UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA CONSTRUCCION

ASIGNATURA : MATEMATICAS	MATERIAL DE APOYO
NIVEL : 1er. AÑO	PROFESORAS L. ALTIMIRAS R.
CARRERA : DISEÑO	C. RAMIREZ N.
AÑO : 2010	PROF. AYUD. C. ESCOBEDO C.

GUIA N° 6
(CALCULO DIFERENCIAL)

CONCEPTOS IMPORTANTES

1.- Álgebra de derivadas

a) $y = k f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = k f'(x)$

b) $y = f(x) \pm g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) \pm g'(x)$

c) $y = f(x) g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$

d) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$

2.- Ecuación de la Recta Tangente a la curva y = f(x) en el punto P(c,f(c))

$y - f(c) = f'(c)(x - c)$, supuesto que $f'(c)$ exista.

3.- Ecuación de la Recta Normal a la curva y = f(x) en el punto P(c,f(c))

$y - f(c) = \dfrac{-1}{f'(c)}(x - c)$, supuesto que $f'(c)$ exista.

4.- Derivabilidad vs. Continuidad

Si f es derivable en $x = c$, entonces f es contínua en $x = c$.

Si f es contínua en $x = c$, entonces no, necesariamente, f es derivable en $x = c$

5.- Valor y Punto Crítico

Si $f'(x) = 0$ ó $f'(x) \nexists$, entonces $x = c$ es un Valor Crítico y el par ordenado $(c, f(c))$ se llama Punto Crítico de f.

6.- Crecimiento y Decrecimiento

a) $f'(x) > 0 \;\; \forall\, x \in]a, b[\quad \Rightarrow \quad f(x)$ es creciente en $]a, b[$

b) $f'(x) < 0 \;\; \forall\, x \in]a, b[\quad \Rightarrow \quad f(x)$ es decreciente en $]a, b[$

7.- Concavidad y Punto de Inflexión

a) $f''(x) > 0 \;\; \forall\, x \in]a, b[\quad \Rightarrow \quad f(x)$ es cóncava hacia arriba en $]a, b[$

b) $f''(x) < 0 \;\; \forall\, x \in]a, b[\quad \Rightarrow \quad f(x)$ es cóncava hacia abajo en $]a, b[$

c) Si la gráfica de una función contínua, posee recta tangente en un punto donde la concavidad cambia de sentido, llamamos a ése punto Punto de Inflexión.

8.- Propiedad del Punto de Inflexión

Si el par ordenado $(c , f (c))$ es un punto de inflexión, entonces $f''(x) = 0$ ó $f''(x) \nexists$

9.- Valores Extremos de una Función. (Criterio de la Primera Derivada)

a) Si f ' cambia de positiva a negativa alrededor de " c " (valor crítico), entonces f (c) es un máximo relativo de f .

b) Si f ' cambia de negativa a positiva alrededor de " c " (valor crítico), entonces f (c) es un mínimo relativo de f .

c) Si f ' no cambia de signo alrededor de " c " (valor crítico), entonces f (c) no es ni máximo ni mínimo de f.

10.- Valores Extremos de una Función. (Criterio de la Segunda Derivada)

a) $f''(c) > 0$ (c = valor critico) $\Rightarrow$ $(c , f (c))$ es mínimo de f.

b) $f''(c) < 0$ (c = valor critico) $\Rightarrow$ $(c , f (c))$ es máximo de f.

c) $f''(c) = 0$ (c = valor crítico) $\Rightarrow$ no hay información, por lo que debe analizarse el punto por el criterio de la primera derivada.

11.- Pauta General para construir la Gráfica de una Función $y = f (x)$

a) Determinar el Dominio de f

b) Determinar los x e y interceptos

c) Determinar asíntotas verticales, horizontales y oblicuas

d) Calcular $f'(x)$

e) Determinar valores y puntos críticos

f) Calcular $f''(x)$

g) Calcular posibles puntos de inflexión

h) Establecer intervalos de estudio, tomando en cuenta el dominio, los valores críticos y las abscisas de los posibles puntos de inflexión y analizar cada uno de ellos con el fin de determinar : crecimiento, decrecimiento y sentido de concavidad de la curva.

i) Concluir existencia de valores extremos (atendiendo al análisis del crecimiento de la curva) y, la existencia de puntos de inflexión (atendiendo al análisis del sentido de concavidad de la curva) ; ambos efectuados en el punto h).

j) Confeccionar la gráfica de la función, basándose en el estudio realizado.

k) Determinar, por simple inspección de la gráfica, el Recorrido de f.

