1997 en adelante

MA 11-A ALGEBRA

(curso anual - 20 U.D.)

DISTRIBUCION HORARIA:

4.5 hrs. clases
1.5 hrs. de clases auxiliares
4.0 hrs. de trabajo personal

REQUISITOS: no tiene

OBJETIVOS:

Este curso consta de dos componentes principales. En la primera se entregarán al estudiantes los conceptos básicos del Algebra clásica, mientras que en la segunda se estudiarán las nociones introductorias del Algebra Lineal y de la Geometría Analítica. Las nociones fundamentales que se le entregarán al alumno en esta parte son las de aplicación lineal y su representación matricial. Se abordarán los problemas básicos del Algebra Lineal como son: La resolución de sistemas lineales y el cálculo de valores y vectores propios. Los objetivos específicos de la primera parte son:

1.- Utilizar, con estricta sujeción a la lógica bivalente, el lenguaje para caracterizar situaciones matemáticas.

2.- Reconocer las propiedades y aplicaciones que tiene en la construcción de modelos matemáticos, las estructuras algebraicas más fundamentales: grupos, anillos, cuerpos y espacios vectoriales.
Mientras que los de la segunda son:

3.- Utilizar la estructura de especios vectoriales para caracterizar nociones geométricas que permitan abordar analíticamente problemas de esa índole.

4.- Reconocer un problema lineal y resolverlo en el caso de dimensión finita.

5.- Aplicar el cálculo de valores y vectores propios para resolver problemas y/o caracterizar situaciones específicas.

PROGRAMA 1er. SEMESTRE:

1.- **Lógica.** (6,0 hrs.)

Proposiciones lógicas, conectivos lógicos, tablas de verdad, teoremas lógicos (tautologías), cuantificadores lógicos.

2.- **Teoría de Conjuntos.** (7,5 hrs.)

Definición intuitiva de conjunto, noción de pertenencia, inclusión de conjuntos e igualdad, conjunto de las partes, operaciones básicas (unión, intersección, complementación), operaciones compuestas (diferencia, diferencia simétrica), algebra de conjuntos (Leyes de De Morgan), noción de par ordenado y n-tupla ordenada, producto cartesiano.

3.- **Funciones.** (9,0 hrs.)

Definición básica, igualdad, conjunto imagen, conjunto pre-imagen, propiedades. Funciones inyectivas, sobre yectivas y biyectivas, caso dominio y recorrido finito. Composición de funciones y relación funciones y relación con conceptos de inyectividad y sobre yectividad, función inversa.

4.- **Relaciones.** (9,0 hrs.)

Definición básica e interpretación de función como relación, ejemplos, propiedades básicas (reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad), relación de orden: parcial y total, relación de equivalencia: conjunto cuociente y clase de equivalencia. Ejemplos básicos: divisibilidad, congruencias. Relación de equivalencia "igual cardinal". Familias de conjuntos con índice en $\mathbb{N}$. Conjuntos numerables: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, pares, impares. Propiedad: unión de numerables es numerable.

5.- **Inducción.** (13,5 hrs.)

Nociones básicas de sucesor en $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. Principios de inducción partiendo de $n = 0, n = k_0$, $\forall n \geq k_0$. Ejemplos básicos en: divisibilidad, propiedades en juegos, torres de Hanoi, Leyes de De Morgan Generalizadas, representación de enteros como producto de primos, otros. Definición por recurrencia: sumatoria, pitatoria, factorial. Propiedades sumatorias (propiedad telescópica), cálculo de progresiones geométricas y aritméticas. Sumatorias dobles. Coeficientes Binomiales e interpretación en conteo, teorema del Binomio de Newton, triángulo de Pascal.

6.- **Estructuras Algebráicas.** (9,0 hrs.)

Noción de Ley de Composición Interna, propiedades básicas: asociatividad, conmutatividad, inversos, neutros, elementos idempotentes, elementos idempotentes, absorbentes, distributividad. Noción de homomorfismo entre estructuras, caso particular de la isomorfía. Ejemplos. Definición y propiedades básicas del Grupo, Anillo y Cuerpo. Ejemplos básicos: matrices, sumas y multiplicación de funciones.

7.- **Números Complejos.** (4,5 hrs.)

Definición como par ordenado y forma $a + bi$. Estructura básica (número complejo conjugado). Fórmula de Moivre, raíces n-ésima de la unidad y de un complejo cualquiera.

