**Apuntes sobre tasas de interés, mensuales y anuales,**

**perpetuidades y anualidades;**

**bonos**

**Ejercicio. *Crecimiento de las bacterias***: las bacterias crecen por división: una bacteria se convierte en dos, los dos se convierten en cuatro y así sucesivamente. En una cierta población de bacterias la división es cada **n** horas. ¿Cuántas bacterias es capaz de generar una bacteria después de **t** días? Suponga que ninguna se muere y que se mantienen las mismas condiciones.

**Las tasas de interés** se pueden definir por días, semanas, meses, años o cualquier período de tiempo finito. Es típico que los bancos operen normalmente con tasas anuales, en cambio, es más difícil saber exactamente como operan las casas comerciales. ¿Cómo comparar las tasas de interés cuando se definen para períodos diferentes?

La **tasa de interés anual** es la tasa de interés anualizada utilizando el interés compuesto.

**Ejemplo.** Anualizar una tasa de interés del 1% y 2,1% mensual.

Tasa anual del 1% mensual = (1+0,01)12 = 1,1268 = 12,68 %

Tasa anual del 2,1% mensual = (1+0,021)12 = 1,2832 = 28,32 %

**Ejercicio:** Calcule las tasas anuales de las principales casas comerciales de Santiago y compárelas con las tasa de interés de los préstamos bancarios.

El dinero puede invertirse, por ejemplo, en un banco y ganar intereses. Si alguien le ofrece **$ 10.000 HOY (presente)** ó **$ 10.000 A FINAL DE AÑO (futuro)**. ¿Qué prefiere Vd?

Si le acepta $ 10.000 hoy, y deposita en el banco anterior, a final de año recibirá $ 10.700. Por lo tanto, para hacer una oferta equivalente mañana le deben ofrecer más dinero para que lo piense y lo calcule. Es decir, ***un peso hoy vale más que un peso mañana.***

Ahora bien, también uno puede preguntarse ¿cuánto tengo que invertir **HOY (presente)** para tener **$ 10.700 A FINAL DE AÑO (futuro)**? Si en este caso la única posibilidad es el banco del 7%, entonces ya sabemos que tenemos que invertir **$ 10.000 HOY.**

El **Valor Presente** (VP) de una cantidad de dinero es el valor de **HOY** de esa cantidad de dinero suponiendo la existencia de una cierta tasa de interés.

¿Qué relación existe entre el Valor Presente y el Valor Futuro del dinero?

Caso de **1** periodo:

$$VP=\frac{VF}{1+r}=\frac{\$10.700}{1,07}=\$10.000$$

Caso de ***t*** periodos:

$$VP=\frac{VF\left(t\right)}{\left(1+r\right)^{t}}$$

La **tasa de descuento** es la tasa de interés utilizada para calcular el valor presente de los flujos de caja futuros. En general, al hablar de una tasa de descuento se supone que hay una tasa de interés constante durante el tiempo del flujo.

Una **perpetuidad** es un flujo de caja de montos de dinero iguales que no termina nunca (infinito) de pagarse.

**Ejercicio:** ¿Cuál es el valor presente de una **perpetuidad** de $1 pactada al 10%? Suponiendo una tasa de descuento constante durante todos los años, el **flujo de caja** se puede representar del siguiente modo:

***r***

**$**

**1**

**0 1 2 3 …. n …**

**tiempo**

El valor presente del flujo de caja es la suma de los valores presentes de cada año:

$$VP\left(Perpetuidad de \$ 1\right)=\frac{1}{1+r}+\frac{1}{\left(1+r\right)^{2}}+…+\frac{1}{\left(1+r\right)^{n}}+…=\frac{1}{r}$$

Si en vez de $ 1, el pago anual es de *C* y la tasa de interés es ***r***, se tiene:

$$VP\left(Perpetuidad de C\right)=\frac{C}{r}$$

Si un banco le ofrece una tasa de interés de 6,5% anual. ¿Cuánto debe depositar Vd para obtener un pago perpetuo de $ 1.000.000 anuales?

Una **anualidad** es un pago de una cantidad fija de dinero en cada período de tiempo durante un número determinado de períodos, suponiendo la misma tasa de descuento en cada período.

Ejemplo: calcule el valor presente de una anualidad de 3 pagos anuales de un peso a una tasa de interés ***r***.