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA CONSTRUCCION

EJERCICIOS PROPUESTOS

I.- Aplique álgebra de derivadas para derivar las siguientes funciones.

1.- $f(x) = 2\,\text{sen}(x) - 2x^2$

2.- $f(x) = \dfrac{7x}{e^x \ln(x)}$

3.- $f(x) = (x+1)(x-3)$

4.- $f(x) = 2x^5 e^x$

5.- $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{5} - \dfrac{2}{x} + x^{\frac{-1}{4}} + 8$

6.- $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 3}{x}$

7.- $f(x) = \left(x^2 - 3x\right)\left(9x - x^3\right)$

8.- $f(x) = 7x^2 + x\cos(x)$

9.- $f(x) = \dfrac{2x + 5x^2 - 4}{x^2 - 1}$

10.- $f(x) = \tan(x) - \ln(x)$

11.- $f(x) = \dfrac{5}{2x^2 - 3}$

12.- $f(x) = 8x^2\,\text{sen}(x)$

13.- $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$

14.- $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{7}$

15.- $f(x) = \dfrac{2}{e^x}$

II.- Escriba las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva dada, en el punto indicado.

1.- $y = 5 - x - 2x^2$; $(-1, 4)$

2.- $y = -4x^3 + 1$; $(1, -3)$

3.- $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; $(-1, 0)$

4.- $f(x) = x^4 - 10x$; $x = 0$

5.- $f(x) = 2x + \dfrac{2}{x}$; $x = 1$

6.- $f(x) = \dfrac{11 - 2x^2}{3}$; $x = 2$

III.- Plantee y resuelva los siguientes problemas.

1.- ¿ En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$, la tangente es paralela al eje de las abscisas ?

2.- Determine los puntos de la curva $y = x^3 + 9x^2 - 9x + 15$, en las cuales la tangente es paralela a la recta $y = 12x + 5$.

3.- Hallar los puntos de la función $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$, en los cuales la pendiente es -1.

4.- Diga en qué puntos, si los hay, las siguientes funciones tienen tangente horizontal.

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ b) $f(x) = x^3 + 3x$

5.- Determinar las constantes a, b, c , tales que la curva $y = ax^2 + bx + c$ sea tangente a la recta L : $y = 5x - 3$ en el punto $P_1(2, 7)$ y, además pase por el punto $P_2(-1, 10)$.

6.- Determinar los puntos de la curva $y = x^3 + x$ tales que la tangente por dichos puntos sea paralela a la recta de ecuación $y = 4x$.

7.- Determine el valor de los coeficientes a, b, c, d, tales que la curva $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sea tangente a la recta $12x - y - 21 = 0$ en el punto $(2, 3)$ y tangente a la recta $x - y - 4 = 0$ en el punto $(1, -3)$.

8.- Hallar la ecuación de dos rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = 4x - x^2$ que pasen por el punto $(2, 5)$.

9.- Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x + 5$ y la recta secante a ella por los puntos de abscisa $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$, hallar la ecuación de la tangente a la parábola que sea paralela a la recta secante dada.

10.- Hallar el valor de las constantes **a , b , c , d** , tales que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo en $(0, 0)$ y un máximo en $(2, 2)$.

11.- Hallar el valor de las constantes **a , b , c** , tales que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo en $(5, 20)$ y pase por $(2, 10)$.

12.- Suponga que $g(t) = at^2 + bt + c$ y que $g(1) = 5$, $g'(1) = 3$ y $g''(1) = -4$. Encontrar los valores de **a , b , c** .

13.- Si $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 6$. Evalúe f'' en cada cero de f'.

14.- Sea la función $f(x) = 2x^3 - ax^2 + bx + 5$. Calcule los valores de **a** y **b** para que $f(x)$ tenga en $x = 2$ un punto de inflexión con tangente horizontal.

15.- Calcule los valores **a , b , c** sabiendo que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $P(2, 7)$ y tiene su vértice en $V(1, 6)$.

IV.- Pruebe que si :

a) $y = e^x \operatorname{sen}(x)$ entonces $y'' - 2y' + 2y = 0$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + 2\cos(x)$ entonces $f''' + f'' + f' + f = 0$

V.- Analice el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones :

1.- $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

2.- $y = \dfrac{x^2}{2x - 2}$

3.- $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$

4.- $f(x) = \dfrac{2}{x} + x^2$

5.- $f(x) = \dfrac{x}{L_n(x)}$

VI.- Determine, si es que existen, Valores Extremos y / o Puntos de Inflexión de las siguientes funciones.

1.- $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

2.- $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

3.- $f(x) = \sqrt[3]{x}$

VII.- Utilice la Pauta General de Graficación para confeccionar la gráfica de las siguientes funciones.

1.- $f(x) = x^3 - 3x$

2.- $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

3.- $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$

4.- $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

VIII.- En cada caso, grafique una función que posea las características dadas.

1.- $f(-2) = 8$, $f(0) = 4$, $f(2) = 0$

$f'(-2) = f'(2) = 0$

$f'(x) < 0$ para $-2 < x < 2$, $f'(x) > 0$ para $x < -2$ y $x > 2$

$f''(x) < 0$ para $x < 0$, $f''(x) > 0$ para $x > 0$

2.- f es contínua en toda su extensión

$f(-3) = 1$, $f'(-3)$ no existe

$f'(x) < 0 \quad \forall\ x < -3$, $f'(x) > 0 \quad \forall\ x > -3$

$f''(x) < 0 \quad \forall\ x \neq -3$

IX.- Plantee y resuelva los siguientes Problemas de Optimización

1.- Hallar dos números positivos que minimicen la suma del doble del primero más el segundo, si el producto de los dos números es 288.

2.- Un ranchero dispone de 200 m. de valla para cercar dos corrales rectangulares adyacentes e iguales. ¿ Cuáles habrían de ser las dimensiones para que el área encerrada fuese máxima ¿.

3.- Un fabricante de cajas desea construir una caja cerrada que tenga un volumen de 288 $pulg^3$. y cuya base rectangular tiene el largo igual al triple de su ancho. Determine las dimensiones de la caja construida con la mínima cantidad de material.

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA CONSTRUCCION

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

I.-

1.- $f'(x) = 2\cos(x) - 4x$

2.- $f'(x) = \dfrac{7\left(L_n(x) - xL_n(x) - 1\right)}{e^x L_n^2(x)}$

3.- $f'(x) = 2(x-1)$

4.- $f'(x) = 2x^4e^x(5 + x)$

5.- $f'(x) = \dfrac{1}{15\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$

6.- $f'(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2}$

7.- $f'(x) = -5x^4 + 12x^3 + 27x^2 - 54x$

8.- $f'(x) = 14x + \cos(x) - x\operatorname{sen}(x)$

9.- $f'(x) = \dfrac{-2\left(x^2 + x + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}$

10.- $f'(x) = \sec^2(x) - \dfrac{1}{x}$

11.- $f'(x) = \dfrac{-20x}{\left(2x^2 - 3\right)^2}$

12.- $f'(x) = 8x(2\operatorname{sen}(x) + x\cos(x))$

13.- $f'(x) = \dfrac{-2}{x^2} - \dfrac{10}{x^3} + \dfrac{3}{x^4}$

14.- $f'(x) = 0$

15.- $f'(x) = \dfrac{-2}{e^x}$

II.-

	Ecuación Tangente	**Ecuación Normal**
1.-	$3x - y + 7 = 0$	$x + 3y - 11 = 0$
2.-	$12x + y - 9 = 0$	$x - 12y - 37 = 0$
3.-	$x + 2y + 1 = 0$	$2x - y + 2 = 0$
4.-	$10x - y = 0$	$x - 10y = 0$
5.-	$y = 4$	$x = 1$
6.-	$8x + 3y - 19 = 0$	$3x - 8y + 2 = 0$

III.-

1.- (3,-1)

2.- (-7,176) ; (1,16)

3.- (0,1) ; $(-2,\dfrac{13}{3})$

4.- a) (0,2) ; (1,1) ; (-1,1)

4.- b) No existen

5.- a = 2 ; b = -3 ; c = 5

6.- (1,2) ; (-1,-2)

7.- a = 1 ; b = 1 ; c = -4 ; d = -1

8.- y = 2x + 1 ; y = -2x + 9

9.- y = 2x + 1

10.- $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$, $c = d = 0$

11.- $a = -\dfrac{10}{9}$, $b = \dfrac{100}{9}$, $c = -\dfrac{70}{9}$

12.- a = – 2 , b = 7, c = 0

13.- $f''(3) = 24$, $f''(-5) = -24$

14.- a = 12, b = 24

15.- a = 1, b = –2 , c = 7

V.- 1.- f es creciente $\forall\ x \in (\ ]-\infty, 1[\ \cup\ ]2, \infty[\ )$
f es decreciente $\forall\ x \in\ ]1, 2[$