8.- **Polinomios.** (9,0 hrs.)

Polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, operaciones de suma y multiplicación. Estructura. Raíces de polinomios, número de raíces. Divisibilidad de polinomios (analogía con $\mathbb{Z}$), algoritmo de Euclides, noción de polinomio irreductible. Raíces de polinomios en $\mathbb{C}$: enunciado Teorema fundamental del Algebra.

PROGRAMA 2o. SEMESTRE:

1.- **Espacios vectoriales.** (9,0 hrs.)

Axiomas sobre K, cuerpo cualquiera, aclarando que será $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ cuando se especifique. Ejemplos $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}, P^n$ sobre $\mathbb{R}, F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C|a, b|, \mathbb{C}^n$. Subespacios vectoriales: definición, caracterización y ejemplos de los anteriores. Dependencia, independencia lineal, generadores, bases dimensiones, completación de bases, sumas e intersecciones de s.e.v., suma directa: $\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$. Ejemplos. Isomorfismos entre espacios vectoriales $\mathrm{Dim}E = n \iff E$ isomorfo a $\mathbb{R}^n$; vector de coordenadas. Ejemplo: $P^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, independencia lineal en P^n (escribirlo como sistema lineal homogéneo en $\mathbb{R}^{n+1}$).

2.- **El Espacio Vectorial $\mathbb{R}^3$.** (4,0 hrs.)

Rectas y planos, s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Producto punto, norma euclidiana, proyecciones ortogonales.

3.- **Método de Gauss.** (6,0 hrs.)

Retomando el problema final de 1, motivar la necesidad de resolver sistemas lineales. Es decir, a partir de la ecuación vertorial $x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = b$ con $v_i, \in I\!R^m, b \in I\!R^m$, escribir el sistema lineal de $m \times n$. Para sistemas cuadrados, deducir con argumentos de representación única en términos de una base, que $Ax = b$ tiene solución única $\forall b \Leftrightarrow (Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0_{I\!R^n})$. Interpretar cada ecuación como la ecuación de un hiperplano y la solución del sistema como la $\cap$ de hiperplanos. Sistemas equivalentes. Conjunto solución. Ver cuando el conjunto solución es un s.e.v. Reajuste de Gauss. Casos en que no existe solución. Existe y es única, existe y no es única. Ejemplos: casos especiales, sistemas estructurados, poco densos. Número de operaciones y propagación del error (elección del pivote). Mal condicionamiento con la perspectiva geométrica de intersectar rectas muy parecidas.

Clase de recuperación y revisión de la materia. (1,5 hrs.)

4.- **Aplicaciones Lineales y Matrices** (18,0 hrs.)

Def. $T : E \longrightarrow F$ lineal, ejemplos. Teorema de caracterización de una aplicación lineal cuando dim $E = m$. Ejemplos: rotación plana, derivada $: P^n \longrightarrow P^{n-1}$, vector de coordenadas, proyecciones ortogonales, identidad. Cuando dim $F = n$, pasando por vector de coordenadas, aplicando el teorema anterior. Obtener la matriz representante del sistema de ecuaciones $|T(v)|_{B'} = |T|_{BB'}|v|_B$. Ejemplos: de los anteriores obtener las matricies representantes para distintas bases. El espacio vectorial $\mathcal{L}(E_B, F_{B'})$. El espacio vectorial $M_{m\times n}(I\!R)$. Base canónica de $M_{m\times n}(I\!R)$, subespacios de$M_{m\times n}(I\!R)$. Isomorfismo entre $\mathcal{L}(E_B, F_{B'})$ y $M_{m\times n}(I\!R)$. Núcleo, Imagen: definiciones, probar que son s.e.v. Rango y nulidad. Traducir de aplicación lineal a matriz y soluciones de sistemas. Ejemplos. T inyectiva $\Leftrightarrow N(T) = \{O_E\}$. T inyectiva $\Rightarrow T$ transforma familias libres en familias libres. Teorema de las dimensiones. Traducir a matrices. Ejemplos (dim$E$ = dim$F = n$. Equivalencias: $Ax = b$ tiene solución única $\forall b \Leftrightarrow (Ax = O \Rightarrow x = O_{I\!R^n}) \Leftrightarrow A$ es de rango completo $\Leftrightarrow rg(T) = n \Leftrightarrow T$ inyectiva. Composición de aplicaciones lineales y producto de matrices. Ejemplos. Escribir el producto de matrices en términos del producto punto en $I\!R^n$. Invertibilidad de T y $|T|_{BB'}$. Matrices de pasaje. A invertible $\Leftrightarrow A$ es de pasaje. Conservación del rango al componer (multiplicar) con aplicación lineal invertible (por matriz de pasaje). Ejemplo con cambio de bases. Matriz transpuesta y simétrica: la transformación y el producto; rango de la transpuesta. Diagonal dominancia e invertibilidad. Matrices elementales y sus inversas. Gauss como producto de matrices elementales: $LAP = DU(L$ producto de elementales del ajuste de Gauss, P matrices de permutaciones, D diagonal y U con 1^{nos} en la diagonal). Descomposición LDL^t. Sistemas triangulares, que se deben resolver por sustitución.

