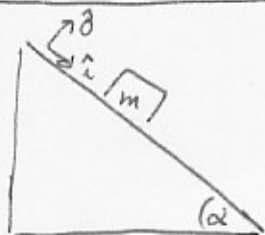
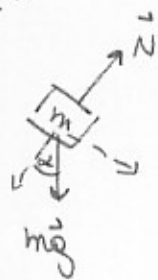


Plano inclinado



DCL m



$$\vec{N} = N \hat{j}$$

$$\vec{g} = g \sin \alpha \hat{i} - g \cos \alpha \hat{j}$$

$$\square \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{N} + m\vec{g} = m \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow N \hat{j} + mg \sin \alpha \hat{i} - mg \cos \alpha \hat{j} = m \cdot (a_x \hat{i} + a_y \hat{j})$$

$\Rightarrow \hat{i}$

$$mg \sin \alpha = m \cdot a_x \Rightarrow$$

$$\boxed{g \sin \alpha = a_x}$$

\hat{j}

$$N - mg \cos \alpha = m \cdot a_y \Rightarrow$$

$$\boxed{N = mg \cos \alpha}$$

$$\downarrow$$
$$y = 0 \quad \forall t$$
$$\Rightarrow \dot{y} = 0 \quad \forall t$$
$$\ddot{y} = 0 \quad \forall t$$
$$\Rightarrow a_y = 0$$

$$\text{Como } a_x = \text{cte} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2 + v_{x0} \cdot t + x_0.$$

Cond. iniciales

$$t=0$$

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0.$$

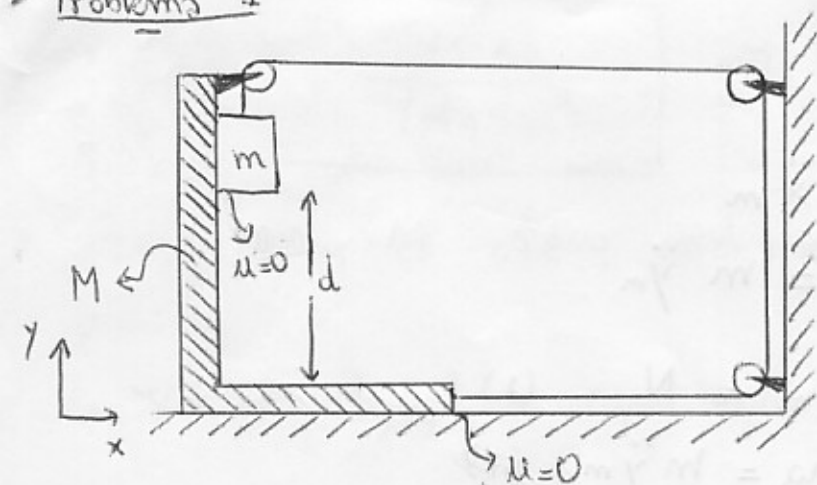
$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$$

Si ~~inicialmente~~ el largo de la cuña es L

$$\Rightarrow L = x(t^*) = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^{*2}$$

$$\Rightarrow \boxed{t^* = \sqrt{\frac{2L}{g \sin \alpha}}}$$

Problema 1

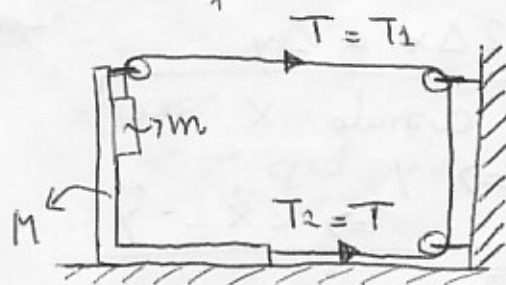


Si en $t=0$ se suelta la masa "m" a una altura d , calcular cuanto tiempo demora en caer al suelo. No existe roce entre las sup.

Sol:

Para poder calcular el tiempo que demora en caer la masa "m" es necesario conocer cómo es su dinámica.

