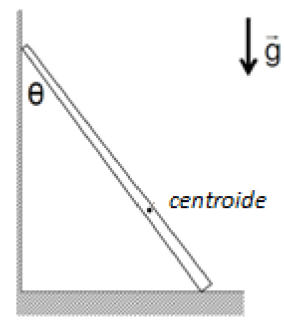
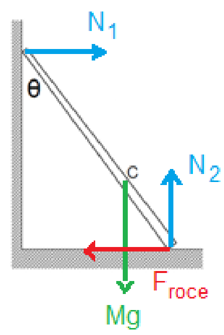
Prof. Mónica Hernández Magofke
mhmagofke

PROBLEMAS EQUILIBRIO MECÁNICO RESUELTOS EN DETALLE

1. Un palo de madera de largo L y masa M, está apoyado en una pared vertical muy lisa de modo que forma con ésta un ángulo Θ. El centroide se ubica a una distancia L/3 de su base. Determine la magnitud de la fuerza de roce ejercida por el piso sobre el palo.



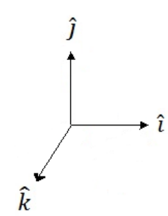
Primero veamos cuántas fuerzas actúan **sobre el palo**:
Note que el centroide (en este ejercicio) no está en la mitad de la longitud del palo.



N_1 y N_2 son fuerzas de **contacto**, normales (perpendiculares) al plano de contacto.

La Fuerza de roce se opone al movimiento (inminente).

La segunda Ley de Newton indica que la suma de fuerzas debe ser cero (vector). Mire los vectores fuerza que están presentes:



$$\overrightarrow{N_1} = +N_1\,\hat{\imath} \qquad \overrightarrow{N_2} = +N_2\,\hat{\jmath}$$

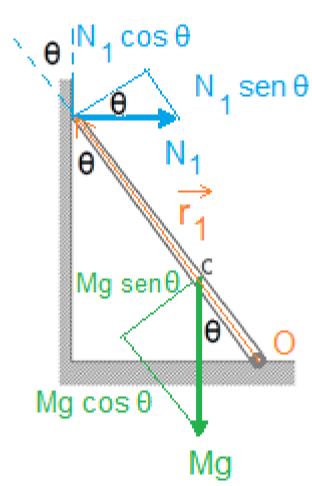
$$\overrightarrow{F_{roce}} = -F_{roce}\,\hat{\imath} \qquad \overrightarrow{Mg} = -Mg\,\hat{\jmath}$$

El vector cero es $\vec{0} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$ de modo que, al sumar todas las fuerzas, cada componente del vector suma debe ser igual a cero (por separado). Esto nos conduce a dos ecuaciones, una para el eje X y otra para el eje Y.

1) $N_1 - F_{roce} = 0$

2) $N_2 - Mg = 0$

A continuación, analicemos qué sucede con el posible giro del palo. El punto de giro (inminente) se encuentra en el extremo 2. Respecto a ese punto, sólo las dos fuerzas indicadas en la figura contribuyen al torque o momento de fuerza.



El vector $\overrightarrow{N_1}$ se puede descomponer en dos componentes:

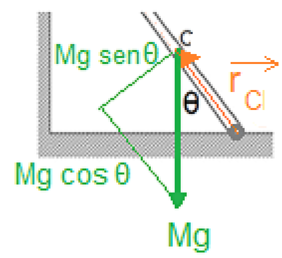
- una perpendicular a $\overrightarrow{r_1}$ (que tiene tamaño $N_1\ cos\theta$)
- otra paralela a $\overrightarrow{r_1}$ (que tiene tamaño $N_1\ sen\theta$)

De modo que

$$\left|\vec{r_1} \times \vec{N_1}\right| = |\vec{r_1}|\left|\overrightarrow{N_1\, cos\theta}\right|\, sen90° \; = L \cdot \; N_1 cos\theta$$

Y el torque (momento de fuerza) es: $\overrightarrow{M_1} = \vec{r_1} \times \vec{N_1} = -(L \cdot N_1 cos\theta)\, \hat{k}$

El vector $\overrightarrow{Mg}$ se puede descomponer en dos componentes:



- una perpendicular a $\vec{r_C}$ (que tiene tamaño $Mg\; sen\theta$)
- otra paralela a $\vec{r_C}$ (que tiene tamaño $Mg\; cos\theta$)

De modo que

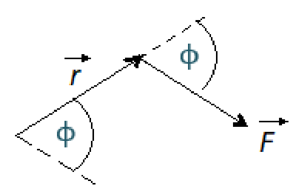
$$\left|\vec{r_C} \times \overrightarrow{Mg}\right| = |\vec{r_C}|\left|\overrightarrow{Mg\; sen\theta}\right|\, sen90° \; = \frac{L}{3}\; Mg\; sen\theta$$

Y el momento de fuerza es: $\overrightarrow{M_2} = \vec{r_C} \times \overrightarrow{Mg} = +\left(\frac{L}{3} \cdot Mg\; sen\theta\right) \hat{k}$

Suma de momentos igual a cero nos entrega una tercera ecuación, asociada a un vector que apunta en la dirección Z:

