

MATEMÁTICA

Introducción

Comprender las matemáticas y ser capaz de aplicar sus conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales es fundamental para los ciudadanos en el mundo moderno. Para resolver e interpretar una cantidad cada vez mayor de problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales laborales, sociales y científicos, se requiere de un cierto nivel de comprensión de las matemáticas, de razonamiento matemático y del uso de herramientas matemáticas. La formación matemática y la alfabetización matemática de todos los ciudadanos se considera un elemento esencial a tener en cuenta para el desarrollo de cualquier país. Se conoce como alfabetización matemática a la capacidad de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar en forma adecuada tanto los conocimientos como las herramientas matemáticas para resolver problemas cotidianos.

El conocimiento matemático y la capacidad para usarlo tienen profundas e importantes consecuencias en la formación de las personas. Aprender matemática influye en el concepto que niños, jóvenes y adultos construyen sobre sí mismos y sus capacidades, en parte porque el entorno social lo valora y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior, pero sobre todo porque faculta para confiar en el propio razonamiento y para usar de forma efectiva diversas estrategias para resolver problemas significativos relacionados con su vida. Así, el proceso de aprender matemática ayuda a que la persona se sienta un ser autónomo y valioso en la sociedad. En consecuencia, se trata de un conocimiento cuya calidad, pertinencia y amplitud afecta la calidad de vida de las personas y sus posibilidades de actuar en el mundo.

La Matemática es una herramienta fundamental que explica la mayoría de los avances de nuestra sociedad y les sirve de soporte científico. Los aportes de la matemática están en la base de la innovación en tecnología, ciencia, transporte, comunicaciones y se aplican en otras áreas, como las artes, la geografía y la economía. Tradicionalmente, el aprendizaje de esta disciplina se ha asociado solo con asimilar fórmulas, procedimientos y símbolos; sin embargo, la matemática es dinámica, creativa, utiliza un lenguaje universal y se ha desarrollado como medio para aprender a pensar y para resolver problemas. Por otra parte, se suele hacer referencia a ella como un espacio de certeza y de estabilidad (como ocurre en el álgebra o la geometría), pero también propone explicaciones a fenómenos inciertos de la vida cotidiana, por lo que el pensamiento estadístico y probabilístico son componentes destacados de la matemática. Así es capaz de explicar los patrones y las irregularidades, la continuidad y el cambio.

La formación matemática ofrece también la posibilidad de trabajar con entes abstractos y con las relaciones entre ellos, preparando a los estudiantes para comprender el medio en que se desenvuelven; un medio en que la cultura, la tecnología y las ciencias se están redefiniendo y haciendo más complejas permanentemente. Esto queda de manifiesto en la cantidad de información que contiene datos e ideas abstractas acerca de temas económicos, técnicos y científicos entre otros. Estas Bases proponen formar un alumno que perciba la matemática en su entorno y que se valga de los conocimientos adquiridos para describir y analizar el mundo con el fin de desenvolverse efectivamente en él. Se procura que la asignatura lo faculte para integrar el conocimiento matemático

con otros tipos de conocimientos, de modo de poder sacar conclusiones y enfrentar situaciones cotidianas de diferente complejidad. La matemática entrega herramientas únicas y poderosas para entender el mundo.

En esa perspectiva, es indispensable que los alumnos adquieran una sólida comprensión de los conceptos matemáticos fundamentales como los números enteros, las potencias y raíces, porcentaje, las funciones, ecuaciones e inecuaciones, la homotecia, el muestreo y el azar, y muestren su comprensión por medio de la representación, la operatoria, la explicación, la relación y la aplicación de éstos. Con esto, se espera que los estudiantes adquieran la capacidad de emplear e interpretar las matemáticas en diversos contextos. Esto implica que deben aprender a aplicar el razonamiento matemático y a utilizar conceptos, procedimientos, datos y herramientas para entender, describir, explicar y predecir fenómenos. De esta forma, podrán reconocer el papel que juega esta disciplina en el mundo, formular juicios bien fundados y tomar decisiones necesarias y constructivas.

Para lograrlo, es necesario que desarrollen el **pensamiento matemático**, uno de los principales focos a los cuales se orienta el currículum de esta asignatura. Esto implica formar un alumno que perciba la matemática en su entorno y que se valga de los conocimientos adquiridos como una herramienta útil para describir el mundo y para manejarse efectivamente en él; que reconozca las aplicaciones de la matemática en diversos ámbitos y que la use para comprender situaciones y resolver problemas. El pensamiento matemático se define como una capacidad que nos permite comprender las relaciones

que se dan en el entorno, cuantificarlas, razonar sobre ellas, representarlas y comunicarlas. En este sentido, el papel de la enseñanza de las matemáticas es desarrollar las habilidades que generan el pensamiento matemático, sus conceptos y procedimientos básicos, con el fin de comprender y producir información representada en términos matemáticos. Se pretende que los estudiantes desarrollen el razonamiento lógico, que implica seleccionar, ordenar y clasificar consistentemente de acuerdo a criterios bien definidos, así como seguir reglas e inferir resultados. En este ciclo, se pretende además que avancen progresivamente hacia el trabajo deductivo y el pensamiento abstracto, dándole sentido a sus experiencias a partir de premisas o símbolos matemáticos.

La asignatura se focaliza en la **resolución de problemas**. Resolver un problema implica no solo poner en juego un amplio conjunto de habilidades, sino también la creatividad para buscar y probar diversas soluciones. Al poner el énfasis en la resolución de problemas, se busca, por un lado, que los alumnos descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real y, por otro, abrir espacios para conectar esta disciplina con otras asignaturas. En este contexto, muchas veces lo que más aporta al aprendizaje de los estudiantes no es la solución a un problema matemático, sino el proceso de búsqueda creativa de soluciones.

Otro de los énfasis del currículum de Matemática consiste en que los estudiantes sean capaces de transitar entre los distintos niveles de **representación** (concreto, pictórico y simbólico), traduciendo situaciones de la vida cotidiana a lenguaje formal o utilizando símbolos matemáticos para resolver problemas o explicar situaciones concretas. Con esto

se logra que las expresiones matemáticas tengan un sentido próximo para los estudiantes.

