2003 en adelante

MA 12-A CALCULO

(Curso Anual - 20 U.D.)

DISTRIBUCION HORARIA:

4.5 hrs. clases/semana
1.5 hrs. de ejercicios semanales
4.0 hrs. de trabajo personal

REQUISITOS: no tiene

OBJETIVOS:

Introducir los elementos básicos del cálculo diferencial e integral de funciones numéricas de una variable real.

PROGRAMA:

0.- **Elementos de Geometría Analítica en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$** (3,0 hrs.)

i) El plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Ecuación, como conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$.
ii) Distancia entre dos puntos.
iii) Ecuación de una recta. Noción de pendiente de la recta. Rectas perpendiculares y paralelas. Distancia de un punto a una recta.
iv) Ecuación de una circunsferencia y de una elipse.
v) Ecuación de una hipérbola.
vi) Ecuación de una parábola.

1.- **Algunos Elementos de Teoría de Conjuntos** (5,0 hrs.)

i) Producto de dos conjuntos.
ii) Funciones epiyectivas, inyectivas y biyectivas. Grafo de una función.
iii) Funciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
iv) Composición de funciones.
v) Reunión e intersección de familias de conjuntos.
vi) Conjuntos numerables.
vii) Inducción. Aplicaciones a operaciones con conjuntos.

2.- **El Conjunto $I\!R$ de los Números Reales.** (5,0 hrs.)

i) Axiomas de los números reales: cuerpo ordenado que verifica la propiedad arquimediana y el principio de los intervalos cerrados encajonados.

ii) Algunas propiedades importantes del orden en $I\!R$.

- $x \leq y, y < z \Rightarrow x < z$.
- $x < y, y \leq z \Rightarrow x < z$.
- Máximo y Mínimo de una parte finita de $I\!R$.
- $x_i \leq \Rightarrow x + z \leq y + z$.
- $x \leq y \Leftrightarrow x - y \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y - x \Leftrightarrow -y \leq -x$.
- $x_i \geq 0 i \in 1, ..., n \rightarrow x_1 + ... + x_n \geq 0$.
- $x \geq 0 \Leftrightarrow nx \geq 0 \quad \forall n \in I\!N$.
- si $a > 0$ entonces $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
- $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- $||y| - |x|| \leq |y - x|$.
- $|x_1 + ... + x_n| \leq |x_1| + ... + |x_n|$.
- $z \geq 0$ y $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$.
- $x \geq 0$ e $y \leq 0 \Rightarrow xy \leq 0$.
- $x \leq 0$ e $y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$.
- $x^2 \geq 0$.

iii) El conjunto Q de los números racionales.
Numerabilidad de Q, densidad de Q en $I\!R$ (entre dos reales $\neq s$ hay siempre un racional).

iv) Cota Superior, Cota Inferior, Supremo, Infimo, Máximo y Mínimo de una parte de $I\!R$.

3.- **Sucesiones en $I\!R$.** (9,0 hrs.)

i) Definición, ejemplos y motivación de las sucesiones en $I\!R$ Operaciones con sucesiones.

ii) Definición de sucesión convergente y de punto de acumulación de una sucesión. Definición de subsucesión.

iii) Unicidad del límite de una sucesión.

iv) Toda sucesión convergente es acotada.

v) Teorema de Bolzano-Weierstrass: Si (u_k) es una sucesión en un intervalo $[a, b]$, entonces existe al menos un punto de acumulación de (u_k) en $[a, b]$. esto es equivalente a decir que (u_k) tiene una subsucesión convergente en $[a, b]$.
Corolario: Toda sucesión acotada con un sólo punto de acumulación, es convergente.

vi) $(u_k) \rightarrow c, v_k = u_k \quad \forall k \geq K \Rightarrow (v_k) \rightarrow c$.
$(u_k) \rightarrow 0, |v_k| \leq |u_k| \quad \forall k \geq K \Rightarrow (v_k) \rightarrow 0$.
$(u_k) \rightarrow c, (v_k) \rightarrow d, u_k \leq v_k \quad \forall k \geq K \Rightarrow c \leq d$.

vii) Estudio de las sucesiones: (k^{-a}) donde $a \in Q_+, (k^p, r^k)$ donde $p \in I\!N$ y $|r| < 1$.

viii) Límite de la suma, del producto y del cuociente de dos sucesiones convergentes. itemix) $(u_k) \to 0, (v_k)$ acotada $\Rightarrow (u_k) \cdot (v_k) \to 0$.

x) Criterio del cuociente en el estudio de la convergencia.

xi) Estudio de las sucesiones: $(\frac{k^p}{a^k})$ donde $p \in I\!N$ y $a > 1; (\frac{a^k}{k!})$ donde $a \in I\!R$.

xii) Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

xiii) Estudio de las sucesiones: $(\sum_{i=1}^{k})$ donde $r \in]0, 1[; (\sum_{i=1}^{k})$ donde $p \in I\!N$.