2.- f es creciente $\forall\ x \in (\ ]-\infty, 0[\ \cup\ ]2, \infty[\ )$
f es decreciente $\forall\ x \in (\ ]0, 1[\ \cup\ ]1, 2[\ )$

3.- f es creciente $\forall\ x \in (\ ]-\infty, -3[\ \cup\ ]1, \infty[\ )$
f es decreciente $\forall\ x \in (\ ]-3, -1[\ \cup\ ]-1, 1[\ )$

4.- f es creciente $\forall\ x \in\ ]1, \infty[$
f es decreciente $\forall\ x \in (\ ]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, 1[\ )$

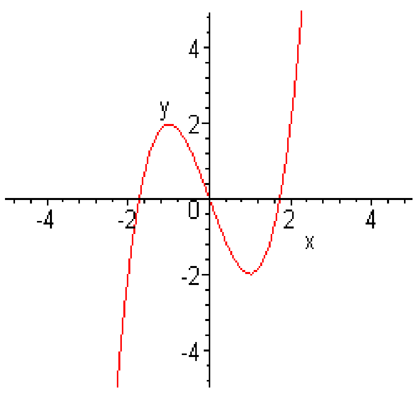
5.- f es creciente $\forall\ x \in\ ]e, \infty[\ )$
f es decreciente $\forall\ x \in (\ ]0, 1[\ \cup\ ]1, e[\ )$

VI.- 1.- Mínimo en $(3, -22)$, Máximo en $(-1, 10)$, Pto. Inflex. en $(1, -6)$

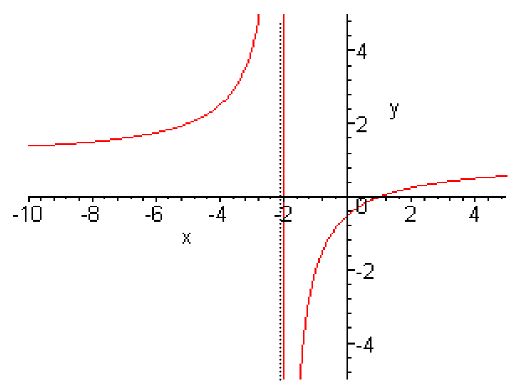
2.- Mínimo en $(1, 2)$, No existe punto de inflexión.

3.- No tiene ni máximo ni mínimo , Pto. de Inflexión en $(0, 0)$

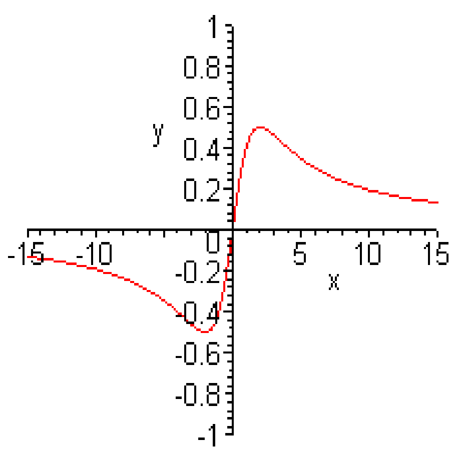
VII.- 1.-



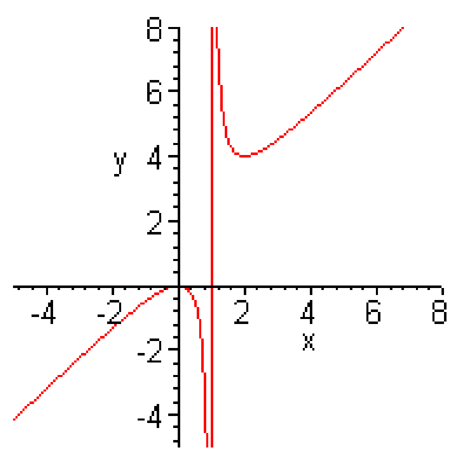
2.-



3.-



4.-



IX.- 1.- Los números son 12 y 24 , respectivamente.

2.- Las dimensiones son : 50 pies y $\dfrac{100}{3}$ pies, respectivamente.

3.- Las dimensiones de la caja son 12 por 4 por 6 pulgadas.