Las Bases Curriculares dan relevancia al **modelamiento matemático**. El objetivo de desarrollar esta habilidad es lograr que el estudiante construya una versión simplificada y abstracta de un sistema que opera en la realidad, que capture los patrones clave y los exprese mediante símbolos matemáticos.

Asimismo, las **habilidades comunicativas y argumentativas** son centrales en este escenario. Las primeras se relacionan con la capacidad de expresar ideas con claridad y son muy importantes para comprender el razonamiento que hay detrás de cada problema resuelto o concepto comprendido. Las segundas permiten a los estudiantes desarrollar una actitud reflexiva y abierta al debate de sus fundamentos. Por otro lado, las bases de la asignatura promueven el **uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC)** fundamentalmente como un apoyo para la comprensión del conocimiento matemático, para

manipular representaciones de funciones y de objetos geométricos, o bien para organizar la información y comunicar resultados. La asignatura se orienta a que los estudiantes comprendan las distintas operaciones matemáticas, por lo tanto el uso de TIC como herramienta de cálculo debe reservarse para las comprobaciones rápidas de cálculos, y para efectuar una gran cantidad de operaciones u operaciones con números muy grandes. Es necesario que los estudiantes comprendan y apliquen los conceptos y las operaciones involucradas antes de usar estos medios.

Considerando que el proceso de aprendizaje que proponen estas Bases Curriculares para Matemática relaciona constantemente las experiencias de los estudiantes con el conocimiento matemático, se espera que ellos desarrollen una inclinación favorable hacia la disciplina. Especialmente, en relación con los injustificados resultados inferiores de las mujeres en la asignatura¹, es esperable lograr mayor confianza y empatía de las estudiantes hacia el aprendizaje de la matemática, y estimular su participación en la clase de matemática en condiciones de igualdad.

1 Agencia de Calidad de la Educación, Chile (2011) *Resultados TIMMS 2011 Chile: Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias*. Santiago de Chile.

Chile, Ministerio de Educación, SIMCE - Unidad de Currículum y Evaluación (2009). Resumen de Resultados PISA 2009, Chile. Recuperado de http://www.agenciaeducacion.cl/wp-content/files_mf/resumenderesultadospisa2009chile.pdf

Organización curricular

MATEMÁTICA

A-HABILIDADES

En este ciclo, se desarrollan cuatro habilidades (resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar) que se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos en contextos diversos.

RESOLVER PROBLEMAS

Aprender a resolver problemas es tanto un medio como un fin en la adquisición de una buena educación matemática. Se habla de resolver problemas (en lugar de ejercicios) cuando el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir. Para ello, necesita usar estrategias, comprobar y comunicar: los alumnos experimentan, escogen o inventan y aplican diferentes estrategias (ensayo y error, usar metáforas o algún tipo de representación, modelar, simulación, transferencia desde problemas similares ya resueltos, por descomposición, etc.), comparan diferentes vías de solución, y evalúan las respuestas obtenidas y su pertinencia. De este modo, se fomenta el pensamiento reflexivo, crítico y creativo. Cabe destacar que la importancia de la habilidad de resolver problemas debe ser desarrollada y aplicada frecuentemente en problemas tanto rutinarios como no rutinarios. En este contexto, muchas veces lo que más aporta al aprendizaje de los estudiantes no es la solución de un problema matemático, sino el proceso de búsqueda creativa de soluciones.

También es importante que los alumnos desarrollen la capacidad de plantearse problemas y de hacer

preguntas. Esto lleva a comprender la clase como un lugar donde se entrelazan la creatividad y la curiosidad del estudiante, donde se pueden formular nuevas preguntas y generar situaciones de interés personal en el marco de proyectos. Específicamente, se espera que el alumno logre plantearse nuevos problemas y resolverlos, utilizando conocimientos previos e investigando sobre lo que desconoce, pero que es necesario para llegar a la resolución.

REPRESENTAR

Para trabajar con matemática de manera precisa, se requiere conocer un lenguaje simbólico (abstracto). En esta propuesta, al igual que en la de Educación Básica, se propone que los alumnos transiten fluidamente desde la representación concreta hacia la pictórica, para más tarde avanzar progresivamente hacia un lenguaje simbólico. Las metáforas, las representaciones y las analogías juegan un rol clave en este proceso de aprendizaje, y dan al alumno la posibilidad de construir sus propios conceptos matemáticos. Representar tiene grandes ventajas para el aprendizaje, entre ellas, permite relacionar el conocimiento intuitivo con una explicación formal de las situaciones, ligando diferentes niveles de representación (concreto, pictórico y simbólico); potenciar la comprensión, memorización y explicación de las operaciones relaciones y conceptos matemáticos; y brindarle a las expresiones matemáticas un significado cercano. De esta manera, la matemática se vuelve accesible para todos, se hace cercana a la vida y a la experiencia de todos, y así se amplía el número de

estudiantes que aprenden matemática y lo hacen con una adecuada profundidad.

El alumno de este ciclo adquiere conocimientos por medio del “aprender haciendo” en situaciones concretas, traduciéndolas a un nivel gráfico y utilizando símbolos matemáticos; de esa manera, logra un aprendizaje significativo y desarrolla su capacidad de pensar matemáticamente. Específicamente, se espera que extraigan información desde el entorno y elijan distintas formas de expresar esos datos (tablas, gráficos, diagramas, metáforas, símbolos matemáticos, etc.) según las necesidades de la actividad o la situación; que usen e interpreten representaciones concretas, pictóricas y/ o simbólicas para resolver problemas; y que identifiquen la validez y las limitaciones de esas representaciones según el contexto.

MODELAR

En la presente propuesta, se considera que modelar es construir un modelo físico o abstracto que capture parte de las características de una realidad para poder estudiarla, modificarla y/o evaluarla; asimismo, ese modelo permite buscar soluciones, aplicarlas a otras realidades (objetos, fenómenos, situaciones, etc.), estimar, comparar impactos y representar relaciones. Así, los alumnos aprenden a usar variadas formas para representar datos, y a seleccionar y aplicar los métodos matemáticos apropiados y las herramientas adecuadas para resolver problemas. De este modo, las ecuaciones, las funciones y la geometría cobran un sentido significativo para ellos.