Clase de recuperación y revisión de la materia (1,5 hrs.)

5.- **Producto Interno y Producto Hermítico** (6,0 hrs.)

Definiciones, norma inducida, propiedades, ejemplos en $I\!R^n, C|a,b|P^n(I\!R)$,$\mathbb{C}^n, M_{m\times n}(I\!R), M_{m\times n}(\mathbb{C})$, ortogonalidad, $v \perp w \Rightarrow v,w$ l.i. Gramm-Schmidt. Proyección ortogonal (ejemplos de lo anterior). Propiedades de la proyección ortogonal, complementariedad, dimensiones.

6.- **Determinantes** (6,0 hrs.)

Definición según el teorema de existencia y unicidad como función n-lineal en las n filas (Strang). Deducir de las 3 propiedades que lo definen, las otras propiedades. Cálculo del determinante de una matriz de 2×2 aplicando las propiedades. Cálculo del determinante de una matriz A aplicando las propiedades. Aplicar el método de Gauss (la descomposición en producto de matrices) y sus propiedades para obtener método de cálculo efectivo y para deducir Det $(A^1) =$ Det (A). Fórmula de los Co-Factores, regla de Cramer,Inversa. Ejemplo: Comentar su relevancia no como método de cálculo efectivo sino como resultado teórico y como fórmula especialmente apropiada para matrices por bloques. (Det$(A) = O \Longleftrightarrow A$ singular (no invertible) (agregar a la lista de equivalencias de A invertible).

7.- **Valores y Vectores Propios**. (9,0 hrs.)

Definición para aplicación lineal y matriz s.e.v. de vectores propios. Polinomio característico. Ejemplos. Problemas a enfrentar: las raíces del polinomio pueden ser complejas; cálculo efectivo. Similaridad. Valores propios de una matriz diagonal y de una matriz A. Propiedades: vectores propios asociados a vp distintos son l.i., valores y vectores propios de la transpuesta, valores y vectores propios de matrices similares. Diagonalización de matrices. Matrices simétricas y herméticas.

8.- **Formas Cuadráticas**. (4,0 hrs.)

Motivación f: $I\!R^n \to I\!R$ estudiar sus puntos críticos. Definición. propiedades: toda forma cuadrática asociada a una matriz se representa (de manera única) por una matriz simétrica. Forma normal o canónica. Teorema de maximización y minimización. Matrices y formas cuadráticas, definidas positivas y definidas negativas. Cálculo del máximo o del mínimo. Ejemplos. Interpretación geométrica para $fLI\!R^2 \to I\!R$.

Clase de recuperación y revisión de la materia. (1,5 hrs.)

BIBLIOGRAFIA:

- BRINKMANN, H. & KLOTZL, E., Linear Algebra and Analytic Geometry, Addisson Wesley (1971).
- HOFFMAN, K. & KUNZE, R., Algebra Lineal, Prentice Hall (1973).
- LENTIN & RIVAUD, ALgebra Lineal, Aguilar (197?).
- LESIEUR & al., Algèbre Linéaire, Géométrie, Armand Colin, (1977)
- NERING, E., Linear Algebra and Matrix Theory, John Wiley, (1963).
- STRANG, G., Algebra Lineal y sus aplicaciones, Fondo Educativo Interamericano (1982).
- GOLES, E., Algebra, Ediciones Dolmen.
- LANG, Linear Algebra.