***Representación de la anualidad:***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Años** | **1** | **2** | **3** |
| Pagos | 1 | 1 | 1 |

Otra representación de la anualidad

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Años** | **1** | **2** | **3** | **4** | **….** | **n** | **…** |
| Perpetuidad 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Perpetuidad 2 |  |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 |
| P1 – P2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Se ve que P1 – P2 = Anualidad

VP (P1) – VP (P2) = VP (Anualidad)

$$VP\left(P1\right) =1/r$$

$$VP\left(P2\right) =\left(\frac{1}{r}\right)\*\frac{1}{\left(1+r\right)^{3}}$$

$$VP\left(P1\right)-VP\left(P2\right)=\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\*\frac{1}{\left(1+r\right)^{3}}$$

$$VP\left(Anualidad\right)= VP\left(P1\right)-VP\left(P2\right)=\frac{1}{r} \* (1-\frac{1}{\left(1+r\right)^{3}})$$

En general, el valor presente de una anualidad de monto C que dura n periodos y tiene una tasa de interés r es:

$$VP(Anualidad\left(C;n;r\right)=\frac{C}{r}\*(1-\frac{1}{\left(1+r\right)^{n}})$$

**Ejercicio**: Para comprar una casa se solicita un préstamo hipotecario al banco, que exige el 25% al contado y le otorga un plazo de 20 años para pagar los dividendos mensuales a una tasa anual efectiva del 8%. ¿Cuál es el valor del dividendo para una casa de UF 2.000?

***Bonos: precio y rentabilidad***

Un **bono** es una obligación documentada a largo plazo que emiten los agente económicos para obtener capital y se obligan a realizar pagos periódicos al tenedor del bono. Al vencimiento se cancela el capital o principal. El **cupón** es el pago periódico pactado por el emisor del bono y corresponde al interés explícito del valor par del bono y que recibe el tenedor del bono.

El **valor nominal** de un bono es el pago que se realiza a su vencimiento, también se conoce como valor a la par o valor al vencimiento.

El **valor presente de un bono** es el precio de mercado al que se transa el bono y varía según el riesgo que se le asigne a los pagos del cupón y del principal al vencimiento. El valor presente de un bono varía a cada instante.

El Banco Central de Chile continuamente emite diferentes tipos de bonos al público. A principio de cada año anuncia las cantidades y modalidades de los bonos que licitará durante el año.

Por ejemplo, el Banco ha emitido bonos a 4 años con una tasa de interés anual de 7%. Esto significa que Vd compra un bono de $ 15.000.000 y al final de cada uno de los próximos 4 años recibirá un pago de $ 1.050.000. Además, al final del cuarto año Vd recibe un pago de $ 15.000.000.

El flujo de caja generado por ese tipo de bono del Banco Central es:

|  |
| --- |
| **Flujo de Caja Pagaré Banco Central (en millones de pesos)** |
| Años | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Flujo de Caja | (15,00) | 1,05 | 1,05 | 1,05 | 16,05 |

¿Cuál es el valor de mercado de este bono?

Para calcular el valor de mercado se requiere conocer la tasa de interés o descuento que ofrece el mercado para una inversión con características similares (en otras palabras, con un nivel de riesgo similar).

Suponga que el mercado establece en este momento un tipo de interés del 6,5%. En este caso, usaremos esta tasa de interés para descontar el flujo de caja que ofrece el bono del BC.

$$VP\left(Bono BC\right)= \frac{1,05}{0,065} \* \left(1-\frac{1}{\left(1+0,065\right)^{4}}\right)+\frac{15}{(1+0,065)^{4}}$$

(VP = 15.610.000)

Entonces, en este momento el valor de mercado del bono es $ 15.610.000. Normalmente, el precio de los bonos se expresa como un porcentaje de su valor nominal. Es decir, este bono tiene un valor de 104,07 por ciento de su valor, o simplemente vale 104,07.

¿Cómo se generaron los $ 610.000?

De alguna manera, que sólo el mercado conoce, se genera a partir de la oferta y demanda, y de las estimaciones que hacen los agentes económicos.

¿Qué pasa si el mercado establece el tipo de interés anual en 12%?

Ahora el valor presente de nuestro bono BC se calcula con ***r*** = 0,12.

Luego tenemos:

$$VP\left(Bono BC\right)= \frac{1,05}{0,12} \* \left(1-\frac{1}{\left(1+0,12\right)^{4}}\right)+\frac{15}{(1+0,12)^{4}}$$

(VP = 13.007.971)

Luego, el valor del bono es 86,72.