Al construir modelos, los alumnos descubren regularidades o patrones y son capaces de expresar esas características fluidamente, sea con sus propias palabras o con un lenguaje más formal; además, desarrollan la creatividad y la capacidad de razonamiento y de resolución de problemas, y encuentran soluciones que pueden transferir a otros contextos. Se espera que, en este ciclo, el estudiante:

- use modelos y entienda y aplique correctamente las reglas que los definen

- seleccione modelos, comparándolos según su capacidad de capturar fenómenos de la realidad
- ajuste modelos, cambiando sus parámetros o considerando buenos parámetros de un modelo dado

La capacidad de modelar se puede aplicar en diversos ámbitos y contextos que involucren operaciones matemáticas con números reales y/o con expresiones algebraicas, análisis de datos, probabilidad de ocurrencia de eventos y sistemas geométricos.

Por otro lado, usar metáforas de experiencias cercanas ayuda a los estudiantes a comprender conocimientos matemáticos; por ejemplo: explicar las funciones como una máquina que transforma los números, u ordenar los números en una recta y explicar la adición como pasos hacia la derecha de la recta. En el uso de metáforas se reconocen tres ventajas para el aprendizaje: relacionar experiencias personales con el conocimiento formal, potenciar la comprensión, memorización y explicación de conceptos matemáticos, y brindar a las expresiones matemáticas un significado cercano.

ARGUMENTAR Y COMUNICAR

La habilidad de argumentar se desarrolla principalmente al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos. Es importante que los alumnos tengan la oportunidad de describir, explicar, argumentar y discutir colectivamente sus soluciones y sus inferencias a diversos problemas, escuchándose y corrigiéndose mutuamente. Así aprenderán a generalizar conceptos, a utilizar un amplio abanico de formas para comunicar sus ideas, utilizando metáforas y representaciones.

En la Educación Media se apunta principalmente a que los alumnos establezcan la diferencia entre una argumentación intuitiva y una argumentación matemática, y que sean capaces de interpretar y comprender cadenas de implicaciones lógicas; así podrán hacer predicciones eficaces en variadas

situaciones y plantear conjeturas, hipótesis, ejemplos y afirmaciones condicionadas. Se espera que desarrollen su capacidad de verbalizar sus intuiciones y llegar a conclusiones correctamente, y que también aprendan a detectar afirmaciones erróneas, absurdas o generalizaciones abusivas. De esta manera, serán capaces de realizar demostraciones matemáticas de proposiciones, apoyadas por medio de diferentes

representaciones pictóricas y con explicaciones en lenguaje natural, para llegar finalmente a un lenguaje matemático. Además, al practicar estas dos habilidades, se fomenta el trabajo en equipo y la búsqueda de soluciones en forma colaborativa, por lo que también se estimula la capacidad de expresar y escuchar ideas de otros, así como la creatividad y la actitud reflexiva.

B-EJES TEMÁTICOS

En este ciclo, los conocimientos se organizan en cuatro ejes temáticos: Números, Álgebra y funciones, Geometría y Probabilidad y estadística. Dentro de cada uno de estos ejes, se puede desarrollar cada una de las habilidades descritas recientemente.

NÚMEROS

En este eje, los estudiantes trabajan la comprensión de nuevos números y las operaciones entre ellos. Progresan desde los números enteros hasta los números reales. En este camino, comprenden cómo los distintos tipos de números y sus reglas respecto de las operaciones básicas, permiten modelar situaciones cotidianas más amplias. El trabajo con potencia comienza con la base diez y su uso en la notación científica, y su intención es tratar el concepto de manera concreta, pictórica y simbólica. Se espera además, que comprendan y manejen adecuadamente los porcentajes y las posibilidades de este concepto para modelar situaciones de otras áreas.

El trabajo que efectuarán los alumnos en este eje incluye formas de representar estos “nuevos números”, de relacionarlos y de utilizarlos para resolver problemas y para manejarse en la vida diaria. Un énfasis de este eje es representar dichos números en la recta numérica. Se espera que, en este ciclo, los estudiantes sean capaces

de aproximar, estimar y calcular con precisión, y tengan una noción clara de lo que es la cantidad, la magnitud y la medida de objetos utilizando estos números.

En cuanto al cálculo, deben ser precisos en los algoritmos, pero siempre en un contexto real y adecuado a la realidad de los jóvenes; es decir, el cálculo debe orientarse a resolver problemas en forma contextualizada y real, más que emplear los algoritmos sin sentido. Se debe fomentar y permitir que los alumnos usen la calculadora cuando ya han aprendido las operaciones elementales en un ámbito numérico limitado.

Se espera que, al final de este ciclo, los estudiantes puedan transitar por las diferentes formas de representación de un número (concreta, pictórica y simbólica).

ÁLGEBRA Y FUNCIONES

En este eje, se espera que los estudiantes comprendan la importancia del lenguaje algebraico para expresarse en matemática y las posibilidades que ese lenguaje les ofrece. Se espera que escriban, representen y usen expresiones algebraicas para designar números; que establezcan relaciones entre ellos mediante ecuaciones, inecuaciones o funciones, siempre en el contexto de resolver problemas; y que identifiquen

regularidades que les permitan construir modelos y expresen dichas regularidades en lenguaje algebraico. Este eje pone especial énfasis en que los alumnos sean capaces de reconocer modelos y ampliarlos, y en que desarrollen la habilidad de comunicarse por medio de expresiones algebraicas.