Apreciemos que como "m" y "M" se mueven en cto $\Rightarrow \ddot{x}_m = \ddot{x}_M$. Si analizamos el sistema como cto notemos que

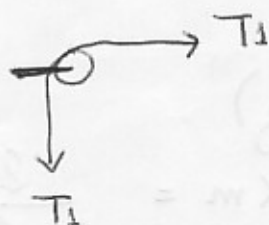


$$\Rightarrow (m+M)\ddot{x}_m = 2T \quad (*)$$

¿Pg 2T?

Notemos que T_2 es evidente que contribuye al mov. de las masas,

pero ¿Pg T_1 ? Cuando "m" chico baja; que siente la cuerda?

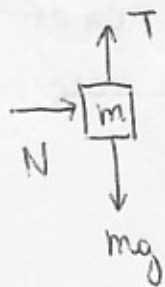


siente que la tiran hacia abajo y a la vez siente que la tiran hacia la derecha, es por esta última fuerza, T_1 , que el sistema se mueve, sin olvidar a T_2 . Como la

cuerda es inextensible, la tensión es igual en toda ella.

Continuemos:

DCL m



$$\sum F_x = N = m \ddot{x}_m$$

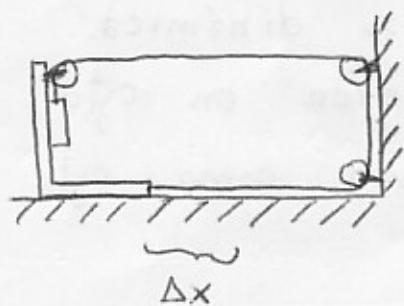
$$\sum F_y = T - mg = m \ddot{y}_m$$

$$\Rightarrow m \ddot{x}_m = N \quad (1)$$

$$T - mg = m \ddot{y}_m \quad (2)$$

ya sabemos que $\ddot{x}_m = \ddot{x}_M$, pero como es \ddot{y}_m c/r a \ddot{x}_M ?

Supongamos que el sistema se desplaza Δx .



\Rightarrow cuerda se "arruga" en cada sección Δx

\Rightarrow la cuerda en total se "arruga" $2\Delta x$.

$$\Rightarrow m \text{ baja } 2\Delta x = \Delta y$$

$$\Rightarrow 2x = -y$$

$$\Rightarrow 2\ddot{x}_M = 2\ddot{x}_m = -\ddot{y}_m$$

OJO: cuando x crece $\Rightarrow y$ baja $\Rightarrow 2x = -y$

Despejamos T de la ec (2) $\Rightarrow T = m \ddot{x}_m + mg$

Reemplazando en (*)

$$\Rightarrow (m+M) \ddot{x}_m = 2(-m \ddot{x}_m + mg)$$

$$\Rightarrow (M+5m) \ddot{x}_m = 2mg \Rightarrow \ddot{x}_m = \frac{2mg}{(M+5m)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{y}_m = \frac{4mg}{(M+5m)}} \Rightarrow \boxed{\ddot{y}_m = \frac{-4mg}{(M+5m)} \updownarrow}$$

Como \ddot{y}_m es cte, podemos aplicar directamente que:

$$y(t) = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} \cdot t + h_0$$

en nuestro problema: $a_y = \frac{-4mg}{(M+5m)}$ (va hacia abajo)

$$v_{0y} = 0$$

$$h_0 = d$$

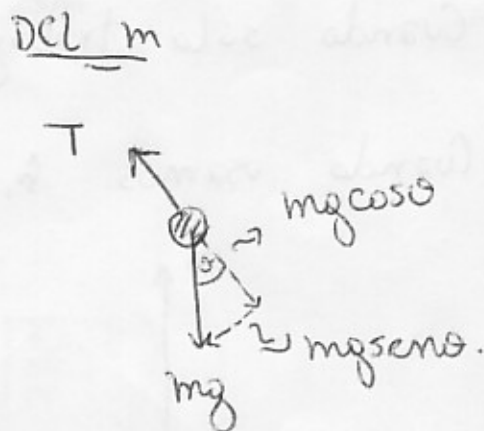
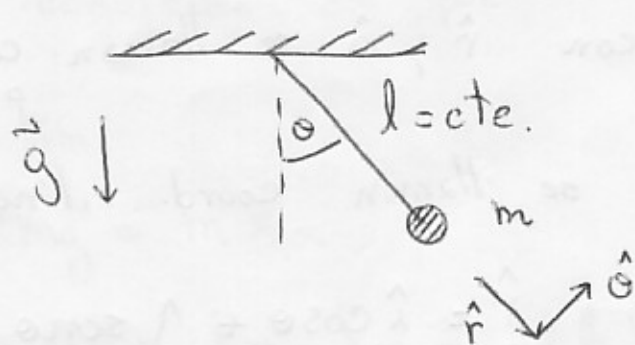
$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{4mg}{(M+5m)} \right) t^2 + d$$