3) $\frac{L}{3} \cdot Mg\; sen\theta - \; L \cdot N_1 cos\theta = 0$

Alternativamente, recuerde que la magnitud de los momentos de fuerza se puede determinar directamente de la definición de producto cruz:



$$\left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = r\; F\; sen\; \phi$$

RESUMEN

1) $N_1 - F_{roce} = 0$

2) $N_2 - Mg = 0$

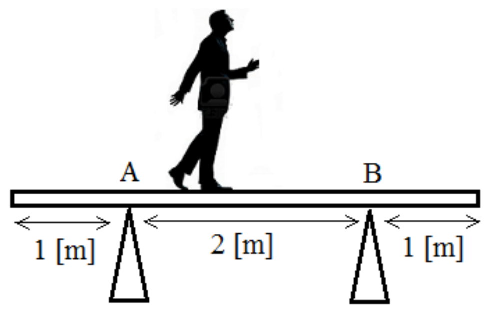
3) $\frac{L}{3} \cdot Mg\; sen\theta - \; L \cdot N_1 cos\theta = 0$

De estas tres ecuaciones...

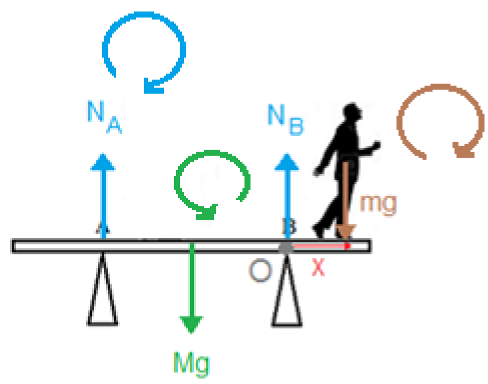
RESPUESTA

$$F_{roce} = N_1 = \frac{Mg}{3} \cdot tan\theta$$

2. Un tablón de 25 [kg] está apoyado en dos soportes A y B, como muestra la figura. Un hombre de 70 [kg] parado sobre él, ¿hasta qué distancia puede caminar hacia la derecha del soporte B, sin que el tablón gire y vuelque? *(Ayuda: la condición límite es que la fuerza normal en A sea cero)*



Cuando el hombre pase el punto B moviéndose hacia la derecha, el tablón va a tratar de girar en torno al punto de apoyo B. Esquema de la situación:



Sobre el tablón actúan cuatro fuerzas.

La segunda Ley de Newton conduce a:

1) $N_A + N_B - Mg - mg = 0$

La suma de momentos respecto al punto de apoyo B (centro de giro O) conduce a:

2) $-2 \cdot N_A - X \cdot mg + 1 \cdot Mg = 0$

Note que tanto N_A como mg están tratando de girar el tablón en el mismo sentido $(-\hat{k})$.

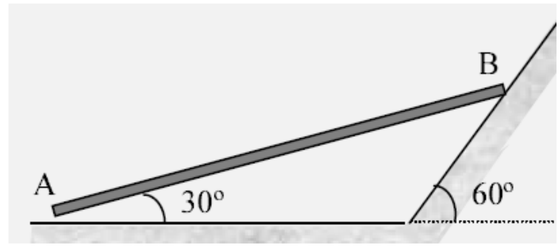
Cuando el tablón apenas se empiece a levantar (no habrá contacto en el punto A), se tiene:

$$N_A = 0 \quad \rightarrow \quad N_B = (M + m)g$$

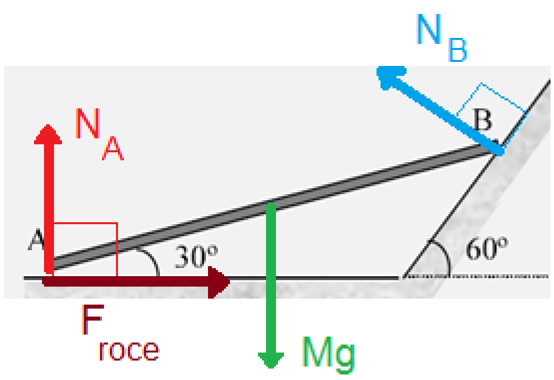
Y la respuesta solicitada:

$$X = \frac{M}{m} = \frac{25}{70} \approx 0{,}36 \quad \rightarrow \quad \mathit{puede\ alejarse\ hasta}\ 36[cm]\mathit{de}\ B$$

3. Una barra homogénea de 200[N] de peso y longitud L se apoya sobre dos superficies como se muestra en la figura. La superficie inclinada es lisa (roce = 0) y la horizontal es rugosa (hay roce).
   - Determine el valor de la fuerza de roce en A, necesaria para mantener el equilibrio
   - Determine los valores de las normales en A y B



Primero veamos cuántas fuerzas actúan **sobre la barra**.



N_A y N_B son dos **fuerzas de contacto**, normales (perpendiculares) al plano de contacto.

La fuerza de roce se opone al movimiento (inminente).

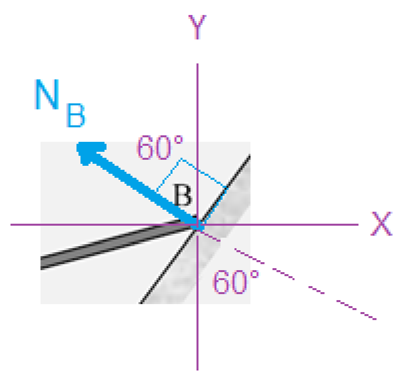
La segunda Ley de Newton indica que la suma de fuerzas debe ser cero (vector). Mire los vectores fuerza que están presentes:

$$\overrightarrow{N_A} = +N_A\,\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{Mg} = -Mg\,\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{F_{roce}} = +F_{roce}\,\hat{\imath}$$

$$\overrightarrow{N_B} = -(N_B sen60°)\,\hat{\imath} + (N_B cos60°)\,\hat{\jmath}$$



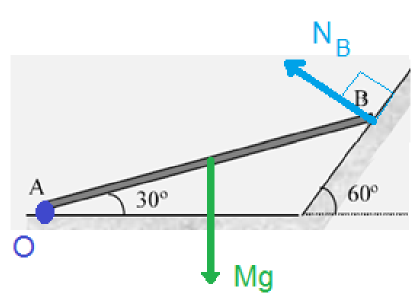
De modo que a partir de la segunda Ley de Newton, se obtienen dos ecuaciones:

1) $F_{roce} - N_B sen60° = 0$

2) $N_A + N_B cos60° - Mg = 0$

A continuación, analicemos qué sucede con el posible giro de la barra. El punto de giro (inminente) se encuentra en el extremo A.

Respecto a ese punto O, sólo las dos fuerzas indicadas en la figura contribuyen al torque o momento de fuerza.

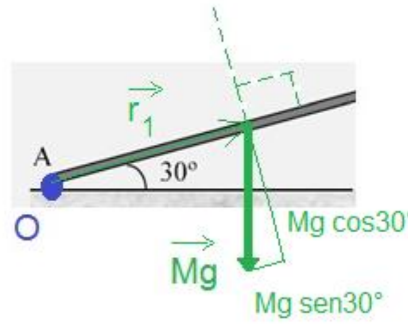


Al hacer el producto cruz $\overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{Mg}$ se obtiene un vector perpendicular a ambos vectores y que apunta hacia adentro del plano (esta hoja), es decir, en la dirección $-\hat{k}$.

Prof. Mónica Hernández Magofke
mhmagofke

El vector $\overrightarrow{Mg}$ se puede descomponer en dos componentes:

- una perpendicular a $\overrightarrow{r_1}$ (que tiene tamaño Mg cos30°)
- otra paralela a $\overrightarrow{r_1}$ (que tiene tamaño Mg sen30°)



De modo que

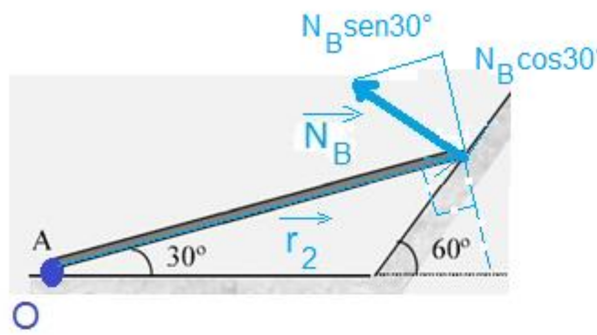
$$\left|\overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{Mg}\right| = |\overrightarrow{r_1}|\left|\overrightarrow{Mg\,cos30°}\right|\,sen90°$$

$$= r_1\,Mg\,cos30°$$

Al hacer el producto cruz $\overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{N_B}$ se obtiene un vector perpendicular a ambos vectores y que apunta hacia afuera del plano (esta hoja), es decir, en la dirección $+\hat{k}$.

El vector $\overrightarrow{N_B}$ se puede descomponer en dos componentes:

- una perpendicular a $\overrightarrow{r_2}$
  (que tiene tamaño $N_B\ cos30°$)
- una paralela a $\overrightarrow{r_2}$
  (que tiene tamaño $N_B\ sen30°$)



De modo que

$$\left|\overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{N_B}\right| = |\overrightarrow{r_2}|\left|\overrightarrow{N_B\,cos30°}\right|\,sen90°$$

$$= r_2\,N_B\,cos30°$$

Lo que nos conduce a la tercera ecuación: Suma de Momentos = $0\hat{k}$

3) $r_2\,N_B\,cos30° - r_1\,Mg\,cos30° = 0$

RESUMEN

(1) $F_{roce} - N_B sen60° = 0$

(2) $N_A + N_B cos60° - Mg = 0$

(3) $L\,N_B\,cos30° - \frac{L}{2}\,Mg\,cos30° = 0$

De estas tres ecuaciones, se obtienen todas las respuestas

$N_B = \frac{Mg}{2} = 100[N]$ $\quad N_A = \frac{3}{4}Mg = 150[N]$ $\quad F_{roce} = 50\sqrt{3}\,[N]$