Los aprendizajes en Álgebra y funciones se relacionan fuertemente con el eje de Números; un trabajo adecuado en ambos ejes permitirá a los alumnos desarrollar conceptos nuevos cuando cursen niveles superiores y fortalecer los adquiridos en el ciclo anterior. Se espera que, al final de este periodo, los estudiantes comprendan y manipulen expresiones algebraicas sencillas y que establezcan relaciones entre estas expresiones mediante ecuaciones o inecuaciones. Especialmente, se pretende que puedan usar metáforas para interiorizarse del concepto de función y cómo utilizarla para manipular, modelar y encontrar soluciones a situaciones de cambios en diferentes ámbitos, como el aumento de ventas en un tiempo determinado. Específicamente, se espera que transformen expresiones algebraicas en otras equivalentes para resolver problemas y que sean capaces de justificar su proceder; que expresen igualdades y desigualdades mediante ecuaciones e inecuaciones y que las apliquen para resolver problemas; que comprendan las funciones lineales las funciones cuadráticas y sus respectivas representaciones, y que resuelvan problemas con ellas.

GEOMETRÍA

En este eje, se espera que los estudiantes desarrollen sus capacidades espaciales y que entiendan que ellas les permiten comprender el espacio y sus formas. Para lograr esto, los alumnos comparan, miden y estiman magnitudes, y analizan propiedades y características de diferentes figuras geométricas de dos y tres dimensiones. En este eje, la habilidad de representar juega un rol especial. Los estudiantes deben describir posiciones y movimientos usando coordenadas y vectores, y tienen que obtener

conclusiones respecto de las propiedades y las características de lugares geométricos, de polígonos y cuerpos conocidos, por medio de representaciones. Deben transitar desde un ámbito bidimensional a uno tridimensional por medio de caras, bases, secciones, sombras y redes de puntos.

Los alumnos aprenderán a calcular perímetros, áreas y volúmenes al resolver problemas técnicos y cotidianos. Al final de este ciclo, deberán ser capaces de apreciar y utilizar de manera adecuada y precisa las propiedades y relaciones geométricas, tendrán que ser competentes en mediciones geométricas y deberán poder relacionar la geometría con los números y el álgebra de manera armoniosa y concreta. Este eje presenta por primera vez las razones trigonométricas para que los alumnos tengan más herramientas para la resolución de problemas. Más aún, propone que los alumnos comprendan las representaciones de coordenadas en el plano cartesiano y usen destrezas de visualización espacial. En este proceso de aprendizaje, los estudiantes deben utilizar diferentes instrumentos de medida para visualizar ciertas figuras 2D o 3D y se recomiendan tanto las construcciones manuales como las tecnológicas.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Este eje responde a la necesidad de que todos los estudiantes aprendan a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos. Se espera formar alumnos críticos que puedan utilizar la información para validar sus opiniones y decisiones; que sean capaces de determinar situaciones conflictivas a raíz de interpretaciones erróneas de un gráfico y de las posibles manipulaciones intencionadas que se pueden hacer con los datos. En el área de la probabilidad, se espera que estimen de manera intuitiva y que calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos; que determinen la probabilidad de ocurrencia de eventos en forma experimental y teórica, y que construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias.

Específicamente, se espera que los estudiantes diseñen experimentos de muestreo aleatorio para inferir sobre características de poblaciones; registren datos desagregados por sexo cada vez que tenga sentido; utilicen medidas de tendencia central, de posición y de dispersión para resolver problemas. El enfoque de este eje radica en la interpretación y visualización de datos estadísticos, en las medidas que

permitan comparar características de poblaciones y en la realización, la simulación y el estudio de experimentos aleatorios sencillos, para construir desde ellos la teoría y modelos probabilísticos. En particular, al final de este ciclo el estudiante debe comprender el rol de la probabilidad en la sociedad, utilizando herramientas de la estadística y de la probabilidad misma.

C-ACTITUDES

Las Bases Curriculares de Matemática promueven un conjunto de actitudes que derivan de los objetivos de la Ley General de Educación y de los Objetivos de Aprendizaje Transversales (OAT). Estas actitudes se relacionan con la asignatura y se orientan al desarrollo social y moral de los estudiantes.

Las actitudes son objetivos de aprendizaje y se deben desarrollar de forma integrada con los conocimientos y habilidades propios de la asignatura. Se debe promover el logro de estas actitudes de manera sistemática y sostenida mediante las actividades de aprendizaje, las interacciones en la clase, las actividades extra-programáticas, las rutinas escolares y también mediante el ejemplo y la acción cotidiana del docente y de la comunidad escolar.

Las actitudes a desarrollar en la asignatura de Matemática son las siguientes:

A. Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.

- B. Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.
- C. Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.
- D. Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.
- E. Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.
- F. Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas.

Bibliografía consultada

- Araya, R. (2000) *Inteligencia Matemática*. Santiago: Editorial Universitaria.
- Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. En T. Breiteig, I. Huntley, & G. Kaiser-Messmer (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context* (pp. 3-14). Chichester, UK: Horwood.
- Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, W-H., & Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study*. New York: Springer.
- Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H. & Niss, M. (2007) *Modeling and Applications in Mathematics Education*. Springer Verlag.
- Borromeo-Ferri, R. (2006). *Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process*. ZDM, 38(2), 86-95.
- Bruner, J. (1971). *Toward a Theory of Instruction*. Fifth printing. Cambridge: The Belknap press of Harvard University.
- Bruner, J. (1988). *Desarrollo cognitivo y educación*. 1ª edición. Madrid: Morata.
- Bruner, J. (2006). *Actos de significado: más allá de la revolución cognitiva*. Madrid: Alianza editorial.
- Chiu, M. M. (2000). *Metaphorical reasoning: Origins, uses, development and interactions in mathematics*. Education Journal, 28(1), 13-46.
- Chiu, M. M. (1992). *Reinterpreting misconceptions through metaphor and metonymy: Teaching and learning mathematics*. Unpublished manuscript, University of California, Berkeley.
- Chiu, M. M. (1998). *Metaphorical reasoning in a domain*. Unpublished manuscript, University of California, Los Angeles.
- Dörig, Roman (2003). *Handlungsorientierter Unterricht – Ansätze, Kritik und Neuorientierung aus bildungstheoretischer, curricularer und instruktionspsychologischer Perspektive*. Stuttgart: WiKu-Verlag.
- Galbraith, P. L., Stillman, G., & Brown, J. (2010). Turning ideas into modelling problems. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *mathematical modelling competencies: ICTMA 13* (pp. 133-144).
- Kaiser, G. (2005). Mathematical modelling in school. Examples and experiences. En H-W. Henn, G. Kaiser (Eds.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Festband für Werner Blum*. Hildesheim: Franzbecker. 99-108.
- Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., & Stillman, G. (Eds.) (2011). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA14*. New York: Springer.
- Mayer, R. (1986). Mathematics. En R. F. Dillon y R. J. Sternberg (Eds.) *Cognition and Instruction*. San Diego: Academic. 127-154.
- OECD. (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework - Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OECD Publications.
- OECD. (2010). *Pathways to Success: How knowledge and skills at age 15 shape future lives in Canada*. Paris: OECD Publications.
- OECD. (2010). *PISA 2012 mathematics Framework*. Extraído de la página web: <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46961598.pdf>
- Oteiza, F. y Villarreal, G. (2011). *El Modelo Interactivo, una innovación curricular en matemática: resultados de su implementación en el contexto educacional chileno*. Costa Rica, Cuadernos Año 6, Número 9, junio 2011.