Imponemos $y(t^*) = 0$, donde t^* es lo que demora en llegar al piso

$$\Rightarrow \frac{2mg}{(M+5m)} \cdot t^{*2} = d$$

$$\Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{d(5m+M)}{2mg}} //$$

Ejemplo: Péndulo en coord. polares.



$$\sum F_r = -T + mg \cos \theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

como $l = \text{cte} \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$$\Rightarrow mg \cos \theta - T = -ml\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow T = mg \cos \theta + ml\dot{\theta}^2$$

$$\sum F_\theta = -mg \sin \theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

$$\Rightarrow -mg \sin \theta = ml\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Cuando $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta$$

$$\Rightarrow \theta(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

pero $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

pero $0 < \theta < 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \theta(t) = 0.$$

Antes habíamos visto: $\ddot{x}(t) = 0 \vee \text{cte.}$

$\Rightarrow x(t)$ conocido de forma fácil.

Ahora la aceleración depende de la posición.

$\theta(t)$ debe ser alguna función del tiempo que cumpla con que su segunda derivada + cte. por ella misma sea cero.

i.e.:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \theta(t) = 0. \quad (*)$$

¿Alguna idea?

Notemos que el péndulo oscila \Rightarrow q' el ángulo $\theta(t)$ tb. i.e. $\theta(t)$ debe ser una función que oscila.

¿Qué funciones conocemos que hagan eso?

Resp: $\sin(x)$ y $\cos(x)$

Entonces supongamos que:

$$\theta(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \sin(\omega \cdot t) \quad \text{¿pq } \omega \cdot t \text{ y no sólo } t?$$

Al introducir ω podemos modificar la frecuencia y por ende el período de oscilación de la función, ω no es conocido. ~~Debemos conocerlo al igual que A y B~~

~~despejando~~

ω lo despejamos cuando reemplacemos en la ec. de mov.
 A y B son ctes. que son det. por las cond. iniciales del problema.

Entonces:

$$\theta(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$\dot{\theta}(t) = -A \cdot \sin(\omega t) \cdot \omega + B \cos(\omega t) \cdot \omega$$

$$\ddot{\theta}(t) = -A \cdot \cos(\omega t) \cdot \omega^2 - B \sin(\omega t) \cdot \omega^2$$

Reemplazamos en (*)

$$\Rightarrow -A \cdot \cos(\omega t) \omega^2 - B \sin(\omega t) \cdot \omega^2 + \frac{g}{l} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) = 0.$$

$$\Rightarrow A \cos(\omega t) \left[\frac{g}{l} - \omega^2 \right] + B \sin(\omega t) \left[\frac{g}{l} - \omega^2 \right] = 0. \quad \forall t$$

A no puede ser cero pq mataríamos una parte de la sol. (lo mismo para B) y como la relación debe cumplirse para todo tiempo t .

$$\Rightarrow \frac{g}{l} - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

frec. péndulo.

$$g = \left[\frac{m}{s^2} \right] \Rightarrow \frac{g}{l} = \frac{\left[\frac{m}{s^2} \right]}{[m]} = \frac{1}{[s^2]} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \left[\frac{1}{s} \right]}$$

frec.