xiv) Estudio la sucesión $((1 + \frac{a}{k})^k)$ donde $a \in I\!R_+$

xv) $\lim(1 - \frac{a}{k})^k = [\lim(1 + \frac{a}{k})^{-1}$.

xvi) Definición de la función exponencial: $exp(x) = \lim(1 + \frac{x}{k})^k$.
De la igualdad en xiv) se ve que $exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$ y que el rango de la función exp está contenido en $I\!R_+$.

xvii) $exp(x + y) = exp(x) \cdot exp(y); exp(x - y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}$.

xviii) $e \equiv exp(1) = 2 + \lim \sum_{p=2}^{k} \frac{1}{p!} \in [[2.718, 2.719]$.

xix) $exp(r) = e^r$ para todo $r \in Q$.

xx) exp es una función estrictamente creciente de $I\!R$ en $I\!R_+$.

xxi) Definición de la función logaritmo natural:
$\ell n(x) = exp^{-1}(x)$ para todo $x \in$ rango (exp).

xxii) $\ell n(x) + \ell n(y) = \ell n(xy)$.

xxiii) Teorema de Cauchy: Una condición necesaria y suficiente para que una suc. (u_k) sea convergente es que para todo $\epsilon > 0$ existe un $K \in I\!N$ tal que $|u_i - u_j| \leq \epsilon$ para todo $i, j \geq K$.

4.- **Funciones Contínuas** (11,0 hrs)

i) Definición de función continua mediante sucesiones. Ejemplos.

ii) Continuidad de la suma, del producto, del cuociente y de la composición de dos funciones continuas.

iii) Continuidad de una función polinomial, continuidad de la función exponencial.

iv) Funciones hiperbólicas.

v) Funciones trigonométricas. propiedades elementales de las funciones trigonométricas.

vi) Teorema del valor intermedio: Si I es un intervalo en $I\!R$ y si $f : I \to I\!R$ es una función continua, entonces $f(I)$ es un intervalo en $I\!R$.

vii) El rango de la función exponencial es $I\!R_+$. Existencia de una solución real de una ecuación cúbica. Teorema del punto fijo: $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es una función continua, entonces existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

viii) Teorema: si $f : D \to I\!R$ es una función continua y si $c \in D$ es un punto de acumulación de una sucesión (x_k) en D, entonces $f(c)$ es un punto de acumulación de la sucesión $(f(x_k))$.

ix) Teorema: Si $f : [a, b] \to I\!R$ es una función continua, entonces $f([a, b])$ es un intervalo acotado en $I\!R$.

x) Teorema: Si $f : [a, b] \to I\!R$ es continua entonces f tiene un máximo y un mínimo en el intervalo $[a, b]$, esto equivale a decir que $f[a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado en $I\!R$.

xi) Teorema: Si I es un intervalo en $I\!R$ y si $f : I \to I\!R$ es una función continua inyectiva entonces:

a) f es monótona.

b) f^{-1}: rango $(f) \to I\!R$ es continua y monótona.

xii) La función $\ell n : I\!R_+ \to I\!R$ es continua y monótona. Inversas de las funciones trigonométricas.

xiii) definición de la función $f(x) = a^x$, con $a > 0$, mediante la fórmula $a^x = exp(x \cdot \ell na)$. Es una función continua creciente. Estudio de $f^{-1} : I\!R_+ \to I\!R$, obtención de la fórmula $f^{-1}(y) = (\ell na)^{-1}\ell n(y)$. la función f se denota usualmente por exp_a y la función f^{-1} por log_a.

xiv) estudio de la función $f(x) = x^b$, con $b \in I\!R$.

xv) Caracterización de la continuidad sin uso de sucesiones:$f : D \to I\!R$ es continua en $c \in D$ si y solo si para todo intervalo de la forma $[f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon]$ (con $\varepsilon > 0$), existe un intervalo de la forma $[c-\delta, c+\delta]$ (con $\delta > 0$) tal que $f([c-\delta, c+\delta] \cap D) \subset [f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon]$ o dicho en otras palabras, si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $x \in D, |c - x| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(c) - f(x)| \leq \varepsilon$.

5.- **Límite de Funciones.** (3,0 hrs.)

i) Definición de punto interior y punto adherente de una parte de $I\!R$. Caracterización de punto adherente mediante sucesiones.

ii) Definición de conjunto abierto, de conjunto cerrado, de interior y de adherencia (o cerradura) de una parte de $I\!R$.

iii) Dada una función $f : d \to I\!R$ y un punto $c \in \bar{D}$ ($\bar{D}$ designa la adherencia del conjunto D), se dice que α es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c si para toda sucesión $(f(x_k))$ converge a $\alpha = \lim\limits_{x \to c} f(x)$.

iv) Una función $f : D \to I\!R$ es continua en $c \in D$ si y solo si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

v) Definición de límite por la derecha y por la izquierda.

vi) Caracterización del límite sin uso de sucesiones: α es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $c \in \bar{D}$ si y solo si para todo intervalo de la forma $[\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$ (con $\epsilon > 0$) existe un intervalo de la forma $[c-\delta, c+\delta]$ tal que $f([c-\delta, c+\delta] \cap D) \subset [\alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon]$ o escrito de otro modo: si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in D, |c-x| \leq \delta \Rightarrow |\alpha - f(x)|\epsilon$. Dar una caracterización análoga para los límites por la derecha y por la izquierda.

vii) Límite de una suma, de un producto, de un cuociente y de la composición de dos funciones.