- Oteiza, F., Araya, R. y Miranda, H. (2004). *Aprender Matemática Creando Soluciones, Material del Profesor*. Santiago Chile: Editorial Zigzag.
- Soto-Andrade, J. (2006). *Un monde dans un grain de sable: Mètaphores et analogies dans l'apprentissage des mathématiques*. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, 11, 123-147.
- Soto-Andrade, J. (2007). Metaphors and cognitive styles in the teaching-learning of mathematics. En D. Pitta-Pantazi, y J. Philippou (Eds.). *Proceedings CERME 5*, 191-200.
- Soto-Andrade, J. y Reyes-Santander, P. (2011). Conceptual metaphors and “Grundvorstellungen”. A case of convergence. En M. Pytlak, T. Rowland y Ewa Swoboda (Eds.). *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Rzeszów: University of Rzeszów. 1625-1635.
- TIMSS. (2011). *Marcos de la evaluación*. Ministerio de educación, Cultura y Deporte, Instituto Nacional de Evaluación Educativa, Madrid, España.
- Vigotsky, L. (2008). *Pensamiento y lenguaje*. Mexico: Quinto Sol.

Séptimo

Básico



Objetivos de Aprendizaje

Los estudiantes serán capaces de:

HABILIDADES

Resolver Problemas

- a. Resolver problemas utilizando estrategias tales como:
 - destacar la información dada
 - usar un proceso de ensayo y error sistemático
 - aplicar procesos reversibles
 - descartar información irrelevante
 - usar problemas similares
- b. Evaluar procedimientos y comprobar resultados propios y de otros, de un problema matemático.
- c. Utilizar sus propias palabras, gráficos y símbolos matemáticos para presentar sus ideas o soluciones.

Argumentar y Comunicar

- d. Describir relaciones y situaciones matemáticas de manera verbal y usando símbolos.
- e. Explicar y fundamentar:
 - soluciones propias y los procedimientos utilizados
 - resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas
- f. Fundamentar conjeturas dando ejemplos y contraejemplos.
- g. Evaluar la argumentación de otros dando razones.

Modelar

- h. Usar modelos, realizando cálculos, estimaciones y simulaciones, tanto manualmente como con ayuda de instrumentos para resolver problemas de otras asignaturas y de la vida diaria.

- i. Seleccionar y ajustar modelos, para resolver problemas asociados a ecuaciones e inecuaciones de la forma $ax + b >, <, = c$, con $a, b, c \in \mathbb{N}$, comparando dependencias lineales.
- j. Evaluar la pertinencia de modelos:
 - en relación al problema presentado
 - considerando sus limitaciones

Representar

- k. Elegir y utilizar representaciones concretas, pictóricas y simbólicas para enunciados y situaciones en contextos diversos (tablas, gráficos, recta numérica, entre otros).
- l. Relacionar y contrastar información entre distintos niveles de representación.
- m. Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.

EJES TEMÁTICOS

Números

1. Mostrar que comprenden la adición y la sustracción de números enteros:
 - representando los números enteros en la recta numérica
 - representándolas de manera concreta, pictórica y simbólica
 - dándole significado a los símbolos $+$ y $-$ según el contexto (por ejemplo: un movimiento en una dirección seguido de un movimiento equivalente en la posición opuesta no representa ningún cambio de posición)
 - resolviendo problemas en contextos cotidianos

2. Explicar la multiplicación y la división de fracciones positivas:
 - utilizando representaciones concretas, pictóricas y simbólicas
 - relacionándolas con la multiplicación y la división de números decimales
3. Resolver problemas que involucren la multiplicación y la división de fracciones y de decimales positivos de manera concreta, pictórica y simbólica (de forma manual y/o con software educativo).
4. Mostrar que comprenden el concepto de porcentaje:
 - representándolo de manera pictórica
 - calculando de varias maneras
 - aplicándolo a situaciones sencillas
5. Utilizar potencias de base 10 con exponente natural:
 - usando los términos potencia, base, exponente, elevado
 - definiendo y usando el exponente 0 en el sistema decimal
 - expresando números naturales en notación científica (sistema decimal)
 - resolviendo problemas, usando la notación científica

Álgebra y funciones

6. Utilizar el lenguaje algebraico para generalizar relaciones entre números, para establecer y formular reglas y propiedades y construir ecuaciones.
7. Reducir expresiones algebraicas, reuniendo términos semejantes para obtener expresiones de la forma $ax + by + cz$ $a, b, c, \in \mathbb{Z}$
8. Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas:
 - realizando tablas de valores para relaciones proporcionales
 - graficando los valores de la tabla
 - explicando las características de la gráfica
 - resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas
9. Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas, que involucren ecuaciones e inecuaciones lineales de la forma:
 - $ax = b; x/a = b$ $a, b \text{ y } c \in \mathbb{N}; a \neq 0$
 - $ax < b; ax > b; x/a < b; x/a > b$ $a, b \text{ y } c \in \mathbb{N}; a \neq 0$

Geometría

10. Descubrir relaciones que involucran ángulos exteriores o interiores de diferentes polígonos.
11. Mostrar que comprenden el círculo:
 - describiendo las relaciones entre el radio, el diámetro y el perímetro del círculo
 - estimando de manera intuitiva el perímetro y el área de un círculo
 - aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas geométricos de otras asignaturas y de la vida diaria
 - identificándolo como lugar geométrico
12. Construir objetos geométricos de manera manual y/o con software educativo:
 - líneas, como las perpendiculares, las paralelas, las bisectrices y alturas en triángulos y cuadriláteros
 - puntos, como el punto medio, el centro de gravedad, el centro del círculo inscrito y del circunscrito de un triángulo
 - triángulos y cuadriláteros congruentes
13. Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios.
14. Identificar puntos en el plano cartesiano, usando pares ordenados y vectores de forma concreta (juegos) y pictórica.

