: El conductor está en un tráfico pesado, en el que avanza y se detiene de forma continua; luego conduce por una autopista durante 15 minutos; detiene su automóvil por un par de minutos, y a continuación vuelve al tráfico pesado. **71. a)** Sí **b)** Año **c)** $218,600 **d)** $865,000 **e)** ≈144.8% **73. a)** Sí **b)** ≈6.0 millones **c)** ≈4.4 millones **d)** Sí **e)** 2006 a 2007

75. a)

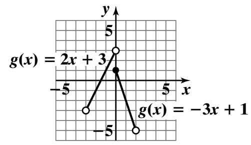


b) No. No es una línea recta. **c)** $2,300,000

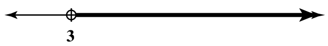
77. a)



b) $2.65 por bushel **79.**



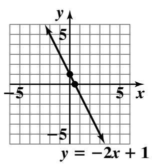
80. $\frac{1}{2}$ **81.** $p_2 = \frac{E - a_1p_1 - a_3p_3}{a_2}$ **82. a)**



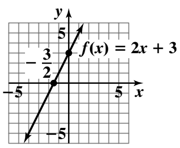
b) $(3, \infty)$ **c)** $\{x|x > 3\}$ **83.** $-2, 10$

Conjunto de ejercicios 3.3

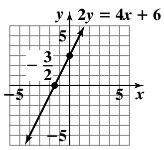
1. $ax + by = c$ **3.** Para determinar la intersección con el eje x, haga $y = 0$ y resuelva para x. Para determinar la intersección con el eje y, haga $x = 0$ y resuelva para y. **5.** Recta vertical **7.** Recta horizontal **9.** Grafique ambos lados de la ecuación. La solución es la coordenada x del punto de intersección. **11.** $2x + y = 5$ **13.** $3x - 4y = -14$ **15.**



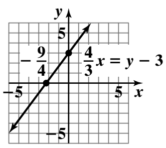
17.



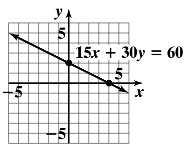
19.



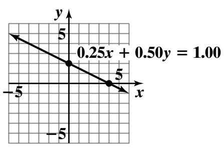
21.



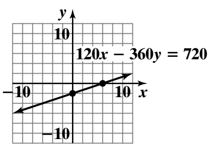
23.



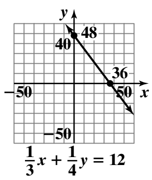
25.



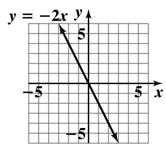
27.



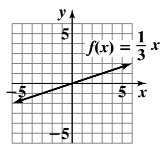
29.



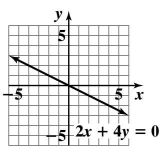
31.



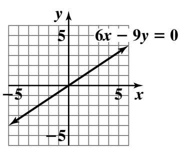
33.



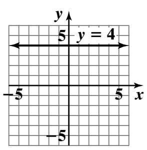
35.



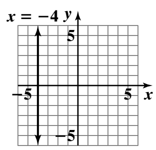
37.



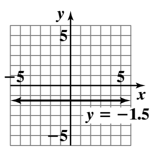
39.



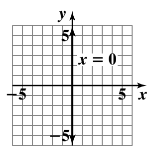
41.



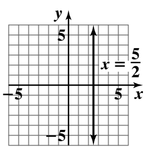
43.



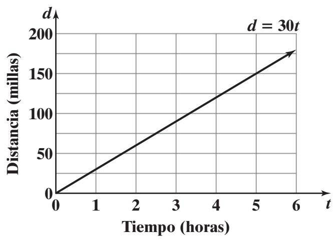
45.



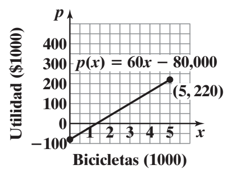
47.



49.

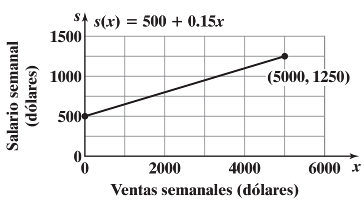


51. a)



b) 1300 bicicletas **c)** 3800 bicicletas

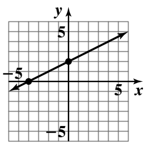
53. a) $s(x) = 500 + 0.15x$ **b)**



c) $950 **d)** $4000
55. a) Sólo existe un valor de y para cada valor de x.
b) Independiente: altura; dependiente: peso **c)** Sí
d) 11.5 kilogramos **e)** 65 centímetros **f)** 12.0-15.5 kilogramos
g) Aumenta; sí, conforme las niñas crecen sus pesos varían más.
57. Cuando la gráfica pasa por el origen, ya que en el origen tanto x como y son iguales a cero.

59. Las respuestas variarán. Una posible respuesta es $f(x) = 4$. **61.** Ambas intercepciones serán en 0.

63. a)



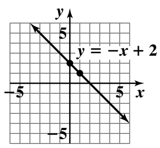
b) 2 (o −2) unidades **c)** 4 (o −4) unidades **d)** $\frac{1}{2}$; pendiente

65. 1 **67.** −3 **69.** (−3.2, 0), (0, 6.4) **71.** (−2, 0), (0, −2.5) **73.** 96 **74.** $-\frac{18}{13}$

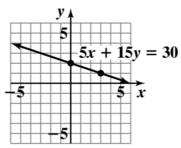
75. a) Las respuestas variarán. **b)** $x = a + b$ o $x = a - b$ **76. a)** Las respuestas variarán. **b)** $a - b < x < a + b$ **77. a)** Las respuestas variarán. **b)** $x < a - b$ o $x > a + b$ **78.** {−2, 2}

Conjunto de ejercicios 3.4

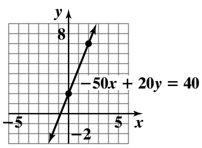
1. Seleccione dos puntos en la recta; determine $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. **3.** La recta crece al ir de izquierda a derecha. **5.** El cambio en x es 0, y no podemos dividir entre cero. **7.** Despeje a y. **9. a)** Se movió 4 unidades hacia abajo **b)** (0, −8) **11.** El cambio en y por un cambio unitario en x. **13.** −2 **15.** $-\frac{1}{2}$ **17.** −1 **19.** Indefinida **21.** 0 **23.** $-\frac{2}{3}$ **25.** $b = 3$ **27.** $k = -2$ **29.** $x = 6$ **31.** $r = 0$ **33.** $m = -3, y = -3x$ **35.** $m = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}x + 2$ **37.** m está indefinida, $x = -2$ **39.** $m = 0, y = 3$ **41.** $m = -\frac{3}{2}, y = -\frac{3}{2}x + 15$ **43.** $y = -x + 2$, −1, (0, 2)



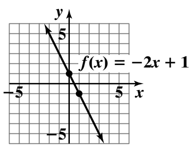
45. $y = -\frac{1}{3}x + 2, -\frac{1}{3}$, (0, 2)



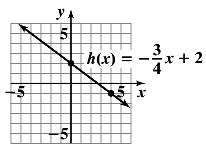
47. $y = \frac{5}{2}x + 2, \frac{5}{2}$, (0, 2)



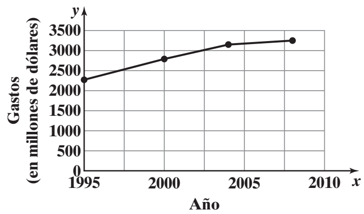
49.



51.



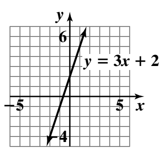
53. a) 2 **b)** 4 **c)** 1 **d)** 3 **55.** Si las pendientes son iguales y las intercepciones con el eje y son diferentes, las rectas son paralelas. **57.** (0, −5) **59. a)** $y = 3x + 1$ **b)** $y = 3x - 5$ **61. a)** 1 **b)** (0, 4) **c)** $y = x + 4$ **63.** $y = \frac{3}{2}x - 7$ **65.** 0.2 **67. a)** 11.3 **b)** Positiva **c)** 7.075 **69. a–b)**



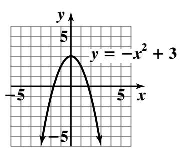
c) 123.8, 64.25, 31.75 **d)** 1995-2000, ya que el segmento de recta tiene la mayor pendiente. **71. a)** $h(x) = -x + 200$ **b)** 186 latidos por minuto **73. a)** $M(t) \approx 19.34t + 159.5$ **b)** \$275.54 mil millones **c)** \$410.92 mil millones **d)** 2006 **75. a)** $P(t) = -1.1t + 19.4$ **b)** Negativa **c)** 17.2% **d)** 9.5% **77. a)** $P(t) = 8300t + 110{,}500$ **b)** \$152,000 **c)** \$235,000 **d)** 2005 **79.** Es incorrecta la intersección con el eje y. **81.** La pendiente no es la correcta. **83.** Altura: 14.2 pulgadas, ancho: 6.4 pulgadas **86.** 19 **87.** 5 **88.** 2.4 **89.** Primero: 75 millas por hora; segundo: 60 millas por hora **90. a)** $x < -3$ o $x > 2$ **b)** $-3 < x < 2$

Examen de mitad de capítulo

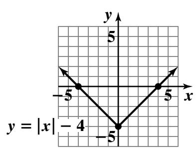
1. III [3.1] **2.** [3.1]



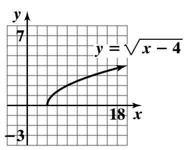
3. [3.1]



4. [3.1]

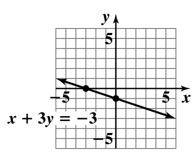


5. [3.1]

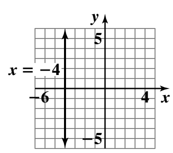


6. a) Una relación es cualquier conjunto de pares ordenados. **b)** Una función es una correspondencia entre un primer conjunto de elementos, el dominio, y un segundo conjunto de elementos, el rango, tal que a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un elemento en el rango. **c)** No **d)** Sí [3.2] **7.** Función; Dominio: {1, 2, 7, −5}, Rango: {5, −3, −1, 6} [3.2] **8.** No es una función; Dominio: $\{x|-2 \le x \le 2\}$, Rango: $\{y|-4 \le y \le 4\}$ [3.2] **9.** Función; Dominio: $\{x|-5 \le x \le 3\}$, Rango: $\{y|-1 \le y \le 3\}$ [3.2]

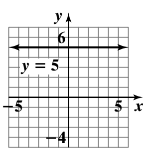
10. −21 [3.2] **11.** 105 pies [3.2] **12.** $7x - y = -6$ [3.3] **13.** [3.3]



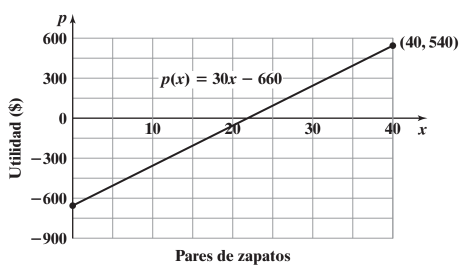
14. [3.3]



15. [3.3]



16. a)



b) 22 pares de zapatos **c)** 34 pares de zapatos [3.3]

17. $-\frac{5}{8}$ [3.4] **18.** $y = -2x + 2$ [3.4]

19. $y = \frac{3}{2}x + 9; \frac{3}{2}$; (0, 9) [3.4]

20. a) 5 **b)** (0, 1) **c)** $y = 5x + 1$ [3.4]

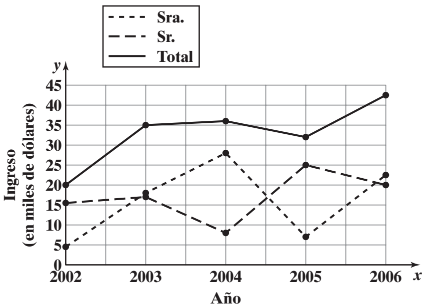
Conjunto de ejercicios 3.5

1. $y - y_1 = m(x - x_1)$ **3.** Dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son recíprocos negativos, o si una recta es vertical y la otra es horizontal. **5.** $y = 2x - 5$ **7.** $y = -\frac{1}{2}x + 1$ **9.** $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$ **11.** $y = -\frac{3}{2}x$ **13.** $y = \frac{1}{2}x - 5$ **15.** Paralela **17.** Ninguna **19.** Perpendicular **21.** Perpendicular **23.** Paralela **25.** Ninguna **27.** Perpendicular **29.** Paralela **31.** Ninguna **33.** $y = 2x + 1$ **35.** $2x - 5y = 19$ **37.** $y = -\frac{5}{3}x + 5$ **39.** $f(x) = -3x + 13$ **41.** $y = -\frac{2}{3}x + 6$ **43. a)** $C(s) = 45.7s + 95.8$ **b)** 324.3 calorías **45. a)** $d(p) = -0.20p + 90$ **b)** 38 reproductores de DVD **c)** \$225 **47. a)** $s(p) = 95p - 60$ **b)** 206 cometas **c)** \$3.00 **49. a)** $i(t) = 12.5t$ **b)** \$1500 **c)** 176 boletos **51. a)** $r(w) = 0.01w + 10$ **b)** \$46.13 **c)** 5000 libras **53. a)** $y(a) = -0.865a + 79.25$ **b)** 47.2 años **c)** 62.7 años de edad **55. a)** $w(a) \approx 0.189a + 10.6$ **b)** 14.758 kilogramos **58.** $\left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$ **59.** Invierta el sentido del símbolo de la desigualdad. **60. a)** Cualquier conjunto de parejas ordenadas **b)** Una correspondencia donde a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango. **c)** Las respuestas variarán. **61.** Dominio: $\{3, 4, 5, 6\}$; Rango: $\{-4, -1, 2, 7\}$

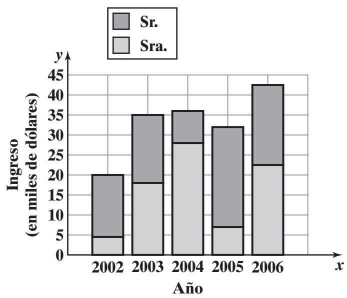
Conjunto de ejercicios 3.6

1. Sí, así es como está definida la suma de funciones. **3.** $g(x) \neq 0$, ya que la división entre cero no está definida. **5.** No, la resta no es conmutativa. Un ejemplo es $5 - 3 = 2$, pero $3 - 5 = -2$ **7. a)** 2 **b)** -8 **c)** -15 **d)** $-\frac{3}{5}$ **9. a)** $x^2 + 2x + 5$ **b)** $a^2 + 2a + 5$ **c)** 13 **11. a)** $x^3 + x - 4$ **b)** $a^3 + a - 4$ **c)** 6 **13. a)** $4x^3 - x + 4$ **b)** $4a^3 - a + 4$ **c)** 34 **15.** -7 **17.** 29 **19.** -60 **21.** Indefinida **23.** 13 **25.** $-\frac{3}{4}$ **27.** $2x^2 - 6$ **29.** 2 **31.** 18 **33.** 0 **35.** $-\frac{3}{7}$ **37.** $-\frac{1}{45}$ **39.** $-2x^2 + 2x - 6$ **41.** 3 **43.** -4 **45.** 1 **47.** Indefinida **49.** 0 **51.** 0 **53.** -3 **55.** -2 **57. a)** 2004 **b)** \$800 **c)** \$7900 **d)** \$900 **59. a)** 2003, ≈1.8 millones de barriles **b)** 1998, 2001 **c)** ≈1.4 millones de barriles **d)** ≈4.0 millones de barriles **61. a)** ≈20 **b)** ≈8 **c)** ≈12 **d)** ≈23

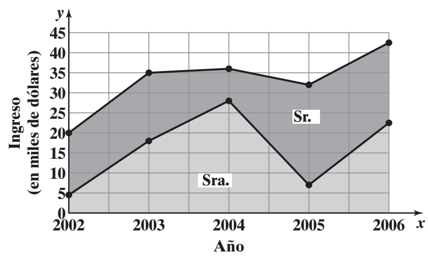
63. a)



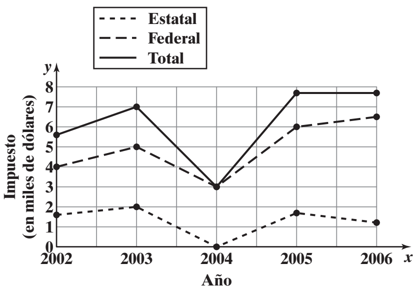
b)



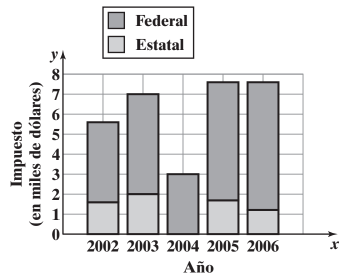
c)



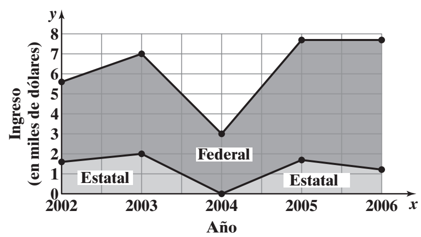
65. a)



b)

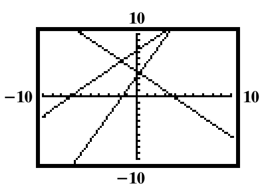


c)

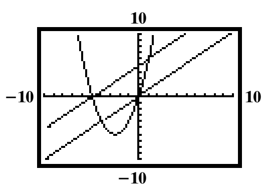


67. $f(a)$ y $g(a)$ deben tener signos contrarios o ambas iguales a cero. **69.** $f(a) = g(a)$ **71.** $f(a)$ y $g(a)$ deben tener signos opuestos.

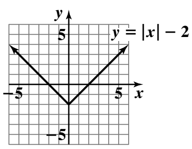
73.



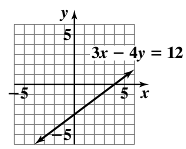
75.



78. $-\frac{1}{64}$ **79.** 2.96×10^6 **80.** $h = \frac{2A}{b}$ **81.** \$450 **82.**



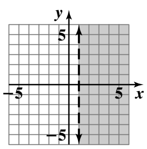
83.



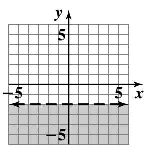
Conjunto de ejercicios 3.7

1. Los puntos en la recta son soluciones para la ecuación correspondiente, y no son soluciones si el símbolo usado es < o >. **3.** Si la recta pasa por el origen, el (0, 0) no puede usarse como punto de prueba.

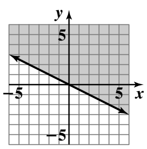
5.



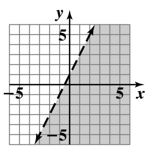
7.



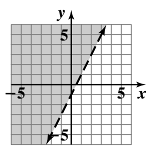
9.



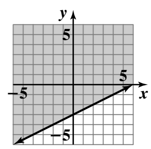
11.

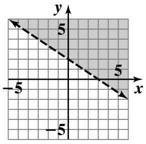


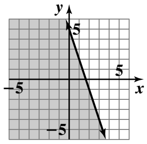
13.

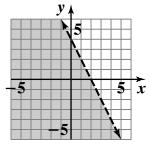


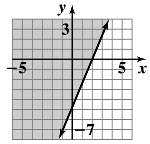
15.

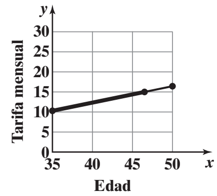


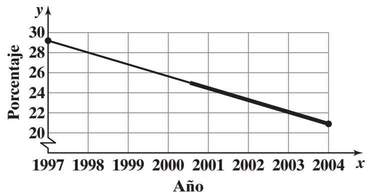
17. 

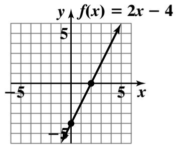
19. 

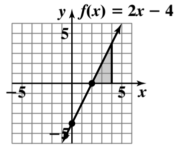
21. 

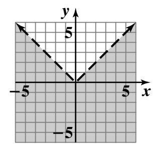
23. 

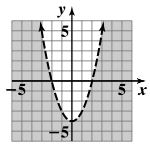
25. a)–b) 

c) 47 **27. a)–b)** 

c) 2003 **29. a)** 

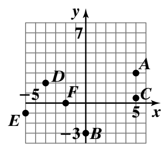
b) 

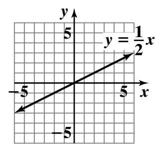
31. 

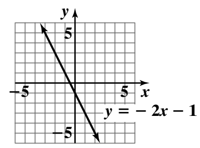
33. 

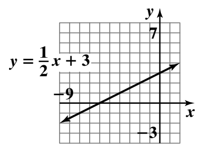
34. 9 **35.** 81.176 **36.** \$15.72 **37.** -4 **38.** $x + 2y = 2$ (son posibles otras respuestas) **39.** -2

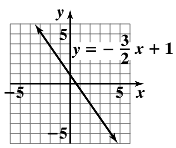
Ejercicios de repaso del capítulo 3

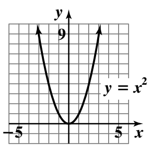
1. 

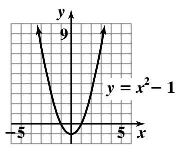
2. 

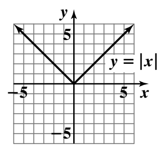
3. 

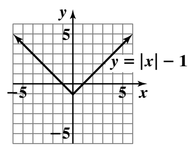
4. 

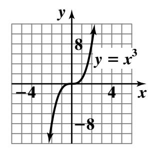
5. 

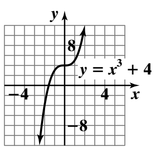
6. 

7. 

8. 

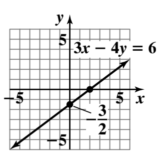
9. 

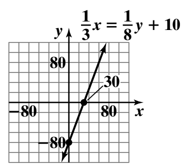
10. 

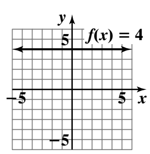
11. 

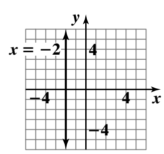
12. Una función es una correspondencia en la que a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un elemento del rango. **13.** No, no toda relación es una función. $\{(4, 2), (4, -2)\}$ es una relación, pero no es una función. Sí, toda función es una relación, ya que es un conjunto de parejas ordenadas. **14.** Sí, a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un elemento del rango. **15.** No, al elemento 2 del dominio le corresponde más de un elemento del rango (5 y -2). **16. a)** Sí, la relación es una función. **b)** Dominio: $\mathbb{R}$; Rango: $\mathbb{R}$

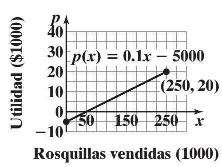
17. a) Sí, la relación es una función. **b)** Dominio: $\mathbb{R}$; Rango: $\{y|y \leq 0\}$ **18. a)** No, la relación no es una función. **b)** Dominio: $\{x|-3 \leq x \leq 3\}$; Rango: $\{y|-3 \leq y \leq 3\}$ **19. a)** No, la relación no es una función. **b)** Dominio: $\{x|-2 \leq x \leq 2\}$; Rango: $\{y|-1 \leq y \leq 1\}$ **20. a)** -2 **b)** $-h^2 + 3h - 4$ **21. a)** 1 **b)** $2a^3 - 3a^2 + 6$ **22.** Las respuestas variarán. Ésta es una interpretación posible: La velocidad del automóvil aumenta hasta 50 mph. Permanece en esta velocidad durante casi 11 minutos. Aumenta a 68 mph. Mantiene esa velocidad durante 5 minutos, y luego se detiene rápidamente. Queda detenido durante casi 5 minutos. Luego va en tráfico pesado durante casi 5 minutos. **23. a)** 1020 canastas **b)** 1500 canastas **24. a)** 180 pies **b)** 52 pies

25. 

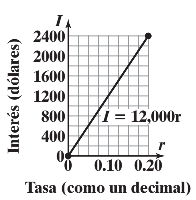
26. 

27. 

28. 

29. a) 

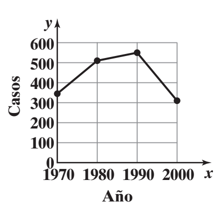
b) 50,000 rosquillas **c)** 270,000 rosquillas

30. 

31. $m = \frac{1}{2}, (0, -5)$ **32.** $m = -2, (0, 3)$ **33.** $m = -\frac{3}{5}, \left(0, \frac{13}{5}\right)$ **34.** $m = -\frac{3}{4}, \left(0, \frac{5}{2}\right)$

35. m no está definida, no hay intersección con el eje y **36.** $m = 0\ (0, 8)$ **37.** 3 **38.** $-\frac{1}{3}$ **39.** $m = 0$; $y = 3$

40. m no está definida; $x = 2$ **41.** $m = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}x + 2$ **42. a)** -2 **b)** $(0, 1)$ **c)** $y = -2x + 1$ **43.** $(0, 0)$

44. a) 

b) 1970–1980: 16.4; 1980–1990: 4.2; 1990–2000: -23.5 **c)** 1970–1980 **45.** $n(t) = 0.7t + 35.6$

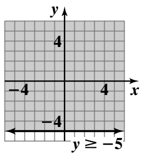
46. Paralela **47.** Perpendicular **48.** Ninguna **49.** $y = \frac{1}{2}x + 7$ **50.** $y = -x - 2$ **51.** $y = -\frac{2}{3}x + 6$

52. $y = \frac{5}{2}x + 3$ **53.** $y = -\frac{5}{3}x - 4$ **54.** $y = -\frac{1}{2}x + 7$ **55.** Ninguna **56.** Paralela

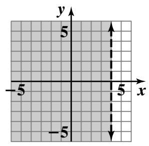
57. Perpendicular **58.** Ninguna **59. a)** $r(a) = 0.61a - 10.59$ **b)** \$13.81

60. a) $C(r) = 1.8r + 435$ **b)** 507 calorías **c)** ≈ 91.7 yardas por minuto **61.** $x^2 - x - 1$ **62.** 11

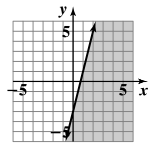
63. $-x^2 + 5x - 9$ **64.** -15 **65.** -56 **66.** 4 **67.** $-\frac{2}{3}$ **68.** -2 **69. a)** ≈4.6 mil millones **b)** ≈2.1 mil millones **c)** ≈0.8 mil millones **d)** ≈33% **70. a)** ≈\$47,000 **b)** ≈\$28,000 **c)** ≈\$3000 **71.**



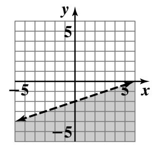
72.



73.

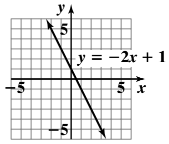


74.

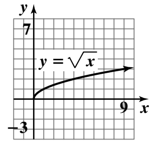


Examen de práctica del capítulo 3

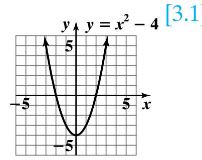
1. [3.1]



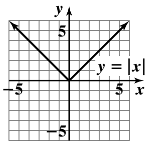
2. [3.1]



3. [3.1]

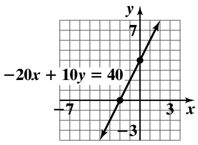


4. [3.1]

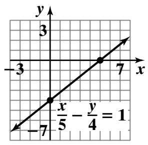


5. Una función es una correspondencia en la que a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un elemento del rango. [3.2]
6. Sí, ya que a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un elemento del rango. [3.2] **7.** Sí; Dominio: $\mathbb{R}$; Rango: $\{y|y \leq 4\}$ [3.2] **8.** No; Dominio: $\{x|-3 \leq x \leq 3\}$; Rango: $\{y|-2 \leq y \leq 2\}$ [3.2] **9.** 29 [3.2]

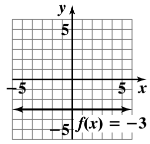
10. [3.3]



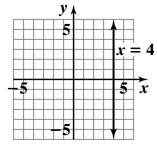
11. [3.3]



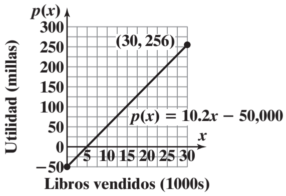
12. [3.3]



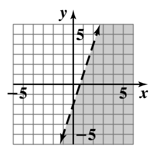
13. [3.3]



14. a)



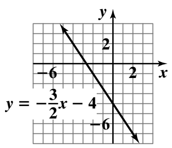
b) 4900 libros **c)** 14,700 libros [3.3] **15.** $m = \frac{4}{3}$, $(0, -5)$ [3.4] **16.** $y = 3x - 7$ [3.4] **17.** $y = -2x + 7$ [3.4] **18.** $p(t) = 2.9044t + 274.634$ [3.4] **19.** Paralela, la pendiente de ambas rectas es la misma, $\frac{2}{3}$. [3.5] **20. a)** $r(t) = -3t + 266$ **b)** 248 por cada 100,000 **c)** 206 por cada 100,000 [3.5] **21.** 12 [3.6] **22.** $-\frac{3}{7}$ [3.6] **23.** $2a^2 - a$ [3.6] **24. a)** ≈44 millones de toneladas **b)** ≈18 millones de toneladas **c)** ≈26 millones de toneladas [3.6] **25.** [3.7]



Examen de repaso acumulativo

1. a) $\{3, 5, 7\}$ **b)** $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 14\}$ [1.2] **2. a)** Ninguno **b)** $-6, -4, \frac{1}{3}, 0, \sqrt{3}, 4.67, \frac{37}{2}, -\sqrt{5}$ [1.2] **3.** 100 [1.4] **4.** $25x^4y^6$ [1.5] **5.** $\frac{x^9}{8y^{15}}$ [1.5]

6. a) 3.052×10^{12} pies cúbicos **b)** 7.412×10^{12} pies cúbicos **c)** 2.398×10^{13} pies cúbicos [1.6] **7.** 0 [2.1] **8.** $-\frac{138}{5}$ [2.1] **9.** $9x - 7$ [2.1] **10.** $b_1 = \frac{2A}{h} - b_2$ [2.2] **11.** 12 galones [2.4] **12.** $x > -\frac{10}{3}$ [2.5] **13.** $2 < x < 6$ [2.5] **14.** $\{-15, 1\}$ [2.6] **15.** $\{x|-1 \leq x \leq 2\}$ [2.6] **16.** [3.1]



17. a) No es una función **b)** Dominio: $\{x|x \leq 2\}$; Rango: $\mathbb{R}$ [3.2] **18.** $-\frac{4}{9}$ [3.4] **19.** Ninguna [3.5] **20.** $x^2 + 7x - 11$ [3.6]

Capítulo 4

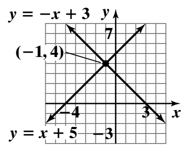
Uso de su calculadora graficadora, 4.1

1. (2.76, 0.82) **2.** (13.29, 9.57) **3.** (−4.67, −4.66) **4.** (−2.25, 10.52)

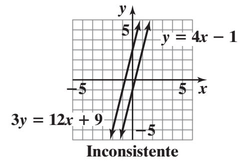
Conjunto de ejercicios 4.1

1. La solución de un sistema de ecuaciones lineales es el o los puntos que satisfacen todas las ecuaciones en el sistema. **3.** Un sistema dependiente es un sistema que tiene un número infinito de soluciones. **5.** Un sistema consistente de ecuaciones tiene una solución. **7.** Compare las pendientes y las intercepciones con el eje y de las ecuaciones. Si las pendientes son diferentes, el sistema es consistente. Si las pendientes y las intercepciones y son iguales, el sistema es dependiente. Si las pendientes son iguales y las intercepciones con el eje y son diferentes, el sistema es inconsistente. **9.** Obtendrá una proposición verdadera, como $0 = 0$. **11.** Ninguna **13. b)** **15. b)** **17.** Consistente; una solución **19.** Dependiente; un número infinito de soluciones.

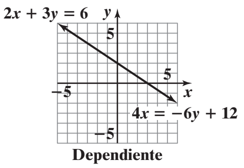
21. Inconsistente; ninguna solución **23.** Inconsistente; ninguna solución **25.**



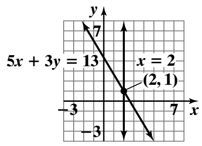
27.



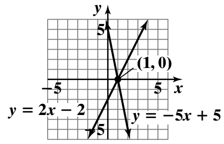
29.



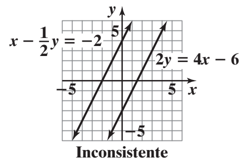
31.



33.



35.



37. $(-1, 0)$ **39.** $(-3, -3)$ **41.** $(2, 1)$ **43.** $(0.5, 0.7)$ **45.** Un número infinito de soluciones.

47. Ninguna solución **49.** $\left(-\frac{19}{5}, -3\right)$ **51.** $(8, 6)$ **53.** $(3, 6)$ **55.** $\left(-1, -\frac{5}{3}\right)$ **57.** Un número infinito de soluciones. **59.** Ninguna solución **61.** $(1, 1)$ **63.** Un número infinito de soluciones. **65.** $\left(\frac{14}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ **67.** $\left(\frac{37}{7}, \frac{19}{7}\right)$ **69.** $(3, 2)$ **71.** $(4, 0)$ **73.** $(4, 3)$ **75.** $\left(\frac{192}{25}, \frac{144}{25}\right)$ **77. a), b)** y **c)** Las respuestas variarán. **79.** 2021, \$53,000 **81.** Multiplique la primera ecuación por 2 y observe que la nueva ecuación es idéntica a la segunda ecuación. **83. a)** Un número infinito, ya que un sistema de ecuaciones puede tener cero soluciones, una solución o un número infinito de soluciones. **b)** $m = -4, y = -4x - 13, (0, -13)$ **c)** Sí **85.** Un ejemplo es: $x + y = 1, 2x + 2y = 2$, escriba una ecuación y luego multiplíquela por una constante para obtener la segunda ecuación. **87. a)** Un ejemplo es: $x + y = 7, x - y = -3$. **b)** Elija coeficientes para x y y, y luego utilice las coordenadas dadas para determinar las constantes. **89.** $A = 2$ y $B = 5$ **91.** $m = 4, b = -2$ **93.** El sistema es dependiente o una gráfica no aparece en la ventana de visualización. **95.** $(8, -1)$ **97.** $(-1, 2)$ **99.** $\left(\frac{1}{a}, 5\right)$ **103.** Los números racionales pueden expresarse como cocientes de dos enteros, en los que el denominador no es 0, mientras que los números irracionales no. **104. a)** Sí, el conjunto de los números reales incluye al conjunto de los números racionales. **b)** Sí, el conjunto de los números reales incluye al conjunto de los números irracionales. **105.** $-\frac{17}{4}$ **106.** $\mathbb{R}$ **107.** 520.20 **108.** No, los puntos $(-3, 4)$ y $(-3, -1)$ tienen la misma primera coordenada pero diferente segunda coordenada. **109.** Indefinida

Conjunto de ejercicios 4.2

1. La gráfica será un plano. **3.** $(1, -2, -4)$ **5.** $\left(-7, -\frac{35}{4}, -3\right)$ **7.** $(0, 3, 6)$ **9.** $(1, 2, 0)$ **11.** $(-3, 15, -7)$ **13.** $(3, 1, -2)$ **15.** $(2, -1, 3)$ **17.** $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ **19.** $(0, -1, 0)$ **21.** $\left(-\frac{11}{17}, \frac{7}{34}, -\frac{49}{17}\right)$ **23.** $(0, 0, 0)$ **25.** $(4, 6, 8)$ **27.** $\left(\frac{2}{3}, \frac{23}{15}, \frac{37}{15}\right)$ **29.** $(1, 1, 2)$ **31.** Inconsistente **33.** Dependiente **35.** Inconsistente **37.** Ningún punto es común a los tres planos. Por lo tanto, el sistema es inconsistente. **39.** Un punto es común a los tres planos; por lo tanto, el sistema es consistente. **41. a)** Sí, los 3 planos pueden ser paralelos **b)** Sí, los 3 planos pueden intersecarse en un punto **c)** No, los 3 planos no pueden intersecarse en exactamente dos puntos. **43.** $A = 9, B = 6, C = 2; 9x + 6y + 2z = 1$ **45.** Las respuestas variarán. Un ejemplo es $x + y + z = 10, x + 2y + z = 11, x + y + 2z = 16$ **47. a)** $a = 1, b = 2, c = -4$ **b)** $y = x^2 + 2x - 4$, sustituya 1 por a, 2 por b y -4 por c en $y = ax^2 + bx + c$ **49.** $(1, 2, 3, 4)$ **51. a)** $\frac{1}{4}$ hora o 15 minutos **b)** 1.25 millas **52.** $\left\{x \middle| x < -\frac{3}{2} \text{ o } x > \frac{27}{2}\right\}$ **53.** $\left\{x \middle| -\frac{8}{3} < x < \frac{16}{3}\right\}$ **54.** $\emptyset$

Conjunto de ejercicios 4.3

1. Irlanda: 70,273 kilómetros cuadrados, Georgia: 69,700 kilómetros cuadrados **3.** Hamburguesa, 21 gramos, papas fritas, 67 gramos **5.** Hot dog: \$2, soda: \$1 **7.** 128 MB: 72 fotos, 512 MB: 288 fotos **9.** 25°, 65° **11.** 52°, 128° **13.** 12.2 millas por hora, 3.4 millas por hora **15.** \$500, 4% **17.** 1.2 onzas de 5%, 1.8 onzas de 30% **19.** 10 galones de concentrado, 190 galones de agua **21.** $17\frac{1}{3}$ libras de alpiste, $22\frac{2}{3}$ libras de semilla de girasol **23.** Adulto: \$29, niño: \$18 **25.** \$6000 al 5%, \$4000 al 6% **27.** 160 galones de entera, 100 galones de descremada **29.** 7 libras de Selección de la Temporada, 13 libras Mezcla del Jardín **31.** 50 millas por hora, 55 millas por hora **33.** Cabrina: 8 horas, Dabney: 3.4 horas **35.** 80 gramos de A, 60 gramos de B **37.** 200 gramos de la primera aleación, 100 gramos de la segunda aleación **39.** 2012 **41.** Tom: 60 millas por hora, Melissa: 75 millas por hora **43.** Personal: 3, estados de cuenta: 4, publicidad: 17 **45.** Alabama: 52, Tennessee: 45, Texas: 44 **47.** Singh: 69, Woods: 65, Mickelson: 57 **49.** Haverhill: 36.5 pulgadas, Salem: 38 pulgadas, Plymouth, 38 pulgadas **51.** Florida: 12, California: 11, Louisiana: 9 **53.** 30°, 45°, 105° **55.** \$1500 al 3%, \$3000 al 5%, \$5500 al 6% **57.** 4 litros de la solución al 10%; 2 litros de la solución al 12%; 2 litros de la solución al 20% **59.** 10 sillas para niño; 12 sillas estándar; 8 sillas para ejecutivo **61.** $I_A = \frac{27}{38}; I_B = -\frac{15}{38}; I_C = -\frac{6}{19}$ **64.** $-\frac{35}{8}$ **65.** 4 **66.** Utilice la prueba de la recta vertical. **67.** $y = x - 10$

Examen de mitad de capítulo

1. a) $y = 7x - 13, \quad y = -\frac{2}{3}x + 3,$ **b)** Consistente **c)** Una solución [4.1] **2.** $(1, 2)$ [4.1] **3.** $(-1, -3)$ [4.1] **4.** $(-4, 1)$ [4.1] **5.** $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ [4.1] **6.** $(-3, 4)$ [4.1] **7.** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ [4.1] **8.** $(6, 12)$ [4.1]

9. Inconsistente, no tiene solución [4.1] **10.** Dependiente, un número infinito de soluciones [4.1] **11.** $(1, 2, -1)$ [4.2] **12.** $(2, 0, 3)$ [4.2] **13.** La solución debe tener valores para y y z además de un valor para x. La solución es $(1, -1, 4)$ o $x = 1$, $y = -1$, $z = 4$. [4.2] **14.** 10 libras de anacardos, 5 libras de pacanas [4.3] **15.** 5, 7, 20 [4.3]

Conjunto de ejercicios 4.4

1. Tiene el mismo número de filas y de columnas. **3.** Cambie el -2 en la segunda fila por 1, multiplicando la fila 2 por $-\frac{1}{2}$, o $-\frac{1}{2}R_2$ **5.** Intercambie R_2 y R_3 para obtener un 1 en la segunda fila, segunda columna. **7.** Dependiente

9. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -5 \\ 3 & -7 & -4 \end{array}\right]$ **11.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -8 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \\ 4 & 7 & 2 & -1 \end{array}\right]$ **13.** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 12 \\ 0 & 23 & 42 \end{array}\right]$ **15.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & -38 & -\frac{13}{4} \\ 6 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]$ **17.** $(3, 0)$ **19.** $(-5, 1)$ **21.** $(0, 1)$

23. Sistema dependiente **25.** $\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$ **27.** Sistema inconsistente **29.** $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right)$ **31.** $\left(\frac{4}{5}, -\frac{7}{8}\right)$ **33.** $(2, 1, 3)$ **35.** $(3, 1, 2)$ **37.** $\left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$

39. Sistema dependiente **41.** $\left(\frac{1}{2}, 2, 4\right)$ **43.** Sistema inconsistente **45.** $\left(5, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ **47.** No, éste es el mismo cuando se intercambia el orden de las ecuaciones. **49.** $\angle x = 30°$, $\angle y = 65°$, $\angle z = 85°$ **51.** 26% para Chiquita, 25% para Dole, 14% para Del Monte, 35% para otros.

