UNIVERSIDAD DE CHILE
Escuela de Gobierno y Gestión Pública
Primer Semestre 2009

Matemáticas I $*$ PRUEBA 4
Una solución

1. *a*) Sea $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$ tal que $2u + 3v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $3u + 5v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   Determine las coordenadas de u y v.

   Solución

   De la primera igualdad se tiene que $6u + 9v = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$.

   De la segunda igualdad se tiene que $6u + 10v = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   Entonces $v = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$. Reemplazando queda $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 15 \end{bmatrix}$.

   b) Sea $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, encuentre una matriz N descrita como: $N = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ de modo que $M + N$ sea simétrica.

Solución:

Sea $N = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$, luego $M + N = \begin{bmatrix} 2 & 3-a \\ a & -1 \end{bmatrix}$. Como $M + N$ debe ser simétrica, entonces

$$3 - a = a \longrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Asi, la matriz $N = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$

2. Sea A matriz tal que $A^2 = I$. Se define: $B = \frac{1}{2}(I + A)$. Pruebe usando las propiedades de matrices, que $B^2 = B$

   Solución:

   Sea $B = \frac{1}{2}(I + A)$, entonces basta calcular B^2.

$$B^2 = B \cdot B = (\frac{1}{2}(I + A))^2 = \frac{1}{4}(I^2 + I \cdot A + A \cdot I + A^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(I + A + A + I) = \frac{1}{4}(2I + 2A) = \frac{1}{2}(I + A) = B$$

3. Sea A una matriz de 3×4 tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \neq j \\ 2 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

   .

   Calcule $B = AA^T - 7I$. ¿Es B diagonal? ¿Es B simétrica?
   Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$B = AA^T - 7I = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

   La matriz B no es diagonal, pues tiene elementos no cero fuera de la diagonal.

   Dado que $B = B^T$, entonces se tiene que B es simétrica.

4. Determine la solución general del sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Solución:

La matriz ampliada del sistema es: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & \mid 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & \mid 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & \mid 2 \end{bmatrix}$.

Escalonando queda: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Observando la matriz escalonada, $rg(A) = rg(A^*) = 3 < n = 4$, donde A es la matriz asociada, A^* es la matriz ampliada, y n es el número de incógnitas.
Entonces el sistema queda con infinitas soluciones,(SCI) ya que podemos tomar por ejemplo la cuarta variable libre:

$$\begin{gathered} x_1 = -1 + 3x_4 \\ x_2 = -3x_4 \\ x_3 = 1 - x_4 \\ x_4 \ \text{ libre.} \end{gathered}$$