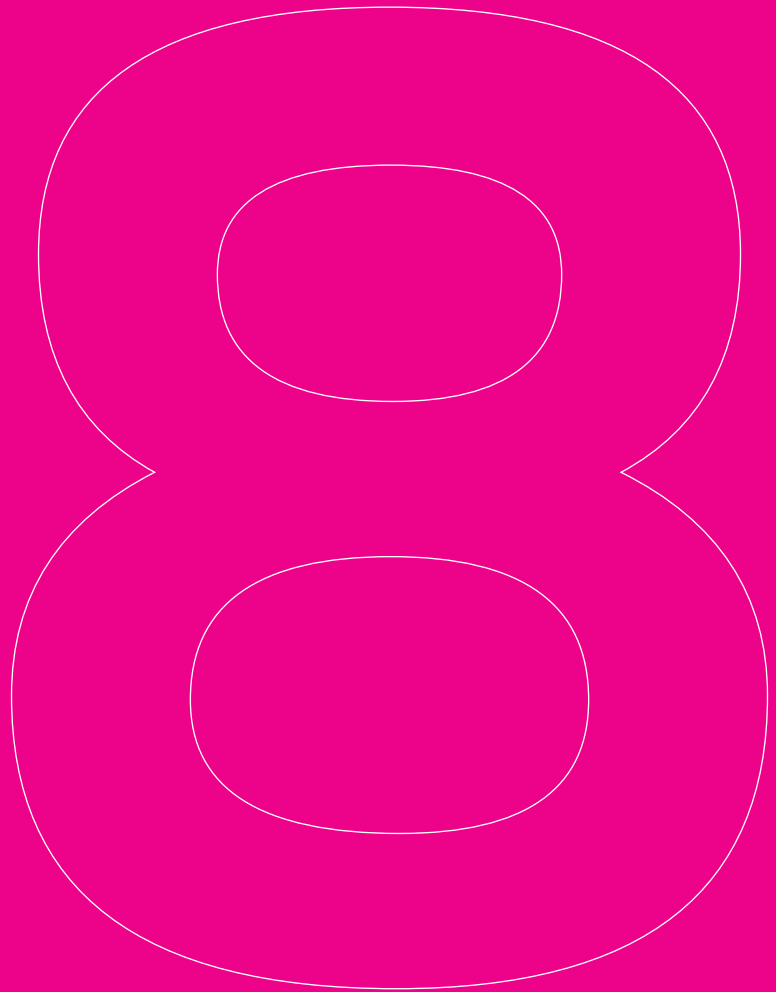
Probabilidad y estadística

15. Estimar el porcentaje de algunas características de una población desconocida por medio del muestreo.
16. Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, utilizando gráficos apropiados, de manera manual y/o con software educativo.
17. Mostrar que comprenden las medidas de tendencia central y el rango:
 - determinando las medidas de tendencia central para realizar inferencias sobre la población
 - determinando la medida de tendencia central adecuada para responder un problema planteado
 - utilizándolos para comparar dos poblaciones
 - determinando el efecto de un dato que es muy diferente a los otros

18. Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo:
- estimándolas de manera intuitiva
 - utilizando frecuencias relativas
 - relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje
19. Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experimento de forma manual y/o con software educativo, con la probabilidad obtenida de manera teórica, usando diagramas de árbol, tablas o gráficos.

Octavo

Básico



Objetivos de Aprendizaje

Los estudiantes serán capaces de:

HABILIDADES

Resolver Problemas

- a. Resolver problemas utilizando estrategias tales como :
 - destacar la información dada
 - usar un proceso de ensayo y error sistemático
 - aplicar procesos reversibles
 - descartar información irrelevante
 - usar problemas similares
- b. Evaluar procedimientos y comprobar resultados propios y de otros, de un problema matemático.
- c. Utilizar sus propias palabras, gráficos y símbolos matemáticos para presentar sus ideas o soluciones.

Argumentar y Comunicar

- d. Describir relaciones y situaciones matemáticas de manera verbal y usando símbolos.
- e. Explicar y fundamentar:
 - soluciones propias y los procedimientos utilizados
 - resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas
- f. Fundamentar conjeturas dando ejemplos y contraejemplos.
- g. Evaluar la argumentación de otros dando razones.

Modelar

- h. Usar modelos, realizando cálculos, estimaciones y simulaciones, tanto manualmente como con ayuda de instrumentos para resolver problemas de otras asignaturas y de la vida diaria.

- i. Seleccionar y ajustar modelos, para resolver problemas asociados a ecuaciones e inecuaciones de la forma $ax + b >, <, = c$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$) comparando dependencias lineales.
- j. Evaluar la pertinencia de modelos:
 - en relación con el problema presentado
 - considerando sus limitaciones

Representar

- k. Elegir y utilizar representaciones concretas, pictóricas y simbólicas para enunciados y situaciones en contextos diversos (tablas, gráficos, recta numérica, entre otros).
- l. Relacionar y contrastar información entre distintos niveles de representación.
- m. Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.