Es decir, el bono perdió valor porque el mercado está ofreciendo oportunidades similares de inversión más atractivas.

**Notas (para los cálculos durante este curso):**

1. Las tasas de interés se expresan en tanto por uno.
2. Todos los bonos tienen un valor nominal de USD 1.000 y los cupones se pagan anualmente.
3. Los pesos chilenos no tienen decimales (al final) y los dólares de Estados Unidos tienen 2 decimales.

**Ejercicio:** Calcule el valor presente de un bono a 10 años con un cupón del 6%. El tipo de interés de mercado de este bono es 12%.

Cupón = USD 1.000 \* 0,06 = USD 60

$$VP\left(bono\right)= \frac{60}{0,12} \* \left(1-\frac{1}{\left(1+0,12\right)^{10}}\right)+\frac{1.000}{(1+0,12)^{10}}$$

(VP = USD 660.99)

¿Cuánto valdría el mismo bono si su tasa de interés de mercado cambia a 6%?

(VP 0 USD 1.000)

**Sobre las rentabilidades de los bonos.**

Hay varias maneras de medir la rentabilidad de un bono.

 Para bonos adquiridos al valor nominal el cálculo es simple. La tasa de rentabilidad o tasa de retorno es el tipo de interés del cupón. Si adquiere bonos a precio nominal a 1, 2 y 3 años con cupones del 10%, la tasa de rentabilidad será del 10%.

Ejercicio. Representar el flujo de caja para los bonos de 1, 2 y 3 años.

En otro caso, si Vd. debe pagar un precio distinto para adquirir un bono, se puede hablar de la rentabilidad presente y de la rentabilidad al vencimiento.

La rentabilidad presente se calcula dividiendo los pagos anuales del cupón por el valor nominal.

La rentabilidad al vencimiento o tasa interna de retorno (TIR) es la tasa de interés que iguala el valor presente de los pagos del bono con su precio.

Ejercicio. Calcule la rentabilidad al vencimiento para los bonos del ejercicio anterior. Además, calcule la TIR del bono anterior a tres años si lo puede comprar en $ 1.052.

Ejercicio: Un bono a 4 años con un cupón del 14% puede comprarse en $1.200.000.

¿Cuál es la rentabilidad al vencimiento?

***Riesgo de la tasa de interés y la rentabilidad.***

La tasa de los bonos fluctúa permanentemente, y por tanto su precio. El precio de mercado es un precio de equilibrio entre los precios que estiman los agentes económicos. Si el tipo de interés aumenta, el precio de los bonos cae, y viceversa.

La tasa de rentabilidad de una inversión es igual al total de pesos ingresados en el período por cada peso invertido.

En el caso de las inversiones en bonos los ingresos incluyen el pago de cupones y el pago del bono al momento de la venta. Suponga que Vd. compró el bono en $ 15.000.000, cuando predominaba una tasa de interés de 15%, y lo vende a final de año a precio de mercado cuando la tasa de interés predominante para dicho tipo de bonos es 10%. ¿Cuál es la rentabilidad de su inversión?

Tasa de rentabilidad = 13,57 / 15 = 0,905

Es decir, la inversión tuvo una rentabilidad negativa del 9,5 %.

***Referencias bibliográficas***

***Brealey, R. A., S. C. Myers y A. J. Marcus***(1996), Principios de Dirección Financiera, McGraw-Hill (Capítulos 3, 4 y 5)

***Brealey, R. A. y S. C. Myers***(1996), Fundamentos de Financiación Empresarial, McGraw-Hill (Capítulos 2, 3 y 4)

***Pascale, Ricardo***(1992), Decisiones Financieras, Ediciones Macchi, Buenos Aires

***Referencias de Internet***

*Banco Central de Chile,* [*www.bcentral.cl*](http://www.bcentral.cl)

*Instituto Nacional de Estadísticas,* [*www.ine.cl*](http://www.ine.cl)

*Superintendencia de Valores y Seguros,* [*www.svs.cl*](http://www.svs.cl)

*Ministerio de Economía, Fomento y Turismo,* [*www.economia.gob.cl*](http://www.economia.gob.cl)

*Ministerio de Hacienda,* [*www.hacienda.gob.cl*](http://www.hacienda.gob.cl)

*Centro de Estudios Nacionales de Desarrollo Alternativo,* [*www.cendachile.cl*](http://www.cendachile.cl)