53. a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$ **b)** $\{4, 6\}$ **54. a)** 

b) $\{x \mid -1 < x \leq 4\}$ **c)** $(-1, 4]$ **55.** Una gráfica es una ilustración del conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación. **56.** -71

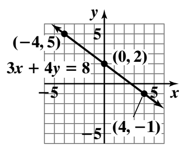
Conjunto de ejercicios 4.5

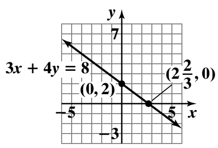
1. Las respuestas variarán. **3.** Si $D = 0$ y D_x, D_y o $D_z \neq 0$, el sistema es inconsistente. **5.** $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$

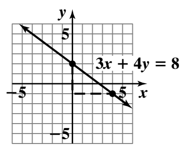
7. 6 **9.** -8 **11.** -12 **13.** 44 **15.** $(-5, 2)$ **17.** $(6, -4)$ **19.** $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ **21.** $(-7, -2)$ **23.** Un número infinito de soluciones

25. $(2, -3)$ **27.** No hay solución **29.** $(2, 5)$ **31.** $(1, -1, 3)$ **33.** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$ **35.** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, 2\right)$ **37.** $(-1, 0, 2)$ **39.** Un número infinito de soluciones **41.** $(1, -1, 2)$ **43.** No hay solución **45.** $(3, 4, 1)$ **47.** $(-1, 5, -2)$ **49.** Tendrán signos opuestos. Esto puede verse al comparar $a_1b_2 - a_2b_1$ con $a_2b_1 - a_1b_2$ **51.** 0 **53.** 0 **55.** Sí, tendrán signos opuestos. **57.** No, igual valor que el original

59. Sí, el valor es el doble del original **61.** 5 **63.** 6 **65. a)** $x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ **b)** $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ **66.** $\left(-\infty, \frac{14}{11}\right)$

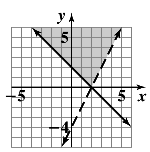
67.


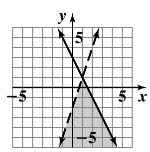
68.


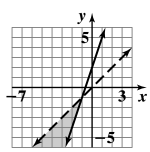
69.


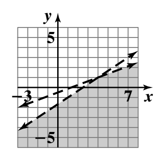
Conjunto de ejercicios 4.6

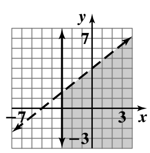
1. Las respuestas variarán. **3.** Sí, ya que el punto de intersección satisface ambas desigualdades, también satisface el sistema de desigualdades.

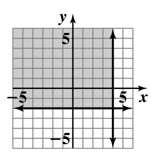
5.


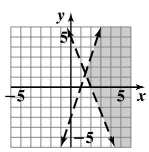
7.


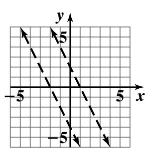
9.


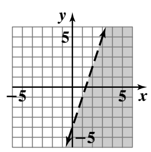
11.


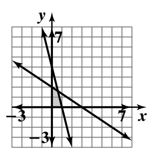
13.


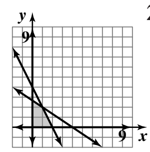
15.


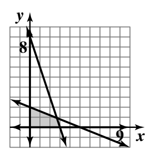
17.


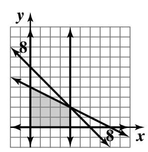
19.


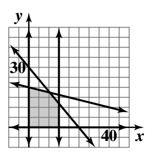
21.


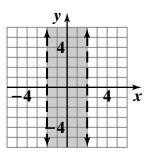
23.


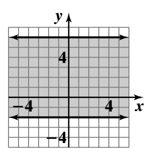
25.


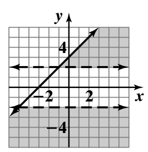
27.


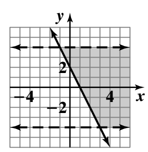
29.


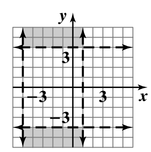
31.


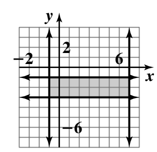
33.


35.


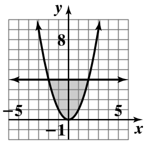
37.


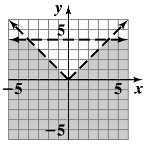
39.


41.


43.


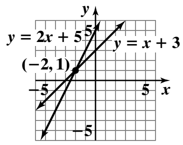
45. a) Región A **b)** Región B **47.** Sí, las rectas frontera son paralelas, podría no haber solución. Un ejemplo es $y > 3x + 1$; $y < 3x - 2$ **49.** No hay solución. Lados opuestos de la misma recta están sombreados, y sólo una desigualdad incluye a la recta. **51.** Hay un número infinito de soluciones. Ambas desigualdades incluyen a la recta $5x - 2y = 3$. **53.** Hay un número infinito de soluciones. Las rectas son paralelas. Las rectas no son paralelas ni idénticas.

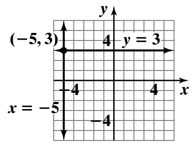
55. 

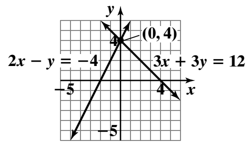
57. 

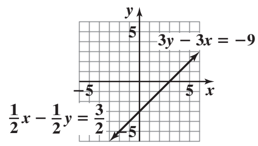
59. $f_2 = \dfrac{f_3 d_3 - f_1 d_1}{d_2}$ **60.** Dominio: $\{-1, 0, 4, 5\}$; Rango: $\{-5, -2, 2, 3\}$
61. Dominio: $\mathbb{R}$; Rango: $\mathbb{R}$
62. Dominio: $\mathbb{R}$; Rango: $\{y|y \geq -1\}$

Ejercicios de repaso del capítulo 4

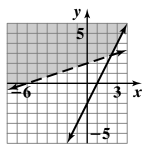
1. Inconsistente; no hay solución **2.** Consistente; una solución **3.** Consistente; una solución **4.** Consistente; una solución **5.** 

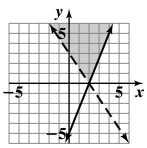
6. 

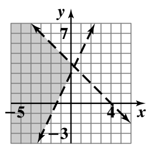
7. 

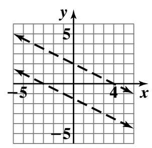
8. 

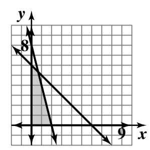
Dependiente, un número infinito de soluciones

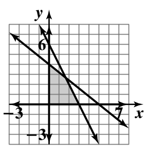
9. $(2, -6)$ **10.** $(-1, -1)$ **11.** $(2, 5)$ **12.** $(5, 2)$ **13.** $(3, -1)$ **14.** $(-8, 11)$ **15.** $(-1, 3)$ **16.** $(3, -2)$ **17.** $\left(\frac{32}{13}, \frac{8}{13}\right)$ **18.** $\left(-1, \frac{13}{3}\right)$ **19.** $(1, 2)$ **20.** $\left(\frac{7}{5}, \frac{13}{5}\right)$ **21.** $(6, -2)$ **22.** $\left(-\frac{78}{7}, -\frac{48}{7}\right)$ **23.** Un número infinito de soluciones. **24.** No hay solución **25.** $(1, 2, -4)$ **26.** $(-1, 3, -2)$ **27.** $(-5, 1, 2)$ **28.** $(3, -2, -2)$ **29.** $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 3\right)$ **30.** $(0, 2, -3)$ **31.** No hay solución **32.** Un número infinito de soluciones **33.** Luan: 38, Jennifer: 28 **34.** Aeroplano: 520 mph, viento: 40 mph **35.** Combinar 2 litros de la solución de ácido al 20% con 4 litros de la solución ácida al 50% **36.** Se vendieron 410 boletos para adulto y 240 boletos para niño **37.** Sus edades son 41 y 77 años. **38.** \$20,000 invertidos al 7%, \$15,000 invertidos al 5% y \$5000 invertidos al 3%. **39.** $(11, -2)$ **40.** $(3, 1)$ **41.** Un número infinito de soluciones **42.** $(2, 1, -2)$ **43.** No hay solución **44.** $(1, -1, 3)$ **45.** $(2, 3)$ **46.** $(-3, 2)$ **47.** $(-1, 2)$ **48.** $(-2, 3, 4)$ **49.** $(1, 1, 2)$ **50.** No hay solución **51.** 

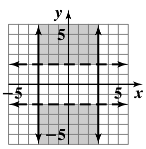
52. 

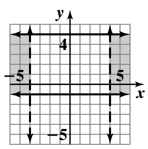
53. 

54. No hay solución 

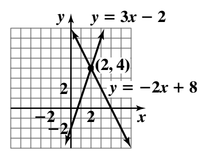
55. 

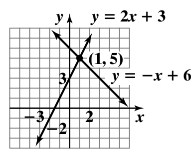
56. 

57. 

58. 

Examen de práctica del capítulo 4

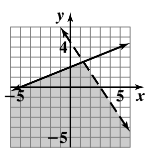
1. Las respuestas variarán [4.1] **2.** Consistente; una solución [4.1] **3.** Dependiente, un número infinito de soluciones [4.1] **4.** Inconsistente; no hay solución [4.1] **5.** 

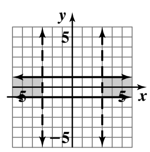
[4.1] **6.** 

[4.1]

7. $(1, 1)$ [4.1] **8.** $(-3, 2)$ [4.1] **9.** $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ [4.1] **10.** Un número infinito de soluciones [4.1] **11.** $\left(\frac{44}{19}, \frac{48}{19}\right)$ [4.1] **12.** $(1, -1, 2)$ [4.2]

13. $\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & 9 & -13 \end{array}\right]$ [4.4] **14.** $\left[\begin{array}{rrr|r} 6 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 12 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right]$ [4.4] **15.** $(4, -1)$ [4.4] **16.** $(3, -1, 2)$ [4.4] **17.** -1 [4.5] **18.** 165 [4.5]

19. $(-3, 2)$ [4.5] **20.** $(3, 1, -1)$ [4.5] **21.** 8 libras de semilla de girasol; 12 libras de mezcla para aves [4.3] **22.** $6\frac{2}{3}$ litros de solución al 6%; $3\frac{1}{3}$ litros de solución al 15% [4.3] **23.** 4, 9 y 16 [4.3] **24.** 

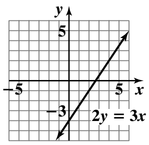
[4.6] **25.** 

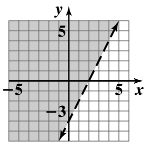
[4.6]

Examen de repaso acumulativo

1. 3 [1.4] **2. a)** 9, 1 **b)** $\frac{1}{2}, -4, 9, 0, -4.63, 1$ **c)** $\frac{1}{2}, -4, 9, 0, \sqrt{3}, -4.63, 1$ [1.2]

3. $-|-8|, -1, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, |-4|, |-12|$ [1.3] **4.** 7 [2.1] **5.** $\frac{17}{4}$ [2.1] **6.** 6, -3 [2.6] **7.** $x = 2M - a$ [2.2] **8.** $\left\{x \middle| \frac{2}{3} < x \leq \frac{34}{3}\right\}$ [2.5]

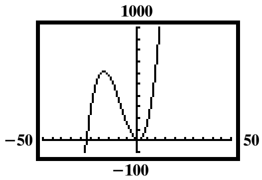
9. $\dfrac{y^{10}}{9x^4}$ [1.5] **10.** 

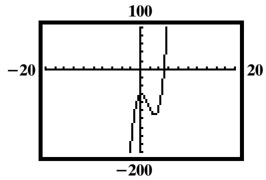
[3.3] **11.** $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$ [3.5] **12.** 

[3.7] **13. a)** función **b)** función **c)** no es función [3.2] **14. a)** $-\dfrac{1}{7}$ **b)** $\dfrac{h+3}{h^2-9}$ **c)** indefinida [3.2]
15. $(1, 3)$ [4.1] **16.** $(7, -1)$ [4.1] **17.** $(2, 1, 3)$ [4.2] **18.** 10°, 80°, 90° [2.3] **19.** 1 hora [2.4] **20.** 600 al \$20, 400 al \$16 [4.3]

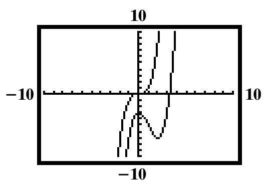
Capítulo 5

Cómo usar su calculadora graficadora, 5.1

1. 

2. 

Conjunto de ejercicios 5.1

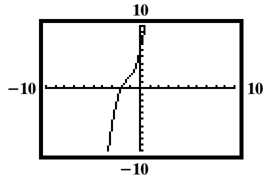
1. Los términos son las partes que se suman **3.** Un polinomio es una suma finita de términos en la que todas las variables tienen exponentes que son números enteros no negativos y ninguna variable aparece en el denominador. **5.** El coeficiente principal es el coeficiente del término principal. **7. a)** Es el mismo que el término de mayor grado. **b)** 7 **9. a)** Un polinomio es lineal si su grado es 0 o 1. **b)** Las respuestas variarán. Un ejemplo es $x + 4$. **11. a)** Un polinomio es cúbico si tiene grado 3 y tiene una variable. **b)** Las respuestas variarán. Un ejemplo es $x^3 + x - 4$. **13.** Las respuestas variarán. Un ejemplo es $x^5 + x + 1$
15. Monomio **17.** Monomio **19.** No es un polinomio; hay un exponente -3. **21.** No es un polinomio; hay un exponente; $\dfrac{1}{2}$ exponente
23. $-x^2 + 2x - 5, 2$ **25.** $10x^2 + 3xy + 9y^2, 2$ **27.** En orden descendente, 4 **29. a)** 6 **b)** 3 **31. a)** 6 **b)** 9 **33. a)** 17 **b)** $-\dfrac{1}{3}$
35. -3 **37.** -7 **39.** -2.0312 **41.** $x^2 + 9x - 6$ **43.** $x^2 - 13x + 2$ **45.** $2y^2 + 9y - 11$ **47.** $-\dfrac{2}{3}a^2 - \dfrac{29}{36}a + 5$
49. $-3.5x^2 - 2.1x - 19.6$ **51.** $-\dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2y + 9xy^2$ **53.** $5a - 10b + 13c$ **55.** $8a^2b - 10ab + 11b^2$ **57.** $7r^2 - 4rt - 3t^2$
59. $10x^2 - 8x - 9$ **61.** $-3w^2 + 6w$ **63.** $3x + 19$ **65.** $-3x^2 + 2x - 12$ **67.** $-5.4a^2 - 5.7a - 26.4$ **69.** $-\dfrac{11}{2}x^2y + xy^2 + \dfrac{2}{45}$
71. $5x^{2r} - 10x^r + 3$ **73.** $-x^{2s} - 4x^s + 19$ **75.** $7b^{4n} - 3b^{3n} - 4b^{2n} + 1$ **77.** $4x^2 + 8x + 24$ **79.** $3x^2 + 4x + 19$
81. $2x^2 + 12x + 9$ **83.** No, por ejemplo $(x^2 + x + 1) + (x^3 - 2x^2 + x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$ **85.** No, por ejemplo $(x^2 + 3x - 5) + (-x^2 - 4x + 2) = -x - 3$ **87.** 144 metros cuadrados **89.** $A \approx 113.10$ pulgadas cuadradas **91.** 674 pies
93. 105 comités **95. a)** \$674 **b)** \$1010 **97. a)** $P(x) = 2x^2 + 360x - 8050$ **b)** \$47,950 **99. c)** La intercepción y es $(0, -4)$ y el coeficiente principal es positivo **101. c)** La intercepción y es $(0, -6)$ y el coeficiente principal es negativo **103. a)** \$120.8 mil millones **b)** Sí **c)** \$286.4 mil millones **105.** \$88,210 **107. a)** 

b) Creciente **c)** Las respuestas variarán **d)** Decreciente **e)** Las respuestas variarán
109. b) La intercepción y es $(0, -5)$ y el coeficiente principal es negativo
113. 3 **114.** $\dfrac{15}{16}$ **115.** 6 horas **116.** $-\dfrac{2}{11}$ **117.** $(-4, 0, -1)$

Conjunto de ejercicios 5.2

1. a)–d) Las respuestas variarán. **3. a)** Las respuestas variarán. **b)** $x^3 - 2x^2 - 21x + 12$ **5. a)** Las respuestas variarán. **b)** Las respuestas variarán. Una posible respuesta es $(x + 4)(x - 4)$. **c)** Las respuestas variarán. **d)** Las respuestas variarán. Una posible respuesta es $x^2 - 16$. **7.** Sí, por ejemplo $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$ **9.** $24x^2y^5$ **11.** $\dfrac{1}{9}x^7y^8z^2$
13. $6x^6y^3 - 15x^3y^4 - 12x^2y$ **15.** $2xyz + \dfrac{8}{3}y^2z - 8y^3z$ **17.** $0.6x^2 - 1.5x + 3.3y$ **19.** $2.85a^{11}b^5 - 1.38a^9b^7 + 0.36a^6b^9$
21. $12x^2 - 38x + 30$ **23.** $-2x^3 + 8x^2 - 3x + 12$ **25.** $x^2 + \dfrac{23}{6}xy - \dfrac{2}{3}y^2$ **27.** $0.09a^2 - 0.25b^2$ **29.** $x^3 - x^2 - 11x - 4$
31. $2a^3 - 7a^2b + 5ab^2 - 6b^3$ **33.** $x^4 + 2x^2 + 10x + 7$ **35.** $5x^4 + 29x^3 + 14x^2 - 28x + 10$ **37.** $3m^4 - 11m^3 - 5m^2 - 2m - 20$
39. $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ **41.** $10r^4 - 2r^3s - r^2s^2 + rs^3 - 2s^4$ **43.** $x^2 + 4x + 4$ **45.** $4x^2 - 28x + 49$ **47.** $16x^2 - 24xy + 9y^2$
49. $25m^4 - 4n^2$ **51.** $y^2 + 8y - 4xy + 16 - 16x + 4x^2$ **53.** $25x^2 + 20xy + 10x + 4y^2 + 4y + 1$ **55.** $a^2 - b^2 - 8b - 16$
57. $2x^3y + 2x^2y^2 + 24xy^3$ **59.** $2x^3y^2 + \dfrac{3}{2}x^2y^3 - \dfrac{7}{2}xy^6$ **61.** $\dfrac{3}{5}x^2y^5z^7 + 3x^2y^4z^2 - \dfrac{1}{15}x^2y^3z^9$ **63.** $21a^2 + 10a - 24$ **65.** $64x^2 - \dfrac{1}{25}$
67. $x^3 - \dfrac{3}{2}x^2y + \dfrac{3}{4}xy^2 - \dfrac{1}{8}y^3$ **69.** $2x^3 + 10x^2 + 9x - 9$ **71.** $6p^3 - p^2q - 16pq^2 + 6q^3$ **73.** $9x^2 + 12x + 4 - y^2$
75. $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ **77.** $2x^3 - 4x^2 - 64x + 192$ **79. a)** $x^2 + x - 30$ **b)** -10 **81. a)** $10x^3 + 36x^2 - 2x - 12$ **b)** 1196
83. a) $-x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x$ **b)** -72 **85.** $x^2 + 5x$ **87.** $x^2 + y^2$ **89. a)** y **b)** $x^2 + 7x + 12$ **91.** $36 - x^2$ **93. a)** $11x + 12$ **b)** 117 pulgadas cuadradas, 50 pulgadas cuadradas. **95.** $(x + 7)(x - 7)$, producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos.

97. $(x + 6)(x + 6)$, fórmula del cuadrado de un binomio **99.** $a(x - n)(x - n)(x - n)$ **101. a)** Las respuestas variarán. **b)** $a^2 + 2ab + b^2$ **c)** $a^2 + 2ab + b^2$ **d)** Iguales. **103. a)** $A = P(1 + r)^t$ **b)** \$1123.60 **105. a)** 110 formas **b)** $P(n) = n^2 - n$ **c)** 110 formas **d)** Sí **107.** $a^2 + 2ab + b^2 - 3a - 3b + 5$ **109.** $15x^{3t-1} + 18x^{4t}$ **111.** $12x^{3m} - 18x^m - 10x^{2m} + 15$ **113.** $y^{a^2-b^2}$ **115.** $x^4 - 12x^3y + 54x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4$ **117. a)** Las respuestas variarán. **b)**



Es correcta.

119. $y^2 - 2y - 2xy + 2x + x^2 + 1$ **121.** $\frac{43}{60}$ **122.** $8r^6s^{15}$ **123.** $\left(-\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right]$ **124.** $\frac{15}{4}$

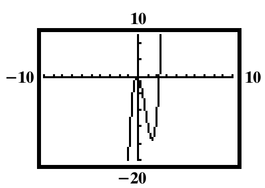
Conjunto de ejercicios 5.3

1. a) Las respuestas variarán. **b)** $\frac{5}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{4}{3}x - 4 + \frac{1}{3x}$ **3.** Sí; Las respuestas variarán. **5.** Colóquelas en orden descendente de la variable. **7. a)** Las respuestas variarán. **b)** $x + 8 + \frac{36}{x - 5}$ **9.** No, ya que el residuo es diferente de 0. **11.** x^2 **13.** a^4 **15.** z^8 **17.** $4r^6s^2$ **19.** $5x^8y^{11}$ **21.** $2x + 9$ **23.** $2x + 1$ **25.** $\frac{5}{3}y^2 + 2y - 4$ **27.** $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2$ **29.** $4x^2 - 5xy - \frac{5}{2y}$ **31.** $\frac{9x}{2y} - 6x^2 + \frac{15y}{2x}$ **33.** $\frac{z}{2} + z^2 - \frac{3}{2}x^2y^4z^7$ **35.** $x + 2$ **37.** $2x + 4$ **39.** $3x + 2$ **41.** $x + 5 - \frac{2}{x + 1}$ **43.** $2b + 5 + \frac{2}{b - 2}$ **45.** $4x + 9 + \frac{2}{2x - 3}$ **47.** $2x + 6$ **49.** $x^2 + 2x + 3 + \frac{1}{x + 1}$ **51.** $2y^2 + 3y - 1 - \frac{6}{2y + 3}$ **53.** $2a^2 + a - 2 - \frac{2}{2a - 1}$ **55.** $3x^3 + 6x + 2$ **57.** $x + 4$ **59.** $2c^2 - 6c + 3$ **61.** $x + 6$ **63.** $x + 3$ **65.** $x - 7$ **67.** $x + 8 + \frac{10}{x - 3}$ **69.** $3x + 5 + \frac{10}{x - 4}$ **71.** $4x^2 + x + 3 + \frac{3}{x - 1}$ **73.** $3c^2 - 2c + 2 + \frac{10}{c + 3}$ **75.** $y^3 + y^2 + y + 1$ **77.** $x^3 - 4x^2 + 16x - 64 + \frac{272}{x + 4}$ **79.** $x^4 - \frac{9}{x + 1}$ **81.** $b^4 + 3b^3 - 3b^2 + 3b - 3 - \frac{11}{b + 1}$ **83.** $3x^2 + 3x - 3$ **85.** $2x^3 + 2x - 2 + \frac{6}{x - \frac{1}{2}}$ **87.** 12 **89.** 0; es factor. **91.** $-\frac{19}{4}$ o -4.75 **93.** $3x + 2$ **95.** 3 veces mayor, determine las áreas multiplicando los polinomios, luego compare. **97.** No, el dividendo es un binomio **99.** Si el residuo es 0, $x - a$ es un factor. **101.** $x^2 - 2x - 8$ **103.** $x^2 + 9x + 26$ **105.** $2x^2 + 3xy - y^2$ **107.** $x + \frac{5}{2} + \frac{11}{2(2x - 3)}$ **109.** $w = r + 1$ **111.** $x^3 - 6x^2 + 13x - 7$; multiplique $(x - 3)(x^2 - 3x + 4)$ y luego sume 5. **113.** $2x + 1 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^2}$ **115.** No es un factor; calcule $P(1)$. $P(1) = 101$, que no es 0, por lo que $x - 1$ no es un factor. **117.** Factor; calcule $P(-1)$. Como $P(-1) = 0$, entonces $x + 1$ es un factor. **119.** 2.0×10^{10} **120.** 30°, 60°, 90° **121.** $\left\{-1, \frac{11}{5}\right\}$ **122.** -864 **123.** $3r + 3s - 8t$

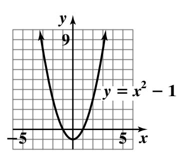
Conjunto de ejercicios 5.4

1. Determine si todos los términos contienen un máximo factor común y, si es así, factorícelo. **3. a)** Las respuestas variarán. **b)** $2x^2y$ **c)** $2x^2y(3y^4 - x + 6x^7y^2)$ **5.** $3(x - 4)^3$ **7. a)** Las respuestas variarán. **b)** $(3x^2 - y^3)(2x + y^2)$ **9.** $7(n + 2)$ **11.** $2(x^2 - 2x + 5)$ **13.** $4(3y^2 - 4y + 7)$ **15.** $x^2(9x^2 - 3x + 11)$ **17.** $-3a^2(8a^5 - 3a^4 + 1)$ **19.** $3xy(x + 2xy + 1)$ **21.** $8a^2c(10a^3b^4 - 2a^2b^2c + 3)$ **23.** $3pq^2r(3p^3q^3 - pr + 4q^3r^2)$ **25.** $-2(11p^2q^2 + 8pq^3 - 13r)$ **27.** $-4(2x - 1)$ **29.** $-(x^2 + 4x - 22)$ **31.** $-3(r^2 + 2r - 3)$ **33.** $-2rs^3(3r^3 - 2rs - s^2)$ **35.** $-a^2b(a^2bc - 5ac^2 - 1)$ **37.** $(a + 3)(x + 1)$ **39.** $(x - 4)(9x - 8)$ **41.** $-(x - 2)(2x - 9)$ **43.** $-2(a + 2)(a + 2)$ o $-2(a + 2)^2$ **45.** $(x + 4)(x - 5)$ **47.** $2(2y - 1)(2y - 5)$ **49.** $(a + b)(m + n)$ **51.** $(x - 3)(x^2 + 4)$ **53.** $(5m - 6n)(2m - 5n)$ **55.** $5(a + 3)(a^2 - 2)$ **57.** $c^2(c - 1)(c^2 + 1)$ **59.** $(2x + 1)(6x - 5)$ **61.** $(x + 4)(3x - 2)$ **63.** $(3x + 2)(9x - 5)$ **65. a)** 96 pies **b)** $h(t) = -16t(t - 5)$ **c)** 96 pies **67. a)** ≈2856.64 pies cuadrados **b)** $A = r(\pi r + 2l)$ **c)** ≈2856.64 pies cuadrados. **69. a)** \$525 **b)** $A(t) = 75(13 - t)$ **c)** \$525 **71. a)** $(1 - 0.06)(x + 0.06x) = 0.94(1.06x)$ **b)** $0.9964x$; un poco menor que el precio del modelo 2005 (99.64% del costo original) **73. a)** $(x + 0.15x) - 0.20(x + 0.15x) = 0.80(x + 0.15x)$ **b)** $0.80(1.15x) = 0.92x$; 92% del precio regular **75.** $(3x + 2)^4(15ax + 10a + 4)$ **77.** $2(x - 3)(2x^4 - 12x^3 + 15x^2 + 9x + 2)$ **79.** $(x^2 + 2x - 3)(a + b)$ **81.** $x^{4m}(x^{2m} - 2)$ **83.** $x^{2m}(3x^{2m} - 2x^m + 1)$ **85.** $(a^r + c^r)(b^r - d^r)$ **87. a)** Sí **b)** 0; restando la misma cantidad de él mismo. **c)** Las respuestas variarán. **89. a)** Deben tener la misma gráfica; representan la misma función.

89. b)



c) Las respuestas variarán. **d)** La factorización no es correcta. **91.** $-\frac{15}{72} = -\frac{5}{24}$ **92.** 2 **93.**



94. 0.4 horas **95.** $-14a^3 - 22a^2 + 19a - 3$

Examen de mitad de capítulo

1. $5x^4 - 1.5x^3 + 2x - 7, 4$ [5.1] **2.** $\frac{3}{2}$ o $1\frac{1}{2}$ [5.1] **3.** $-n^2 - 7n - 4$ [5.1] **4.** $-16x^2y + 14xy$ [5.1] **5.** $9x^2 - 4x + 13$ [5.1] **6.** $6x^6y^4 + 10x^7 - 14x^8y$ [5.1] **7.** $21x^2 - 4xy - 12y^2$ [5.2] **8.** $6x^4 - x^3 + 14x^2 + 32x + 9$ [5.2] **9.** $64p^2 - \frac{1}{25}$ [5.2] **10.** $12m^3 - m^2n - 30mn^2 + 18n^3$ [5.2] **11.** $x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$ [5.2] **12.** $2x^2y + 3 - \frac{11}{2xy^2}$ [5.3] **13.** $3x + 5 + \frac{2}{4x + 1}$ [5.3] **14.** $y^2 + y + 5 + \frac{5}{2y - 3}$ [5.3] **15.** $x - 9$ [5.3] **16.** $3a^3 + 4a^2 - 6a - 1$ [5.3] **17.** $8b^2c(4bc^2 + 2 + 3b^3c^3)$ [5.4] **18.** $(2x + 9)(7b - 3c)$ [5.4] **19.** $b^2(b + 2c)(2b - c)$ [5.4] **20.** $(3x - 2)^5(5a - 12x + 8)$ [5.4]

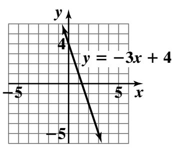
Cómo usar su calculadora graficadora, 5.5

1. Sí **2.** No

Conjunto de ejercicios 5.5

1. Si tiene máximo factor común, factorizarlo. **3. a)** Las respuestas variarán. **b)** $(2x + 3)(3x - 4)$ **5.** No; $2(x + 3)(x + 1)$; $(2x + 2)$ tienen como máximo factor común de 2. **7.** No, $3x(x + 4)(x - 2)$; $(3x - 6)$ tienen a 3 como máximo factor común. **9.** Ambos son + **11.** Uno es +, uno es − **13.** $(x + 3)(x + 4)$ **15.** $(b - 1)(b + 9)$ **17.** $(z + 2)^2$ **19.** $(r + 12)^2$ **21.** $(x + 32)(x - 2)$ **23.** $(x + 2)(x - 15)$ **25.** $-(a - 15)(a - 3)$ **27.** Primo **29.** $-2(m + 2)(m + 5)$ **31.** $4(r + 4)(r - 1)$ **33.** $x(x + 6)(x - 3)$ **35.** $(a - 1)(5a - 3)$ **37.** $3(x - 2)(x + 1)$ **39.** $(3c + 7)(2c - 9)$ **41.** $(2b + 1)(4b - 3)$ **43.** $(3c - 2)(2c + 5)$ **45.** $4(2p - 3q)(2p + q)$ **47.** Primo **49.** $2(3a + 4b)(3a - b)$ **51.** $(4x - 3y)(2x + 9y)$ **53.** $10(5b - 2)(2b - 1)$ **55.** $ab^5(a - 4)(a + 3)$ **57.** $3b^2c(b - 3c)^2$ **59.** $4m^6n^3(m + 2n)(2m - 3n)$ **61.** $(6x - 5)(5x + 4)$ **63.** $8x^2y^5(x + 4)(x - 1)$ **65.** $(x^2 + 3)(x^2 - 2)$ **67.** $(b^2 + 5)(b^2 + 4)$ **69.** $(2a^2 + 5)(3a^2 - 5)$ **71.** $(2x + 5)(2x + 3)$ **73.** $(3a + 1)(2a + 5)$ **75.** $(xy + 7)(xy + 2)$ **77.** $(2xy - 11)(xy + 1)$ **79.** $(2 - y)(y - 1)(2y - 5)$ **81.** $(p - 4)(2p + 3)(p + 2)$ **83.** $(a^3 - 10)(a^3 + 3)$ **85.** $(x + 5)(x + 2)(x + 1)$ **87.** $a^3b^2(5a - 3b)(a - b)$ **89.** $(x + 6)(x + 1)$ **91.** $(x + 6)(x + 3)$ **93.** $2x^2 - 5xy - 12y^2$, multiplique $(2x + 3y)(x - 4y)$ **95.** Divida; $x + 7$ **97. a)** Las respuestas variarán. **b)** $(6x - 5)(5x + 8)$; $(7x - 1)(7x - 13)$ **99.** $\pm 3, \pm 9$ **101.** 6 o −6; b es la suma de los factores de 5 **103. a)** 4 **b)** $(x - 3)(x - 5)$ **105. a)** −8 **b)** No es factorizable **107.** Las respuestas variarán. Un ejemplo es $x^2 + 2x + 1$. **109.** $(2a^n + 3)(2a^n - 5)$ **111.** $(x + y)^2(x - 4y)(x - 3y)$ **113.** $(x^n - 2)(x^n + 5)$ **115. a)** Las respuestas variarán. **b)** Correcto **117.** $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

118.