EJES TEMÁTICOS

Números

1. Mostrar que comprenden la multiplicación y la división de números enteros:
 - representándolas de manera concreta, pictórica y simbólica
 - aplicando procedimientos usados en la multiplicación y la división de números naturales
 - aplicando la regla de los signos de la operación
 - resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios
2. Utilizar las operaciones de multiplicación y división con los números racionales en el contexto de la resolución de problemas:

- representándolos en la recta numérica
 - involucrando diferentes conjuntos numéricos (fracciones, decimales y números enteros)
3. Explicar la multiplicación y la división de potencias de base natural y exponente natural hasta 3, de manera concreta, pictórica y simbólica.
 4. Mostrar que comprenden las raíces cuadradas de números naturales:
 - estimándolas de manera intuitiva
 - representándolas de manera concreta, pictórica y simbólica
 - aplicándolas en situaciones geométricas y en la vida diaria
 5. Resolver problemas que involucran variaciones porcentuales en contextos diversos, usando representaciones pictóricas y registrando el proceso de manera simbólica; por ejemplo: el interés anual del ahorro.

Álgebra y funciones

6. Mostrar que comprenden la operatoria de expresiones algebraicas:
 - representándolas de manera pictórica y simbólica
 - relacionándolas con el área de cuadrados, rectángulos y volúmenes de paralelepípedos
 - determinando formas factorizadas
7. Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal:
 - utilizando tablas
 - usando metáforas de máquinas
 - estableciendo reglas entre x e y
 - representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo
8. Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, usando ecuaciones lineales de la forma: $ax = b$; $x/a = b$, $a \neq 0$; $ax + b = c$; $x/a + b = c$; $ax = b + cx$; $a(x+b) = c$; $ax + b = cx + d$ | $(a, b, c, d, e \in \mathbb{Q})$
9. Resolver inecuaciones lineales con coeficientes racionales en el contexto de la resolución de problemas, por medio de representaciones gráficas, simbólicas, de manera manual y/o con software educativo.
10. Mostrar que comprenden la función afín:
 - generalizándola como la suma de una constante con una función lineal

- trasladando funciones lineales en el plano cartesiano
- determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo
- relacionándola con el interés simple
- usándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas

Geometría

11. Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros:
 - estimando de manera intuitiva área de superficie y volumen
 - desplegando la red de prismas rectos para encontrar la fórmula del área de superficie
 - transfiriendo la fórmula del volumen de un cubo (base por altura) en prismas diversos y cilindros
 - aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria
12. Explicar, de manera concreta, pictórica y simbólica, la validez del teorema de Pitágoras y aplicar a la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana, de manera manual y/o con software educativo.
13. Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con software educativo, utilizando:
 - los vectores para la traslación
 - los ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión
 - los puntos del plano para las rotaciones
14. Componer rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio, de manera manual y/o con software educativo, y aplicar a la simetría de polígonos y poliedros y a la resolución de problemas geométricos relacionados con el arte.

Probabilidad y Estadística

15. Mostrar que comprenden las medidas de posición, percentiles y cuartiles:
 - identificando la población que está sobre o bajo el percentil
 - representándolas con diagramas, incluyendo el diagrama de cajón, de manera manual y/o con software educativo
 - utilizándolas para comparar poblaciones

16. Evaluar la forma en que los datos están presentados:

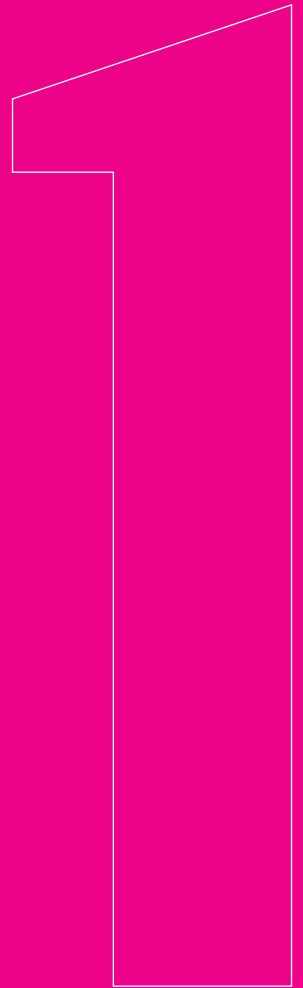
- comparando la información de los mismos datos representada en distintos tipos de gráficos para determinar fortalezas y debilidades de cada uno
- justificando la elección del gráfico para una determinada situación y su correspondiente conjunto de datos
- detectando manipulaciones de gráficos para representar datos

17. Explicar el principio combinatorio multiplicativo:

- a partir de situaciones concretas
- representándolo con tablas y árboles regulares, de manera manual y/o con software educativo
- utilizándolo para calcular la probabilidad de un evento compuesto

Primer

Medio



Objetivos de Aprendizaje

Los estudiantes serán capaces de:

HABILIDADES

Resolver Problemas

- a. Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes:
 - simplificar el problema y estimar el resultado
 - descomponer el problema en subproblemas más sencillos
 - buscar patrones
 - usar herramientas computacionales
- b. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático.
- c. Utilizar lenguaje matemático para identificar sus propias ideas o respuestas.

Argumentar y Comunicar

- d. Describir relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.
- e. Explicar:
 - soluciones propias y los procedimientos utilizados
 - demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas
 - generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores utilizándolos apropiadamente
- f. Fundamentar conjeturas usando lenguaje algebraico para comprobar o descartar la validez de los enunciados.
- g. Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración, si hay saltos o errores.

Modelar

- h.** Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.
- i.** Seleccionar modelos e identificar cuando dos variables dependen linealmente o afínmente en un intervalo de valores.
- j.** Ajustar modelos, eligiendo los parámetros adecuados para que se acerque más a la realidad.
- k.** Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad y determinando sus limitaciones.

Representar

- l.** Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de éstas.
- m.** Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones.
- n.** Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos.
- o.** Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.