$l = [m]$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)}$$

~~XXXXXX~~

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} D \cdot \cos(\omega t + \phi) &= D (\cos(\omega t) \cdot \cos \phi - \sin(\omega t) \cdot \sin \phi) \\ &= \underbrace{D \cdot \cos \phi}_{A} \cos(\omega t) - \underbrace{D \cdot \sin \phi}_{B} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

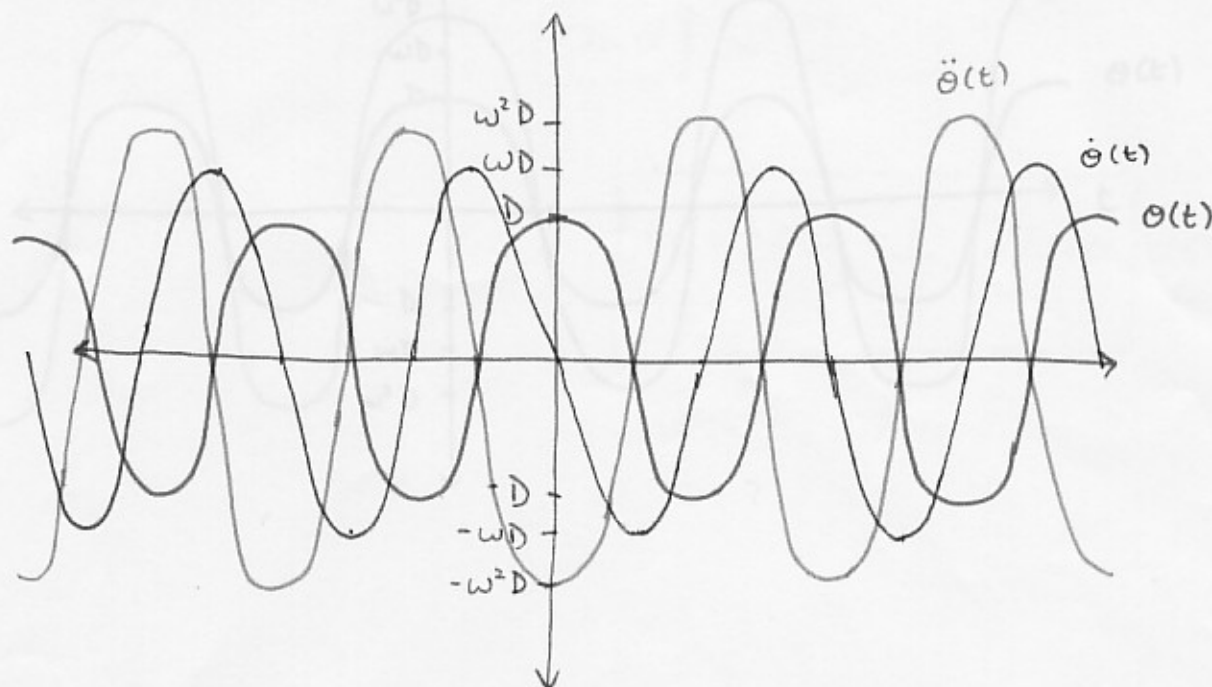
$$\Rightarrow D \cdot \cos(\omega t + \phi) = A \cdot \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \theta(t) &= D \cdot \cos(\omega t + \phi) \\ &= A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{da igual} \\ \text{es lo mismo.} \end{array} \right\}$$

Consideremos

$$\begin{aligned} \theta(t) &= D \cdot \cos(\omega t + \phi) \\ \dot{\theta}(t) &= -D \cdot \sin(\omega t + \phi) \cdot \omega \\ \ddot{\theta}(t) &= -D \cos(\omega t + \phi) \cdot \omega^2 \end{aligned}$$

(Para simplificar gráfico considero $\phi = 0$)



Cond. Inicial

$$\theta(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\dot{\theta}(0) = 0.$$

$$\Rightarrow \theta(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \sin(\omega \cdot t)$$

$$\stackrel{t=0}{\Rightarrow} \theta(t=0) = A \cdot \cos(\omega \cdot 0) + B \cdot \sin(\omega \cdot 0) \Rightarrow A = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{\pi}{4}}$$

$$\dot{\theta}(t) = -\omega \cdot A \sin(\omega \cdot t) + \omega B \cos(\omega \cdot t)$$

$$\stackrel{t=0}{\Rightarrow}$$

$$\theta(t=0) = -\omega \cdot A \sin(\omega \cdot 0) + \omega B \cos(\omega \cdot 0)$$

$$\Rightarrow \omega B = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \frac{\pi}{4} \cdot \cos(\omega \cdot t)}$$