119. 4 **120.** $x^2 + 2xy + y^2 + 12x + 12y + 36$ **121.** $(2x^2 - 5)(x + 2)$

Conjunto de ejercicios 5.6

1. a) Las respuestas variarán. **b)** $(x + 4)(x - 4)$ **3.** Las respuestas variarán. **5.** $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ **7.** No, $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$ **9.** No, $(x - 9)^2 = x^2 - 18x + 81$ **11.** $(x + 9)(x - 9)$ **13.** $(a + 10)(a - 10)$ **15.** $(1 + 7b)(1 - 7b)$ **17.** $(5 + 4y^2)(5 - 4y^2)$ **19.** $\left(\frac{1}{10} + y\right)\left(\frac{1}{10} - y\right)$ **21.** $(xy + 11c)(xy - 11c)$ **23.** $(0.2x + 0.3)(0.2x - 0.3)$ **25.** $x(12 - x)$ **27.** $(a + 3b + 2)(a - 3b - 2)$ **29.** $(x + 5)^2$ **31.** $(7 - t)^2$ **33.** $(6pq + 1)^2$ **35.** $(0.9x - 0.2)^2$ **37.** $(y^2 + 2)^2$ **39.** $(a + b + 3)^2$ **41.** $(y + 1)^2$ **43.** $(x + 3 + y)(x + 3 - y)$ **45.** $(x + 7)(3 - x)$ **47.** $(3a - 2b + 3)(3a - 2b - 3)$ **49.** $(y^2 - 3)^2$ **51.** $(a + 5)(a^2 - 5a + 25)$ **53.** $(4 - a)(16 + 4a + a^2)$ **55.** $(p - 3a)(p^2 + 3ap + 9a^2)$ **57.** $(3y - 2x)(9y^2 + 6xy + 4x^2)$ **59.** $2(2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$ **61.** $(x^2 + y^3)(x^4 - x^2y^3 + y^6)$ **63.** $(x + 2)(x^2 + x + 1)$ **65.** $(a - b - 3)(a^2 - 2ab + b^2 + 3a - 3b + 9)$ **67.** $-9(b^2 + 3b + 3)$ **69.** $(a^2 + 2b^2)(a^2 - 2b^2)$ **71.** $(7 + 8xy)(7 - 8xy)$ **73.** $(x + y + 4)(x + y - 4)$ **75.** $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$ **77.** $(3xy + 4)^2$ **79.** $(a^2 + b^2)^2$ **81.** $(x - 1 + y)(x - 1 - y)$ **83.** $(x + y + 1)(x^2 + 2xy + y^2 - x - y + 1)$ **85.** $3m(-m + 2n)$ **87.** $(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$ **89.** $(6a - b)(36a^2 + 6ab + b^2)$ **91.** $(4x + 3a)(16x^2 - 12ax + 9a^2)$ **93. a)** $a^2 - b^2$ **b)** $(a + b)(a - b)$ **95. a)** $6a^3 - 6ab^2$ **b)** $6a(a + b)(a - b)$ **97. a)** $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$ **b)** $\frac{4}{3}\pi(R - r)(R^2 + Rr + r^2)$ **99.** 12; −12 escriba $4x^2 + bx + 9$ como $(2x)^2 + bx + (3)^2$; $bx = 2(2x)(3)$ o $bx = -2(2x)(3)$ **101.** $c = 4$; escriba $25x^2 + 20x + c$ como $(5x)^2 + 20x + (a)^2$ entonces $20x = 2(5x)(a)$, por lo que $a = 2, c = 4$. **103. a)** Determine una expresión cuyo cuadrado sea $25x^2 - 30x + 9$ **b)** $s(x) = 5x - 3$ **c)** 7 **105.** $(x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8)$ **107.** $h(2a + h)$ **109. a)** 16 **b)** $x^2 + 8x + 16$ **c)** $(x + 4)^2$ **111.** $(8x^{2a} + 3y^{3a})(8x^{2a} - 3y^{3a})$ **113.** $(a^n - 8)^2$ **115.** $(x^n - 2)(x^{2n} + 2x^n + 4)$ **117.** Correcto **119. a)** $(x^3 + 1)(x^3 - 1)$ **b)** $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$ **121.** $4x + 7y - 2$ **122.** −17 **123.** 20°, 30°, 40° **124.** $15y^{10}(3y^2 + 4)$ **125.** $(4x - 3y)(3x + y)$

Conjunto de ejercicios 5.7

1. Las respuestas variarán. **3.** $3(x + 5)(x - 5)$ **5.** $(5s - 3)(2s + 5)$ **7.** $2x^2y^2(3x + 5y + 7)$ **9.** $0.8(x + 0.3)(x - 0.3)$ **11.** $6x(x^2 + 3)(x^2 - 3)$ **13.** $3x^4(x - 1)(x + 4)$ **15.** $5x^2y^2(x + 4)(x + 3)$ **17.** $x^2(x + y)(x - y)$ **19.** $x^4y^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$ **21.** $x(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$ **23.** $4(x^2 + 2y)(x^4 - 2x^2y + 4y^2)$ **25.** $5(a + b + 2)(a + b - 2)$ **27.** $6(x + 3y)^2$ **29.** $x(x + 4)$ **31.** $3(2x - y)(x + 4y)$ **33.** $(y + 7)^2$ **35.** $(b^2 + 1)^2$ **37.** $\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\right)$ **39.** $2y(3y + 1)(y + 2)$ **41.** $ab(a + 9b)(a - 9b)$ **43.** $(7 + x + y)(7 - x - y)$ **45.** $2(3x - 2)(4x - 3)$ **47.** $(9x - 3)(2x + 5)$ **49.** $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$ **51.** $(b - 2x)(5c - 7y)$ **53.** $(3x^2 - 4)(x^2 + 1)$ **55.** $(z + x - 6)(z - x + 6)$ **57.** $(2y + 5)(y + 8)$ **59.** $(a + 6b + 4c)(a + 6b - 4c)$ **61.** $5x^2y(x + 3)(2x - 1)$ **63.** $(x + y)^2(x - y)^2$ **65. e)** **67. d)** **69. f)** **71. c)** **73.** $2(x + 3)(x + 2)$ **75.** $(x + 6)(x + 2)$ **77.** $(y + 3)(y - 3)$ **79.** $(5x - 3)(25x^2 + 15x + 9)$ **81. a)** $a(a + b) - b(a + b) = a^2 - b^2$ **b)** $(a + b)(a - b)$ **83. a)** $a^2 + 2ab + b^2$ **b)** $(a + b)^2$

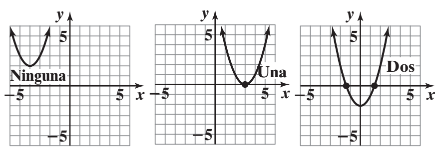
85. a) $a(a-b)+a(a-b)+b(a-b)+b(a-b)$ o $2a(a-b)+2b(a-b)$ **b)** $2(a+b)(a-b)$ **87. a)** Las respuestas variarán. **b)** Las respuestas variarán. **89. a)** $x^{-5}(x^2-2x-3)$ **b)** $x^{-5}(x-3)(x+1)$ **91. a)** $x^{-3/2}(5x^2+2x-3)$ **b)** $x^{-3/2}(5x-3)(x+1)$ **92.** 1 **93.** $\{z|z<-6 \text{ o } z>0\}$ **94.** ≈17.3 libras del de \$5.20; ≈12.7 libras del de \$6.30 **95.** $5x^3-x^2+16x+16$ **96.** $(x+3)(2x^2-5)$

Cómo usar su calculadora graficadora, 5.8

1. $y=x^2-6x+5$ **2.** $y=x^2-x-6$ **3.** $y=x^2+4x$

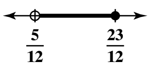
Conjunto de ejercicios 5.8

1. El grado de una función polinomial es el mismo que el grado del término principal. **3.** $ax^2+bx+c=0$ **5. a)** La propiedad del factor cero sólo se cumple cuando un lado de la ecuación es 0. **b)** -2 y -5 **7. a)** Las respuestas variarán. **b)** $\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}$ **9. a)** Catetos **b)** Hipotenusa **11.** -8 y -2; en las intersecciones con el eje x se tiene que $y=0$. **13.** Sí, si la gráfica no cruza al eje x **15.** Sí, si la gráfica cruza al eje x dos veces. **17.** $0, -3$ **19.** $0, 1$ **21.** $-1, 7$ **23.** $0, -4, 9$ **25.** $\frac{2}{3}, \frac{1}{7}$ **27.** $0, 3$ **29.** $0, -5$ **31.** $0, 6$ **33.** $0, 9$ **35.** $-1, -5$ **37.** $-4, 3$ **39.** -4 **41.** $-\frac{1}{2}, 5$ **43.** $\frac{3}{2}, -2$ **45.** $-4, 6$ **47.** $0, 6, -3$ **49.** $0, -4, 3$ **51.** $0, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$ **53.** $5, -5$ **55.** $-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$ **57.** $0, -3, 3$ **59.** $-11, 9$ **61.** $-3, -11$ **63.** $-1, -4$ **65.** $\frac{5}{2}, \frac{4}{3}$ **67.** $0, -3, -5$ **69.** $-2, -\frac{1}{3}$ **71.** $\frac{3}{5}, \frac{5}{2}$ **73.** $6, -5$ **75.** $(4,0), (6,0)$ **77.** $(-8,0)$ **79.** $(0,0), \left(\frac{4}{3},0\right), \left(\frac{5}{2},0\right)$ **81.** $x=1$ **83.** $x=5$ **85.** $x=9$ **87. d)** **89. b)** **91.** $y=x^2-6x+5$ **93.** $y=x^2-2x-8$ **95.** $y=6x^2-7x-10$ **97.** Ancho = 2 pies, largo = 5 pies **99.** Base = 10 pies, altura = 16 pies **101.** 2 pies **103.** 3 pies **105.** 2 segundos **107.** Tim: 5 millas; Bob: 12 millas **109.** 13 pies **111.** 50 bicicletas **113.** 13 pulgadas por 13 pulgadas **115. a)** $V=a^3-ab^2$ **b)** $V=a(a+b)(a-b)$ **c)** 3 pulgadas **117. a)** $f(x)=x^2+7x+10$ **b)** $x^2+7x+10=0$ **c)** Un número infinito; cualquier función de la forma $f(x)=a(x^2+7x+10), a\neq 0$ **d)** Un número infinito; cualquier ecuación de la forma $a(x^2+7x+10)=0, a\neq 0$ **119. a)** Las respuestas variarán. Ejemplos son:



b) Ninguna (sin intercepciones con el eje x), una (una intercepción con el eje x) o dos (dos intercepciones con el eje x) **121.** ≈73.721949 mph **123.** $\pm 2, \pm 3$ **128.** $\frac{x^4}{16y^6}$

129.



130. $(2,-1)$ **131.** -84 **132.** $(x+3)(x-2)$

Ejercicios de repaso del capítulo 5

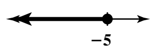
1. a) Binomio, **b)** $3x^2+9$, **c)** 2 **2. a)** Trinomio, **b)** $4x^3+5x-7$, **c)** 3 **3.** No es un polinomio **4. a)** Polinomio, **b)** $2x^4-10x^2y+6xy^3-3$, **c)** 4 **5.** $x^2-3x+14$ **6.** $5x^2+11x-4$ **7.** $3a-8b+7$ **8.** $6x^3-9x+13$ **9.** $3x^2y+3xy-9y^2$ **10.** $-3ab+b^2-2a$ **11.** $5x^2+7x+3$ **12.** $-10a^2b+ab$ **13.** 21 **14.** -76 **15.** $3x^2+27$ **16.** $2x^2+24x+23$ **17. a)** \$780.46 mil millones **b)** Sí **18. a)** \$773.13 mil millones **b)** Sí **19.** $6x^3-14x^2+10x$ **20.** $-3x^4y^2-3x^2y^6+12xy^7$ **21.** $6x^2+17x-45$ **22.** $50a^2-5a-3$ **23.** $x^2+16xy+64y^2$ **24.** $a^2-22ab+121b^2$ **25.** $10x^2y+8xy^2-5x-4y$ **26.** $6p^2q^2+11pqr-7r^2$ **27.** $4a^2+36ab+81b^2$ **28.** $16x^2-24xy+9y^2$ **29.** $49x^2-25y^2$ **30.** $4a^2-25b^4$ **31.** $16x^2y^2-36$ **32.** $81a^4-4b^4$ **33.** $x^2+6xy+9y^2+4x+12y+4$ **34.** $4p^2-4pq+q^2-20p+10q+25$ **35.** $6x^3-x^2-24x+18$ **36.** $4x^4+12x^3+6x^2+16x-6$ **37.** $x^2+8x+10$ **38.** $x^2+xy+4y+xz$ **39. a)** x^2-2x-3 **b)** 0 **40. a)** $2x^3-4x^2-6x+12$ **b)** 12 **41. a)** x^3-x^2-5x+6 **b)** 9 **42. a)** x^4-4 **b)** 77 **43.** $\frac{1}{5}x^6y^2$ **44.** $\frac{1}{4}t^5$ **45.** $9p-5q-3$ **46.** $\frac{7}{4}a^2-4a+8$ **47.** $\frac{x^2}{4y}+x+\frac{3y}{2}$ **48.** $4x-3$ **49.** x^3-2x^2+3x+7 **50.** $2a^3+a^2-3a-4$ **51.** $x+4-\frac{10}{x-3}$ **52.** $2x^2+3x-4+\frac{3}{2x+3}$ **53.** $3x^2+7x+21+\frac{73}{x-3}$ **54.** $2y^4-2y^3-8y^2+8y-7+\frac{5}{y+1}$ **55.** $x^4+2x^3+4x^2+8x+16+\frac{14}{x-2}$ **56.** $2x^2+2x+6$ **57.** 10 **58.** -236 **59.** $-\frac{53}{9}$ o $-5.\overline{8}$ **60.** 0; es un factor **61.** $4(x^2+2x+8)$ **62.** $3x^4(5x+2-4xy^3)$ **63.** $2a^2b^3(5a-7b^3)$ **64.** $6xy^2z^2(4y^2z+2xy-5x^2z)$ **65.** $(5x-y)(x+6y)$ **66.** $(3a+2b)(4a+5b)$ **67.** $(2x-5)(x+9)$ **68.** $(3x-7)(16x-21)$ **69.** $(5x+2)(13x-7)$ **70.** $(7x+9)(2x-1)$ **71.** $(17x+3)(9x-7)$ **72.** $(4x+5)(5x-2)$ **73.** $(x+6)(x+3)$ **74.** $(x-2)(x+5)$ **75.** $(x-7)(x+4)$ **76.** $(x-8)(x-2)$ **77.** $-(x-15)(x+3)$ **78.** $-(x-12)(x-1)$ **79.** $x(2x+1)(x+6)$ **80.** $x^2(4x-5)(2x+5)$ **81.** $a^3(4a-5)(a-1)$ **82.** $y^3(12y+1)(y+5)$ **83.** $(x-18y)(x+3y)$ **84.** $(2p-5q)(3p-2q)$ **85.** $(x^2+3)(x^2+7)$ **86.** $(x^2-7)(x^2+9)$ **87.** $(x+9)(x+7)$ **88.** $x(x-9)$ **89.** $(x+10)(x+1)$ **90.** $(x+10)(x+2)$ **91.** $(x+6)(x-6)$ **92.** $(x+11)(x-11)$ **93.** $(x^2+9)(x+3)(x-3)$ **94.** $(x^2+4)(x+2)(x-2)$ **95.** $(2a+1)^2$ **96.** $(4y-3)^2$ **97.** $(x-2)(x+6)$ **98.** $(3y+5)(3y-7)$ **99.** $(p^2+9)^2$ **100.** $(m^2-10)^2$ **101.** $(x+4+y)(x+4-y)$ **102.** $(a+3b+6c)(a+3b-6c)$ **103.** $(4x+y)^2$ **104.** $(6b-5c)^2$ **105.** $(x-3)(x^2+3x+9)$ **106.** $(y+4z)(y^2-4yz+16z^2)$ **107.** $(5x-1)(25x^2+5x+1)$ **108.** $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$ **109.** $(y-4z)(y^2+4yz+16z^2)$ **110.** $(x-5)(x^2-x+7)$ **111.** $(x-1)(x^2+4x+7)$ **112.** $(a+5)(a^2+7a+13)$ **113.** $(x+3)(x-3)$ **114.** $(a+2b)(a-2b)$ **115.** $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$ **116.** $4a(a+c)(a-c)$ **117.** $y^4(x+3)(x-5)$ **118.** $5x(x-4)(x-2)$ **119.** $3xy^4(x-2)(x+6)$ **120.** $3y(y^2+5)(y^2-5)$ **121.** $4y(x+2)(x^2-2x+4)$ **122.** $5x^2y(x+2)^2$

123. $3x(2x + 1)(x - 4)$ **124.** $(x + 5 + z)(x + 5 - z)$ **125.** $5(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$ **126.** $(x + 4)(x - 1)(x + 6)$ **127.** $(4x + 1)(4x + 5)$ **128.** $(2x^2 - 1)(2x^2 + 3)$ **129.** $(x + 1)^2(x - 2)$ **130.** $(3a - b)(3x + 7y)$ **131.** $(2pq - 3)(3pq + 2)$ **132.** $(3x^2 - 2)^2$ **133.** $(4y + x + 2)(4y - x - 2)$ **134.** $2(3a + 5)(4a + 3)$ **135.** $3x^2y^5(x + 3)(2x - 3)$ **136.** $\left(x - \frac{2}{3}y^2\right)\left(x^2 + \frac{2}{3}xy^2 + \frac{4}{9}y^4\right)$ **137.** $(x + 9)(x + 2)$ **138.** $(y + 10)(y + 5)$ **139.** $(a + 2b)(a - 2b)$ **140.** $2b(a + b)$ **141.** $(2a + b)(a + 3b)$ **142.** $(a + b)^2$ **143.** $2, -\frac{1}{4}$ **144.** $-\frac{5}{2}, -\frac{10}{3}$ **145.** $0, 2$ **146.** $0, -\frac{4}{3}$ **147.** $-4, -3$ **148.** $5, -6$ **149.** $7, 1$ **150.** $0, 2, 4$ **151.** $4, -4$ **152.** $2, -3$ **153.** $\frac{4}{3}, -\frac{1}{4}$ **154.** $\frac{3}{4}, -\frac{2}{5}$ **155.** $(-3, 0), (6, 0)$ **156.** $\left(\frac{6}{5}, 0\right), \left(\frac{5}{4}, 0\right)$ **157.** $y = x^2 - 2x - 24$ **158.** $y = 12x^2 + 32x + 5$ **159.** Ancho = 9 pies, longitud = 12 pies **160.** Altura = 4 pies, base = 13 pies **161.** 3 pulgadas, 7 pulgadas **162.** 9 segundos **163.** 9

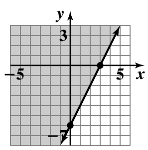
Examen de práctica del capítulo 5

1. a) Trinomio **b)** $-6x^4 - 4x^2 + 3x$ **c)** 4 **d)** -6 [5.1] **2.** $4x^2y - 14y^2 + 4x + 6y$ [5.1] **3.** $-8x^8y^3 + 24x^6y^4 - 12x^4y^2$ [5.2] **4.** $10a^2 - 13ab - 3b^2$ [5.2] **5.** $4x^3 + 8x^2y - 9xy^2 - 6y^3$ [5.2] **6.** $4x^4 - 5y + \frac{7}{x^2}$ [5.3] **7.** $x - 5 + \frac{24}{2x + 3}$ [5.3] **8.** $3x^3 + 3x^2 + 15x + 15 + \frac{76}{x - 5}$ [5.3] **9.** -85 [5.3] **10.** $2xy(6x^2 + 5xy^3 - 7y^2)$ [5.4] **11.** $x(x - 3)(x + 1)$ [5.5] **12.** $(a + 2b)(2a + 3b)$ [5.4] **13.** $(2b^2 + 9)(b^2 - 2)$ [5.5] **14.** $4x(x - 5)$ [5.5] **15.** $(x + 7)(x + 3)$ [5.5] **16.** $q^6(3p - 2)(9p^2 + 6p + 4)$ [5.6] **17. a)** $3x^2 - 19x + 20$ **b)** -6 [5.2] **18.** $4(x + y)(x - y)$ [5.5] **19.** $(x + 11)(x + 4)$ [5.5] **20.** $\frac{3}{7}, -4$ [5.8] **21.** $0, -5, 2$ [5.8] **22.** $\left(\frac{1}{4}, 0\right), \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ [5.8] **23.** $y = x^2 - 9x + 14$ [5.8] **24.** Altura = 4 metros, base = 11 metros[5.8] **25.** 7 segundos [5.8]

Examen de repaso acumulativo

1. $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ [1.2] **2.** 

[1.2] **3.** $-\frac{3}{32}$ [1.3] **4.** -34 [1.4] **5.** $8r^6s^{15}$ [1.5] **6.** 5 [2.1] **7.** $e = \frac{k - 2d}{2}$ [2.2] **8.** 13 metros por 13 metros [2.3] **9.** 620 páginas [2.3] **10.** $34 \le x < 84$ [2.5] **11.** No [3.1] **12.** $6x - 3y = 2$ [3.3] **13.** $-\frac{2}{9}$ [3.4] **14.** -180 [3.6] **15.**

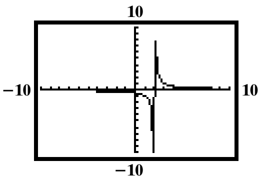


[3.7] **16.** $(10, 4)$ [4.1] **17.** $(4, 1, 2)$ [4.2] **18.** 18 [4.5] **19.** $2x^2 + 12x + 63 + \frac{393}{x - 6}$ [5.3] **20.** $(4x - 3y)(16x^2 + 12xy + 9y^2)$ [5.6]

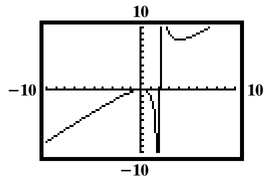
Capítulo 6

Conjunto de ejercicios 6.1

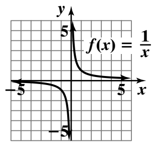
1. a) Una expresión racional es una expresión de la forma $\frac{p}{q}$, p y q polinomios y $q \neq 0$ **b)** Las respuestas variarán. **3. a)** Una función racional es una función de la forma $f(x) = \frac{p}{q}$, p y q polinomios, $q \neq 0$ **b)** Las respuestas variarán. **5. a)** El dominio de una función racional es el conjunto de valores que pueden reemplazar a la variable. **b)** $\{x|x \neq -5 \text{ y } x \neq 5\}$ **7. a)** Factorice -1 del numerador o del denominador y reduzca. **b)** -1 **9. a)** Invierta la segunda fracción, factorice todas las expresiones, simplifique y luego multiplique los numeradores y multiplique los denominadores. **b)** $\frac{1}{r + 6}$ **11.** 4 **13.** $5, \frac{5}{2}$ **15.** Ninguno **17.** $9, -9$ **19.** $\{p|p \neq 2\}$ **21.** $\{x|x \neq -3 \text{ y } x \neq 2\}$ **23.** $\left\{a\middle|a \neq \frac{1}{2} \text{ y } a \neq -2\right\}$ **25.** $\{x|x \text{ es un número real}\}$ **27.** $\{a|a \neq -6 \text{ y } a \neq 6\}$ **29.** $1 - y$ **31.** $\frac{x - 4y}{3}$ **33.** x **35.** -1 **37.** $-(p + 4)$ **39.** $\frac{a - 5}{a + 3}$ **41.** $4x^2 + 10xy + 25y^2$ **43.** $\frac{2x - 5}{2}$ **45.** $\frac{a + 7}{a + 5}$ **47.** $\frac{x - 4}{x^2 - 3x + 9}$ **49.** $\frac{xy^2}{15}$ **51.** $12x^3y^2$ **53.** 1 **55.** $\frac{x + 5}{4}$ **57.** $\frac{r^3}{r - 8}$ **59.** $\frac{7}{x - 4}$ **61.** $\frac{(a + 1)^2}{9(a + b)^2}$ **63.** $\frac{x - 4}{4x + 1}$ **65.** $\frac{(x + 2)(x - 2)}{(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 4)}$ **67.** $\frac{x - y}{x + y}$ **69.** $\frac{x^3}{x + 2}$ **71.** $\frac{(a - b)(a + b)}{a^2 + ab + b^2}$ **73.** 1 **75.** $\frac{p - q}{p + q}$ **77.** $\frac{r + 5s}{2r + 5s}$ **79.** Una respuesta posible es $\frac{1}{(x - 2)(x + 3)}$; el denominador es cero en $x = 2$ y $x = -3$ **81.** El numerador nunca es 0. **83. a)** 4, hace que el numerador sea 0 **b)** 6 y -6, cada uno, hacen que el denominador sea 0 **85.** Una respuesta posible es $f(x) = \frac{x - 2}{(x - 3)(x + 1)}$; el numerador es 0 en $x = 2$, el denominador es 0 en $x = 3$ y $x = -1$ **87.** $x + 5$; el numerador debe ser $x + 5$ **89.** $y^2 - 4y - 5$, los factores deben ser $(y - 5)(y + 1)$ **91.** $x^2 + x - 2$; los factores deben ser $(x - 1)(x + 2)$ **93.** $2x^2 + x - 6$; los factores deben ser $(x + 2)(2x - 3)$. **95.** $\frac{3a + b}{2}$ **97.** $2(a + b)$ **99.** $\frac{(x + 2)(3x + 1)}{(2x - 3)(x + 1)}$ **101.** $\frac{x - 1}{x + 3}$ **103.** $\frac{1}{x^4(x - p)^n}$ **105.** x^y

107. a) $\{x|x \neq 2\}$ **b)** 

c) Decreciente
d) Creciente

109. a) $\{x|x \neq 2\}$ **b)** 

c) Decreciente
d) Creciente

111. a) $\{x|x \neq 0\}$ **b)** $-0.1, -1, -2, -10, -100, 100, 10, 2, 1, 0.1$ **c)** 

d) No; el numerador nunca puede ser 0. **113.** $y = x + 2$
114. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ **115.** $-28, 32$ **116.** 0.1 **117.** $(2, -1)$
118. $(3x + y + 2)(3x + y - 2)$

Conjunto de ejercicios 6.2

1. a), b) Las respuestas variarán. **c)** $(8x + 11)(8x - 11)(x - 2)$ **3. a)** No todo el numerador se restó. **b)** $\dfrac{x^2 - 4x - x^2 - x + 2}{(x + 3)(x - 2)}$ **5.** $\dfrac{3x + 5}{x + 2}$ **7.** $\dfrac{7x - 2}{x - 5}$ **9.** $\dfrac{x + 7}{x + 3}$ **11.** $\dfrac{7x - 11}{x - 8}$ **13.** $\dfrac{x - 3}{x - 1}$ **15.** $x - 5$
17. $\dfrac{x + 5}{x + 3}$ **19.** $6a^3$ **21.** $40x^4y^6$ **23.** $6a^4b^5$ **25.** $(x + 3)(x + 9)$ **27.** $z - 6$ **29.** $x^4(x - 2)^3$ **31.** $(a - 8)(a + 3)(a + 8)$
33. $(x - 3)(2x - 1)(2x + 3)$ **35.** $\dfrac{26}{3r}$ **37.** $\dfrac{5x - 3}{12x^2}$ **39.** $\dfrac{15y^2 + 8x^2}{40x^4y^3}$ **41.** $\dfrac{2b^2 - a^2}{b(a - b)}$ **43.** $\dfrac{2a}{a - b}$ **45.** $\dfrac{5x^2 + 3x - 12}{(x - 4)(x + 1)}$
47. $\dfrac{6a + 7}{(a + 2)^2}$ **49.** $\dfrac{2x^2 + 4x + 4}{(x - 1)(x + 4)(x - 2)}$ **51.** $\dfrac{2x + 3}{(x - 8)(x - 1)}$ **53.** $\dfrac{4x^2 + 11x - 39}{(x + 5)(x - 2)}$ **55.** $\dfrac{3a - 1}{4a + 1}$ **57.** $\dfrac{2x^2 - 4xy + 4y^2}{(x - 2y)^2(x + 2y)}$
59. $\dfrac{16}{r - 4}$ **61.** 0 **63.** $\dfrac{15x^2 - 70x + 30}{(3x - 2)(x - 4)}$ **65.** $\dfrac{18r^2 + 11r - 25}{(4r - 5)(2r + 3)}$ **67.** $\dfrac{x^2 - 18x - 30}{(5x + 6)(x - 2)}$ **69.** $\dfrac{12m^2 + 7mn}{(2m + 3n)(3m + 2n)(2m + n)}$
71. 0 **73.** $\dfrac{1}{2x + 3y}$ **75.** No **77.** Sí, si multiplica cualquier fracción por $\dfrac{-1}{-1}$ obtiene la otra fracción.
79. a) $\{x|x \neq 3\}$ **b)** $\{x|x \neq -4\}$ **c)** $\dfrac{2x^2 + 3x + 8}{(x - 3)(x + 4)}$ **d)** $\{x|x \neq 3 \text{ y } x \neq -4\}$ **81.** $\dfrac{2x^2 + 8x - 3}{(x + 1)(x + 2)}$ **83.** $\dfrac{3x^2 + 19x + 7}{(x + 2)(x + 3)}$
85. D: $\{x|x \neq 2\}$, R: $\{y|y \neq 1\}$ **87.** $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{(x + 2)(x - 2)(x + 3)}$ **89.** $\dfrac{2x}{x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 24}$ **91.** $\dfrac{ad}{bd} + \dfrac{bc}{bd} = \dfrac{ad + bc}{bd}$
93. a) 4 **b)** $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$ **95.** $7x^2 - 6x + 6; 5x^2 - (7x^2) = -2x^2, -(-6x) = 6x, -6 - (6) = -12$ **97.** $\dfrac{3x + 10}{x - 2}$
99. $\dfrac{1}{(a - 5)(a + 3)}$ **101.** $-x^2 + 4x + 5$ **103. a)** $\dfrac{ax + bn - bx}{n}$ **b)** 79.2 **105.** $\dfrac{a - b + 1}{(a - b)^2}$ **107.** No **109. a)** $\dfrac{x + 1}{x}$
b) $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2}$ **c)** $\dfrac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^4}$ **d)** $\dfrac{x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1}{x^n}$ **111.** $\dfrac{-h}{(a + 1)(a + h + 1)}$ **112. a)** 6 minutos
b) 960 cajas **113.** $\{x|-2 < x < 8\}$ **114.** $-\dfrac{2}{3}$ **115.** -11 **116.** $3x - 7 + \dfrac{27}{2x + 3}$ **117.** $\dfrac{1}{3}, 7$

Conjunto de ejercicios 6.3

1. Una que tiene una expresión fraccionaría en su numerador o en su denominador o en ambos.
3. $\dfrac{75a}{b^5}$ **5.** $\dfrac{12x^3}{y^6}$ **7.** $\dfrac{3z^4}{4xy^4}$ **9.** $\dfrac{y - x}{3xy}$ **11.** $\dfrac{x(y - 1)}{8 + x}$ **13.** $\dfrac{xy + 5}{y + x}$ **15.** $\dfrac{5}{3a^2}$ **17.** $-\dfrac{a}{b}$ **19.** $\dfrac{x - y}{y}$ **21.** -1 **23.** $\dfrac{3(x + 2)}{x^5}$
25. $\dfrac{-a + 1}{(a + 1)(2a + 1)}$ **27.** $\dfrac{x - 1}{x + 1}$ **29.** $\dfrac{a^2 + 1}{2a}$ **31.** $\dfrac{x}{5(x - 3)}$ **33.** $\dfrac{x^2 + 5x - 6}{x(x - 2)}$ **35.** $\dfrac{a(a + 3)}{(a - 2)(a + 1)}$ **37.** $\dfrac{2 + a^2b}{a^2}$ **39.** $\dfrac{ab}{b + a}$
41. $\dfrac{b(1 + a)}{a(1 - b)}$ **43.** $\dfrac{b^2 - a^3b}{a^3 + ab}$ **45.** $\dfrac{9a^2 + b}{b(b + 1)}$ **47.** $\dfrac{(a + b)^2}{ab}$ **49.** $\dfrac{15y - x}{3xy}$ **51.** $\dfrac{2y - 8xy + 5y^2}{3y^2 - 4x}$ **53.** $\dfrac{x^2 + 9x + 14}{x + 1}$
55. $\dfrac{x^2 + 3x - 4}{x + 1}$ **57. a)** $\dfrac{2}{9}$ **b)** $\dfrac{1}{5}$ **59.** $R_T = \dfrac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}$ **61.** a **63.** $\dfrac{-1}{a(a + h)}$ **65.** $\dfrac{-1}{(a + 1)(a + h + 1)}$
67. $\dfrac{-2a - h}{a^2(a + h)^2}$ **69.** $\dfrac{4a^2 + 1}{4a(2a^2 + 1)}$ **71.** $\dfrac{5}{12}$ **72.** $\dfrac{13}{48}$ **73.** $\left(-23, -\dfrac{34}{5}\right)$ **74.** $\left\{3, \dfrac{5}{3}\right\}$ **75.** Ninguna

Conjunto de ejercicios 6.4

1. Un número obtenido cuando se resuelve una ecuación que no es una solución verdadera.
3. a) Multiplique ambos lados por 12 para eliminar a las fracciones. **b)** -24 **c)** Escriba cada término con el MCD, de 12, de modo que pueda

sumar y restar. **d)** $\dfrac{-x+24}{12}$ **5.** Figuras semejantes son figuras cuyos ángulos correspondientes son iguales y cuyos lados correspondientes están en la misma proporción. **7.** No, $x = 3$ hace que $\dfrac{7}{x-3}$ esté indefinida. **9.** 5 **11.** $\dfrac{11}{2}$ **13.** 3 **15.** -5 **17.** Todos los números reales **19.** $\dfrac{1}{4}$ **21.** $\dfrac{11}{3}$ **23.** No hay solución **25.** $\dfrac{6}{5}$ **27.** ≈ -1.63 **29.** 8 **31.** $-\dfrac{4}{3}, 1$ **33.** 3.76 **35.** $-1, -6$ **37.** -5 **39.** $-\dfrac{5}{2}$ **41.** 5 **43.** No hay solución **45.** -5 **47.** $\dfrac{17}{4}$ **49.** 12, 2 **51.** 12, 4 **53.** $1, -2$ **55.** $\dfrac{25}{2}$ **57.** $\dfrac{3}{2}$ **59.** $P_2 = \dfrac{V_1P_1}{V_2}$ **61.** $V_2 = \dfrac{V_1P_1}{P_2}$ **63.** $y = y_1 + m(x - x_1)$ **65.** $x = zs + \overline{x}$ **67.** $w = \dfrac{fl - df}{d}$ **69.** $q = \dfrac{pf}{p - f}$ **71.** $a = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ **73.** $d = \dfrac{a_n - a_1}{n - 1}$ **75.** $G = \dfrac{Fd^2}{m_1m_2}$ **77.** $T_1 = \dfrac{T_2P_1V_1}{P_2V_2}$ **79.** $V_0 = \dfrac{S - S_0 - gt^2}{t}$ **81. a)** $\dfrac{2x+9}{(x-2)(x+2)}$ **b)** $-\dfrac{9}{2}$ **83. a)** $\dfrac{4}{b+5}$ **b)** No hay solución **85.** $c \neq 0$, no puede dividirse entre 0. **87.** $f(x)$: gráfica **b)**; $g(x)$: gráfica **a)**; $f(x)$ está indefinida cuando $x = 3$ **89. a)** \$ 6250 **b)** $R = \dfrac{AC}{0.80I}$ **91. a)** 20 pies/min^2 **b)** $t_1 = t_2 + \dfrac{v_1 - v_2}{a}$ **93. a)** $\approx$22.5% **b)** $D = PR$ **c)** $R = \dfrac{D}{P}$ **95.** 150 ohms **97.** $\approx$0.101 metros **99. a)** $\approx$9.71% **b)** Ya que 9.71% $>$ 7.68%, debe invertir en el portafolio del mercado de dinero que está libre de impuestos. **101.** Una respuesta es $\dfrac{1}{x-4} + \dfrac{1}{x+2} = 0$; 4 y -2 hacen que la fracción esté indefinida. **103.** Una respuesta es $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x}$. **105.** $-1 < x \leq 3$ **106.** $m = -\dfrac{1}{3}$; intercepción con el eje y, $\left(0, \dfrac{14}{3}\right)$. **107.** $3x^2y - 7xy - 4y^2 - 9x$ **108.** 2 pies

Examen de mitad de capítulo

1. $\{x|x \neq 0, x \neq -5 \text{ y } x \neq 5\}$ [6.1] **2.** $\dfrac{x+5}{2x-3}$ [6.1] **3.** $\dfrac{55b}{a^2 - ab + b^2}$ [6.1] **4.** $\dfrac{x-3}{x+1}$ [6.1] **5.** $\dfrac{(2a+1)(2a+3)}{(2a-1)(a-9)}$ o $\dfrac{4a^2+8a+3}{2a^2-19a+9}$ [6.1] **6.** $\dfrac{4a+3b}{6}$ [6.1] **7.** $(x+5)(x-6)(x+2)$ [6.2] **8.** 5 [6.2] **9.** $\dfrac{20y^2+ax}{6x^2y^3}$ [6.2] **10.** $\dfrac{-2x-7}{(x-4)(x+4)(2x-3)}$ [6.2] **11.** $\dfrac{9b+a}{3-c}$ [6.3] **12.** $\dfrac{5x-8}{6x^2-x}$ [6.3] **13.** y^2 [6.3]
14. Una raíz extraña es un número que se obtiene al resolver una ecuación, pero que no es solución de la ecuación original. Siempre que una variable aparezca en el denominador, debe verificar la aparente solución. [6.4] **15.** 5. [6.4] **16.** No hay solución [6.4] **17.** $4, -3$ [6.4] **18.** $a = \dfrac{bc}{b+c}$ [6.4] **19.** $r = \dfrac{x-4}{x}$ [6.4] **20.** 14 y 5 [6.4]

Conjunto de ejercicios 6.5

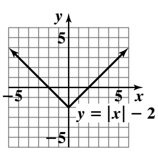
1. Igual a $\dfrac{1}{2}$ ya que les toma exactamente el mismo tiempo a cada uno de ellos.