EJES TEMÁTICOS

Números

1. Calcular operaciones con números racionales en forma simbólica.
2. Mostrar que comprenden las potencias de base racional y exponente entero:
 - transfiriendo propiedades de la multiplicación y división de potencias a los ámbitos numéricos correspondientes
 - relacionándolas con el crecimiento y decrecimiento de cantidades
 - resolviendo problemas de la vida diaria y otras asignaturas

Álgebra y Funciones

3. Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica:
 - transformando productos en sumas y viceversa
 - aplicándolos a situaciones concretas
 - completando el cuadrado del binomio
 - utilizándolos en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas
4. Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2x2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con software educativo.
5. Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x,y)=ax+by$; por ejemplo: un haz de rectas paralelas en el plano cartesiano, líneas de nivel en planos inclinados (techo), propagación de olas en el mar y la formación de algunas capas de rocas:
 - creando tablas de valores con a, b fijo y x, y variable
 - representando una ecuación lineal dada por medio de un gráfico, de manera manual y/o con software educativo
 - escribiendo la relación entre las variables de un gráfico dado; por ejemplo, variando c en la ecuación $ax + by=c$; $a, b, c \in Q$ (decimales hasta la décima)

Geometría

6. Desarrollar la fórmula de los valores del área y del perímetro de sectores y segmentos circulares respectivamente, a partir de ángulos centrales de 60° , 90° , 120° y 180° , por medio de representaciones concretas.

7. Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de la superficie y el volumen del cono:
 - desplegando la red del cono para la fórmula del área de superficie
 - experimentando de manera concreta para encontrar la relación entre el volumen del cilindro y el cono
 - aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria
8. Mostrar que comprenden el concepto de homotecia:
 - relacionándola con la perspectiva, el funcionamiento de instrumentos ópticos y el ojo humano
 - midiendo segmentos adecuados para determinar las propiedades de la homotecia
 - aplicando propiedades de la homotecia en la construcción de objetos, de manera manual y/o con software educativo
 - resolviendo problemas de la vida cotidiana y de otras asignaturas
9. Desarrollar el teorema de Tales mediante las propiedades de la homotecia, para aplicarlo en la resolución de problemas.
10. Aplicar propiedades de semejanza y de proporcionalidad a modelos a escala y otras situaciones de la vida diaria y otras asignaturas.
11. Representar el concepto de homotecia de forma vectorial, relacionándolo con el producto de un vector por un escalar, de manera manual y/o con software educativo.

Probabilidad y Estadística

12. Registrar distribuciones de dos características distintas, de una misma población, en una tabla de doble entrada y en una nube de puntos.
13. Comparar poblaciones mediante la confección de gráficos “xy” para dos atributos de muestras, de manera concreta y pictórica:
 - utilizando nubes de puntos en dos colores
 - separando la nube por medio de una recta trazada de manera intuitiva
14. Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, en el contexto de la resolución de problemas.

15. Mostrar que comprenden el concepto de azar:

- experimentando con la tabla de Galton y con paseos aleatorios sencillos de manera manual y/o con software educativo
- realizando análisis estadísticos, empezando por frecuencias relativas
- utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso
- resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas

Segundo

Medio



Objetivos de Aprendizaje

Los estudiantes serán capaces de:

HABILIDADES

Resolver Problemas

- a. Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes:
 - simplificar el problema y estimar el resultado
 - descomponer el problema en subproblemas más sencillos
 - buscar patrones
 - usar herramientas computacionales
- b. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático.
- c. Utilizar lenguaje matemático para identificar sus propias ideas o respuestas.

Argumentar y Comunicar

- d. Describir relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.
- e. Explicar
 - soluciones propias y los procedimientos utilizados
 - demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas
 - generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores utilizándolos apropiadamente
- f. Fundamentar conjeturas usando lenguaje algebraico para comprobar o descartar la validez de los enunciados.
- g. Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración, si hay saltos o errores.

Modelar

- h.** Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.
- i.** Seleccionar modelos e identificar cuando dos variables dependen cuadráticamente ó inversamente en un intervalo de valores.
- j.** Ajustar modelos, eligiendo los parámetros adecuados para que se acerque más a la realidad.
- k.** Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad y determinando sus limitaciones.

Representar

- l.** Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de éstas.
- m.** Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones.
- n.** Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos.
- o.** Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.

EJES TEMÁTICOS

Números

1. Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales:
 - utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces
 - combinando raíces con números racionales
 - resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos
2. Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos:
 - comparando representaciones de potencias de exponente racional con raíces enésimas en la recta numérica
 - convirtiendo raíces enésimas a potencias de exponente racional y viceversa
 - describiendo la relación entre potencias y logaritmos
 - resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que involucren potencias, logaritmos y raíces enésimas

Álgebra y Funciones

3. Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$: ($a \neq 0$)
 - reconociendo la función cuadrática $f(x) = ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas
 - representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo
 - determinando puntos especiales de su gráfica
 - seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda
4. Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas de la forma:
 - $ax^2 = b$
 - $(ax + b)^2 = c$
 - $ax^2 + bx = 0$
 - $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)

5. Mostrar que comprenden la inversa de una función:
 - utilizando la metáfora de una máquina
 - representándola por medio de tablas y gráficos, de manera manual y/o con software educativo
 - utilizando la reflexión de la función representada en el gráfico en un plano cartesiano
 - calculando las inversas en casos de funciones lineales y cuadráticas
6. Explicar el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo:
 - por medio de situaciones de la vida real y de otras asignaturas
 - identificándolo con el interés compuesto
 - representándolo de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo
 - expresándolo en forma recursiva $f(t+1) - f(t) = a \cdot f(t)$
 - resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas

Geometría

7. Desarrollar las fórmulas del área de la superficie y del volumen de la esfera:
 - conjeturando la fórmula
 - representando de manera concreta y simbólica, de manera manual y/o con software educativo
 - resolviendo problemas de la vida diaria y de geometría
8. Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:
 - relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos
 - explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo
 - aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados
 - resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas
9. Aplicar las razones trigonométricas en diversos contextos en la composición y descomposición de vectores y determinar las proyecciones de vectores.

Probabilidad y Estadística

10. Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas:
 - definiendo la variable
 - determinando los posibles valores de la incógnita
 - calculando su probabilidad
 - graficando sus distribuciones
11. Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.
12. Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad:
 - revisando informaciones de los medios de comunicación
 - identificando suposiciones basadas en probabilidades
 - explicando cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas
 - explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades