UNIVERSIDAD DE CHILE
Escuela de Gobierno y Gestión Pública
Primer Semestre 2009

Matemáticas I $*$ PRUEBA GLOBAL

Una solución

1. Una empresa decide hacer un estudio de la gente fumadora que hay entre sus empleados. Para ello encuestan a un grupo de 233 personas, de las que 108 son hombres, y 125 mujeres. De las 233 personas, se obtiene que 123 son fumadores y 110 son no fumadores. De los fumadores 65 son hombres, y 58 mujeres.

   a) Construya y complete la tabla de contingencia, donde las columnas están formadas por las opciones: Hombre / Mujer, y en las filas: Fuma / No fuma

   Solución: La tabla debe quedar como:

	Hombres	Mujeres	Total
Fuman	65	58	123
No fuman	43	67	110
Total	108	125	233

   b) Indique el cardinal del evento: ser mujer o fumador.

   Solución: La cardinalidad del evento está dada por:
   $\sharp(\text{ser mujer}) + \sharp(\text{ser fumador}) - \sharp(\text{ser mujer y fumador}) = 125 + 123 - 58 = 190.$

2. Calcule el valor de x que verifique la inecuación:

$$\left|\frac{2x+6}{x-3}\right| > 3.$$

Solución: Como $|x| > a$ implica $x > a$ o $x < -a$, tenemos 2 casos:

$$i) \qquad \frac{2x+6}{x-3} > 3 \to \frac{2x+6}{x-3} - 3 > 0 \to \frac{2x+6-3x+9}{x-3} > 0 \to \frac{15-x}{x-3} > 0$$

cuya solución es $S_1 =]3, 15[$, y

$$ii) \qquad \frac{2x+6}{x-3} < -3 \to \frac{2x+6}{x-3} + 3 < 0 \to \frac{2x+6+3x-9}{x-3} < 0 \to \frac{5x-3}{x-3} < 0$$

cuya solución es $S_2 =]\frac{3}{5}, 3[$.

Por tanto, la solución es $S = S_1 \cup S_2 =]\frac{3}{5}, 3[\cup]3, 15[=]\frac{3}{5}, 15[- \{3\}$.

3. Considere las funciones: $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^- \\ & x & \mapsto & -x^2 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^- & \longrightarrow &]-\infty, -2[\\ & x & \mapsto & x-2 \end{array}$

Encuentre:

   a) $(g \circ f)^{-1}(x)$

   Solución: Primero, tenemos $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(-x^2) = -x^2 - 2$.
   Despejando luego x de $y = -x^2 - 2$, tenemos $x = \sqrt{-y-2}$.
   Por tanto, $(g \circ f)^{-1}(x) = \sqrt{-x-2}$.

b) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$.

Solución: Para empezar, hallamos f^{-1} y g^{-1}:
$y = -x^2 \;\rightarrow\; x = \sqrt{-y}$; $\quad y = x - 2 \;\rightarrow\; x = y + 2$. Ahora encomtramos la composición:
$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}\big(g^{-1}(x)\big) = f^{-1}(x+2) = \sqrt{-(x+2)} = \sqrt{-x-2}$.

c) Compare las funciones encontradas. ¿Puede comentar algo?

Solución: A primera vista, las expresiones encontradas coinciden. En realidad, es una propiedad que relaciona composición con inversa: $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$.

4. *a*) Sea A matriz tal que $A^2 = I$. Se define: $B = \dfrac{1}{2}(I + A)$. Pruebe usando las propiedades de matrices, que $B^2 = B$.

Solución: Para calcular B^2 tenemos:

$$B^2 = B \cdot B = (\frac{1}{2}(I + A))^2 = \frac{1}{4}(I^2 + I \cdot A + A \cdot I + A^2)$$

$$= \frac{1}{4}(I + A + A + I) = \frac{1}{4}(2I + 2A) = \frac{1}{2}(I + A) = B$$

b) Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 11 \end{aligned}$$

Solución: Hallamos la f. e. r. de la matriz asociada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \therefore \quad \begin{aligned} x_1 &= 2, \\ x_2 &= 3, \\ x_3 &= 1, \\ x_4 &= 0. \end{aligned}$$