3. a)

Trabajador	Velocidad de trabajo	Tiempo completado	Parte del trabajo realizado
Bill	$\dfrac{1}{7}$	x	$\dfrac{x}{7}$
Bob	$\dfrac{1}{9}$	x	$\dfrac{x}{9}$

b) $\dfrac{x}{7} + \dfrac{x}{9} = 1$ **c)** Menos; debe tomar menos tiempo que a la persona más rápida ya que están trabajando juntas.
5. 1.5 meses **7.** 2 horas **9.** 18.75 minutos **11.** 4 horas **13.** $\approx$2.48 días **15.** 2.4 horas **17.** $\approx$3.08 horas **19.** 100 horas **21.** 7.8 meses **23.** 75 minutos **25.** $\approx$15.27 minutos **27.** $\approx$1.62 horas **29.** 12 horas **31.** 5 **33.** 2.4 **35.** 4, 6

37. 20 **39.** $\dfrac{2}{3}, 1$ **41.** $\approx$0.064 millas por hora **43.** $\approx$1.53 pies por segundo **45.** 7.5 millas **47.** 36 millas por hora **49.** $\approx$30.59 yardas **51.** Local: $\approx$10.93 millas por hora, expreso: $\approx$16.13 millas por hora **53.** Automóvil: 60 millas por hora, tren: 30 millas por hora **55.** 60 millas por hora **57.** 120 kilómetros por hora **59.** 2 horas a 6 millas por hora, $\dfrac{1}{2}$ hora a 10 millas por hora **61.** 18 pies por minuto **63.** 108,000 millas **65.** Las respuestas variarán. **67. a)** 10 minutos **b)** 15 millas **c)** 165 millas por hora **68.** $\dfrac{x^8}{72}$ **69.** 9.26×10^9 **70.** \$ 2500 **71.**



72. $a(2a^2 - 5)(a - 1)$

Conjunto de ejercicios 6.6

1. a) Conforme una cantidad aumenta la otra aumenta **b), c)** Las respuestas variarán. **3.** Una cantidad varía conforme al producto de dos o más cantidades. **5. a)** Decrease **b)** Disminuye **b)** Variación inversa; por definición de variación inversa **7.** Directa **9.** Inversa **11.** Directa **13.** Directa **15.** Directa **17.** Inversa **19.** Directa **21.** Inversa **23.** Inversa **25. a)** $x = ky$ **b)** 72 **27. a)** $y = kR$ **b)** 306 **29. a)** $R = \dfrac{k}{W}$ **b)** $\dfrac{1}{20}$ **31. a)** $A = \dfrac{kB}{C}$ **b)** 9 **33. a)** $x = ky$ **b)** 20

35. a) $y = kR^2$ **b)** 20 **37. a)** $S = \frac{k}{G}$ **b)** 0.96 **39. a)** $x = \frac{k}{P^2}$ **b)** 25 **41. a)** $F = \frac{kM_1M_2}{d}$ **b)** 40 **43.** Se duplica **45.** Se divide entre dos **47.** Se duplica **49.** No cambia **51.** Se duplica **53.** $y = \frac{k}{x}; k = 5$ **55.** \$8814 **57.** 3096 miligramos **59.** 1.05 pulgadas **61.** 6400 centímetros cúbicos **63.** 3.12 horas **65.** 45 pies-bujías **67.** 117.6 pies **69.** 126 metros cúbicos **71.** 4600 DVD **73.** ≈133.25 libras **75.** ≈121,528 llamadas **77.** $\frac{1}{49}$ de la luz del flash **79. a)** $P = 14.7 + kx$ **b)** 0.43 **c)** ≈337.9 pies **80.** $h = \frac{3V}{4\pi r^2}$ **81.** 132 **82.** $-14x^3 - 22x^2 + 47x - 15$ **83.** $(x + 3)(x - 2)$

Ejercicios de repaso del capítulo 6

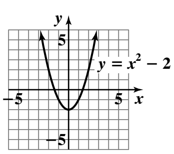
1. 5 **2.** -1 **3.** Ninguna **4.** $\{x|x \neq -3\}$ **5.** $\{x|x \neq 0\}$ **6.** $\{x|x \neq 2 \text{ y } x \neq -6\}$ **7.** x **8.** $x - 6$ **9.** -1 **10.** $\frac{x-1}{x-2}$ **11.** $\frac{x-3}{x+1}$ **12.** $\frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{a + 2b}$ **13.** $\frac{9x^2 - 3xy + y^2}{3x - y}$ **14.** $\frac{2x - 3}{x^2 - 2x + 4}$ **15.** $x(x + 4)$ **16.** $(x + 2y)(x - 2y)$ **17.** $(x + 7)(x - 5)(x + 2)$ **18.** $(x + 2)^2(x - 2)(x + 3)$ **19.** $12xz^2$ **20.** $-\frac{x}{6}$ **21.** $9x^3z^5$ **22.** $\frac{11x + 6}{3x^2}$ **23.** $\frac{(x - y)y^2}{4x^3}$ **24.** $3x + 2$ **25.** $\frac{30x + 3y^2}{5x^2y}$ **26.** 1 **27.** $\frac{2x + 1}{3x + 1}$ **28.** $\frac{6a + 7}{a + 1}$ **29.** $\frac{6b - 8}{b - 1}$ **30.** $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ **31.** $\frac{1}{3(a + 3)}$ **32.** $\frac{a^2 + c^2}{ac}$ **33.** $\frac{x + 1}{2x - 1}$ **34.** 1 **35.** $4x(x - 5y)$ **36.** $\frac{2a^2 + 9a + 4}{4a(a + 2)}$ **37.** $\frac{x^2 + 5}{(x + 5)(x - 5)}$ **38.** $-\frac{2(x + 1)}{x^2 - 4}$ **39.** $\frac{x + 5}{x + 6}$ **40.** $\frac{-x + 5}{(x + 2)(x - 2)(x - 3)}$ **41.** $\frac{16(x - 2y)}{3(x + 2y)}$ **42.** $\frac{3}{a^3}$ **43.** $\frac{22x + 5}{(x - 5)(x - 10)(x + 5)}$ **44.** $\frac{2(x - 4)}{(x - 3)(x - 5)}$ **45.** $-\frac{1}{x - 3}$ **46.** $\frac{a + 3}{a + 5}$ **47.** $\frac{x + 6}{x - 4}$ **48.** $\frac{a + 2b^2}{3}$ **49.** $\frac{x^2 + 6x - 24}{(x - 1)(x + 9)}$ **50.** $\frac{x - 4}{x - 6}$ **51. a)** $\{x|x \neq -2\}$ **b)** $\{x|x \neq -4\}$ **c)** $\frac{2x^2 + 7x + 4}{(x + 2)(x + 4)}$ **d)** $\{x|x \neq -2 \text{ y } x \neq -4\}$ **52. a)** $\{x|x \neq 3 \text{ y } x \neq -3\}$ **b)** $\{x|x \neq 3\}$ **c)** $\frac{x^2 + 8x + 12}{(x + 3)(x - 3)}$ **d)** $\{x|x \neq 3 \text{ y } x \neq -3\}$ **53.** $\frac{3ac^2}{b^3}$ **54.** $\frac{4x + 2y}{x^2 + xy^3}$ **55.** $\frac{3y - 1}{7y^2 + 1}$ **56.** $\frac{5a + 1}{2}$ **57.** $\frac{3x + 1}{-x + 1}$ **58.** $\frac{3x^2 - 29x + 68}{4x^2 - 6x - 54}$ **59.** $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 5}$ **60.** $\frac{x^2 + 6x + 8}{x + 3}$ **61.** $\frac{18}{5}$ o $3\frac{3}{5}$ **62.** -2 **63.** 52 **64.** 2.4 **65.** 5 **66.** -9 **67.** -18 **68.** -28 **69.** -6 **70.** -10 **71.** $b = \frac{ac}{a - c}$ **72.** $\bar{x} = x - sz$ **73.** 60 ohms **74.** 2 centímetros **75.** 10, 2 **76.** 21, 3 **77.** ≈17.14 minutos **78.** 14 horas **79.** 3 **80.** $\frac{5}{6}$ **81.** 5 millas por hora **82.** automóvil: 50 millas por hora, aeroplano: 150 millas por hora **83.** 20 **84.** $\frac{25}{2}$ **85.** ≈426.7 **86.** \$8.40 **87.** 1600 pies **88.** 200.96 unidades cuadradas **89.** 2.38 minutos

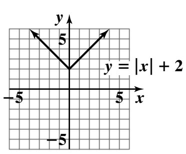
Examen de práctica del capítulo 6

1. -7 y 4 [6.1] **2.** $\left\{x \middle| x \neq -4 \text{ y } x \neq \frac{1}{2}\right\}$ [6.1] **3.** $5x^5y + 8 + 11xy^2$ [6.1] **4.** $\frac{x - 6y}{x + y}$ [6.1] **5.** $\frac{1}{x^4y^2}$ [6.1] **6.** $\frac{1}{x + 2}$ [6.1] **7.** $\frac{7}{a(a + b)}$ [6.1] **8.** $x^2 + y^2$ [6.1] **9.** $\frac{5x^2 + 2x + 2}{x^2(x + 1)}$ [6.2] **10.** $\frac{-3x - 1}{(x - 3)(x + 3)(x + 1)}$ [6.2] **11.** $\frac{m(6m + n)}{(6m + 5n)(2m - n)(2m + 3n)}$ [6.2] **12.** $\frac{x(x + 10)}{(2x - 1)^2(x + 3)}$ [6.2] **13.** $x + 3$ [6.1] **14. a)** $\frac{3x^2 + 2x - 9}{(x + 5)(2x + 3)}$ **b)** $\left\{x \middle| x \neq -5 \text{ y } x \neq -\frac{3}{2}\right\}$ [6.2] **15.** $\frac{x + 5}{x + 2}$ [6.1] **16.** $\frac{y + 2x}{y - 3x}$ [6.3] **17.** $\frac{b(a - b)}{a}$ [6.3] **18.** $\frac{7x - 6}{4x^2 - x}$ [6.3] **19.** 20 [6.4] **20.** 12 [6.4] **21.** $C = \frac{2b + Ad}{A}$ [6.4] **22.** 0.75 watt [6.6] **23.** 6 [6.6] **24.** ≈4.44 horas [6.5] **25.** $6\frac{2}{3}$ millas [6.5]

Examen de repaso acumulativo

1. 

[1.2] **2.** $-27\frac{3}{4}$ [1.4] **3.** -3 [2.1] **4. a)** 28% **b)** ≈44,000 [1.3] **5.** 62 [1.4] **6.** $\frac{x^3}{8y^3}$ [1.5] **7.** $m = \frac{rF}{v^2}$ [2.2] **8.** 6% [2.2] **9.** 11 A.M. [2.4] **10.** $\left\{-\frac{32}{3}, \frac{22}{3}\right\}$ [2.6] **11.** 

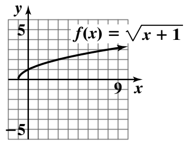
[3.1] **12.** 5 [3.2] **13.** $-\frac{1}{7}$ [3.4] **14.** $2x + 3y = 4$ [3.5] **15.** $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ [4.1] **16.** $9x^4 - 25y^2$ [5.2] **17.** $3(x - 5)^2$ [5.6] **18.** 

[3.1] **19.** $\frac{3x - 4}{(x - 1)(x - 2)}$ [6.2] **20.** 4 [6.4]

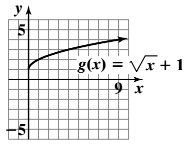
Capítulo 7

Conjunto de ejercicios 7.1

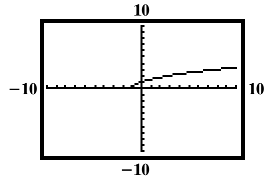
1. a) Dos, positiva y negativa. **b)** $7, -7$ **c)** Raíz cuadrada principal **d)** 7 **3.** No existe número real tal que cuando se eleva al cuadrado se obtenga -81. **5.** No; si el radicando es negativo, la respuesta no es un número real. **7. a)** 1.3 **b)** 1.3 **9. a)** 3 **b)** -3 **c)** -3 **11.** 6 **13.** -4 **15.** -5 **17.** -1 **19.** 1 **21.** No es un número real **23.** -7 **25.** No es un número real **27.** No es un número real **29.** $\frac{1}{5}$ **31.** $\frac{1}{2}$ **33.** $\frac{2}{7}$ **35.** $-\frac{2}{3}$ **37.** ≈ -2.07 **39.** 7 **41.** 19 **43.** 119 **45.** 235.23 **47.** 0.06 **49.** $\frac{12}{13}$ **51.** $|x-4|$ **53.** $|x-3|$ **55.** $|3x^2-1|$ **57.** $|6a^3-5b^4|$ **59.** $|a^7|$ **61.** $|z^{16}|$ **63.** $|a-4|$ **65.** $|3a+2b|$ **67.** $7x$ **69.** $4c^3$ **71.** $x+2$ **73.** $2x+y$ **75.** 2 **77.** 8 **79.** 9 **81.** ≈ 9.381 **83.** ≈ 5.290 **85.** -3 **87.** 97 **89.** 11 **91.** 45 **93.** Seleccione un valor menor a $-\frac{1}{2}$. **95.** $x \geq 1$ **97.** $x \geq 3$ **99. a)** Todos los números reales **b)** $a \geq 0$ **c)** Todos los números reales **101.** Si n es par, se determina la raíz par de un número positivo. Si n es impar, la expresión es real. **103.** $x > -5$ **105.** d **107.** a **109.** Una respuesta es $f(x) = \sqrt{x-8}$ **111. a)** No **b)** Sí, cuando $x = 0$ **c)** Sí **113. a)** $\sqrt{1288} \approx 35.89$ pies por segundo **b)** $\sqrt{2576} \approx 50.75$ pies por segundo. **115.**



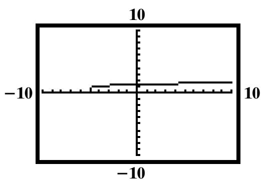
117.



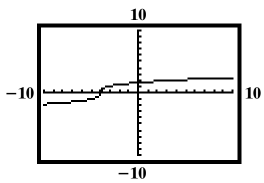
119.



121.



123.



127. $(3a-b)(3x+4y)$ **128.** $3x(x-4)(x-2)$ **129.** $(4x^2-1)(2x^2+3)$ **130.** $\left(x-\frac{2}{3}y\right)\left(x^2+\frac{2}{3}xy+\frac{4}{9}y^2\right)$

Conjunto de ejercicios 7.2

1. a) Cuando n es par y $a \geq 0$ o n es impar **b)** $a^{1/n}$ **3. a)** Siempre es real **b)** a **c)** a **d)** $|a|$ **5. a)** No; $(xy)^{1/2} = x^{1/2}y^{1/2}$ **b)** No; $(xy)^{-1/2} = x^{-1/2}y^{-1/2} = \frac{1}{x^{1/2}y^{1/2}}$ **7.** $a^{3/2}$ **9.** $9^{5/2}$ **11.** $z^{5/3}$ **13.** $7^{10/3}$ **15.** $9^{7/4}$ **17.** $y^{14/3}$ **19.** $(a^3b)^{1/4}$ **21.** $(x^9z^5)^{1/4}$ **23.** $(3a+8b)^{1/6}$ **25.** $\left(\frac{2x^6}{11y^7}\right)^{1/5}$ **27.** $\sqrt{a}$ **29.** $\sqrt{c^5}$ **31.** $\sqrt[3]{18^5}$ **33.** $\sqrt{24x^3}$ **35.** $(\sqrt[5]{11b^2c})^3$ **37.** $\sqrt[5]{6a+5b}$ **39.** $\frac{1}{\sqrt[3]{b^3-d}}$ **41.** a^3 **43.** x^3 **45.** $\sqrt[3]{y}$ **47.** $\sqrt{y}$ **49.** 19.3 **51.** x^5y^{10} **53.** $\sqrt{xyz}$ **55.** $\sqrt[4]{x}$ **57.** $\sqrt[8]{y}$ **59.** $\sqrt[9]{x^2y}$ **61.** $\sqrt[10]{a^9}$ **63.** 5 **65.** 4 **67.** 16 **69.** No es un número real **71.** $\frac{5}{3}$ **73.** $\frac{1}{2}$ **75.** -9 **77.** -4 **79.** $\frac{1}{4}$ **81.** $\frac{1}{64}$ **83.** $\frac{3}{4}$ **85.** No es un número real **87.** 24 **89.** $\frac{11}{28}$ **91.** $x^{9/2}$ **93.** $x^{1/6}$ **95.** $\frac{1}{x}$ **97.** 1 **99.** $\frac{y^{5/3}}{12}$ **101.** $\frac{12}{x^{11/6}}$ **103.** $\frac{1}{2x^{1/3}}$ **105.** $\frac{121}{x^{1/7}}$ **107.** $\frac{64}{a^{66/5}}$ **109.** $\frac{x}{y^{20}}$ **111.** $8z^{7/2}-4$ **113.** $\frac{5}{x^5}+\frac{20}{x^{3/2}}$ **115.** $12x^{13/6}-18x^2$ **117.** ≈ 13.42 **119.** ≈ 3.32 **121.** ≈ 20.53 **123.** ≈ 0.03 **125.** n es impar, o n es par y $a \geq 0$. **127.** $(4^{1/2}+9^{1/2})^2 \neq 4+9; 25 \neq 13$ **129.** $(1^{1/3}+1^{1/3})^3 \neq 1+1; 8 \neq 2$ **131.** $x^{1/2}(x+1)$ **133.** $y^{1/3}(1-y)(1+y)$ **135.** $\frac{1+y^2}{y^{2/5}}$ **137. a)** $2^{10} = 1024$ bacterias **b)** $2^{10}\sqrt{2} \approx 1448$ bacterias **139. a)** $2.69\sqrt{7^3} \approx$ \$49.82 mil millones **b)** $2.69\sqrt{16^3} =$ \$172.16 mil millones **141.** 9 **143.** $\{x|x \geq 7\}$ **145. a)** $(x-6)^2$ **b)** $(x-6)^2$ **147.** $2;\ z^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{3}} = z^{\frac{1}{60a}};\ z^{\frac{1}{60a}} = z^{\frac{1}{120}},\ 60a = 120;\ a = 2$ **149. c)** es una función **150.** $\frac{b^2+a^3b}{a^3-b}$ **151.** 0, 3 **152.** ≈ 441.67 millas por hora.

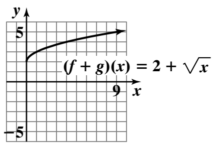
Conjunto de ejercicios 7.3

1. a) Elevando al cuadrado los números naturales **b)** 1, 4, 9, 16, 25, 36 **3. a)** Elevando los números naturales a la quinta potencia. **b)** 1, 32, 243, 1024, 3125 **5.** Si n es par y a o b son negativos, los números no son números reales. **7.** Si n es par y a o b son negativos; los números no son números reales; **9.** $2\sqrt{2}$ **11.** $2\sqrt{6}$ **13.** $4\sqrt{2}$ **15.** $5\sqrt{2}$ **17.** $5\sqrt{3}$ **19.** $2\sqrt{10}$ **21.** $2\sqrt[3]{2}$ **23.** $3\sqrt[3]{2}$ **25.** $2\sqrt[3]{4}$ **27.** $2\sqrt[3]{5}$ **29.** $2\sqrt[4]{3}$ **31.** $-2\sqrt[5]{2}$ **33.** b^3 **35.** x^2 **37.** $x\sqrt{x}$ **39.** $a^5\sqrt{a}$ **41.** $8z^{10}\sqrt[3]{z^2}$ **43.** $b^5\sqrt[4]{b^3}$ **45.** $x\sqrt[6]{x^3}$ o $x\sqrt{x}$ **47.** $3y^4\sqrt[5]{y^3}$ **49.** $10y^4\sqrt{2y}$ **51.** $xy^2\sqrt[3]{y}$ **53.** $ab^4\sqrt[5]{ab^3}$ **55.** $2x^7y^{10}z^{13}\sqrt{6xz}$ **57.** $3a^2b^2\sqrt[3]{3b^2}$ **59.** $2x^2y^2z^4\sqrt[4]{2yz^3}$ **61.** $3a^2b^2\sqrt[4]{b}$ **63.** $2a^2b^2\sqrt[5]{b^2}$ **65.** 5 **67.** $\frac{9}{10}$ **69.** 3 **71.** $\frac{1}{4}$ **73.** $\frac{1}{2}$ **75.** $\frac{1}{3}$ **77.** $\frac{1}{2}$ **79.** 2 **81.** $\frac{r^2}{2}$ **83.** $\frac{4x^2}{5y^5}$ **85.** $\frac{c^2}{4}$ **87.** $a^2b^6\sqrt[3]{a^2b^2}$ **89.** $2\sqrt{2}$ **91.** $3x^2$ **93.** $2x^2y\sqrt{2y}$ **95.** $\frac{\sqrt[3]{5y}}{2x^4}$ **97.** $\frac{y^2\sqrt[3]{5y}}{x^2}$ **99.** $\frac{x^3\sqrt[4]{10y}}{3}$ **101.** $(a \cdot b)^{1/2} = a^{1/2}b^{1/2} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ **103.** No; un ejemplo es $\sqrt{18}/\sqrt{2} = 3$.

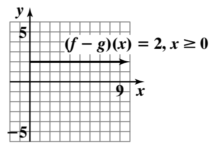
105. **a)** No **b)** Cuando $\sqrt[n]{x}$ es un número real y no es igual a 0. **106.** $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ **107.** $\{-28, 32\}$ **108.** $3x^6 - x^3 + 4$
109. $(x - 1)(x^2 - 8x + 19)$

Conjunto de ejercicios 7.4

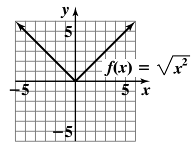
1. Radicales con el mismo radical e igual índice. **3.** ≈ 5.97
5. No: un ejemplo es $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9 + 16}, 3 + 4 \neq 5, 7 \neq 5$. **7.** 0 **9.** $4\sqrt{5}$ **11.** $-4\sqrt{3} + 5$ **13.** $-7\sqrt[4]{y}$ **15.** $2\sqrt[3]{x} + 9\sqrt{5}$
17. $7\sqrt{x} - 6\sqrt{y}$ **19.** $3\sqrt{5}$ **21.** $-30\sqrt{3} + 25\sqrt{5}$ **23.** $-4\sqrt{10}$ **25.** $18y\sqrt{5x}$ **27.** $-16\sqrt{5x}$ **29.** $-27a\sqrt{2}$ **31.** $5\sqrt[3]{4}$ **33.** -7
35. $6a\sqrt[3]{ab^2}$ **37.** $3r^3s^2\sqrt{rs}$ **39.** 0 **41.** 9 **43.** $2\sqrt[3]{7}$ **45.** $3m^2n^5\sqrt{3n}$ **47.** $3x^3y^4\sqrt[3]{2x^2y}$ **49.** $x^7y^7z^3\sqrt[5]{x^2y^3z}$ **51.** $x^2y^2\sqrt[4]{4y^2}$
53. $5 - \sqrt{15}$ **55.** $2\sqrt[3]{y^2} - y^3$ **57.** $4x^5y^3\sqrt[3]{x} + 4xy^4\sqrt[3]{2x^2y^2}$ **59.** 59 **61.** $6 - x^2$ **63.** $7 - z$ **65.** $23 + 9\sqrt{3}$ **67.** $16 - 10\sqrt{2}$
69. $10 - 3\sqrt{6}$ **71.** $29 - 12\sqrt{5}$ **73.** $18x - \sqrt{3xy} - y$ **75.** $8 - 2\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{12}$ **77.** $4x - 8\sqrt{x}$ **79.** $x^2 + x\sqrt[3]{x^2}$
81. $x\sqrt[4]{27x^2} - x^2\sqrt[4]{3x}$ **83.** $2\sqrt{6}$ **85.** $3\sqrt{5}$ **87.** $-14 + 11\sqrt{2}$ **89.** $5\sqrt{6} - 2\sqrt{3}$ **91.** $15\sqrt{2}$ **93.** $2x^3\sqrt[3]{10x^2}$ **95.** $2b^2c\sqrt[6]{2ab^5c^3}$
97. $4ab\sqrt[4]{b}$ **99.** $x - 2\sqrt[3]{x^2y^2} - \sqrt[3]{xy} + 2y$ **101.** $ab\sqrt[3]{12a^2b^2} - 2a^2b^2\sqrt[3]{3}$ **103.** $2x - 5$ **105.** $2|r - 4|$ **107.** $P = 14\sqrt{5}, A = 60$
109. $P = 17\sqrt{5}, A = 52.5$ **111.** No, $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$ **113.** **a)** ≈45.17 millas por hora **b)** ≈35.33 millas por hora
115. **a)** 37 pulgadas **b)** ≈37.97 pulgadas **117.** **a)**



119. **a)**



121.



b) Subir la gráfica 2 unidades **b)** $\{x | x \geq 0\}$

123. Un cociente de dos enteros, con denominador distinto de 0. **124.** Un número que puede representarse en una recta numérica real.
125. Un número real que no puede expresarse como el cociente de dos enteros. **126.** $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ **127.** $m = \frac{2E}{v^2}$
128. **a)**

b) $\left(-\frac{1}{2}, 5\right]$ **c)** $\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2} < x \leq 5\right\}$

Examen de mitad de capítulo

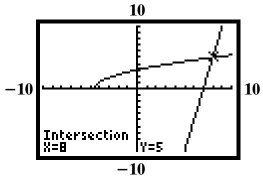
1. 11 [7.1] **2.** $-\frac{3}{4}$ [7.1] **3.** 16.3 [7.1] **4.** $|3a^2 - 4b^3|$ [7.1] **5.** 3 [7.1] **6.** $(7a^4b^3)^{1/5}$ [7.2]
7. 20 [7.2] **8.** $a^{10}b^{15}c^5$ [7.3] **9.** $\frac{14}{x}$ [7.3] **10.** $8x + \frac{16}{x^{5/2}}$ [7.3] **11.** $4x^2y^4\sqrt{2y}$ [7.3] **12.** $2a^2b^3c^2\sqrt[6]{ab^5c^3}$ [7.3] **13.** $\frac{1}{3}$ [7.3] **14.** $\frac{y^2\sqrt{y}}{3x^5}$ [7.3]
15. $11\sqrt{x} + 12\sqrt{y}$ [7.4] **16.** $27x\sqrt{10y}$ [7.4] **17.** $2x^2 - x\sqrt{5} - 15$ [7.4] **18.** $18a\sqrt{a} - 20a\sqrt{3}$ [7.4] **19.** $7ab\sqrt[4]{ab}$ [7.4]
20. La parte **a)** tendrá un valor absoluto. **a)** $|x - 3|$, **b)** $8x$ [7.1]

Conjunto de ejercicios 7.5

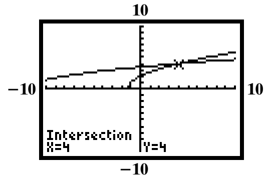
1. **a)** Mismos dos términos, con el signo del segundo término cambiado. **b)** $x + \sqrt{3}$
3. **a)** Las respuestas variarán **b)** $\frac{4\sqrt{3y}}{3y}$ **5.** (1) Ninguna potencia perfecta es factor de algún radicando. (2) Ningún radical tiene fracciones. (3) No hay radicales en el denominador. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **9.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ **11.** $\sqrt{6}$ **13.** $\frac{\sqrt{z}}{z}$ **15.** $\frac{p\sqrt{2}}{2}$ **17.** $\frac{\sqrt{7y}}{7}$ **19.** $3\sqrt{2}$ **21.** $\frac{\sqrt{xy}}{y}$ **23.** $\frac{\sqrt{10m}}{4}$
25. $\frac{\sqrt{2n}}{3}$ **27.** $\frac{3x^2y\sqrt{yz}}{z^2}$ **29.** $\frac{2y^4z\sqrt{15xz}}{3x}$ **31.** $\frac{4x^3y^2\sqrt{yz}}{z^2}$ **33.** $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ **35.** $\frac{8\sqrt[3]{y^2}}{y}$ **37.** $\frac{\sqrt[4]{27}}{3}$ **39.** $\frac{a\sqrt[4]{2}}{2}$ **41.** $\frac{5\sqrt[4]{z^2}}{z}$ **43.** $\frac{10\sqrt[5]{y^2}}{y}$
45. $\frac{2\sqrt[7]{a^3}}{a}$ **47.** $\frac{\sqrt[3]{4x^2}}{2x}$ **49.** $\frac{5m\sqrt[4]{8}}{2}$ **51.** $\frac{\sqrt[4]{135x}}{3x}$ **53.** $\frac{\sqrt[3]{12x^2y}}{2y}$ **55.** $\frac{\sqrt[3]{7xy^2z}}{z}$ **57.** 19 **59.** 62 **61.** -6 **63.** $a - b$ **65.** $4x - 9y$
67. $\sqrt{3} - 1$ **69.** $2 - \sqrt{3}$ **71.** $\frac{-5\sqrt{2} - 35}{47}$ **73.** $\frac{10 + \sqrt{30}}{14}$ **75.** $\frac{18 - 3\sqrt{x}}{36 - x}$ **77.** $\frac{4x + 4y\sqrt{x}}{x - y^2}$ **79.** $\frac{-13 + 3\sqrt{6}}{23}$ **81.** $a + a^3$
83. $\frac{4\sqrt{x + 2} + 12}{x - 7}$ **85.** $\frac{\sqrt{x}}{4}$ **87.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **89.** 1 **91.** $\frac{2xy^3\sqrt{30xz}}{5z}$ **93.** $\frac{\sqrt{14}}{x}$ **95.** $\frac{\sqrt{a} - 7}{a - 49}$ **97.** $-\frac{\sqrt{2x}}{2}$ **99.** $\frac{\sqrt[4]{24x^3y^2}}{2x}$
101. $\frac{2y^4z^3\sqrt[3]{2x^2z}}{x}$ **103.** $\frac{a\sqrt{r} + 2r\sqrt{a}}{a - 4r}$ **105.** $\frac{\sqrt[3]{150y^2}}{5y}$ **107.** $\frac{y^3z\sqrt[4]{54x^2}}{3x}$ **109.** $\sqrt{2}$ **111.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **113.** $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ **115.** $\frac{19\sqrt{2}}{2}$
117. $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ **119.** $-\frac{301\sqrt{2}}{20}$ **121.** $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ **123.** $\left(-\frac{2}{y} + \frac{3}{x}\right)\sqrt{xy}$ **125.** $2\sqrt{a}$ **127.** $\sqrt[3]{(a + b)^5}$ **129.** $\sqrt[15]{(a + 2b)^2}$ **131.** $\sqrt[6]{rs^5}$
133. $\sqrt[15]{x^2y^8}$ **135.** ≈3.69 metros **137.** ≈12 pulgadas **139.** **a)** 6.21 millones **b)** ≈2.35 millones **141.** $\frac{3}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$
143. $2 + \sqrt{3}$; racionalice el denominador y compare. **145.** **a)** 4, 8, 12 **b)** 9, 18, 27 **c)** $x^{(3a+2b)/6}$ **d)** $x^{(3a-2b)/6}$
147. $\frac{3\sqrt{2a} - 3b}{2a - 3b}$ **149.** $\frac{10}{15 + 3\sqrt{5}}$ **151.** $\frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}$ **154.** $b_2 = \frac{2A}{h} - b_1$ **155.** 40 millas por hora, 50 millas por hora.
156. $4x^3 + x^2 - 20x + 4$ **157.** $-8, 1$

Cómo usar su calculadora graficadora, 7.6

1.



2.



Conjunto de ejercicios 7.6

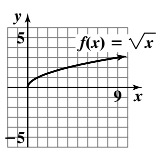
1. a) Las respuestas variarán. **b)** 5 **3.** 0 **5.** Las respuestas variarán. **7.** 1; Las respuestas variarán. **9.** 16 **11.** No hay solución real **13.** -64 **15.** 11 **17.** 9 **19.** -1 **21.** 81 **23.** 71 **25.** No hay solución real **27.** No hay solución real **29.** 2, 4 **31.** 8 **33.** 7 **35.** $\frac{2}{3}$ **37.** 16 **39.** 2 **41.** 10 **43.** 6 **45.** 8 **47.** 0 **49.** -3 **51.** $\frac{3}{2}$ **53.** No hay solución real **55.** 2, 0 **57.** 5, 8 **59.** No hay solución real **61.** 9 **63.** 3, 7 **65.** -1 **67.** 7 **69.** 4 **71.** 5 **73.** $v = \frac{p^2}{2}$ **75.** $g = \frac{v^2}{2h}$ **77.** $F = \frac{Mv^2}{R}$ **79.** $m = \frac{x^2k}{V_0^2}$ **81.** $A = \pi r^2$ **83.** $\sqrt{87}$ **85.** $2\sqrt{10}$ **87.** 4 **89.** No hay solución **91.** 3 **93.** 7 **95.** 1 **97.** 3 **99.** $\sqrt{16{,}200} \approx 127.28$ pies **101.** 13 pies **103. a)** ≈ 3.14 segundos **b)** $\sqrt{2}\cdot T$; compare $\sqrt{\frac{l}{32}}$ con $\sqrt{\frac{l}{16}}$ **c)** $\sqrt{24} \approx 4.90$ segundos **105.** $R = \frac{8\mu l}{\pi r^4}$ **107.** $0.2(\sqrt{149.4})^3 \approx 365.2$ días **109.** $\sqrt{10{,}000} = 100$ libras **111.** $\sqrt{320} \approx 17.89$ pies por segundo **113.** $\sqrt{1649} \approx 40.61$ metros **115.** $2, -2$ **117.** $5, -1$ **119.** 30 **121.** $5, -5$ **123. a)** 3, 7; puntos de intersección **b)** Sí **c)** 3, 7: sí **125.** En $x = 4$, $g(x)$ o $y = 0$. Por lo tanto la gráfica debe tener una intercepción con el eje x en 4. **127.** $L_1 \approx 0.44$, $L_2 \approx 0.76$ **129.** Todos los números reales **131.** 1.5 **133.** ≈ -3.7; ≈ 3.7 **135.** No hay solución real **137.** $n = \frac{z^2\sigma^2}{(\bar{x} - \mu)^2}$ **140.** $P_2 = \frac{P_1P_3}{P_1 - P_3}$ **141.** x **142.** $\frac{3a}{2b(2a + 3b)}$ **143.** $t(t - 5)$ **144.** $\frac{3}{x + 3}$ **145.** 2

Conjunto de ejercicios 7.7

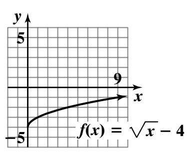
1. a) $\sqrt{-1}$ **b)** -1 **3.** Sí **5.** Sí **7.** $a - bi$ **9. a)** $\sqrt{2}$ **b)** 1 **c)** $\sqrt{-3}$ o $2i$ **d)** 6 **e)** Todo número que hemos estudiado es un número complejo. **11.** $7 + 0i$ **13.** $5 + 0i$ **15.** $21 - 6i$ **17.** $0 + 2i\sqrt{6}$ **19.** $8 - 2i\sqrt{3}$ **21.** $3 + 7i\sqrt{2}$ **23.** $12 - 5i$ **25.** $0 + (7 - 3\sqrt{5})i$ **27.** $21 + 8i$ **29.** 0 **31.** $-17 - 12i$ **33.** $(4\sqrt{2} + \sqrt{3}) - 2i\sqrt{2}$ **35.** $11 - 4i\sqrt{2}$ **37.** $-3 - 2i\sqrt{5}$ **39.** $6 - 2i$ **41.** $-9 + 4i$ **43.** $-33 + 18i$ **45.** $28 + 4i\sqrt{3}$ **47.** $9 + 9i$ **49.** $1 + 5i$ **51.** 109 **53.** $39 - 9i\sqrt{2}$ **55.** $\frac{25}{72} + \frac{1}{4}i$ **57.** $-\frac{8}{3}i$ **59.** $\frac{3 - 2i}{2}$ **61.** $\frac{12 + 6i}{5}$ **63.** $\frac{3 + 6i}{5}$ **65.** $\frac{9 - 12i}{10}$ **67.** $\frac{3 + i}{5}$ **69.** $\frac{5\sqrt{2} - 2i\sqrt{6}}{37}$ **71.** $\frac{(5\sqrt{10} - 2\sqrt{15}) + (10\sqrt{2} + 5\sqrt{3})i}{45}$ **73.** 5 **75.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **77.** $12 - 7i$ **79.** $4\sqrt{2} + 2i\sqrt{3}$ **81.** $20.8 - 16.64i$ **83.** $37 - 39i$ **85.** $\frac{4 - 11i}{2}$ **87.** $\frac{6\sqrt{3} + 12i}{7}$ **89.** $7 + \frac{2}{45}i$ **91.** $\frac{1}{4} - \frac{31}{50}i$ **93.** 2 **95.** $-4.33 - 10.91i$ **97.** -1 **99.** 1 **101.** i **103.** $-i$ **105. a)** $-2 - 3i$ **b)** $\frac{2 - 3i}{13}$ **107.** Verdadero; $(2i)(2i) = -4$ **109.** Falso; $(1 + i)(1 + 2i) = -1 + 3i$ **111.** Valores pares; i^n donde n es par será 1 o -1. **113.** -4 **115.** $16 - 4i$ **117.** $14 + 8i$ **119.** 0 **121.** 1 **123.** Sí **125.** No **127.** $\approx 0.83 - 3i$ **129.** $\approx 1.5 - 0.33i$ **131.** $-i$ **133.** $1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$ **135.** $6 + 3i\sqrt{3}$ **137.** $-1 + 7i\sqrt{3}$ **139.** 15 libras de \$5.50, 25 libras de \$6.30 **140.** $2c - 3 - \frac{8}{4c + 9}$ **141.** $\frac{a^2}{b(a - b)}$ **142.** 4

Ejercicios de repaso del capítulo 7

1. 10 **2.** -3 **3.** -5 **4.** 4 **5.** 8 **6.** 38.2 **7.** $|x|$ **8.** $|x - 3|$ **9.** $|x - y|$ **10.** $|x^2 - 4x + 12|$ **11.** 7 **12.** 57 **13.** ≈ 2.2 **14.** 12 metros **15.** $x^{7/2}$ **16.** $x^{5/3}$ **17.** $y^{13/4}$ **18.** $6^{-2/7}$ **19.** $\sqrt{x}$ **20.** $\sqrt[5]{a^4}$ **21.** $(\sqrt[4]{8m^2n})^7$ **22.** $\frac{1}{(\sqrt[3]{x + y})^5}$ **23.** 16 **24.** x^6 **25.** 81 **26.** $\sqrt[4]{a}$ **27.** -6 **28.** No es un número real **29.** $\frac{3}{4}$ **30.** $\frac{3}{8}$ **31.** $x^{4/15}$ **32.** $\frac{4}{y^3}$ **33.** $\frac{1}{a^{16/15}}$ **34.** $\frac{25x^{10}}{y^7}$ **35.** $5a^2 - 3a^{5/2}$ **36.** $\frac{4}{x^{7/6}} + 11$ **37.** $x^{2/5}(1 + x)$ **38.** $\frac{1 + a^2}{a^{1/2}}$ **39.** 5 **40.** ≈ 2.668 **41.**

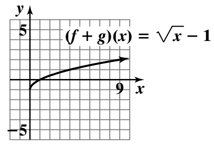


42.



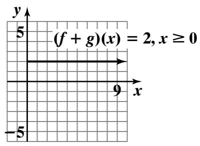
43. $4\sqrt{3}$ **44.** $4\sqrt[3]{2}$ **45.** $\frac{7}{3}$ **46.** $\frac{2}{5}$ **47.** $-\frac{9}{7}$ **48.** $-\frac{3}{5}$ **49.** 8 **50.** 4 **51.** $3xyz^2\sqrt{2y}$ **52.** $5xy^3\sqrt{3xy}$ **53.** $3a^2b^3\sqrt[3]{2ab}$ **54.** $5x^2y^3z^5\sqrt[3]{x^2z}$ **55.** $x^{14}y^{21}z^{35}$ **56.** $8a^3b^{12}c^{18}$ **57.** $2x^3\sqrt{10}$ **58.** $2x^3y\sqrt[3]{x^2y^2}$ **59.** $2x^2y^3\sqrt[3]{4x^2}$ **60.** $2x^2y^4\sqrt[4]{x}$ **61.** $6x - 2\sqrt{15x}$ **62.** $2x^2y^2\sqrt[3]{y^2} + x\sqrt[3]{18y}$ **63.** $\sqrt[4]{a^3b^2}$ **64.** $\sqrt[6]{x^5y^2}$ **65.** $\frac{64r^{9/2}}{p^3}$ **66.** $\frac{y^{1/5}}{6xz^{1/3}}$ **67.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$ **68.** $\frac{\sqrt[3]{21}}{3}$ **69.** $\frac{\sqrt[4]{20}}{2}$ **70.** $\frac{x\sqrt{10}}{10}$ **71.** $\frac{8\sqrt{x}}{x}$ **72.** $\frac{m\sqrt[3]{5}}{5}$ **73.** $\frac{10\sqrt[3]{y}}{y}$ **74.** $\frac{9\sqrt[4]{z^3}}{z}$ **75.** $\frac{x}{3}$ **76.** $\frac{x}{2}$ **77.** $\frac{4y^2}{x^3}$ **78.** $2x^2y^3$ **79.** $\frac{x^2\sqrt{6y}}{y}$ **80.** $\frac{2\sqrt{21ab}}{7b}$ **81.** $\frac{x^2y^2\sqrt{6yz}}{z}$

82. $\frac{5xy^2\sqrt{15yz}}{3z}$ **83.** $3xy\sqrt[3]{2y}$ **84.** $\frac{\sqrt[3]{75xy^2}}{5y}$ **85.** $\frac{y\sqrt[3]{9x^2}}{x}$ **86.** $\frac{y^2\sqrt[3]{25x}}{5x}$ **87.** $\frac{b^2\sqrt[4]{2ab^2}}{a}$ **88.** $\frac{y\sqrt[4]{6x^3y^2}}{2x}$ **89.** 7 **90.** $x - y^2$
91. $x^2 - y$ **92.** $7 + 4\sqrt{3}$ **93.** $x + \sqrt{5xy} - \sqrt{3xy} - y\sqrt{15}$ **94.** $\sqrt[3]{6x^2} - \sqrt[3]{4xy} - \sqrt[3]{9xy} + \sqrt[3]{6y^2}$ **95.** $-12 + 6\sqrt{5}$
96. $\frac{4x - x\sqrt{x}}{16 - x}$ **97.** $\frac{4a + a\sqrt{b}}{16 - b}$ **98.** $\frac{x\sqrt{y} + 7x}{y - 49}$ **99.** $\frac{x - \sqrt{xy}}{x - y}$ **100.** $\frac{x - 2\sqrt{xy} - 3y}{x - y}$ **101.** $\frac{2\sqrt{a-1} + 4}{a - 5}$
102. $\frac{5\sqrt{y+2} + 15}{y - 7}$ **103.** $9\sqrt[3]{x}$ **104.** $-4\sqrt{3}$ **105.** $12 - 13\sqrt[3]{2}$ **106.** $\frac{45\sqrt{2}}{8}$ **107.** $(9x^2y^3 - 4x^3y^4)\sqrt{x}$
108. $(8x^2y^2 - x + 3x^3)\sqrt[3]{xy^2}$ **109.** $3x\sqrt{2} - 3\sqrt{5x}$ **110.** $2x^2 + 2x^2\sqrt[3]{4x}$ **111.** $2x + 7$ **112.** $\sqrt{5}|2a + 5|$ **113.** $\sqrt[6]{x+5}$
114. $\sqrt[12]{b^5}$ **115. a)** $12\sqrt{3}$ **b)** 24 **116. a)** $8\sqrt{5} + \sqrt{130}$ **b)** $10\sqrt{13}$ **117. a)**



b) $x \geq 0$

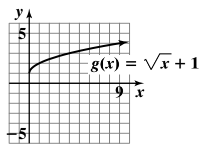
118. a)



b) $x \geq 0$ **119.** 81 **120.** No hay solución
121. 64 **122.** -125 **123.** 9 **124.** 125
125. No hay solución **126.** 4 **127.** -3
128. 3 **129.** 0, 9 **130.** 5 **131.** 4 **132.** 6
133. $L = \frac{V^2w}{2}$ **134.** $A = \pi r^2$ **135.** $2\sqrt{14}$
136. $5\sqrt{3}$ **137.** $\sqrt{29} \approx 5.39$ metros **138.** $\sqrt{1280} \approx 35.78$ pies por segundo **139.** $2\pi\sqrt{2} \approx 2.83\pi \approx 8.89$ segundos
140. $\sqrt{\frac{90}{0.145}} \approx 24.91$ metros por segundo **141.** $m \approx 5m_0$. Así, es ≈ 5 veces su masa original. **142.** $5 + 0i$ **143.** $-8 + 0i$
144. $7 - 16i$ **145.** $9 + 4i$ **146.** $13 + i$ **147.** $6 - 2i$ **148.** $12\sqrt{3} + (\sqrt{5} - \sqrt{7})i$ **149.** $-6 + 6i$ **150.** $17 - 6i$
151. $(24 + 3\sqrt{5}) + (4\sqrt{3} - 6\sqrt{15})i$ **152.** $-\frac{8i}{3}$ **153.** $\frac{(-2 - \sqrt{3})i}{2}$ **154.** $\frac{12 - 8i}{13}$ **155.** $\frac{5\sqrt{3} + 3i\sqrt{2}}{31}$ **156.** 0 **157.** 7
158. i **159.** $-i$ **160.** 1 **161.** -1

Examen de práctica del capítulo 7

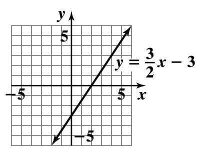
1. $|5x - 3|$ [7.1] **2.** $\frac{1}{x^{12/5}}$ [7.2] **3.** $\frac{1 + x^2}{x^{2/3}}$ [7.2] **4.** [7.1]



5. $3x^3y^5\sqrt{6x}$ [7.3] **6.** $5x^3y^3\sqrt[3]{2x^2y}$ [7.4] **7.** $\frac{x^3y\sqrt{14yz}}{4z}$ [7.5] **8.** $\frac{9\sqrt[3]{x^2}}{x}$ [7.5] **9.** $\frac{3 - \sqrt{3}}{6}$ [7.5]
10. $7\sqrt{6}$ [7.3] **11.** $(2xy + 4x^2y^2)\sqrt[3]{y^2}$ [7.4] **12.** $6\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - 12 + 4\sqrt{2}$ [7.4]
13. $\sqrt[8]{x^5y^3}$ [7.2] **14.** $\sqrt[12]{(7x+2)^7}$ [7.5] **15.** -5 [7.6] **16.** -3 [7.6] **17.** 9 [7.6]
18. 3 [7.6] **19.** $g = \frac{8w^2}{h}$ [7.6] **20.** $\sqrt{12{,}880} \approx 113.49$ pies por segundo [7.6] **21.** 13 pies [7.6] **22.** $2\pi\sqrt{\frac{1400}{65{,}000}} \approx 0.92$ segundos [7.6]
23. $20 + 20i$ [7.7] **24.** $\frac{33 - 17i}{53}$ [7.7] **25.** 2 [7.7]

Examen de repaso acumulativo

1. $\frac{57}{9}$ [2.1] **2.** -1 [2.1] **3.** \$40 [2.3] **4.** $\{x|-1 < x < 4\}$ [2.6] **5.** [3.4]



6. Paralelas [3.5] **7.** $-x^2 + 5x - 13$ [3.6] **8.** $y = -\frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$ [3.5] **9.** $\left(2, 5, \frac{34}{5}\right)$ [4.2]
10. 40 [4.5] **11.** $w = 2r + 1$ [5.3] **12.** $25x^2y^2 - 9$ [5.2] **13.** 3, -3 [7.6]
14. $x(4x - 5)(x - 1)$ [5.5] **15.** $(x - 2)(x^2 + 5x + 13)$ [5.6] **16.** $\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}$ [5.8] **17.** $\frac{(x + y)y^2}{3x^3}$ [6.1] **18.** $\frac{x + 3}{x + 5}$ [6.2] **19.** 18 [6.4]
20. 400 pies [6.6]

Capítulo 8

Conjunto de ejercicios 8.1

1. ± 6 **3.** Si $x^2 = a$, entonces $x = \pm\sqrt{a}$. **5.** $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ debe ser igual a c. **7. a)** Sí **b)** No, ± 2
9. Multiplique por $\frac{1}{2}$ para hacer $a = 1$. **11.** $\left(-\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ **13.** ± 5 **15.** $\pm 7i$ **17.** $\pm 2i\sqrt{6}$ **19.** $\pm i\sqrt{61}$ **21.** 8, 0 **23.** $-3 \pm 5i$
25. $2 \pm 3i\sqrt{5}$ **27.** $-1, \frac{1}{3}$ **29.** $\frac{2 \pm 2i}{3}$ **31.** 0.1, -1.7 **33.** $\frac{5 \pm 3\sqrt{2}}{2}$ **35.** $-\frac{1}{20}, -\frac{9}{20}$ **37.** 1, -4 **39.** $-3, -5$ **41.** $-2, -4$
43. 1, 6 **45.** $-1, \frac{1}{2}$ **47.** $-\frac{1}{2}, 4$ **49.** 5, 8 **51.** $-1, 7$ **53.** 4, 5 **55.** 7, -4 **57.** 1, -11 **59.** $2 \pm \sqrt{14}$ **61.** $-4 \pm \sqrt{11}$
63. $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ **65.** $\frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{2}$ **67.** 0, 1 **69.** $0, -\frac{2}{3}$ **71.** $0, \frac{1}{6}$ **73.** 1, -3 **75.** 8, -4 **77.** $\frac{-9 \pm \sqrt{73}}{2}$ **79.** $\frac{1}{3}, -1$ **81.** $\frac{1 \pm i\sqrt{39}}{4}$

83. $1 \pm i$ **85. a)** $21 = (x+2)(x-2)$ **b)** 5 **87. a)** $18 = (x+4)(x+2)$ **b)** $-3 + \sqrt{19}$ **89.** 30 mph **91.** 5, 7 **93.** 5 pies por 12 pies **95.** $\dfrac{12 + \sqrt{288}}{2} \approx 14.49$ pies por 14.49 pies **97.** $\sqrt{200} \approx 14.14$ pulgadas **99.** $\sqrt{24} \approx 4.90$ pies **101.** 4% **103.** ≈6% **105. a)** $S = 32 + 80\sqrt{\pi} \approx 173.80$ pulgadas cuadradas **b)** $r = \dfrac{4\sqrt{\pi}}{\pi} \approx 2.26$ pulgadas **c)** $r = -5 + \sqrt{\dfrac{80 + 25\pi}{\pi}} \approx 2.1$ pulgadas **107.** 2 **108.** \$4200 al 7%, \$5800 al $6\frac{1}{4}$% **109.** $\left\{10, \dfrac{4}{3}\right\}$ **110.** 0 **111.** $4x^3 + x^2 - 21x + 6$

Conjunto de ejercicios 8.2

1. $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **3.** $a = -3, b = 6, c = 8$ **5.** Sí; si multiplica ambos lados de una ecuación por -1 obtiene la otra ecuación. **7. a)** $b^2 - 4ac$ **b)** -84 **c)** Las respuestas variarán. **9.** Dos soluciones reales. **11.** No hay solución real **13.** Dos soluciones reales **15.** No hay solución real **17.** Una solución real **19.** Una solución real **21.** 3, 6 **23.** 2, 4 **25.** 1, −7 **27.** $-2 \pm 2\sqrt{6}$ **29.** ± 8 **31.** $\dfrac{2 \pm i\sqrt{11}}{3}$ **33.** 0, 5 **35.** $\dfrac{2 \pm i\sqrt{2}}{2}$ **37.** −1 **39.** $\dfrac{1}{4}$ **41.** $1 \pm \sqrt{2}$ **43.** $\dfrac{-3 \pm i\sqrt{15}}{2}$ **45.** $-3, \dfrac{1}{2}$ **47.** $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{3}$ **49.** 4, −6 **51.** $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}$ **53.** $\dfrac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{3}$ **55.** $\dfrac{3 \pm \sqrt{309}}{30}$ **57.** $\dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$ **59.** $\dfrac{2 \pm i\sqrt{6}}{2}$ **61.** $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{23}}{4}$ **63.** $\dfrac{-0.6 \pm \sqrt{0.84}}{0.2}$ o $-3 \pm \sqrt{21}$ **65.** 0, 2 **67.** −5, 6 **69.** $\dfrac{7 \pm \sqrt{17}}{4}$ **71.** No hay número real **73.** $x^2 - 7x + 10 = 0$ **75.** $x^2 + 8x - 9 = 0$ **77.** $15x^2 - x - 6 = 0$ **79.** $x^2 - 2 = 0$ **81.** $x^2 + 9 = 0$ **83.** $x^2 - 6x + 7 = 0$ **85.** $x^2 - 4x + 13 = 0$ **87. a)** $n(10 - 0.02n) = 450$ **b)** 50 **89. a)** $n(50 - 0.4n) = 660$ **b)** 15 **91.** Las respuestas variarán. **93.** Sí **95.** 3 **97.** $w = 3$ pies, $l = 8$ pies **99.** 2 pulgadas **101.** ≈4.39 segundos **103. a)** ≈4.57 segundos **b)** ≈4.79 segundos **105.** $2\sqrt{5}, -\sqrt{5}$ **107.** $(-0.12 + \sqrt{14.3952})/1.2 \approx 3.0618$ milímetros **109. a)** ≈1.94 segundos **b)** ≈2.74 segundos **c)** La de Courtney **d)** Sí, a los 1.5 segundos **110.** 5.0×10^2 o 500 **111.** 7 **112.** (2, −1) **113.** $\dfrac{6y - x}{3xy}$ **114.** No hay solución real

Conjunto de ejercicios 8.3

1. Las respuestas variarán. **3.** $S = \sqrt{A}$ **5.** $t = \sqrt{\dfrac{d}{4.9}}$ **7.** $i = \sqrt{\dfrac{E}{r}}$ **9.** $t = \dfrac{\sqrt{d}}{4}$ **11.** $c = \sqrt{\dfrac{E}{m}}$ **13.** $r = \sqrt{\dfrac{3V}{\pi h}}$ **15.** $W = \sqrt{d^2 - L^2}$ **17.** $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ **19.** $H = \sqrt{d^2 - L^2 - W^2}$ **21.** $t = \sqrt{\dfrac{h - s_0}{-16}}$ o $t = \dfrac{\sqrt{s_0 - h}}{4}$ **23.** $v = \sqrt{\dfrac{2E}{m}}$ **25.** $v_1 = \sqrt{v_2^2 - 2ad}$ **27.** $c = \sqrt{(v')^2 + v^2}$ **29. a)** \$10,950 **b)** ≈7 **31. a)** 32°F **b)** 80.8°F **c)** ≈2.92 minutos **33. a)** 0.53 mil millones **b)** 2007 **35. a)** 111.4 mil millones de toneladas **b)** 2003 **37. a)** 1.301 millones **b)** 2009 **39.** $l = 30$ metros, $w = 20$ metros **41.** 4 pies por hora **43.** De ida a 6 mph, de regreso a 8 mph **45.** Bonita ≈11.52 horas; Pamela ≈12.52 horas **47.** 130 mph **49.** Chris ≈11.76 horas; John ≈12.26 horas **51.** 75 mph **53.** $l \approx 34.86$ pulgadas, $h \approx 19.61$ pulgadas **55.** Las respuestas variarán. **57.** 6 metros por 3 metros o 2 metros por 9 metros **59.** −16 **60.** $R = \dfrac{E - Ir}{I}$ **61.** $\dfrac{16}{r - 4}$ **62.** $\dfrac{x^2}{y^{32}}$ **63.** No hay solución.

Examen de mitad de capítulo

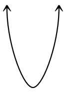
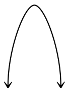
1. $\pm 7\sqrt{2}$ [8.1] **2.** $3 \pm 2i\sqrt{5}$ [8.1] **3.** $-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{13}{2}$ [8.1] **4.** −6, 2 [8.1] **5.** $2 \pm \sqrt{14}$ [8.1] **6.** $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{143}}{8}$ [8.1] **7.** $(6 + 6\sqrt{2})$ metros [8.1] **8. a)** $b^2 - 4ac$ **b)** Dos soluciones reales distintas: $b^2 - 4ac > 0$; una solución real: $b^2 - 4ac = 0$; no tiene soluciones reales: $b^2 - 4ac < 0$ [8.2] **9.** Dos soluciones reales y distintas [8.2] **10.** $-\dfrac{5}{3}, \dfrac{3}{2}$ [8.2] **11.** $-2 \pm 2\sqrt{3}$ [8.2] **12.** $\dfrac{1 \pm i\sqrt{14}}{3}$ [8.2] **13.** $x^2 - 5x - 14 = 0$ [8.2] **14.** $x^2 - 4x - 1 = 0$ [8.2] **15.** 10 lámparas [8.2] **16.** $r = \sqrt{x^2 - y}$ [8.3] **17.** $x = \sqrt{\dfrac{3A}{k}}$ [8.3] **18.** $y = \sqrt{D^2 - x^2}$ [8.3] **19.** 5 pies por 12 pies [8.3] **20.** 5 relojes [8.3]

Conjunto de ejercicios 8.4

1. Puede escribirse en la forma $au^2 + bu + c = 0$. **3.** $u = x^2$; da la ecuación $3u^2 - 5u + 1 = 0$. **5.** $u = z^{-1}$; da la ecuación $u^2 - u = 56$. **7.** $\pm 1, \pm 3$ **9.** $\pm i, \pm 4i$ **11.** $\pm 2, \pm 3$ **13.** $\pm 2, \pm\sqrt{3}$ **15.** $\pm\dfrac{1}{2}, \pm 2$ **17.** $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}$ **19.** $\pm 3, \pm i\sqrt{2}$ **21.** $\pm 1, \pm i\sqrt{5}$ **23.** 4 **25.** 9 **27.** $\dfrac{1}{9}$ **29.** 1, −9 **31.** $\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{2}$ **33.** $\pm\sqrt{6}, \pm 1$ **35.** $-6, -\dfrac{5}{2}$ **37.** $\pm\dfrac{5\sqrt{6}}{6}, \pm\dfrac{\sqrt{39}}{3}$ **39.** $-\dfrac{1}{2}$ **41.** 3, 4 **43.** $2, \dfrac{1}{3}$ **45.** $1, -\dfrac{1}{10}$ **47.** $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}$ **49.** 1, 27 **51.** 27, 216 **53.** $\dfrac{1}{4}$ **55.** −32, −1 **57.** (1, 0), (16, 0) **59.** Ninguna **61.** $(-4, 0), \left(\dfrac{1}{5}, 0\right)$ **63.** (−8, 0), (27, 0) **65.** (−1, 0), (4, 0) **67.** (±2, 0), (±5, 0) **69.** Sea $u = x^2$ **71.** Sea $u = x^{-1}$ **73.** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; inicie con $(x-2)(x+2)(x-1)(x+1) = 0$ **75.** $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$; inicie con $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$ **77.** No; las soluciones imaginarias siempre ocurren en parejas. **79. a)** y **b)** $\dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{4}$ **81.** $-\dfrac{14}{5}, -\dfrac{8}{3}$ **83.** $2, \dfrac{1}{4}$ **85.** 2, 1 **87.** −3, 1, 2, −4 **89.** $\pm\sqrt{\dfrac{3 \pm \sqrt{15}}{2}}$ **91.** $\dfrac{43}{60}$ **92.** 1 **93.** D: $\mathbb{R}$, R: $\{y \mid y \geq 0\}$ **94.** $2xy^2\sqrt[3]{2}$ **95.** $9\sqrt{3}$

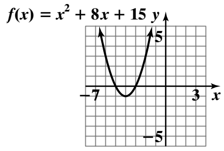
Conjunto de ejercicios 8.5

1. La gráfica de una ecuación cuadrática se denomina parábola. **3.** El eje de simetría de una parábola es la recta donde, si la gráfica se dobla, los dos lados quedan uno sobre el otro. **5.** $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ **7. a)** Cuando $a > 0$, $f(x)$ tendrá un mínimo ya que la gráfica abre hacia arriba. **b)** Cuando $a < 0$, $f(x)$ tendrá un máximo ya que la gráfica abre hacia abajo. **9.** Haga $x = 0$ y resuelva para y.

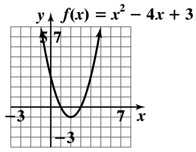
11. a)  **b)** 

13. Valor mínimo; la gráfica abre hacia arriba

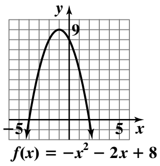
15. a) Hacia arriba **b)** $(0, 15)$ **c)** $(-4, -1)$ **d)** $(-5, 0), (-3, 0)$ **e)**



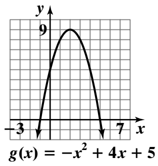
17. a) Hacia arriba **b)** $(0, 3)$ **c)** $(2, -1)$ **d)** $(1, 0), (3, 0)$ **e)**



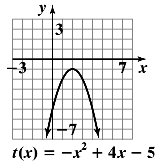
19. a) Hacia abajo **b)** $(0, 8)$ **c)** $(-1, 9)$ **d)** $(-4, 0), (2, 0)$ **e)**



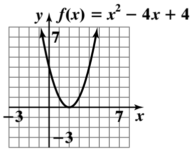
21. a) Hacia abajo **b)** $(0, 5)$ **c)** $(2, 9)$ **d)** $(-1, 0), (5, 0)$ **e)**



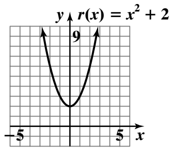
23. a) Hacia abajo **b)** $(0, -5)$ **c)** $(2, -1)$ **d)** No hay intercepción con el eje x **e)**



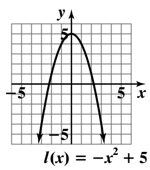
25. a) Hacia arriba **b)** $(0, 4)$ **c)** $(2, 0)$ **d)** $(2, 0)$ **e)**



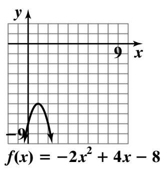
27. a) Hacia arriba **b)** $(0, 2)$ **c)** $(0, 2)$ **d)** No hay intersecciones con el eje x **e)**



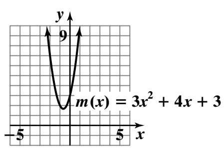
29. a) Hacia abajo **b)** $(0, 5)$ **c)** $(0, 5)$ **d)** $(-\sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0)$ **e)**



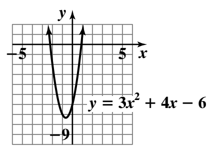
31. a) Hacia abajo **b)** $(0, -8)$ **c)** $(1, -6)$ **d)** No hay intersecciones con el eje x **e)**



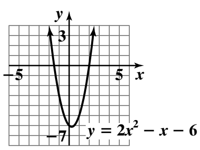
33. a) Hacia arriba **b)** $(0, 3)$ **c)** $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$ **d)** No hay intersecciones con el eje x **e)**



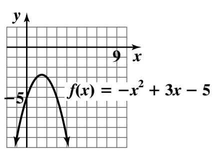
35. a) Hacia arriba **b)** $(0, -6)$ **c)** $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{22}{3}\right)$ **d)** $\left(\dfrac{-2 + \sqrt{22}}{3}, 0\right), \left(\dfrac{-2 - \sqrt{22}}{3}, 0\right)$ **e)**



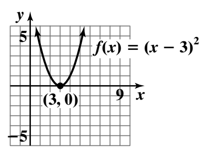
37. a) Hacia arriba **b)** $(0, -6)$ **c)** $\left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{49}{8}\right)$ **d)** $\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right), (2, 0)$ **e)**



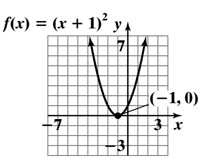
39. a) Hacia abajo **b)** $(0, -5)$ **c)** $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{11}{4}\right)$ **d)** No hay intersecciones con el eje x. **e)**



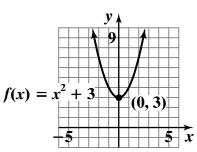
41.



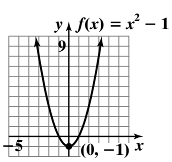
43.



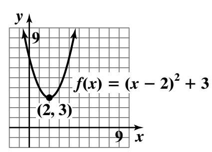
45.



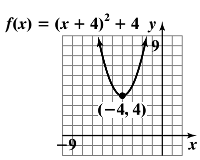
47.

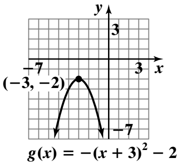


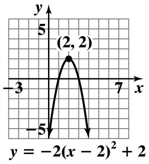
49.

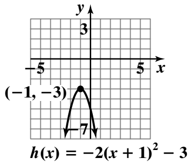


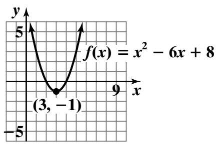
51.

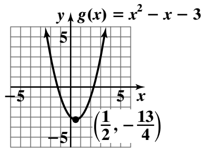


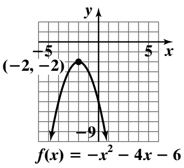
53.


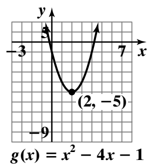
55.


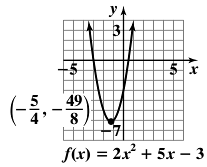
57.


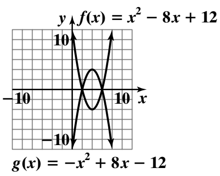
59. a) $f(x) = (x-3)^2 - 1$ **b)**


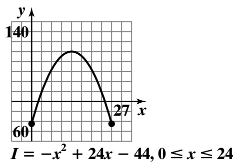
61. a) $g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$ **b)**


63. a) $f(x) = -(x+2)^2 - 2$ **b)**


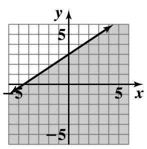
65. a) $g(x) = (x-2)^2 - 5$ **b)**


67. a) $f(x) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$ **b)**


69. d) **71.** b) **73. a)** $x = 7$ **b)** $A = 121$ **75. a)** $x = 10.5$ **b)** $A = 240.25$
77. a) $n = 200$ **b)** $R = \$800$ **79.** 2010 **81.** 4 unidades **83.** 3 unidades **85.** $f(x) = 2(x-3)^2 - 2$ **87.** $f(x) = -4\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 - \sqrt{2}$
89. a) Las gráficas tendrán las mismas intersecciones con el eje x, pero $f(x) = x^2 - 8x + 12$ abrirá hacia arriba y $g(x) = -x^2 + 8x - 12$ abrirá hacia abajo. **b)** Sí, ambas en $(6, 0)$ y $(2, 0)$ **c)** No; vértice de $f(x)$ en $(4, -4)$, vértice de $g(x)$ en $(4, 4)$
d)


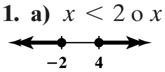
91. a)


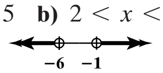
b) \$2 **c)** \$22 **d)** \$12 **e)** \$10,000 **93. a)** 100 **b)** \$3800
95. a) 40.425 metros **b)** 2.5 segundos **c)** ≈5.37 segundos
97. a) ≈\$577 **b)** 2000 **99.** 400 pies cuadrados
101. −16, 4 y −4 **103.** 900, 30 y 30 **105. a)** \$142,400 **b)** 380
107. a) $f(t) = -16(t - 1.625)^2 + 45.25$ **b)** 45.25 pies, 1.625 segundos **c)** Iguales

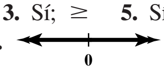
109. 200π pies cuadrados **110.**


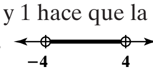
111. $(-2, 3, 2)$ **112.** −8 **113.** $\dfrac{x}{x+6}$

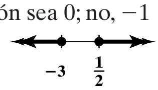
Conjunto de ejercicios 8.6

1. a) $x < 2$ o $x > 5$ **b)** $2 < x < 5$ **3.** Sí; $\ge$ **5.** Sí, −2 y 1 hace que la fracción sea 0; no, −1 hace que la fracción sea indefinida. **7.**


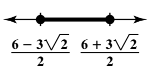
9.


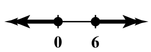
11.


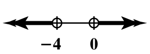
13.


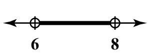
15.


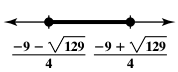
17.

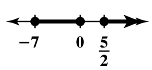

19.


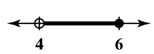
21. $[-5, -1] \cup [2, \infty)$ **23.** $(-\infty, -4) \cup (-2, 3)$ **25.** $\left(-6, -\frac{5}{2}\right) \cup (2, \infty)$
27. $\left(-1, -\frac{5}{3}\right) \cup (3, \infty)$ **29.** $[-2, -2] \cup \left[\frac{8}{3}, \infty\right)$ **31.** $(-\infty, 0)$ **33.**


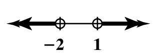
35.


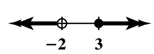
37.


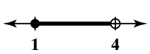
39.


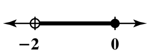
41.


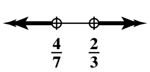
43. $\{x \mid x < -2 \text{ o } x > 4\}$ **45.** $\{x \mid -5 < x < 1\}$
47. $\{x \mid x \le -3 \text{ o } x > 2\}$ **49.** $\{a \mid -5 < a < 9\}$ **51.** $\{c \mid c < 4 \text{ o } c > 10\}$ **53.** $\{y \mid -4 < y \le -2\}$ **55.** $\left\{a \,\middle|\, a \le -2 \text{ o } a > \frac{1}{3}\right\}$
57. $\left\{x \,\middle|\, -\frac{4}{3} < x < \frac{1}{2}\right\}$ **59.** $\left\{x \,\middle|\, -\frac{8}{3} \le x < 2\right\}$ **61.** $(-\infty, -3) \cup (-1, 6)$ **63.** $(-3, 2) \cup (5, \infty)$ **65.** $(-2, 1] \cup [7, \infty)$
67. $(-\infty, -8) \cup [0, 3)$ **69.** $(-\infty, -4) \cup (1, 6]$ **71.** $\left[-\frac{5}{2}, 3\right] \cup (4, \infty)$ **73.**


75.


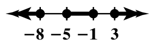
77.


79.


81.


83.


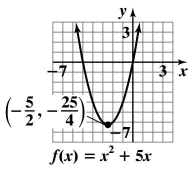
85. a) $(4, \infty)$; $y > 0$ en este intervalo **b)** $(-\infty, 2) \cup (2, 4)$; $y < 0$ en este intervalo **87.** $x^2 + 2x - 8 > 0$ **89.** $\dfrac{x+3}{x-4} \ge 0$ **91.** Todos los números reales; para cualquier valor de x, la expresión es ≥ 0.
93. Todos los números reales excepto −2; para cualquier valor de x excepto −2, la expresión es ≥ 0. **95.** No hay solución; la gráfica abre

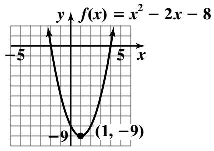
hacia arriba y no tiene intersecciones con el eje x, de modo que siempre está por arriba del eje x. **97.** 

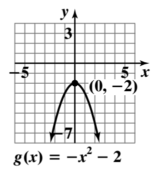
99. $x^2 - 3x > 0$; multiplique los factores que tienen valores frontera. **101.** $x^2 < 0$; x^2 siempre es ≥ 0. **103.** $(-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, \infty)$
105. $[-2, -1] \cup [2, \infty)$ **109.** 6 cuartos **110.** $-\frac{1}{2}$ **111.** $3r + 3s - 9t$ **112.** $\frac{x-3}{x+1}$ **113.** $38 - 9i$

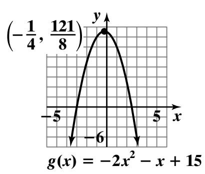
Ejercicios de repaso del capítulo 8

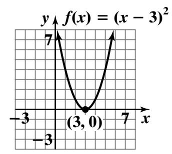
1. $5 \pm 2\sqrt{6}$ **2.** $\frac{-1 \pm 2\sqrt{15}}{2}$ **3.** $-\frac{1}{3}, 1$ **4.** $\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}$ **5.** 3, 4 **6.** 4, −8 **7.** $-1 \pm \sqrt{10}$
8. $-3 \pm \sqrt{21}$ **9.** $1 \pm 3i$ **10.** $2 \pm 2i\sqrt{7}$ **11. a)** $32 = (x + 1)(x + 5)$ **b)** 3 **12. a)** $63 = (x + 2)(x + 4)$ **b)** 5 **13.** 6, 7
14. ≈16.90 pies por ≈16.90 pies **15.** Dos soluciones reales **16.** No hay solución real **17.** Una solución real **18.** No hay soluciones reales
19. Una solución real **20.** Dos soluciones reales **21.** $0, -\frac{4}{3}$ **22.** 2, 9 **23.** 8, −5 **24.** $0, \frac{9}{7}$ **25.** $\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}$ **26.** $\frac{1}{4}, -3$ **27.** $-4 \pm \sqrt{11}$
28. $-2 \pm 2\sqrt{3}$ **29.** $\frac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$ **30.** $\frac{3 \pm \sqrt{33}}{3}$ **31.** $\frac{1 \pm i\sqrt{51}}{2}$ **32.** $1 \pm i\sqrt{10}$ **33.** $\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}$ **34.** $\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}$ **35.** 10, −6 **36.** $\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$
37. $\frac{7 \pm \sqrt{89}}{10}$ **38.** $\frac{3 \pm 3\sqrt{3}}{2}$ **39.** $x^2 - 2x - 3 = 0$ **40.** $3x^2 + 4x - 4 = 0$ **41.** $x^2 - 11 = 0$ **42.** $x^2 - 6x + 13 = 0$
43. 8 pies por 12 pies **44.** $\sqrt{128} \approx 11.31$ **45.** 4% **46.** 7, 11 **47.** 8 pulgadas por 12 pulgadas **48.** \$540 **49. a)** \$121.8 mil millones **b)** 2010 **50. a)** 720 pies **b)** 7 segundos **51. a)** 40 mililitros **b)** 150°C **52.** la mayor ≈23.51 horas; la menor ≈24.51 horas
53. 50 millas por hora **54.** 1.6 millas por hora **55.** $l = 10$ unidades, $w = 8$ unidades **56.** 20 mesas **57.** $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ **58.** $t = \sqrt{\frac{c-h}{4.9}}$
59. $v_y = \sqrt{v^2 - v_x^2}$ **60.** $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2ad}$ **61.** ±2, ±3 **62.** $\pm 4, \pm\sqrt{5}$ **63.** $\pm 2\sqrt{2}, \pm i\sqrt{3}$ **64.** $\frac{3}{2}, -\frac{1}{6}$ **65.** $\frac{1}{9}$
66. $\frac{27}{8}, 8$ **67.** $4, \frac{13}{8}$ **68.** $-\frac{1}{5}, -\frac{5}{2}$ **69.** $(\pm 1, 0), (\pm 9, 0)$ **70.** $\left(\frac{4}{25}, 0\right)$ **71.** Ninguno **72.** $(3 \pm \sqrt{17}, 0), (3 \pm \sqrt{6}, 0)$

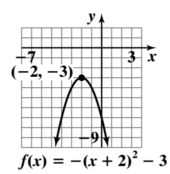
73. a) Hacia arriba **b)** (0, 0)
c) $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ **d)** (0, 0), (−5, 0)
e)


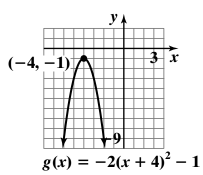
74. a) Hacia arriba **b)** (0, −8)
c) (1, −9) **d)** (−2, 0), (4, 0)
e)


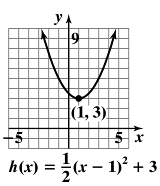
75. a) Hacia abajo **b)** (0, −2)
c) (0, −2) **d)** No hay intersecciones con el eje x
e)


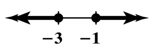
76. a) Hacia abajo **b)** (0, 15)
c) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{121}{8}\right)$ **d)** $(-3, 0), \left(\frac{5}{2}, 0\right)$
e)


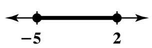
77. a) \$11 **b)** \$7600
78. a) 2.5 segundos **b)** 175 pies
79.


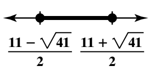
80.


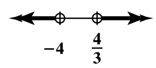
81.


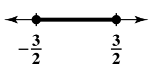
82.


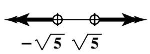
83.


84.


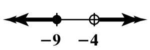
85.


86.


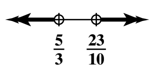
87.


88.


89. $\{x | x < -1 \text{ o } x > 5\}$ **90.** $\{x | -2 < x \leq 3\}$ **91.** $\{x | x < -3 \text{ o } x \geq 2\}$
92. $\left\{x \middle| -\frac{5}{3} < x < 6\right\}$ **93.** $\{x | -4 < x < -1 \text{ o } x > 2\}$ **94.** $\{x | x \leq 0 \text{ o } 3 \leq x \leq 6\}$ **95.** $\left[-\frac{4}{3}, 1\right] \cup [3, \infty)$
96. $(-\infty, -4) \cup (-2, 0)$ **97.** $(-2, 0) \cup (4, \infty)$ **98.** $(-\infty, -3) \cup (2, 8)$ **99.** $(-2, 3] \cup (7, \infty)$ **100.** $(-\infty, -3) \cup [0, 6]$

101.


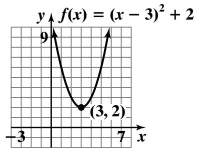
102.


103.


Examen de práctica del capítulo 8

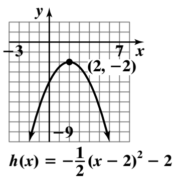
1. 3, −5 [8.1] **2.** $3 \pm \sqrt{2}$ [8.1] **3.** 8, −2 [8.2] **4.** $2 \pm i\sqrt{7}$ [8.2] **5.** $\frac{2}{3}, -1$ [8.1–8.2]
6. $\frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}$ [8.1–8.2] **7.** $5x^2 - 18x - 8 = 0$ [8.2] **8.** $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ [8.3] **9. a)** \$121,200 **b)** ≈\$2712.57 pies cuadrados [8.1–8.3]

10. 50 mph [8.1–8.3] **11.** $\pm\frac{\sqrt{10}}{2}, \pm i\sqrt{10}$ [8.4] **12.** $\frac{343}{27}, -216$ [8.4] **13.** $\left(\frac{9}{16}, 0\right)$ [8.4] **14.**

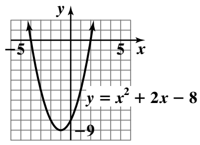


[8.5]

15.

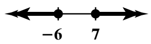


[8.5] **16.** Dos soluciones reales [8.5] **17. a)** Hacia arriba **b)** $(0, -8)$ **c)** $(-1, -9)$ **d)** $(-4, 0), (2, 0)$ **e)**

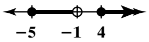


[8.5]

18. $2x^2 + 13x - 7 = 0$ [8.5] **19.**



[8.6] **20.**



[8.6] **21. a)** $\left[-\frac{5}{2}, -2\right)$ **b)** $\left\{x \middle| -\frac{5}{2} \le x < -2\right\}$ [8.6]

22. $w = 5$ pies, $l = 13$ pies [8.5] **23.** 6 segundos [8.5] **24. a)** 20 **b)** \$ 490 [8.5] **25.** 30 [8.5]

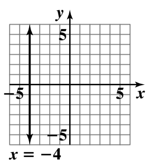
Examen de repaso acumulativo

1. 13 [1.4] **2.** 18 [1.4] **3.** 2.54×10^6 [1.6] **4.** $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right\}$ [2.6] **5.** $3x - 7$ [2.1]

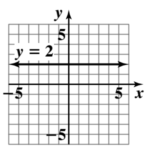
6. Todos los números reales, $\mathbb{R}$ [2.1] **7.** $(-12, 8)$ [2.5] **8.** $m = -\frac{9}{7}, \left(0, \frac{15}{7}\right)$ [3.4] **9.** 1500 [3.2] **10.** $y = x - 1$ [3.5]

11. a) No, las gráficas no pasan la prueba de la recta vertical **b)** Dominio: $\{x|x \ge -2\}$, Rango: $\mathbb{R}$ [3.2]

12. a)



b)



[3.3] **13.** 160 [4.5] **14.** $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ [4.1] **15.** $(x + 9)(x + 7)$ [5.5]

16. a) $a^2 + 2ab + b^2$ **b)** $(a + b)^2$ [5.7] **17.** $\frac{2(x - 4)}{(x - 3)(x - 5)}$ [6.2] **18.** $\frac{12}{5}$ [6.4]

19. 11.52 watts [6.6] **20.** $\frac{-14 - 23i}{29}$ [7.7]

Capítulo 9

Conjunto de ejercicios 9.1

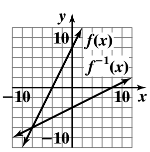
1. Para determinar $(f \circ g)(x)$, sustituya $g(x)$ por x en $f(x)$. **3. a)** Cada y tiene una única. **b)** Utilice la prueba de la recta horizontal. **5. a)** Sí; cada primer coordenada está asociada con una sola segunda coordenada. **b)** Si; cada segunda coordenada está asociada con sólo una primer coordenada. **c)** $\{(5, 3), (2, 4), (3, -1), (-2, 0)\}$; invertir la pareja ordenada. **7.** El dominio de f es el rango de f^{-1} y el rango de f es el dominio de f^{-1}. **9. a)** $x^2 + 4x + 5$ **b)** 37 **c)** $x^2 + 3$ **d)** 19 **11. a)** $x^2 + x - 1$ **b)** 19 **c)** $x^2 + 7x + 8$ **d)** 52 **13. a)** $\frac{1}{2x + 3}$ **b)** $\frac{1}{11}$ **c)** $\frac{2}{x} + 3$ **d)** $3\frac{1}{2}$ **15. a)** $\frac{9}{x} + 1$ **b)** $3\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{3}{3x + 1}$ **d)** $\frac{3}{13}$ **17. a)** $x^4 + 10x^2 + 26$ **b)** 442 **c)** $x^4 + 2x^2 + 6$ **d)** 294 **19. a)** $\sqrt{x + 5} - 4$ **b)** -1 **c)** $\sqrt{x + 1}$ **d)** $\sqrt{5}$ **21.** No **23.** Sí **25.** Sí **27.** No **29.** Sí **31.** No **33.** No **35.** Sí **37.** Sí **39.** No **41.** Sí **43.** $f(x)$: Dominio: $\{-2, -1, 2, 4, 8\}$; rango: $\{0, 4, 6, 7, 9\}$; $f^{-1}(x)$: Dominio: $\{0, 4, 6, 7, 9\}$; Rango: $\{-2, -1, 2, 4, 8\}$ **45.** $f(x)$: Dominio: $\{-1, 1, 2, 4\}$; Rango: $\{-3, -1, 0, 2\}$, $f^{-1}(x)$: Dominio: $\{-3, -1, 0, 2\}$; Rango: $\{-1, 1, 2, 4\}$ **47.** $f(x)$: Dominio: $\{x|x \ge 2\}$; Rango: $\{y|y \ge 0\}$; $f^{-1}(x)$; Dominio: $\{x|x \ge 0\}$; Rango: $\{y|y \ge 2\}$

49. a) Sí **b)** $f^{-1}(x) = x + 2$ **51. a)** Sí **b)** $h^{-1}(x) = \frac{x}{4}$ **53. a)** No **55. a)** No **57. a)** Sí **b)** $g^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ **59. a)** No

61. a) Sí **b)** $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 6}$ **63. a)** Sí **b)** $g^{-1}(x) = x^2 - 2, x \ge 0$ **65. a)** Sí **b)** $h^{-1}(x) = \sqrt{x + 4}, x \ge -4$

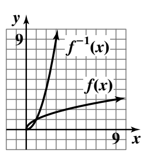
67. a) $f^{-1}(x) = \frac{x - 8}{2}$

b)



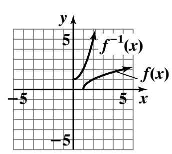
69. a) $f^{-1}(x) = x^2, x \ge 0$

b)



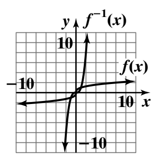
71. a) $f^{-1}(x) = x^2 + 1, x \ge 0$

b)



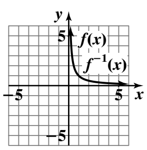
73. a) $f^{-1}(x) = x^3$

b)



75. a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}, x > 0$

b)



77. $(f \circ f^{-1})(x) = x, (f^{-1} \circ f)(x) = x$ **79.** $(f \circ f^{-1})(x) = x, (f^{-1} \circ f)(x) = x$
81. $(f \circ f^{-1})(x) = x, (f^{-1} \circ f)(x) = x$ **83.** $(f \circ f^{-1})(x) = x, (f^{-1} \circ f)(x) = x$
85. No, la composición de funciones no es conmutativa. Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$. Entonces $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 1$, mientras que $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$.
87. a) $(f \circ g)(x) = x$; $(g \circ f)(x) = x$ **b)** El dominio es $\mathbb{R}$, para todas ellas.
89. El rango de $f^{-1}(x)$ es el dominio de $f(x)$. **91.** $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$; x está en pies y $f^{-1}(x)$ está en yardas.
93. $f^{-1}(x) = \frac{9}{5}x + 32$. **95.** $(f \circ g)(x) = 453.6x$, x está en libras, $(f \circ g)(x)$ está en gramos.
97. $(f \circ g)(x) = 0.915x$, x está en yardas, $(f \circ g)(x)$ está en metros. **99.** Sí **101.** Sí

103. a) 6 pies **b)** $36\pi \approx 113.10$ pies cuadrados **c)** $A(t) = 4\pi t^2$ **d)** $36\pi \approx 113.10$ pies cuadrados **e)** Las respuestas deben coincidir

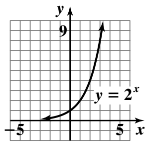
106. $\frac{81}{16}$ **107.** $2x + 3y = 10$ **108.** $\frac{18 - 12x}{x^3}$ **109.** $p = \frac{fq}{q - f}$ **110.** $-1 \pm \sqrt{11}$

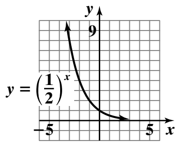
Conjunto de ejercicios 9.2

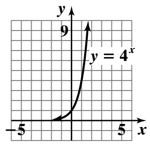
1. Las funciones exponenciales son funciones de la forma $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

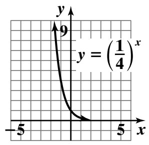
3. a) Cuando x aumenta, y disminuye. **b)** No, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ nunca puede ser 0. **c)** No, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ nunca puede ser negativa. **5. a)** Iguales; $(0, 1)$.

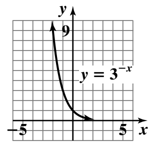
b) $y = 3^x$ estará más inclinada que $y = 2^x$ para $x > 0$.

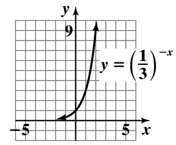
7.


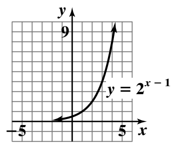
9.


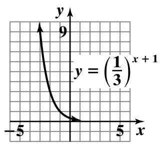
11.


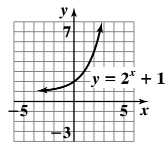
13.


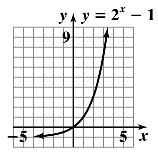
15.


17.


19.


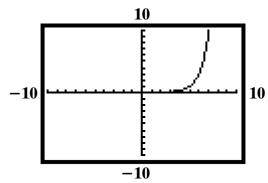
21.


23.


25.


27. a) Es una recta horizontal que pasa por $y = 1$. **b)** Sí **c)** No, no es una función uno a uno.
29. $y = a^x - k$ es $y = a^x$ bajada k unidades.
31. La gráfica de $y = a^{x+2}$ es la gráfica de $y = a^x$ recorrida 2 unidades hacia la izquierda.
33. a) ≈ 36.232 millones **b)** ≈ 187.846 millones

35. \$512 **37. a)** 14 años **b)** 10 años **c)** \$25 **d)** Aumentarlo **39.** 45 **41.** $\approx$\$6344.93 **43.** ≈ 10.6 gramos **45. a)** 5 gramos **b)** $\approx 7.28 \times 10^{-11}$ gramos **47. a)** 2400 **b)** ≈ 4977 **49.** $\approx$\$10,850.92 **51. a)** Las respuestas variarán. **b)** $\approx 472{,}414$ galones
53. ≈ 8.83 kilómetros **55. a)** $\approx$\$201.36 **b)** $\approx$\$31.36 **57. a)**

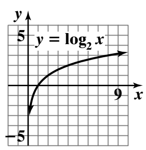


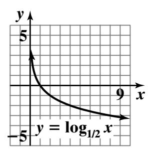
b) ≈ 6.26

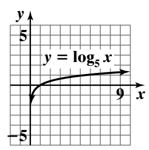
59. a) \$16,384 **b)** \$524,288 **c)** 2^{n-1}
d) $\$2^{29} = \$536{,}870{,}912$ **e)** $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{29}$
61. a) $-6.2x^6y^2 + 9.2x^5y^2 + 2.3x^4y$ **b)** 8 **c)** -6.2
62. $x^3 + 3x^2 - 6x + 20$ **63.** $|a - 4|$ **64.** $\frac{2xy\sqrt[4]{xy^2z^3}}{z}$

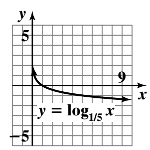
Conjunto de ejercicios 9.3

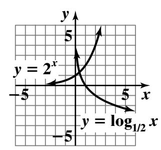
1. a) $a > 0$ y $a \neq 1$ **b)** $\{x|x > 0\}$ **c)** $\mathbb{R}$ **3.** $\left(\frac{1}{27}, -3\right)\left(\frac{1}{9}, -2\right), \left(\frac{1}{3}, -1\right)$ $(1, 0), (3, 1), (9, 2)$ y $(27, 3)$; las funciones $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$ son inversas. **5.** Las funciones $y = a^x$ y $y = \log_a x$ para $a \neq 1$ son funciones inversas, una de la otra, por lo que sus gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$. Para cada par ordenado (x, y) en la gráfica de $y = a^x$, la pareja ordenada (y, x) está en la gráfica de $y = \log_a x$.

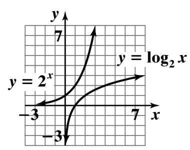
7.


9.


11.


13.


15.


17.


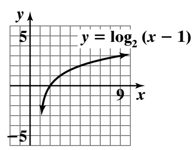
19. $\log_2 8 = 3$ **21.** $\log_3 9 = 2$ **23.** $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ **25.** $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ **27.** $\log_{1/2} \frac{1}{32} = 5$ **29.** $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

31. $\log_4 \frac{1}{64} = -3$ **33.** $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$ **35.** $\log_8 \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$ **37.** $\log_{81} \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$ **39.** $\log_{10} 7 = 0.8451$ **41.** $\log_e 7.3891 = 2$

43. $\log_a b = n$ **45.** $2^3 = 8$ **47.** $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ **49.** $5^{-2} = \frac{1}{25}$ **51.** $49^{1/2} = 7$ **53.** $9^{-2} = \frac{1}{81}$ **55.** $10^{-3} = \frac{1}{1000}$ **57.** $6^3 = 216$

59. $10^{-0.2076} = 0.62$ **61.** $e^{1.8749} = 6.52$ **63.** $w^{-p} = s$ **65.** 3 **67.** 5 **69.** 27 **71.** -4 **73.** $\frac{1}{64}$ **75.** 3 **77.** 0 **79.** 2 **81.** -2 **83.** 4

85. 4 **87.** -4 **89.** -2 **91.** 0 **93.** 1 **95.** 5 **97.** $f^{-1}(x) = \log_5 x$ **99.** 3 y 4, ya que 62 se encuentra entre $3^3 = 27$ y $3^4 = 81$.
101. 2 y 3, ya que 425 está entre $10^2 = 100$ y $10^3 = 1000$. **103.** 2^x; observe que para $x = 10$, $2^x = 1024$ mientras que $\log_{10} x = 1$.
105. 6 **107.** 8 **109.** 3 **111.** 9 **113.** 10,000,000 **115.** 10,000 **117.**



119. $2x(x + 3)(x - 6)$
120. $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ **121.** $4(2x + 3)(5x - 1)$
122. $(3rs - 1)(2rs + 1)$

Conjunto de ejercicios 9.4

1. Las respuestas variarán. **3.** Las respuestas variarán. **5.** Sí, es una ampliación de la propiedad 1.

7. $\log_4 3 + \log_4 10$ **9.** $\log_8 7 + \log_8(x + 3)$ **11.** $\log_2 27 - \log_2 11$ **13.** $\frac{1}{2}\log_{10} x - \log_{10}(x - 9)$ **15.** $7 \log_6 x$ **17.** $5 \log_4(r + 7)$

19. $\frac{3}{2}\log_4 a - \frac{1}{2}\log_4(a + 2)$ **21.** $6 \log_3 d - 4 \log_3(a - 8)$ **23.** $\log_8(y + 4) - 2 \log_8 y$ **25.** $\log_{10} 9 + \log_{10} m - \log_{10} 8 - \log_{10} n$

27. $\log_5 16$ **29.** $\log_2 \frac{9}{5}$ **31.** $\log_4 64$ **33.** $\log_{10} x(x + 3)$ **35.** $\log_9 \frac{z^2}{z - 2}$ **37.** $\log_5\left(\frac{p}{3}\right)^4$ **39.** $\log_2 \frac{n(n + 4)}{n - 3}$ **41.** $\log_5 \sqrt{\frac{x - 8}{x}}$

43. $\log_9 \dfrac{16\sqrt[3]{r-6}}{\sqrt{r}}$ **45.** $\log_6 \dfrac{81}{(x+3)^2x^4}$ **47.** 1 **49.** -0.3980 **51.** 1.3980 **53.** 10 **55.** 7 **57.** 3 **59.** 25 **61.** Sí

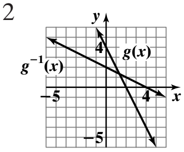
63. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a\left(x \cdot \dfrac{1}{y}\right) = \log_a x + \log_a \dfrac{1}{y}$ **65.** $\log_a(x-2)$ **67.** Yes, $\log_a(x^2+8x+16) = \log_a(x+4)^2 = 2\log_a(x+4)$

69. 0.8640 **71.** 0.1080 **73.** 0.7000 **75.** No, no hay relación entre $\log_{10}(x+y)$ y $\log_{10} xy$ o $\log_{10}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

77. $\dfrac{1}{4}\log_2 x + \dfrac{1}{4}\log_2 y + \dfrac{1}{3}\log_2 a - \dfrac{1}{5}\log_2(a-b)$ **79.** Las respuestas variarán. **82. a)** $\{x|x > 40\}$ **b)** $(40, \infty)$ **83. a)** $a^2 - 4c^2$ **b)** $(a+2c)(a-2c)$ **84.** 3 **85.** $-26-7i$ **86.** 49

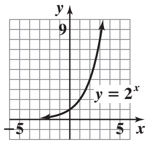
Examen de mitad de capítulo

1. a) En $f(x)$, reemplace x por $g(x)$ **b)** $6x+18$ [9.1] **2. a)** $\left(\dfrac{6}{x}\right)^2 + 5$ o $\dfrac{36}{x^2} + 5$ **b)** 9 **c)** $\dfrac{6}{x^2+5}$ **d)** $\dfrac{3}{7}$ [9.1] **3. a)** Las respuestas variarán. **b)** No [9.1] **4. a)** Sí **b)** $\{(2,-3), (3,2), (1,5), (8,6)\}$ [9.1] **5. a)** Sí **b)** $p^{-1}(x) = 3x+15$ [9.1] **6. a)** Sí **b)** $k^{-1}(x) = x^2+4x \geq 0$ [9.1] **7.** $m^{-1}(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2$

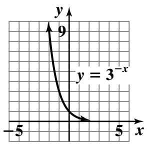


[9.1]

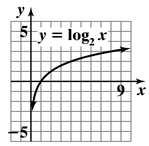
8.



[9.2] **9.**



[9.2] **10.**



[9.3]

11. a) 10 **b)** 320 [9.3] **12.** $\log_{27} 9 = \dfrac{2}{3}$ [9.3] **13.** $2^{-6} = \dfrac{1}{64}$ [9.3] **14.** 3 [9.3] **15.** 2 [9.3] **16.** 4 [9.3] **17.** $2\log_9 x + \log_9(x-5)$ [9.4] **18.** $\log_5 7 + \log_5 m - \dfrac{1}{2}\log_5 n$ [9.4] **19.** $\log_2 \dfrac{x^3(x+7)}{(x+1)^4}$ [9.4] **20.** $\log_7 \sqrt{\dfrac{x+2}{x}}$ [9.4]

Conjunto de ejercicios 9.5

1. Los logaritmos comunes son logaritmos con base 10. **3.** Los antilogaritmos son números que se obtienen al elevar 10 a la potencia, siendo el exponente el logaritmo. **5.** 1.9345 **7.** 4.2833 **9.** -1.2125 **11.** 2.0000 **13.** 0.5740 **15.** -1.7620 **17.** 1.64 **19.** 42,500 **21.** 0.0196 **23.** 1.00 **25.** 579 **27.** 0.0000726 **29.** 100 **31.** 2410 **33.** 13,800 **35.** 0.0871 **37.** 0.239 **39.** 0.749 **41.** 3.5514 **43.** -1.1385 **45.** 2.3856 **47.** -2.2277 **49.** 679 **51.** 0.303 **53.** 0.0331 **55.** 22.4 **57.** 0 **59.** -1 **61.** -2 **63.** -3 **65.** 7 **67.** 7 **69.** 20.8 **71.** 41.5 **73.** No; $10^2 = 100$ y como $462 > 100$, log 462 debe ser mayor a 2.

75. No; $10^0 = 1$ y $10^{-1} = 0.1$ y como $1 > 0.163 > 0.1$, log 0.163 debe ser entre 0 y -1. **77.** No; $\log \dfrac{y}{4x} = \log y - \log 4 - \log x$

79. 2.0969 **81.** -0.6990 **83.** 2.7958 **85.** 2510 **87.** 501,000 **89. a)** ≈31.62 kilómetros **b)** ≈0.50 kilómetros **c)** ≈14.68 **91. a)** ≈72% **b)** ≈15% **93.** ≈6310 veces más intenso **95. a)** $\approx 6.31 \times 10^{20}$ **b)** ≈2.19 **97.** ≈6.2 **99.** $I = \text{antilog } R$

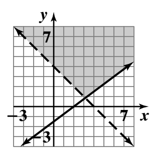
101. $t = \text{antilog}\left(\dfrac{26-R}{41.9}\right) - 1$ **104.** 50 millas por hora, 55 millas por hora **105.** $(2,-3)$ **106.** $0, -4, 3$ **107.** $|3x^2 - y|$ **108.** $(-\infty, -4] \cup [2, 5]$

Conjunto de ejercicios 9.6

1. $c = d$ **3.** Verifique por si hay soluciones extrañas. **5.** $\log(-2)$ no es un número real. **7.** 3 **9.** 4 **11.** $\dfrac{1}{2}$ **13.** 2 **15.** $-\dfrac{1}{3}$ **17.** 4 **19.** 3 **21.** 3 **23.** 2.01 **25.** 3.56 **27.** 5.59 **29.** 6.34 **31.** 6 **33.** 5 **35.** $\dfrac{1}{16}$ **37.** 100 **39.** -1 **41.** $-6, 4$ **43.** $0, -8$ **45.** 92 **47.** $\dfrac{4}{5}$ **49.** $\dfrac{3}{2}$ **51.** 4 **53.** 2 **55.** 0.87 **57.** 30 **59.** 5 **61.** 4 **63.** 2 **65.** 3 **67.** 9 **69.** ≈3.47 horas

71. ≈3.19 años **73.** ≈17.07 años **75. a)** ≈7.95 **b)** ≈5.88 **77.** ≈$7112.09 **79.** ≈19.36 **81. a)** 1,000,000,000,000 veces mayor **b)** 10,000,000 veces mayor **83.** 8 **85.** $x = 1$ y $x = 2$ **87.** $(3, 1)$ **89.** $(54, 46)$ **91.** 2.8 **93.** No hay solución

95. La caja es mayor por ≈7.73 pies cúbicos **96.** -4 **97.**



98. $\dfrac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{x - y}$ **99.** $c = \sqrt{\dfrac{E}{m}}$ **100.** $f(x) = 2(x-3)^2 - 5$

Conjunto de ejercicios 9.7

1. a) e **b)** ≈2.7183 **3.** $\{x|x > 0\}$ **5.** $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ **7.** x **9.** e^x **11.** $k < 0$ **13.** 4.1271 **15.** -0.2070 **17.** 4.95 **19.** 0.0578 **21.** 0.972 **23.** 3.6640 **25.** 4.3923 **27.** 1.7297 **29.** 2.7380 **31.** 2.9135 **33.** 3.9318 **35.** -0.4784 **37.** 4 **39.** 1 **41.** 4 **43.** 6 **45.** $P = 4757.5673$ **47.** $P_0 = 224.0845$ **49.** $t = 0.7847$ **51.** $k = 0.2310$ **53.** $k = -0.2888$

55. $A = 4719.7672$ **57.** $V_0 = \dfrac{V}{e^{kt}}$ **59.** $t = \dfrac{\ln P - \ln 150}{7}$ **61.** $k = \dfrac{\ln A - \ln A_0}{t}$ **63.** $y = xe^{2.3}$ **65.** $y = (x+6)e^5$

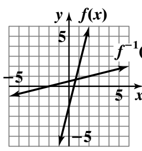
67. ≈2.5000; determine el ln 21.183 **69. a)** ≈$5637.48 **b)** ≈11.55 años **71.** ≈39.98 gramos **73. a)** ≈86.47% **b)** ≈34.66 días **75. a)** ≈5.15 pies por segundo **b)** ≈5.96 pies por segundo **c)** ≈646,000 **77.** ≈$449,004,412,200,000

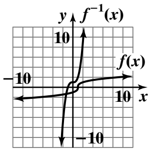
79. a) $\approx$6.9 mil millones **b)** $\approx$53 años **81. a)** $\approx$3.04 millones **b)** $\approx$3.89 millones **83. a)** $\approx$\$2788.38 **b)** $\approx$\$3711.59 **85. a)** $\approx$32.43 pulgadas **b)** 35.46 pulgadas **87. a)** $\approx$6626.62 años **b)** $\approx$5752.26 años **89.** $\approx$\$6791.91 **91. a)** Estroncio 90, ya que tiene una mayor velocidad de decaimiento **b)** $\approx$31.66% de la cantidad original **93.** Las respuestas variarán. **95.** 7.286 **97.** $-1.507, 16.659$ **99.** $v_0 = \dfrac{e^{xk} - 1}{kt}$ **101.** $i = Ie^{-t/RC}$ **102. a)** 0 **b)** $\dfrac{11}{40}$ o 0.275 **103.** 240 niños, 310 adultos **104.** $-9x^2y^3 + 12x^2y^2 - 3xy^2 + 4xy$ **105.** $-20, 20$ **106.** $x + x^2$

Ejercicios de repaso del capítulo 9

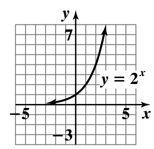
1. $4x^2 - 26x + 44$ **2.** 2 **3.** $2x^2 - 6x + 3$ **4.** 39 **5.** $6\sqrt{x-3} + 7, x \geq 3$ **6.** $\sqrt{6x+4}, x \geq -\dfrac{2}{3}$ **7.** Uno a uno **8.** No es uno a uno **9.** Uno a uno **10.** No es uno a uno **11.** Uno a uno **12.** No es uno a uno **13.** $f(x)$: Dominio $\{-4, -1, 5, 6\}$; Rango: $\{-3, 2, 3, 8\}$; $f^{-1}(x)$: Dominio: $\{-3, 2, 3, 8\}$; Rango: $\{-4, -1, 5, 6\}$ **14.** $f(x)$: Dominio: $\{x|x \geq 0\}$; Rango: $\{y|y \geq 4\}$; $f^{-1}(x)$: Dominio: $\{x|x \geq 4\}$; Rango: $\{y|y \geq 0\}$

15. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{4}$, **16.** $f^{-1}(x) = x^3 + 1$; **17.** $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{36}$, x son las pulgadas, $f^{-1}(x)$ son las yardas.

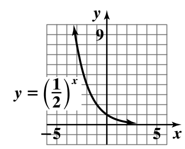




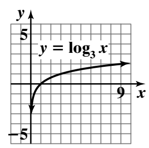
18. $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{4}$, x son cuartos, $f^{-1}(x)$ son galones **19.**



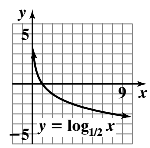
20.



21. a) 30.23 millones **b)** 62.73 millones **c)** 187.50 millones **22.** $\log_8 64 = 2$ **23.** $\log_{81} 3 = \dfrac{1}{4}$ **24.** $\log_5 \dfrac{1}{125} = -3$ **25.** $2^5 = 32$ **26.** $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$ **27.** $6^{-2} = \dfrac{1}{36}$ **28.** $4^3 = x$; 64 **29.** $a^4 = 81$; 3 **30.** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3} = x$; 125 **31.**



32.

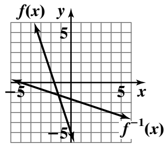


33. $8 \log_5 17$ **34.** $\dfrac{1}{2}\log_3(x - 9)$ **35.** $\log 6 + \log(a + 1) - \log 19$ **36.** $4 \log x - \log 7 - 5 \log(2x + 3)$ **37.** $\log \dfrac{x^5}{(x+1)^3}$ **38.** $\log \dfrac{(2x)^4}{y}$ **39.** $\ln \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+2}}}{2}$ **40.** $\ln \dfrac{x^3\sqrt{x+1}}{(x+4)^6}$ **41.** 10 **42.** 5 **43.** 121 **44.** 3 **45.** 2.9133 **46.** -3.5720 **47.** 1440 **48.** 0.000697 **49.** 11,600 **50.** 0.0594 **51.** 5 **52.** 9 **53.** 22.4 **54.** 9.4 **55.** 4 **56.** $-\dfrac{1}{2}$ **57.** 2 **58.** 5 **59.** 2.582 **60.** 5.968 **61.** 1.353 **62.** 2.240 **63.** 26 **64.** 5 **65.** 1 **66.** 3 **67.** $t \approx 1.155$ **68.** $A_0 \approx 352.542$ **69.** $t = \dfrac{\ln A - \ln A_0}{k}$ **70.** $k = \dfrac{\ln 0.25}{t}$ **71.** $y = xe^6$ **72.** $y = 3x + 23$ **73.** 7.6147 **74.** 3.5046 **75.** $\approx$\$19,126.18 **76.** $\approx$17.3 años **77. a)** $\approx$92.88 minutos **b)** $\approx$118.14 minutos **78.** $\approx$10.32 libras por pulgada cuadrada **79. a)** 72 **b)** $\approx$61.2 **c)** $\approx$5 meses

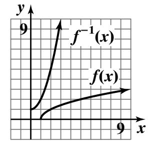
Examen de práctica del capítulo 9

1. a) Sí **b)** $\{(2, 4), (8, -3), (3, -1), (-7, 6)\}$ [9.1] **2. a)** $x^2 + 4x + 1$ **b)** 61 [9.1] **3. a)** $\sqrt{x^2 + 3}$, **b)** $2\sqrt{13}$ [9.1]

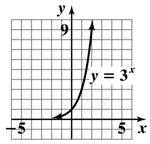
4. a) $f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{3}(x + 5)$ **b)** [9.1]



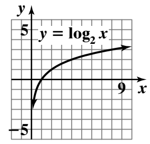
5. a) $f^{-1}(x) = x^2 + 1, x \geq 0$ **b)** [9.1]



6. $\{x|x > 0\}$ [9.3] **7.** -4 [9.4] **8.** [9.2]



9. [9.3]

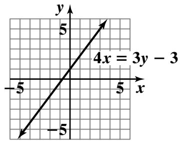


10. $\log_2 \dfrac{1}{32} = -5$ [9.4] **11.** $5^3 = 125$ [9.3] **12.** $2^4 = x + 3$, 13 [9.3] **13.** $64^y = 16$, $\dfrac{2}{3}$ [9.3] **14.** $3 \log_2 x + \log_2(x - 4) - \log_2(x + 2)$ [9.4]

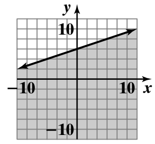
15. $\log_6 \dfrac{(x-4)^7(x+3)^2}{\sqrt{x}}$ [9.4] **16.** 5 [9.4] **17. a)** 3.6646 **b)** -2.6708 [9.5] **18.** $\approx$2.68 [9.6] **19.** 3 [9.6] **20.** $\dfrac{17}{5}$ [9.6] **21.** 16.2810 [9.7] **22.** 2.0588 [9.7] **23.** 30.5430 [9.7] **24.** $\approx$\$5211.02 [9.7] **25.** $\approx$3364.86 años de antigüedad [9.7]

Examen de repaso acumulativo

1. $\dfrac{12xy^5}{z^4}$ [1.5] **2.** 40 [1.4] **3.** 7.5%; [2.3] **4.** $\left\{x \middle| 2 \le x < \dfrac{15}{2}\right\}, \left[2, \dfrac{15}{2}\right)$ [2.5]
5. $y = \dfrac{2x - 8}{3}$ [2.2] **6.** 0 [3.2] **7.** $m = 2, y = 2x + 3$ [3.4] **8.**

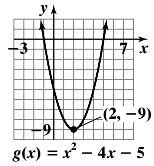


[3.4] **9.**



[3.7] **10.** (10, 24) [4.1]

11. $x^2 + 2x + 3 + \dfrac{6}{x + 1}$ [5.3] **12.** $(x - y + 8)(x - y - 8)$ [5.6] **13.** $1, -2$ [8.1] **14.** -3 [6.4] **15.** $d = \dfrac{a_n - a_1}{n - 1}$ [6.4]
16. 6.25 [6.6] **17.** $(12x + 1)\sqrt{5x}$ [7.4] **18.** 8 [7.6] **19.** $0, \pm\sqrt{7}$ [8.4] **20. a)** $g(x) = (x - 2)^2 - 9$ **b)**



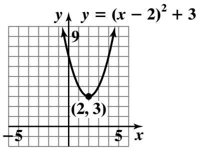
[8.5]

Capítulo 10

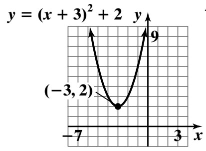
Conjunto de ejercicios 10.1

1. Parábola, circunferencia, elipse e hipérbola; para ver una ilustración, consulte la página 658. **3.** Sí, ya que a cada valor de x le corresponde sólo un valor para y. El dominio es $\mathbb{R}$, y el rango es $\{y | y \ge k\}$ **5.** Las gráficas tienen el mismo vértice, (3, 4). La primera gráfica abre hacia arriba y la segunda gráfica abre hacia abajo. **7.** La distancia siempre es un número positivo ya que ambas diferencias se elevan al cuadrado y utilizamos la raíz cuadrada principal. **9.** Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos en un plano que están a la misma distancia de un punto fijo. **11.** No, $x^2 + y^2 = 9$ sería una ecuación de una circunferencia. **13.** No, el coeficiente de x^2 y el término y^2 necesitarían ser iguales. **15.** No, si x^2 fuese reemplazado por x sería una ecuación de una parábola.

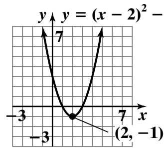
17.



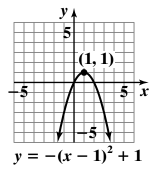
19.



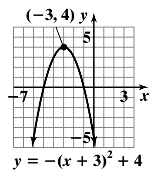
21.



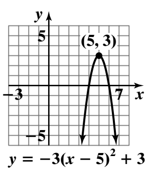
23.



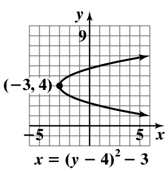
25.



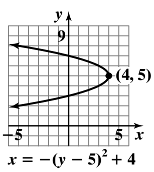
27.



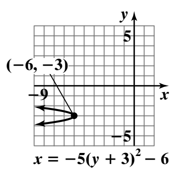
29.



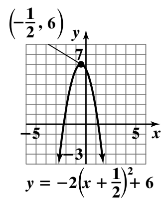
31.



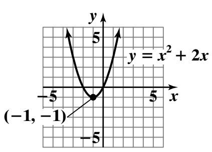
33.



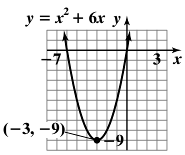
35.



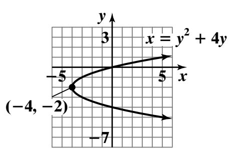
37. a) $y = (x + 1)^2 - 1$
b)



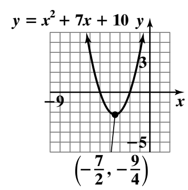
39. a) $y = (x + 3)^2 - 9$
b)



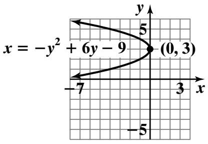
41. a) $x = (y + 2)^2 - 4$
b)



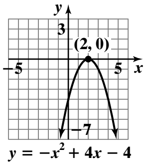
43. a) $y = \left(x + \dfrac{7}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4}$
b)



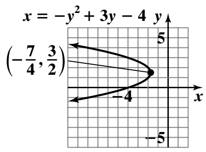
45. a) $x = -(y - 3)^2$
b)



47. a) $y = -(x - 2)^2$
b)



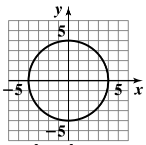
49. a) $x = -\left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{7}{4}$
b)

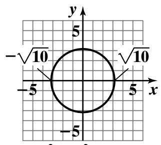


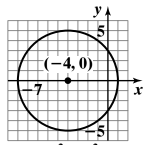
51. 5 **53.** 9
55. 13 **57.** $\sqrt{90} \approx 9.49$
59. $\sqrt{\dfrac{125}{4}} \approx 5.59$
61. $\sqrt{34.33} \approx 5.86$

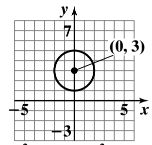
63. $\sqrt{10} \approx 3.16$ **65.** (3, 6) **67.** (0, 0) **69.** $\left(\dfrac{3}{2}, 5\right)$ **71.** $\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{7}{4}\right)$ **73.** $\left(\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$ **75.** $x^2 + y^2 = 16$
77. $(x - 2)^2 + y^2 = 25$ **79.** $x^2 + (y - 5)^2 = 1$ **81.** $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 64$ **83.** $(x - 7)^2 + (y + 6)^2 = 100$

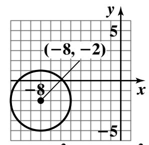
85. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ **87.** $x^2+y^2=16$ **89.** $(x-3)^2+(y+2)^2=9$

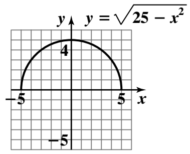
91.

$x^2+y^2=16$

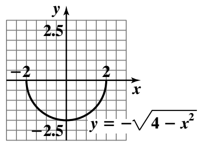
93.

$x^2+y^2=10$

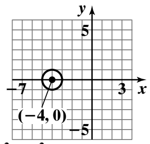
95.

$(x+4)^2+y^2=25$

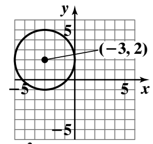
97.

$x^2+(y-3)^2=4$

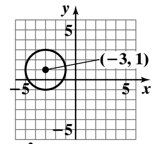
99.

$(x+8)^2+(y+2)^2=9$

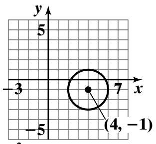
101.


103.


105. a) $(x+4)^2+y^2=1^2$
b)

$x^2+y^2+8x+15=0$

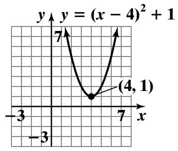
107. a) $(x+3)^2+(y-2)^2=3^2$
b)

$x^2+y^2+6x-4y+4=0$

109. a) $(x+3)^2+(y-1)^2=2^2$
b)

$x^2+y^2+6x-2y+6=0$

111. a) $(x-4)^2+(y+1)^2=2^2$
b)

$x^2+y^2-8x+2y+13=0$

113. $25\pi \approx 78.5$ unidades cuadradas. **115.** intersección con el eje x: $(-7,0)$; hay intersecciones con el eje y: $(0,-1)$, $(0,7)$ **117.** Intersección con el eje x: $(24,0)$; no hay intersecciones con el eje y.
119. No, diferentes segmentos de recta pueden tener el mismo punto medio.
121. 10 **123.** $(x+6)^2+(y-2)^2=4$
125. a) $2\sqrt{2}$ **b)** $(7,6)$ **c)** $(x-7)^2+(y-6)^2=8$
127. 4, 0, una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo y una parábola que abre hacia la derecha o hacia la izquierda pueden dibujarse de forma que tengan un máximo de 4 intersecciones o un mínimo de 0 intersecciones.

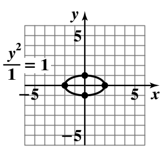
129. a) 13.6 pies **b)** 81.8 pies **c)** $x^2+(y-81.8)^2=4651.24$ **131. a)** $x^2+y^2=16$ **b)** $(x-2)^2+y^2=4$ **c)** $(x+2)^2+y^2=4$ **d)** 8π unidades cuadradas **133.** 48π unidades cuadradas **136.** $\dfrac{y}{3x}$ **137.** $(0,7)$ **138.** 128

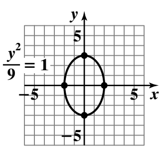
139. a) 1. a^2, 2. ab, 3. ab, 4. b^2 **b)** $(a+b)^2$ **140.**


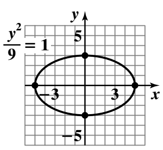
Conjunto de ejercicios 10.2

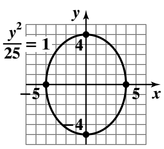
1. Una elipse es un conjunto de puntos en el plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante. **3.** $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ **5.** Si $a=b$, se obtiene la fórmula para una circunferencia. **7.** Divida ambos lados entre 180.

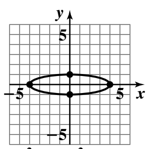
9. No, la ecuación para una elipse es $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

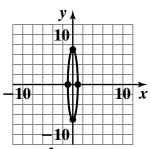
11. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$


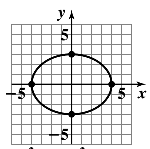
13. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$


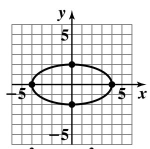
15. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$


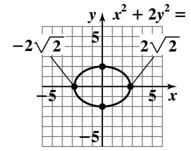
17. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$


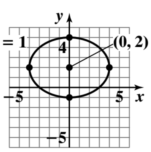
19.

$x^2+16y^2=16$

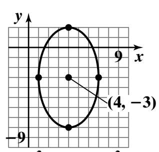
21.

$49x^2+y=49$

23.

$9x^2+16y^2=144$

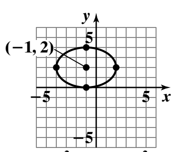
25.

$25x^2+100y^2=400$

27.


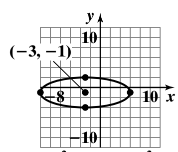
29. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$


31.


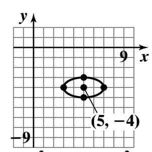
$\dfrac{(y-4)^2}{9}+\dfrac{(x+3)^2}{25}=1$

33.


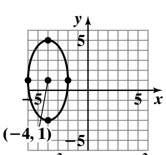
$\dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

35.


$(x+3)^2+9(y+1)^2=81$

37.


$(x-5)^2+4(y+4)^2=4$

39.


$12(x+4)^2+3(y-1)^2=48$

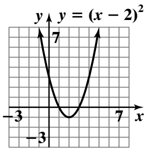
41. $2\pi \approx 6.3$ unidades cuadradas

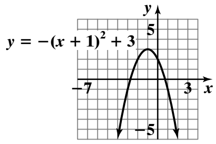
43. Una, en $(0,0)$, éste es el único par ordenado que satisface la ecuación. **45.** $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$

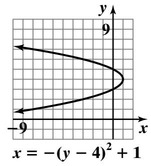
47. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

49. Ninguna, la elipse estará dentro de la circunferencia. **51.** $\dfrac{(x+3)^2}{36}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$; $(-3,-2)$ **53.** 69.5 pies **55. a)** $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{576}=1$ **b)** $240\pi \approx 753.98$ pies cuadrados **c)** ≈ 376.99 pies cuadrados **57.** $\sqrt{5}\approx 2.24$ pies, en ambas direcciones, desde el centro de la elipse, a lo largo del eje mayor (principal). **59.** Las respuestas variarán. **61.** Las respuestas variarán. **63.** $\dfrac{(x-4)^2}{49}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ **65.** $l=\dfrac{2S-nf}{n}$ **66.** $x+\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2(2x-3)}$ **67.** 6 **68.** $\left[-\dfrac{5}{3},4\right)$ **69.** ≈ 2.7755

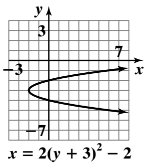
Examen de mitad de capítulo

1. 

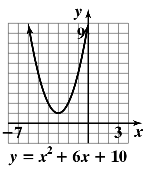
[10.1] **2.** 

[10.1] **3.** 

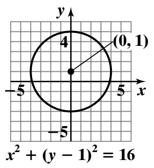
[10.1]

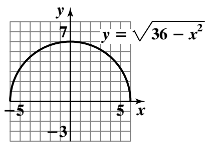
4. 

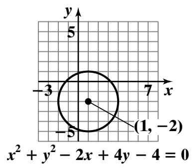
[10.1]

5. 

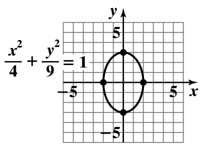
[10.1] **6.** 13 [10.1] **7.** $\sqrt{153}\approx 12.37$ [10.1] **8.** $\left(-1,\dfrac{5}{2}\right)$ [10.1] **9.** $\left(\dfrac{11}{4},\dfrac{15}{4}\right)$ [10.1] **10.** $(x+3)^2+(y-2)^2=25$ [10.1]

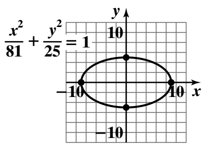
11. 

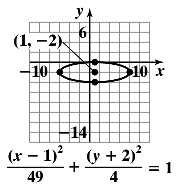
[10.1] **12.** 

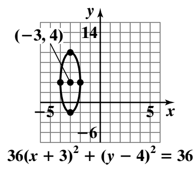
[10.1] **13.** 

[10.1] **14.** Una circunferencia es un conjunto de puntos en un plano que están a la misma distancia de un punto fijo, llamado centro. [10.1]

15. 

[10.2] **16.** 

[10.2] **17.** 

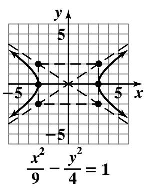
[10.2] **18.** 

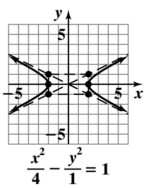
[10.2]

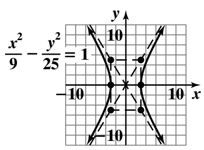
19. $6\pi \approx 18.85$ unidades cuadradas [10.2] **20.** $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1$ [10.2]

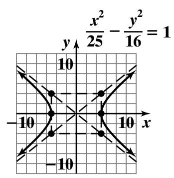
Conjunto de ejercicios 10.3

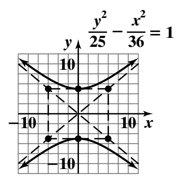
1. Una hipérbola es el conjunto de puntos en el plano tal que la diferencia de su distancia a dos puntos fijos es constante. **3.** La gráfica de $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ es una hipérbola con vértices en $(a,0)$ y $(-a,0)$. Su eje transversal está a lo largo del eje x. Las asíntotas son $y=\pm\dfrac{b}{a}x$. **5.** No, los signos de los términos de x y y deben ser diferentes. **7.** Sí, divida ambos lados de la ecuación entre 100 y verá que la ecuación es la de una hipérbola. **9.** Divida ambos lados de la ecuación entre 81.

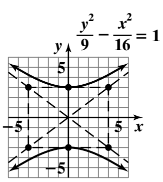
11. a) $y=\pm\dfrac{2}{3}x$ **b)** 

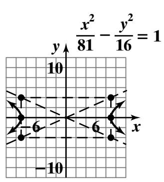
13. a) $y=\pm\dfrac{1}{2}x$ **b)** 

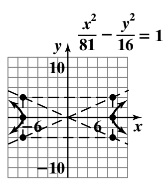
15. a) $y=\pm\dfrac{5}{3}x$ **b)** 

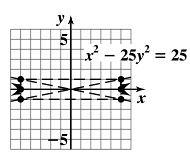
17. a) $y=\pm\dfrac{4}{5}x$ **b)** 

19. a) $y=\pm\dfrac{5}{6}x$ **b)** 

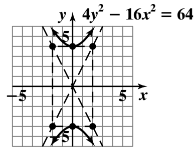
21. a) $y=\pm\dfrac{3}{4}x$ **b)** 

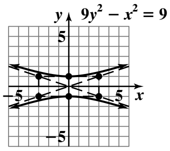
23. a) $y=\pm\dfrac{5}{2}x$ **b)** 

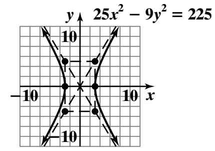
25. a) $y=\pm\dfrac{4}{9}x$ **b)** 

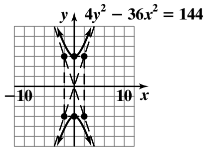
27. a) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{1}=1$, $y=\pm\dfrac{1}{5}x$ **b)** 

29. a) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1,\ y = \pm 2x$ **31. a)** $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{9} = 1,\ y = \pm\frac{1}{3}x$ **33. a)** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1,\ y = \pm\frac{5}{3}x$ **35. a)** $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1,\ y = \pm 3x$

b)


b)


b)


b)


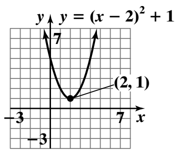
37. Circunferencia **39.** Elipse **41.** Hipérbola **43.** Parábola **45.** Elipse **47.** Parábola **49.** Circunferencia **51.** Hipérbola **53.** Parábola **55.** Hipérbola **57.** Parábola **59.** Circunferencia **61.** $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$ **63.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ **65.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$, no, $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{50} = 1$ y otras respuestas también pueden funcionar. La razón $\frac{b}{a}$ debe ser $\frac{5}{3}$. **67.** No, las gráficas de hipérbolas de esta forma no pasan la prueba de la recta vertical **69.** Dominio: $(-\infty, -5] \cup [5, \infty)$; rango: $\mathbb{R}$ **71.** El eje transversal de ambas gráficas está a lo largo del eje x. Los vértices de la segunda gráfica estarán más cercanos al origen y la segunda gráfica será más ancha. **73.** Las respuestas variarán. **75.** $y = -\frac{1}{2}x + 1$ **76.** $-x^2 - x + 11$ **77.** $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ **78.** $\frac{3x + 2}{2x - 3}$ **79.** $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ **80.** 1

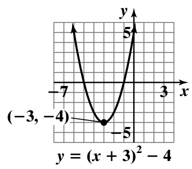
Conjunto de ejercicios 10.4

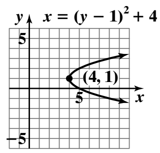
1. Un sistema no lineal de ecuaciones es un sistema en el cual al menos una ecuación no es lineal. **3.** Sí, por ejemplo  **5.** Sí, por ejemplo  **7.** $(3, -3), (-3, 3)$ **9.** $(3, 0), \left(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ **11.** $(-4, 11), \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$
13. $(-1, 5), (1, 5)$ **15.** $(2, 2\sqrt{2}), (2, -2\sqrt{2}), (-2, 2\sqrt{2}), (-2, -2\sqrt{2})$ **17.** No hay solución real **19.** $(0, -3), (\sqrt{5}, 2)(-\sqrt{5}, 2)$
21. $(2, -4), (-14, -20)$ **23.** $(2, 0), (-2, 0)$ **25.** $(\sqrt{15}, 1)(-\sqrt{15}, 1), (\sqrt{15}, -1), (-\sqrt{15}, -1)$
27. $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ **29.** $(3, 0), (-3, 0)$ **31.** $(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)$
33. $(3, 4), (3, -4), (-3, 4), (-3, -4)$ **35.** $(\sqrt{5}, 2), (\sqrt{5}, -2), (-\sqrt{5}, 2), (-\sqrt{5}, -2)$ **37.** No hay solución real. **39.** No hay solución real. **41.** Las respuestas variarán. **43.** 20 metros por 22 metros **45.** 9 pies por 30 pies **47.** largo: 14 centímetros, ancho: 8 centímetros
49. 16 pulgadas por 30 pulgadas **51.** ≈1.67 segundos **53.** $r = 6\%, p = \$125$ **55.** ≈16 y ≈184 **57.** ≈5 y ≈95
59. $(-1, -3), (3.12, -0.53)$ **61.** 10 yardas, 24 yardas **63.** Paréntesis, exponentes, multiplicaciones o divisiones, sumas o restas.
64. $(x + 2)(x^2 + x + 1)$ **65.** 0.9 **66.** $\frac{5\sqrt{x + 2} + 15}{x - 7}$ **67.** $k = \frac{\ln A - \ln A_0}{t}$

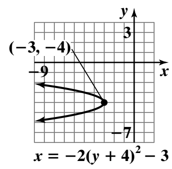
Ejercicios de repaso del capítulo 10

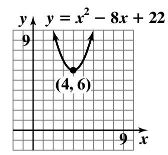
1. 13; $\left(\frac{5}{2} - 6\right)$ **2.** 5; $\left(-\frac{5}{2}, 3\right)$ **3.** 17; $\left(-5, \frac{5}{2}\right)$ **4.** $\sqrt{8} \approx 2.83$; $(-3, 4)$

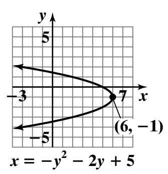
5.


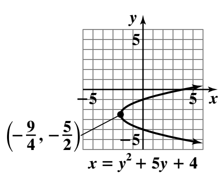
6.


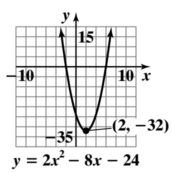
7.


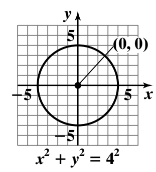
8.


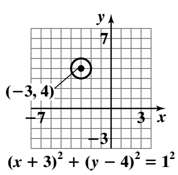
9. a) $y = (x - 4)^2 + 6$
b)


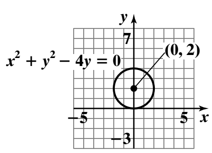
10. a) $x = -(y + 1)^2 + 6$
b)


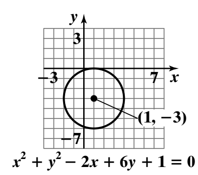
11. a) $x = \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$
b)


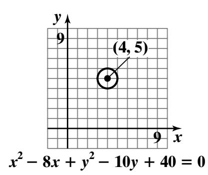
12. a) $y = 2(x - 2)^2 - 32$
b)


13. a) $x^2 + y^2 = 4^2$
b)


14. a) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1^2$
b)


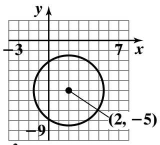
15. a) $x^2 + (y - 2)^2 = 2^2$
b)


16. a) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$
b)


17. a) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 1^2$
b)


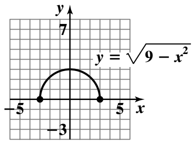
18. a) $(x-2)^2+(y+5)^2=(\sqrt{12})^2$

b)



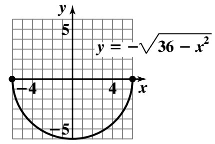
$x^2+y^2-4x+10y+17=0$

19.



$y=\sqrt{9-x^2}$

20.

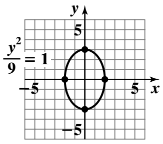


$y=-\sqrt{36-x^2}$

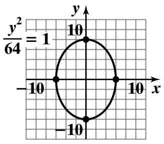
21. $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

22. $(x-5)^2+(y+3)^2=9$

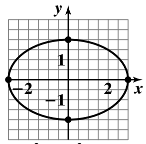
23. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$



24. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{64}=1$

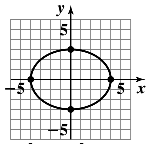


25.



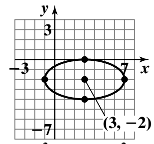
$4x^2+9y^2=36$

26.



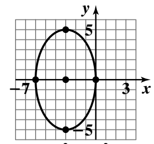
$9x^2+16y^2=144$

27.



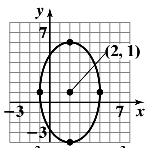
$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

28.



$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

29.

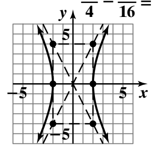


$25(x-2)^2+9(y-1)^2=225$

30. $6\pi\approx 18.85$ unidades cuadradas

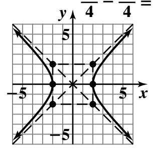
31. a) $y=\pm 2x$

b) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$



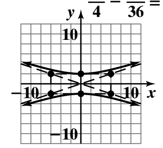
32. a) $y=\pm x$

b) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$



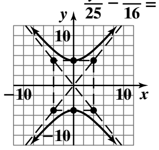
33. a) $y=\pm\frac{1}{3}x$

b) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{36}=1$



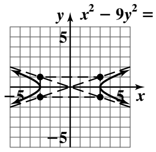
34. a) $y=\pm\frac{5}{4}x$

b) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$



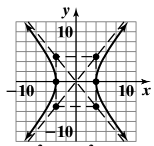
35. a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$ **b)** $y=\pm\frac{1}{3}x$

c) $x^2-9y^2=9$



36. a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ **b)** $y=\pm\frac{5}{4}x$

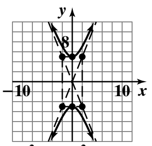
c)



$25x^2-16y^2=400$

37. a) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1$ **b)** $y=\pm\frac{5}{2}x$

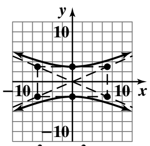
c)



$4y^2-25x^2=100$

38. a) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{49}=1$ **b)** $y=\pm\frac{3}{7}x$

c)



$49y^2-9x^2=441$

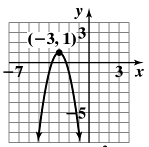
39. Hipérbola **40.** Elipse **41.** Circunferencia
42. Hipérbola **43.** Elipse **44.** Parábola
45. Elipse **46.** Parábola **47.** $(5, 0), (-5, 0)$
48. $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ **49.** $(-3, 0), \left(-\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$
50. No hay solución real **51.** $(6, 0), (-6, 0)$
52. $(4, 3), (4, -3), (-4, 3), (-4, -3)$

53. No hay solución real **54.** $(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$ **55.** 5 pies por 9 pies **56.** ≈ 4 y ≈ 145 **57.** $r=3\%$, $p=\$4000$

Examen de práctica del capítulo 10

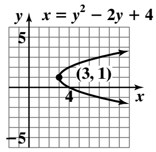
1. Se forman al cortar un cono o un par de conos [10.1] **2.** $\sqrt{50}\approx 7.07$ [10.1] **3.** $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ [10.1]

4. $(-3, 1)$, [10.1]

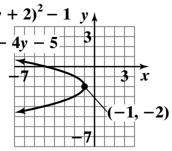


$y=-2(x+3)^2+1$

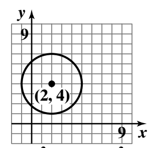
5. $x=y^2-2y+4$ [10.1]



6. $x=-(y+2)^2-1$, $x=-y^2-4y-5$ [10.1]



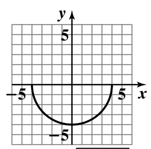
7. [10.1]



$(x-2)^2+(y-4)^2=9$

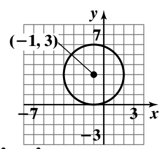
8. $9\pi\approx 28.27$ unidades cuadradas [10.1] **9.** $(x-3)^2+(y+1)^2=16$ [10.1]

10. [10.1]



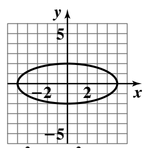
$y=-\sqrt{16-x^2}$

11. [10.1]



$x^2+y^2+2x-6y+1=0$

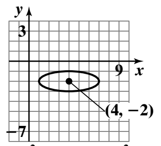
12. [10.2]



$4x^2+25y^2=100$

13. No, el eje mayor debe estar a lo largo del eje y. [10.2]

14.



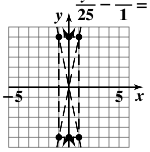
$4(x-4)^2 + 36(y+2)^2 = 36$

[10.2] **15.** $(8, -7)$ [10.2]

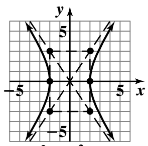
16. El eje transversal está a lo largo del eje correspondiente al término con coeficiente positivo en la ecuación en la forma estándar. [10.3] **17.** $y = \pm\frac{7}{4}x$ [10.3]

18.

$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{1} = 1$



[10.3] **19.**



$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

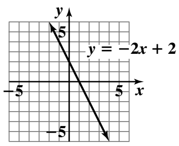
[10.3] **20.** Hipérbola, divida ambos lados de la ecuación entre 30. [10.3]

21. Elipse, divida ambos lados de la ecuación entre 100. [10.3]
22. $(2, \sqrt{3}), (2, -\sqrt{3}), (-2, \sqrt{3}), (-2, -\sqrt{3})$ [10.4]
23. No hay solución real [10.4]
24. 30 metros por 50 metros [10.4]
25. 5 pies por 12 pies [10.4]

Examen de repaso acumulativo

1. $-27x^3y^9$ [1.5] **2.** $\frac{19}{4}$ [2.1] **3.** $\varnothing$ [2.1] **4.** $\left\{x \middle| x < -\frac{5}{3} \text{ o } x > 1\right\}$ [2.6]

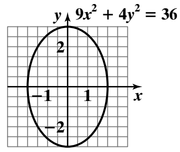
5.



[3.1] **6.** 139 [3.2] **7.** $(8, 6)$ [4.1] **8.** $(x^2+6)(x^2-7)$ [5.5] **9.** base: 14 pies, altura: 8 pies [5.8]

10. $\frac{x-4}{4x+3}$ [6.1] **11.** $\frac{2x^2-9x-5}{2(x+3)(x-4)}$ [6.2] **12.** 2 [6.4] **13.** $\frac{3y^{3/2}}{x^{1/2}}$ [7.2] **14.** $\frac{6x+6y\sqrt{x}}{x-y^2}$ [7.5]

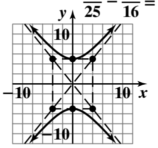
15. 3 [7.6] **16.** $\frac{2 \pm i\sqrt{11}}{3}$ [8.2] **17.** 2 [9.6] **18.** ≈ 2.31 [9.7] **19.**



[10.2]

20.

$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$



[10.3]

Capítulo 11

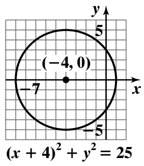
Conjunto de ejercicios 11.1

1. Una sucesión es una lista de números acomodados en un orden específico. **3.** Una sucesión finita es una función cuyo dominio incluye sólo a los primeros n números naturales. **5.** En una sucesión decreciente, los términos disminuyen. **7.** Una serie es la suma de los términos de una sucesión. **9.** $\sum_{i=1}^{5}(i+4)$ es la suma cuando i va de 1 a 5 de $i + 4$.
11. Es una sucesión creciente. Cada número en la sucesión es mayor que el número que le precede. **13.** Sí, los signos de los términos alternan.
15. 6, 12, 18, 24, 30 **17.** 3, 7, 11, 15, 19 **19.** $7, \frac{7}{2}, \frac{7}{3}, \frac{7}{4}, \frac{7}{5}$ **21.** $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}$ **23.** $-1, 1, -1, 1, -1$ **25.** $4, -8, 16, -32, 64$ **27.** 31
29. 12 **31.** 1 **33.** 99 **35.** $\frac{81}{25}$ **37.** 2, 15 **39.** 3, 17 **41.** $0, \frac{13}{20}$ **43.** $-1, -1$ **45.** $\frac{1}{2}, 7$ **47.** 64, 128, 256 **49.** 17, 19, 21 **51.** $\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$
53. $1, -1, 1$ **55.** $\frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}$ **57.** $\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ **59.** 17, 12, 7 **61.** $2+5+8+11+14 = 40$ **63.** $2+5+10+17+26+37 = 97$
65. $\frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} + 8 = 15$ **67.** $4+5+6+7+8+9 = 39$ **69.** $\sum_{i=1}^{5}(i+8)$ **71.** $\sum_{i=1}^{3}\frac{i^2}{4}$ **73.** 13 **75.** 169 **77.** 55 **79.** 25
81. ≈ 42.83 **83. a)** 6, 12, 18, 24 **b)** $p_n = 6n$ **85.** Las respuestas variarán. **87.** Las respuestas variarán. **89.** $\Sigma x = n\bar{x}$
91. Sí, por ejemplo si $n = 3$, obtiene $4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4(x_1 + x_2 + x_3)$ **93. a)** 10 **b)** 11 **c)** 110 **d)** 29 **e)** No
94. $\frac{2}{5}$ **95.** $8(y-2x^2)(y^2+2x^2y+4x^4)$ **96.** 11 **97.** $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$

Conjunto de ejercicios 11.2

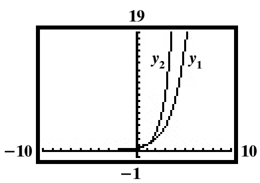
1. En una sucesión aritmética, cada término difiere en una cantidad constante. **3.** Se llama diferencia común. **5.** Es un número positivo **7.** Sí, por ejemplo $-1, -2, -3, \ldots$ **9.** Sí, por ejemplo, $2, 4, 6, \ldots$
11. $4, 7, 10, 13, 16; a_n = 3n + 1$ **13.** $7, 5, 3, 1, -1; a_n = -2n + 9$ **15.** $\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2}, 5, \frac{13}{2}; a_n = \frac{3}{2}n - 1$ **17.** $100, 95, 90, 85, 80; a_n = -5n + 105$
19. 14 **21.** 27 **23.** 12 **25.** 2 **27.** 9 **29.** 6 **31.** $s_{10} = 100; d = 2$ **33.** $s_8 = \frac{52}{5}; d = \frac{1}{5}$ **35.** $s_6 = 25.5; d = 3.7$ **37.** $s_{11} = 407; d = 6$
39. $4, 7, 10, 13; a_{10} = 31; s_{10} = 175$ **41.** $-6, -4, -2, 0; a_{10} = 12; s_{10} = 30$ **43.** $-8, -13, -18, -23; a_{10} = -53; s_{10} = -305$
45. $\frac{7}{2}, 6, \frac{17}{2}, 11; a_{10} = 26, s_{10} = 147.5$ **47.** $100, 93, 86, 79; a_{10} = 37; s_{10} = 685$ **49.** $n = 15, s_{15} = 330$ **51.** $n = 11; s_{11} = 121$

53. $n = 17; s_{17} = \frac{153}{2}$ **55.** $n = 29; s_{29} = 1421$ **57.** 1275 **59.** 2500 **61.** 1395 **63.** 267 **65.** 42,372 **67.** 351
69. a) 27 **b)** 196 **71.** $101 \cdot 50 = 5050$ **73.** $s_n = n^2$ **75. a)** 19 pies **b)** 143.5 pies **77.** 2 pies **79. a)** 155 **b)** 780
81. \$496 **83. a)** \$45,600 **b)** \$438,000 **85.** $a_n = 180°(n - 2)$ **93.** $r = \frac{A - P}{Pt}$ **94.** $(-3, -5)$
95. $3(2n - 5)(2n - 1)$ **96.**



Conjunto de ejercicios 11.3

1. Una sucesión geométrica es una sucesión en la que cada término después del primero es el mismo múltiplo del término que le precede. **3.** Para determinar la razón común, tome cualquier término, con excepción del primero, y divídalo entre el que le precede. **5.** 0 **7.** Sí **9.** Sí, s_∞ existe ya que $|r| < 1$, $s_\infty = 8$ **11.** 2, 6, 18, 54, 162 **13.** $6, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{8}$
15. $72, 24, 8, \frac{8}{3}, \frac{8}{9}$ **17.** $90, -30, 10, -\frac{10}{3}, \frac{10}{9}$ **19.** $-1, -3, -9, -27, -81$ **21.** $5, -10, 20, -40, 80$ **23.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{48}$
25. $3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, \frac{81}{8}, \frac{243}{16}$ **27.** 128 **29.** $-\frac{3}{64}$ **31.** 128 **33.** 6144 **35.** $\frac{1}{64}$ **37.** $\frac{50}{729}$ **39.** 155 **41.** 7812 **43.** 10,160 **45.** $-\frac{2565}{256}$
47. $-\frac{9279}{625}$ **49.** $r = \frac{1}{2}; a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **51.** $r = 2; a_n = 9(2)^{n-1}$ **53.** $r = -3; a_n = 2(-3)^{n-1}$ **55.** $r = \frac{2}{3}; a_n = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **57.** 2
59. $\frac{5}{4}$ **61.** 12 **63.** $\frac{25}{3}$ **65.** 5 **67.** 6 **69.** 4 **71.** 24 **73.** -45 **75.** -15 **77.** $\frac{8}{33}$ **79.** $\frac{8}{9}$ **81.** $\frac{17}{33}$ **83.** $r = 3; a_1 = 5$
85. $r = 2$ o $r = -2; a_1 = 7$ **87.** ≈\$1.77 **89. a)** 4 días **b)** ≈1.172 gramos **91. a)** ≈330.78 millones **b)** ≈63.4 años
93. a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ **b)** $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **c)** $\frac{1}{128} \approx 0.78\%$ **95.** ≈\$15,938.48 **97. a)** 28.512 pies **b)** 550 pies
99. a) 10.29 pulgadas **b)** 100 pulgadas **101.** 211 **103. a)** \$12,000, \$9600, \$7680 **b)** $a_n = 12{,}000\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ **c)** ≈\$4915.20
105. 190 pies **107. a)** y_2 asciende más lentamente. **b)**



109. $n = 21; s_n = 2{,}097{,}151$
110. 12 **111.** $6x^3 - x^2y - 16xy^2 + 6y^3$
112. $r = \frac{S - 2a}{S}$ **113.** $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 9}$
114. 5 **115.** 9 metros, 12 metros

Examen de mitad de capítulo

1. 2, −1, −4, −7, −10 [11.1] **2.** 91 [11.1] **3.** 1, 11 [11.1] **4.** −15, −19, −23 [11.1] **5.** 45 [11.1]
6. $\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{3}i + 7\right)$ [11.1] **7.** $-6, -1, 4, 9; a_n = -11 + 5n$ [11.2] **8.** −1 [11.2] **9.** 6 [11.2] **10.** 3, −3 [11.2] **11.** $47\frac{1}{2}$ [11.2]
12. 11 [11.2] **13.** 136 [11.2] **14.** 80, −40, 20, −10, 5 [11.3] **15.** $\frac{1}{9}$ [11.3] **16.** 315 [11.3] **17.** $-\frac{2}{3}$ [11.3] **18.** 18 [11.3]
19. $\frac{29}{33}$ [11.3] **20. a)** Una sucesión es una lista de números acomodados en un orden específico. **b)** Una sucesión aritmética es una sucesión en la que cada término difiere por una cantidad constante. **c)** Una sucesión geométrica es una sucesión donde los términos difieren por un múltiplo común. **d)** Una serie es la suma de los términos de una sucesión. [11.1–11.3]

Conjunto de ejercicios 11.4

1. Las respuestas variarán. **3.** 1 **5.** No, sólo se pueden determinar factoriales de números no negativos. **7.** 14, el número de términos es uno más que el exponente. **9.** 10 **11.** 1 **13.** 1 **15.** 70 **17.** 28 **19.** $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$
21. $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$ **23.** $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ **25.** $243a^5 - 405a^4b + 270a^3b^2 - 90a^2b^3 + 15ab^4 - b^5$
27. $16x^4 + 16x^3 + 6x^2 + x + \frac{1}{16}$ **29.** $\frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{27}{2}x^2 - 54x + 81$ **31.** $x^{10} + 100x^9 + 4500x^8 + 120{,}000x^7$
33. $2187x^7 - 5103x^6y + 5103x^5y^2 - 2835x^4y^3$ **35.** $x^{16} - 24x^{14}y + 252x^{12}y^2 - 1512x^{10}y^3$ **37.** Sí, $4! = 4 \cdot 3!$
39. Sí, $(7 - 3)! = (7 - 3)(7 - 4)(7 - 5)! = 4 \cdot 3 \cdot 2!$ **41.** $m = n$ o $m = 0$ **43.** $x^8, 24x^7, 17{,}496x, 6561$
45. $(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$ **47.** (0, 10) **48.** (10, 4) **49.** 2, 9 **50.** $2x^3y^5\sqrt{30y}$ **51.** $f^{-1}(x) = \frac{x - 8}{3}$

Ejercicios de repaso del capítulo 11

1. 6, 7, 8, 9, 10 **2.** −1, 3, 9, 17, 27 **3.** $6, 3, 2, \frac{3}{2}, \frac{6}{5}$ **4.** $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{9}{7}, 2, \frac{25}{9}$ **5.** 11 **6.** 4

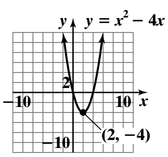
7. $\frac{26}{81}$ **8.** 88 **9.** $s_1 = 7, s_3 = 27$ **10.** $s_1 = 9, s_3 = 38$ **11.** $s_1 = \frac{4}{3}, s_3 = \frac{227}{60}$ **12.** $s_1 = -9, s_3 = -10$ **13.** $32, 64, 128; a_n = 2^n$ **14.** $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}; a_n = (-1)^n(3^{4-n})$ **15.** $\frac{16}{7}, \frac{32}{7}, \frac{64}{7}; a_n = \frac{2^{n-1}}{7}$ **16.** $-3, -7, -11; a_n = 17 - 4n$ **17.** $10 + 13 + 18 = 41$ **18.** $6 + 14 + 24 + 36 = 80$ **19.** $\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} = \frac{55}{6}$ **20.** $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{163}{60}$ **21.** 29 **22.** 239 **23.** 132 **24.** 841 **25. a)** 10, 14, 18, 22 **b)** $p_n = 4n + 6$ **26. a)** 4, 10, 18, 28 **b)** $a_n = n(n + 3) = n^2 + 3n$ **27.** 5, 8, 11, 14, 17 **28.** $5, \frac{14}{3}, \frac{13}{3}, 4, \frac{11}{3}$ **29.** $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, -\frac{15}{2}$ **30.** $-100, -\frac{499}{5}, -\frac{498}{5}, -\frac{497}{5}, -\frac{496}{5}$ **31.** 30 **32.** -4 **33.** $\frac{1}{2}$ **34.** 6 **35.** $s_8 = 112; d = 2$ **36.** $s_7 = -210; d = -6$ **37.** $s_7 = \frac{48}{5}; d = \frac{2}{5}$ **38.** $s_9 = -42; d = -\frac{1}{3}$ **39.** $-7, -3, 1, 5; a_{10} = 29, s_{10} = 110$ **40.** $4, 1, -2, -5; a_{10} = -23, s_{10} = -95$ **41.** $\frac{5}{6}, \frac{3}{2}, \frac{13}{6}, \frac{17}{6}; a_{10} = \frac{41}{6}; s_{10} = \frac{115}{3}$ **42.** $-60, -55, -50, -45; a_{10} = -15, s_{10} = -375$ **43.** $n = 13, s_{13} = 442$ **44.** $n = 7, s_7 = 14$ **45.** $n = 11; s_{11} = \frac{231}{10}$ **46.** $n = 10; s_{10} = 180$ **47.** 6, 12, 24, 48, 96 **48.** $-12, -6, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}$ **49.** $20, -\frac{40}{3}, \frac{80}{9}, -\frac{160}{27}, \frac{320}{81}$ **50.** $-20, -4, -\frac{4}{5}, -\frac{4}{25}, -\frac{4}{125}$ **51.** $\frac{2}{27}$ **52.** 480 **53.** 216 **54.** $\frac{4}{243}$ **55.** 441 **56.** $-\frac{4305}{64}$ **57.** $\frac{585}{8}$ **58.** $\frac{127}{8}$ **59.** $r = 2; a_n = 6(2)^{n-1}$ **60.** $r = 5; a_n = -4(5)^{n-1}$ **61.** $r = \frac{1}{3}; a_n = 10\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ **62.** $r = \frac{2}{3}; a_n = \frac{9}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **63.** 10 **64.** $\frac{25}{6}$ **65.** -6 **66.** -18 **67.** 32 **68.** $\frac{27}{2}$ **69.** $\frac{25}{6}$ **70.** -12 **71.** $\frac{4}{11}$ **72.** $\frac{23}{37}$ **73.** $81x^4 + 108x^3y + 54x^2y^2 + 12xy^3 + y^4$ **74.** $8x^3 - 36x^2y^2 + 54xy^4 - 27y^6$ **75.** $x^9 - 18x^8y + 144x^7y^2 - 672x^6y^3$ **76.** $256a^{16} + 3072a^{14}b + 16{,}128a^{12}b^2 + 48{,}384a^{10}b^3$ **77.** 15,050 **78.** 231 **79. a)** \$36,000, \$37,000, \$38,000, \$39,000 **b)** $a_n = \$35{,}000 + 1000n$ **c)** \$41,000 **d)** \$451,000 **80.** \$102,400 **81. a)** ≈\$2024.51 **b)** ≈\$2463.13 **c)** ≈\$24,041.29 **82.** ≈\$503.63 **83.** 150 pies

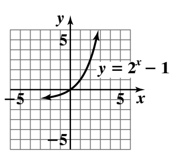
Examen de práctica del capítulo 11

1. Una serie es la suma de los términos de una sucesión. [11.1] **2. a)** Una sucesión aritmética es aquella cuyos términos difieren en una cantidad constante. **b)** Una sucesión geométrica es aquella cuyos términos difieren en un múltiplo constante. [11.2–11.3] **3.** $-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}$ [11.1] **4.** $s_1 = 3; s_3 = \frac{181}{36}$ [11.1] **5.** $5 + 11 + 21 + 35 + 53 = 125$ [11.1] **6.** 184 [11.1] **7.** $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(n - 1) = \frac{1}{3}n$ [11.1] **8.** $a_n = 5(2)^{n-1}$ [11.3] **9.** 15, 9, 3, -3 [11.2] **10.** $\frac{5}{12}, \frac{5}{18}, \frac{5}{27}, \frac{10}{81}$ [11.3] **11.** -40 [11.2] **12.** -20 [11.2] **13.** 12 [11.2] **14.** $\frac{256}{243}$ [11.3] **15.** $\frac{39{,}063}{5}$ [11.3] **16.** $r = \frac{1}{3}; a_n = 15\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ [11.3] **17.** 12 [11.3] **18.** $\frac{13}{33}$ [11.3] **19.** 56 [11.4] **20.** $x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$ [11.4] **21.** 82 [11.2] **22.** 91 [11.2] **23.** \$210,000 [11.2] **24.** ≈\$851.66 [11.3] **25.** 364,500 [11.3]

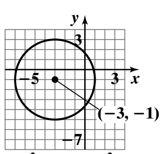
Examen de repaso acumulativo

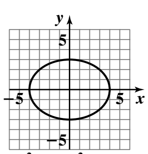
1. $b = \frac{2A}{h}$ [2.2] **2.** $y = -\frac{11}{3}x + \frac{38}{3}$ [3.5] **3.** Un número infinito de soluciones [4.2] **4.** $5x^4 + 29x^3 + 14x^2 - 28x + 10$ [5.2] **5.** $(x^2 + 2)(x - 6)$ [5.4] **6.** $(a + b + 4)^2$ [5.5] **7.** $\frac{5x^2 + 14x - 49}{(x + 5)(x - 2)}$ [6.2] **8.** 500 [6.6] **9.** 3 [7.6] **10.** 5 [7.6] **11.** $-1 \pm i\sqrt{14}$ [8.1] **12.** $\frac{3 \pm \sqrt{309}}{30}$ [8.2] **13.** 5 [5.8]

14.


[8.5] **15.** $\frac{1}{2}$ [9.3] **16.**


[9.2] **17.** $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 49$ [10.1]

18.


$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$
[10.1] **19.**


$9x^2 + 16y^2 = 144$
[10.2] **20.** 18 [11.3]

Índice de aplicaciones

Gobierno

Hogar

Hogar/familia

Impuestos

Manufactura

Medio ambiente, *vea también* Clima/temperatura

Negocios

Nutrición/alimento

Océano/navíos

Pediatría, *vea también* Atención médica

Población

Salario

Salud, *vea también* Atención médica

Tecnología/electrónica

Temperatura, *vea* Clima/temperatura

Transporte

Varios

Índice

F

G

H

I

L

M

N

Créditos fotográficos

Capítulo 1 **p. 1** Jonathon Ferrey, Getty Images, Inc.; **p. 4** Richard Hutchings, PhotoEdit, Inc.; **p. 14** Jonathon Ferrey, Getty Images, Inc.; **p. 26** Dave Saunders, Getty Images, Inc.- Stone Allstock; **p. 27** Chris Oxley, Corbis/Bettmann; **p. 33 ©** Image 100/Royalty-Free/ Corbis; **p. 38** Allen R. Angel; **p. 39 (izquierda)** Allen R. Angel; **(superior derecha)** Allen R. Angel; **(inferior derecha)** Ken Chernus, Getty Images, Inc.-Taxi; **p. 50 (izquierda)** National Optical Astronomy Observatories; **(derecha)** Oliver Meckes/Ottawa, Photo Researchers, Inc.; **p. 54** NASA Jet Propulsion Laboratory; **p. 55 (izquierda) ©** Reuters/CORBIS; **(derecha)** Allen R. Angel; **p. 56** Agence France Presse/Getty Images; **p. 63** Kim Blaxland, Getty Images, Inc.-Stone Allstock

Capítulo 2 **p. 65** Mark Adams, Getty Images, Inc.; **p. 76 (superior izquierda)** Allen R. Angel; **(inferior izquierda)** Allen R. Angel; **(derecha)** Darren McCollester/CORBIS; **p. 77** AP Wide World Photos; **p. 86** John P. Kelly, Getty Images, Inc.- Image Bank; **p. 91** Center for Disease Control and Prevention; **p. 92** Allen R. Angel; **p. 95** Allen R. Angel; **p. 96 (superior izquierda)** Juan Silva Productions, Getty Images, Inc.-Image Bank; **(enmedio izquierda)** Allen R. Angel; **(inferior izquierda)** Jeff Greenberg, Photo Edit, Inc.; **(derecha)** David Young Wolff, PhotoEdit, Inc.; **p. 97 (izquierda)** Allen R. Angel; **(derecha)** Allen R. Angel; **p. 98** Itsou Inouye, AP Wide World Photos; **p. 99 (izquierda)** Allen R. Angel; **(derecha)** Tom Stewart, Corbis/Bettmann; **p. 105** Aimee L. Calhoun; **p. 106 (izquierda)** J.C. Leacock, Image State/International Stock Photography, Ltd.; **(derecha)** Allen R. Angel; **p. 107 (izquierda)** Allen R. Angel; (**derecha**) Allen R. Angel; **p. 108 (izquierda)** Allen R. Angel; (**superior derecha**) George Hall, Corbis/Bettman; **(inferior derecha)** Allen R. Angel; **p. 109 (superior izquierda)** Allen R. Angel; **(inferior izquierda)** © Royalty-Free/CORBIS; **(derecha)** NASA Headquarters; **p. 114** Getty Images Inc. Photodisc; **p. 119** Getty Images-Photodisc; **p. 121** Allen R. Angel; **p. 122** Allen R. Angel; **p. 123** Allen R. Angel; **p. 138** Allen R. Angel; **p. 139 (izquierda)** Getty Images-Digital Vision; **(superior derecha)** Allen R. Angel; **(inferior derecha)** Allen R. Angel; **p. 141** Allen R. Angel

Capítulo 3 **p. 143** Patrick Molnar, Getty Images, Inc.; **p. 144** Sheila Terry/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.; **p. 165** Paul Bowen, Getty Images, Inc.; **p. 170 (izquierda)** Allen R. Angel; **(derecha)** Susan Van Etten, PhotoEdit, Inc.; **p. 183** Jeff Greenberg, PhotoEdit, Inc.; **p. 196** Allen R. Angel; **p. 197** Allen R. Angel; **p. 205** Getty Images-Digital Vision; **p. 206 (izquierda)** Allen R. Angel; **(derecha)** Allen R. Angel; **p. 207** Arne Hodalic, Corbis/Bettmann; **p. 221** Carlos Cortes IV Reuters/CORBIS

Capítulo 4 **p. 232** Tom Collicott, Masterfile Corporation; **p. 251** David Stoecklein, Corbis/Bettmann; **p. 252** Greg Vaughn/PacificStock.com; **p. 253** Allen R. Angel; **p. 254** Darrell Gulin, Corbis/Bettmann; **p. 260 (superior izquierda)** © Yann Arthus-Bertrand/CORBIS; **(inferior izquierda)** Michael T. Sedam, Corbis/Bettmann; **(derecha)** Dave King © Dorling Kindersley; **p. 261 (izquierda)** Bob Daemmerich, The Image Works; **(derecha)** Allen R. Angel; **p. 262** Jim Cummins/Taxi/Getty Images; **p. 264** Scott Boehm, Getty Images, Inc.; **p. 295** Allen R. Angel

Capítulo 5 **p. 297** Pete Seaward, Getty Images, Inc-Stone Allstock; **p. 317** © Jason Szenes/CORBIS, All Rights Reserved; **p. 332** Mug Shots, Corbis/Bettmann; **p. 333** Allen R. Angel; **p. 368 (superior izquierda)** Allen R. Angel; **(inferior izquierda)** Allen R. Angel

Capítulo 6 **p. 381** Corbis Royalty Free; **p. 403** Jeff Greenberg, PhotoEdit, Inc.; **p. 422** Allen R. Angel; **p. 423** Allen R. Angel; **p. 425** Allen R. Angel; **p. 427 (izquierda)** Allen R. Angel; **(derecha)** Allen R. Angel; **p. 428 (superior derecha)** Dennis Marsico, Corbis/Bettmann; **(inferior derecha)** Allen R. Angel; **p. 429 (izquierda)** Allen R. Angel; **(derecha)** Allen R. Angel; **p. 430 (izquierda)** Allen R. Angel; **(derecha)** Kit Houghton, Corbis/Bettmann; **p. 431** Allen R, Angel; **p. 436** Allen R. Angel; **p. 437** Doug Mazell, Index Stock Imagery, Inc.; **p. 438** Bob Daemmrich, Photo Edit, Inc.; **p. 439 (izquierda)** Bruno Vincent, Getty Images, Inc.; **(derecha)** Mary Kate Denny, PhotoEdit, Inc.; **p. 440** Dimitri Vervits, Getty Images, Inc.; **p. 445** Allen R. Angel; **p. 447** Allen R. Angel

Capítulo 7 **p. 448** Corbis Royalty Free; **p. 464** Courtesy eBay; **p. 478** Richard Hutching, PhotoEdit,Inc.; **p. 488** Allen R. Angel; **p. 494** Allen R. Angel; **p. 497 (izquierda)** Allen R. Angel; **(derecha)** NOAA/Phil Degginger, Color-Pic, Inc.; **p. 508** Chris Everard, Getty Images, Inc.-Stone Allstock; **p. 515** Picture Press Bild-und Textagentur GmbH, Munich, Alemania; **p. 516** Allen R. Angel

Capítulo 8 **p. 517** Allen R. Angel; **p. 537** Allen R. Angel; **p. 538** NASA, Masterfile Corporation; **p. 547 (izquierda y derecha)** Allen R. Angel; **p. 548** Allen R. Angel; **p. 570** Tony Freeman, PhotoEdit, Inc; **p. 586** Melford Inc., Michael, Getty Images, Inc.-Image Bank; **p. 587** Richard Hutching, PhotoEdit, Inc.; **p. 588** Chris Arend, Alaska Stock

Capítulo 9 **p. 591** © Bob Krist/CORBIS All Rights Reserved; **p. 602** Damir Frkovic, Masterfile Corporation; **p. 610 (superior derecha)** Science Source, Photo Researchers, Inc.; **(inferior derecha)** Allen R. Angel; **p. 615** Simon Kwong/Reuters New Media Inc., Corbis/Bettmann; **p. 629 (izquierda)** V.C.L., Getty Images, Inc.-Taxi; **(derecha)** Allen R. Angel; **p. 634** Charles Gupton, Getty Images, Inc.-Stone Allstock; **p. 635** Roger Ressmeyer/CORBIS, All Rights Reserved; **p. 636** Bob Krist/CORBIS, All Rights Reserved; **p. 643** Allen R. Angel; **p. 645 (izquierda)** Allen R. Angel; **(derecha)** Allen R. Angel; **p. 646** Allen R. Angel; **p. 654** Allen R. Angel; **p. 655** Allen R. Angel

Capítulo 10 **p. 657** Santi Visali Inc., Getty Images, Inc., Hulton Archive Photos; **p. 674 (superior e inferior izquierda)** Allen R. Angel; **p. 689** Pictor, Image State/International Stock Photography Ltd; **p. 695** Allen R. Angel

Capítulo 11 **p. 698** © Richard Megna, Fundamental Photographs, NYC; **p. 709** William James Warren; **p. 711** Allen R. Angel; **p. 712** Corbis/Bettman; **p. 725** The Granger Collection

Allen R. Angel
Chapter Test Prep Video t/a Álgebra Intermedia, 7a. ed.

Pearson Prentice Hall

ANTES DE UTILIZAR EL PAQUETE EN EL CD-ROM, DEBE LEER CUIDADOSAMENTE LOS TÉRMINOS Y CONDICIONES. EL USO DE ESTE CD-ROM INDICA SU ACEPTACIÓN DE ESTOS TÉRMINOS Y CONDICIONES.
Pearson Educación proporciona este programa y autoriza su uso. Usted asume la responsabilidad para la elección del programa para lograr los resultados esperados y por la instalación, uso y resultados obtenidos del programa.

PERMISO DE USO

Por la presente usted acepta una Licencia (o permiso) no exclusiva, intransferible y permanente, para instalar y utilizar el programa EN UNA SOLA COMPUTADORA en cualquier momento. Puede copiar el programa, en una sola computadora, exclusivamente con fines de respaldo o como apoyo al uso que le dé al programa. No puede modificar, traducir, desensamblar, descompilar o utilizar ingeniería inversa en todo o parte del programa.

VIGENCIA

La Licencia es efectiva hasta que termine. Pearson Education, Inc., se reserva el derecho de dar por terminada esta Licencia de forma automática, si se viola cualquiera de las disposiciones de la Licencia. Usted puede dar por terminada la Licencia en cualquier momento. Para ello debe devolver el programa con toda la documentación, y una garantía por escrito en la que se establezca que ha devuelto o destruido todas las copias habidas en su poder.

GARANTÍA LIMITADA

EL PROGRAMA SE PROPORCIONA “COMO ESTÁ”, SIN GARANTÍA DE NINGUNA CLASE, YA SEA EXPRESA O IMPLÍCITA, INCLUYENDO, PERO NO LIMITADA A, LAS GARANTÍAS IMPLÍCITAS DE COMERCIALIZACIÓN O DE ADECUACIÓN PARA UN PROPÓSITO PARTICULAR. TODO EL RIESGO, ASÍ COMO LA CALIDAD Y DESEMPEÑO DEL PROGRAMA, ES DE USTED. SI EL PROGRAMA RESULTARA DEFECTUOSO, USTED (Y NO PEARSON EDUCATION, INC. NI NINGÚN DISTRIBUIDOR AUTORIZADO) ASUMIRÁ EL COSTO TOTAL DE TODOS LOS SERVICIOS, REPARACIÓN O CORRECCIONES NECESARIOS. NINGUNA INFORMACIÓN POR ESCRITO, ORAL O NOTIFICACIÓN DADA POR PEARSON EDUCATION, INC., SUS DISTRIBUIDORES O AGENTES, PUEDE CREAR UNA GARANTÍA QUE AUMENTE EL ALCANCE DE ESTA GARANTÍA. EN ESTADOS UNIDOS. ALGUNOS ESTADOS NO PERMITEN LA EXCLUSIÓN DE GARANTÍAS IMPLÍCITAS, DE MODO QUE LA EXCLUSIÓN ANTERIOR PODRÍA NO APLICAR PARA SU CASO, E INCLUSO PODRÍA TENER OTROS DERECHOS LEGALES QUE VARÍAN DE UNO A OTRO ESTADO.
Pearson Education, Inc., no garantiza que las funciones contenidas en el programa cumplirán con sus requerimientos o que la operación del programa estará sin interrupción o libre de errores. Sin embargo, Pearson Education, Inc., garantiza que el CD-ROM en el cual se proporciona el programa está libre de defectos en materiales y mano de obra bajo un uso normal durante un periodo de noventa (90) días a partir de la fecha de serle entregado, mediante una copia de su nota de compra. El programa no debe usarse como base única para resolver problemas cuya solución incorrecta pueda causar daño a personas o sus propiedades. Si el programa se emplea de esa forma, es responsabilidad del usuario, y Pearson Education, Inc., renuncia de forma explícita a cualquier responsabilidad por dicho mal uso.

LÍMITES DE REPARACIONES

Toda la responsabilidad de Pearson Education, Inc., se limita a:
1. el reemplazo del CD-ROM que no satisfaga la “GARANTÍA LIMITADA” y que sea devuelto a Pearson Education, o
2. si Pearson Education, Inc., no puede enviar un CD-ROM de reemplazo que esté libre de defectos en materiales o manufactura, usted puede dar por terminado este acuerdo mediante la devolución del programa.
EN NINGÚN CASO PEARSON EDUCATION, INC., SERÁ RESPONSABLE ANTE USTED DE DAÑOS, INCLUYENDO PÉRDIDA DE BENEFICIOS, DE GANANCIAS, PÉRDIDA DE AHORROS U OTROS IMPREVISTOS O DAÑOS, QUE SURJAN DEL USO O INCAPACIDAD PARA USAR EL PROGRAMA, INCLUSO SI PEARSON EDUCATION, INC., O UN DISTRIBUIDOR AUTORIZADO, HA SIDO NOTIFICADO DE LA POSIBILIDAD DE DICHOS DAÑOS O ANTE CUALQUIER RECLAMACIÓN DE CUALQUIER OTRA PARTE. ALGUNOS ESTADOS NO PERMITEN LA LIMITACIÓN O EXCLUSIÓN DE RESPONSABILIDADES POR DAÑOS O IMPREVISTOS, DE MANERA QUE LA LIMITACIÓN O EXCLUSIÓN ANTERIOR PODRÍA NO SER APLICABLE A USTED.

GENERAL

Usted no puede dar licencia, asignar, o transferir la licencia de este programa. Cualquier intento de dar licencia, asignar o transferir cualquiera de los derechos u obligaciones del presente carecerá de validez.
ESM Media Development
Higher Education Division
Pearson Education, Inc.
1 Lake Street
Upper Saddle River, NJ 07458
Para cualquier consulta acerca de soporte técnico, puede escribir a
editorialmx@pearsoned.com
USTED ACEPTA QUE HA LEÍDO Y ENTENDIDO ESTE CONTRATO, Y ESTÁ DE ACUERDO EN CEÑIRSE A ESTOS TÉRMINOS Y CONDICIONES. ADEMÁS ACEPTA QUE LAS CLÁUSULAS SON COMPLETAS Y EXCLUSIVAS DEL CONTRATO ENTRE NOSOTROS, Y QUE SUSTITUYE CUALQUIER PROPUESTA O ACUERDO PREVIO, ORAL O POR ESCRITO Y CUALQUIER OTRA COMUNICACIÓN ENTRE NOSOTROS RELACIONADA CON EL MATERIAL DE ESTE CONTRATO.

Requerimientos del sistema

-Para Windows: Procesador Pentium II a 300 MHz, computadora con Windows NT, 2000, ME o XP, con 64 MB de RAM (para Windows XP se requieren 128 MB de RAM). 4.3 MB de espacio libre adicional en el disco duro (si requiere instalar Quick Time), monitor con resolución 800×600, unidad lectora de CD 8x, tarjeta de sonido para Quick Time 7.x y explorador de Internet.
-Para Macintosh: Power PC G3 a 233 MHz, Mac 10.x, con 64 MB de RAM, 19 MB de RAM adicionales si se requiere la instalación de Quick Time, monitor con resolución de 800×600.
unidad lectora de CD 8x
QuickTime 7
Explorador de Internet.

Información de soporte

Pearson no da soporte y/o asistencia para lo siguiente:

- software de terceros (*i.e.*, Microsoft incluyendo el paquete de Office de Microsoft, Apple, Borland, etcétera).
- ayuda para tareas.
- a libros de texto y CD-ROM comprados ya usados no se les da apoyo y no son reemplazables.

Capítulo 1 Conceptos básicos

Propiedades conmutativas: $a + b = b + a,\ ab = ba$

Propiedades asociativas: $(a + b) + c = a + (b + c),\ (ab)c = a(bc)$

Propiedad distributiva: $a(b + c) = ab + ac$

Propiedades de la identidad: $a + 0 = 0 + a = a,\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Propiedades de los inversos: $a + (-a) = -a + a = 0,\ a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

Propiedad de la multiplicación por 0: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

Propiedad de la doble negación: $-(-a) = a$

$>$ significa es mayor a, $\geq$ significa es mayor o igual a
$<$ significa es menor a, $\leq$ significa es menor o igual a

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases} \qquad a - b = a + (-b)$$

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si } \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores de } b} = a \qquad b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores de } b}$$

Orden de las operaciones: Paréntesis, exponentes y raíces, multiplicaciones y divisiones, sumas y restas.

Reglas de los exponentes

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^m / a^n = a^{m-n},\ a \neq 0$ $\qquad (ab)^m = a^m b^m$

$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m},\ a \neq 0$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m},\ b \neq 0$

$a^0 = 1,\ a \neq 0$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m,\ a \neq 0, b \neq 0$

Capítulo 2 Ecuaciones y desigualdades

Propiedad de la suma para la igualdad: Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

Propiedad de la multiplicación para la igualdad: Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$.

Procedimiento de resolución de problemas para resolver problemas de aplicación

1. **Entienda el problema.** Identifique la cantidad o cantidades que se le pide determinar.
2. **Traduzca el problema a un lenguaje matemático** (exprese el problema como una ecuación).
   a) Elija una variable para representar una cantidad, y **escriba exactamente lo que representa**. Represente cualquier otra cantidad que se determinará en términos de esta variable.
   b) Usando la información de la parte a), escriba una ecuación que represente el problema verbal.
3. **Realice los cálculos matemáticos** (resuelva la ecuación).
4. **Compruebe la respuesta** (usando el texto original del problema).
5. **Responda la pregunta que se hizo.**

Fórmula de la distancia: $d = rt$

Desigualdades

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.
Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$.
Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$.
Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a/c > b/c$.
Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$.
Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $a/c < b/c$.

Valor absoluto

Si $|x| = a$, entonces $x = a$ o $x = -a$. Si $|x| > a$, entonces $x < -a$ o $x > a$.
Si $|x| < a$, entonces $-a < x < a$. Si $|x| = |y|$, entonces $x = y$ o $x = -y$.

Capítulo 3 Gráficas y funciones

Una **relación** es cualquier conjunto de parejas ordenadas.

Una **función** es una correspondencia entre un primer conjunto de elementos, el dominio, y un segundo conjunto de elementos, el rango, de modo que a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un elemento del rango.

Funciones

Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Diferencia: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$

Una **gráfica de una ecuación** es una ilustración del conjunto de puntos que satisfacen una ecuación.

Para determinar la intersección con el eje y de una gráfica, haga $x = 0$ y resuelva la ecuación para y.

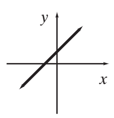
Para determinar la intersección con el eje x de una gráfica, haga $y = 0$ y resuelva la ecuación para x.

Pendiente de una recta: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

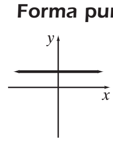
Forma general de una ecuación lineal: $ax + by = c$

Forma pendiente intercepción de una ecuación lineal: $y = mx + b$

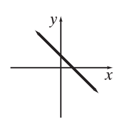
Forma punto pendiente de una ecuación lineal: $y - y_1 = m(x - x_1)$



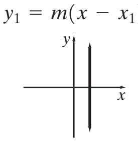
Pendiente positiva
(asciende hacia la derecha)



La pendiente es cero
(recta horizontal)



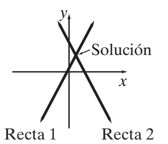
Pendiente negativa
(desciende hacia la derecha)



Pendiente indefinida
(recta vertical)

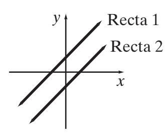
Capítulo 4 Sistemas de ecuaciones y desigualdades

Exactamente una solución
(Rectas no paralelas)



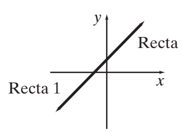
Sistema consistente

Sin solución
(Rectas paralelas)



Sistema inconsistente

Un número infinito de soluciones
(La misma recta)



Sistema dependiente

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse: (a) de manera gráfica, (b) por el método de sustitución, (c) por el método de suma o de eliminación, (d) mediante matrices o (e) por determinantes.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Regla de Cramer:

Dado un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned} \quad \text{entonces } x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ y } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

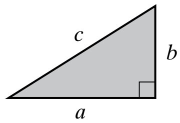
Capítulo 5 Polinomios y funciones polinomiales

Método PIES para multiplicar dos binomios:

$$\begin{array}{c} \text{F} \quad \text{O} \quad \text{I} \quad \text{L} \\ (a+b)(c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d \end{array}$$

Teorema de Pitágoras:

$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$ o $a^2 + b^2 = c^2$



Cuadrado de un binomio:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Diferencia de dos cuadrados: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Trinomios cuadrados perfectos:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2, \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Suma de dos cubos: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Diferencia de dos cubos: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Forma general de una ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

Propiedad del factor cero: Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$, o ambos son iguales a y $b = 0$.

Capítulo 6 Expresiones racionales y ecuaciones racionales

Para multiplicar expresiones racionales:

1. Factorice todos los numeradores y denominadores.
2. Divida entre los factores comunes que tenga.
3. Multiplique los numeradores y multiplique los denominadores.
4. Cuando se posible, simplifique la respuesta.

Para dividir expresiones racionales:

Invierta el divisor y luego multiplique la expresión racional resultante.

Para sumar o restar expresiones racionales:

1. Escriba cada fracción con un denominador común.
2. Sume o reste los numeradores, manteniendo el denominador común.
3. Cuando sea posible, factorice el numerador y simplifique la fracción.

Figuras semejantes: Los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales.

Proporción: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$.

Variación: directa, $y = kx$; inversa, $y = \frac{k}{x}$; conjunta, $y = kxz$

Capítulo 7 Raíces, radicales y números complejos

Si n es par y $a \geq 0$: $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$

Si n es impar: $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$

Reglas de los radicales

$\sqrt{a^2} = |a|$

$\sqrt{a^2} = a, \; a \geq 0$

$\sqrt[n]{a^n} = a, \; a \geq 0$

$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}, \; a \geq 0$

$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{m/n}, a \geq 0$

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \; a \geq 0, b \geq 0$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, a \geq 0, b > 0$

Un radical está simplificado cuando todo lo siguiente es verdadero:

1. En ningún radicando hay factores que sean potencias perfectas.
2. Ningún radicando tiene fracciones.
3. Ningún denominador tiene radicales.

Números complejos: números de la forma $a + bi$.

Potencias de *i*: $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$

Capítulo 8 Funciones cuadráticas

Propiedad de la raíz cuadrada:

Si $x^2 = a$, donde a es un número real, entonces $x = \pm\sqrt{a}$.

Una ecuación cuadrática puede resolverse mediante factorización, completando el cuadrado o mediante la fórmula cuadrática.

Fórmula cuadrática: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Discriminante: $b^2 - 4ac$

Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tiene dos raíces reales diferentes.

Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tiene una sola raíz real.

Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación no tiene raíces reales.

Parábolas

Para $f(x) = ax^2 + bx + c$, el vértice de la parábola es $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ o $\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.

Para $f(x) = a(x-h)^2 + k$, el vértice de la parábola es (h, k).

Si $f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$, la función tendrá un valor mínimo de $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ en $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c, a < 0$, la función tendrá un valor máximo de $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ en $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Capítulo 9 Funciones exponenciales y logarítmicas

Función compuesta de la función f con la función g: $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

Para determinar la **función inversa,** $f^{-1}(x)$, intercambie todas las x y y, y despeje la ecuación y resultante.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inversas, entonces $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

Función exponencial: $f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$

Logaritmo: $y = \log_a x$ significa $x = a^y,\ a > 0,\ a \neq 1$

Propiedades de los logaritmos:

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^n = n \log_a x$

$\log_a a^x = x$

$a^{\log_a x} = x,\ x > 0$

Logaritmos comunes son logaritmos con base 10.

Logaritmos naturales son logaritmos con base e, donde $e \approx 2.7183$.

Antilogaritmo: Si $\log N = L$ entonces $N = \text{antilog } L$.

Fórmula de cambio base: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Función exponencial natural: $f(x) = e^x$

Para resolver ecuaciones exponenciales o logarítmicas también utilizamos estas propiedades:

Si $x = y$, entonces $a^x = a^y$.

Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$.

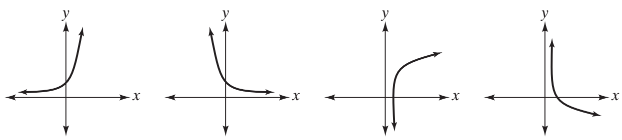
Si $x = y$, entonces $\log x = \log y$ $(x > 0,\ y > 0)$.

Si $\log x = \log y$, entonces $x = y$ $(x > 0,\ y > 0)$.

$\ln e^x = x$

$e^{\ln x} = x,\ x > 0$

$f(x) = a^x$, $a > 1$ | $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$ | $f(x) = \log_a x$, $a > 1$ | $f(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$

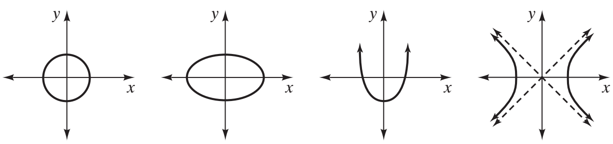


Capítulo 10 Secciones cónicas

Fórmula de distancia: $D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Fórmula del punto medio: punto medio $= \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Secciones cónicas:



Circunferencia | Elipse | Parábola | Hipérbola

Circunferencia con centro en el origen y radio r: $x^2 + y^2 = r^2$

Circunferencia con centro en (h, k) y radio r:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Elipse con centro en el origen: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Parábola con vértice en (h, k) que abre hacia:

arriba, $a > 0$: $y = a(x - h)^2 + k$

abajo, $a < 0$: $y = a(x - h)^2 + k$

a la derecha, $a > 0$: $x = a(y - k)^2 + h$

a la izquierda, $a < 0$: $x = a(y - k)^2 + h$

Hipérbolas con centro en el origen:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, cuando el eje transversal está a lo largo del eje x.

$\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ cuando el eje transversal está a lo largo del eje y.

$y = \pm \dfrac{b}{a}x$, ecuaciones de las asíntotas de las hipérbolas.

Capítulo 11 Sucesiones, series y el teorema del binomio

Sucesión finita: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

Serie finita: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

Sucesión infinita: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$

Serie infinita: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots$

n-ésima suma parcial de una sucesión: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$

n-ésimo término de una sucesión aritmética: $a_n = a_1 + (n - 1)d$

n-ésima suma parcial de una sucesión aritmética: $s_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

n-ésimo término de una serie geométrica: $a_n = a_1 r^{n-1}$

n-ésima suma parcial de una sucesión geométrica:

$$s_n = \frac{a_1 (1 - r^n),\ r \neq 1}{1 - r}$$

Suma de una serie geométrica infinita con |r| < 1: $s_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r}$

$n! = n(n - 1)(n - 2)(n - 3)\cdots(1)$

$0! = 1$

Coeficientes binomiales: $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n - r)!}$

Teorema del binomio:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3} b^3$$

$$+ \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$