6.- **Funciones Uniformemente Continuas** (1,0 hr)

i) Definición de continuidad uniforme.
ii) teorema: Si $f : [a,b] \rightarrow I\!R$ es una función continua, entonces f es uniformemente continua.
iii) Suma y producto de dos funciones uniformemente continuas.

7.- **Sucesiones de Funciones** (3,0 hrs.)

i) Convergencia simple (o puntual) y uniforme de una sucesión de funciones definidas en una parte D de $I\!R$.
ii) Teorema: si (f_k) es una sucesión de funciones continuas (resp. uniformemente continuas) convergente uniformemente a una función f, entonces f es continua (resp. uniformemente continua).
iii) Teorema: una condición necesaria y suficiente para que una sucesión de funciones (f_k) converja uniformemente a una función f es que para todo $\epsilon > 0$ exista un natural K tal que $|f_i(x) - f_j(x)| \leq \epsilon$ para todo $x \in D$ y todo $i, j \geq K$.
iv) Polinomio de Bernstein de orden n asociado a una función continua $f : |0,1| \rightarrow I\!R$ y Teorema de Weierstrass.

8.- **Series de $I\!R$** (3,0 hrs.)

i) Definición de una serie como sucesión de sumas parciales, suma de dos series y producto de una serie por un escalar.
ii) Series convergentes. Convergencia de la suma de dos series convergentes. Convergencia del producto de una serie convergente por un escalar.
iii) Toda serie de números positivos y acotada es convergente.
iv) Series absolutamente convergentes. Toda serie absolutamente convergente es convergente.
v) Algunos criterios de convergencia:
   - si Σu_k es convergente y si $|v_k| \leq C u_k \quad \forall k \geq K$, entonces Σv_k es absolutamente convergente.
   - si existe $r \in]0,1[$ tal que $|u_{k+1}| \leq r|u_k| \quad \forall k \geq K$, entonces Σu_k es absolutamente convergente.
   - si existe $r \in]0,1[$ tal que $\sqrt{|u_k|} \leq K$, entonces Σu_k es absolutamente convergente.
   - si (u_k) es una sucesión monótona decreciente convergente a cero, entonces $\Sigma(-1)^{k-1} u_k$ es convergente (no necesariamente absolutamente convergente).
vi) $exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

9.- **Derivación de Funciones.** (15,0 hrs.)

i) Definición: Una función $f : D \rightarrow I\!R$ se dice derivable (o diferenciable) en un punto $a \in \circ D$ (interior del conjunto D) si existe un número d tal que $\lim_{x \rightarrow a} f_a(x) = d$ donde

f_a es la función definida en $D \setminus \{a\}$ por la igualdad $f_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Interpretación geométrica del número d que se llamará derivada de la función f en el punto a y se denotará por $f'(a)$. Estudio del crecimiento y decrecimiento de una función. Aproximación lineal de una función en un punto.

ii) La función derivada de una función f.

iii) Teorema: Una función $f : D \to I\!R$ es derivable en $a \in \circ D$ si y solo si existe un número d y una función $\theta : [a-\delta, a+\delta] \to I\!R$ (con $\delta > 0$) tal que $f(x) = f(a) + d(x-a) + (x-a)\theta(x)$ para todo $x \in [a-\delta, a+\delta]$ y además $\lim_{x \to a} \theta(x) = 0$.

iv) Derivada de una función polinomial.

v) Teorema: si f es derivable, en un punto ella es continua en ese punto.

vi) Derivada de la suma, del producto y del cuociente de dos funciones derivables.

vii) Regla de la cadena: derivada de la composición de dos funciones derivables.

viii) Derivada de la función inversa de una función inyectiva.

ix) Derivada de la función $exp, \ell n, exp_a y Log_a$.

x) Derivada de las funciones $f(x) = x^r$, con $r \in I\!R$.

xi) Derivada de las funciones trigonométricas y sus inversas.

xii) Teorema del valor medio: Dada una función $f : [a,b] \to I\!R$ derivable, entonces existe un punto $t \in]a,b[$ tal que $f'(t) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Corolario: Dada una función $f :]a,b[\to I\!R$ derivable, si la función f' es nula en $]a,b[$ entonces f es una función constante en $]a,b[$.

xiii) Condición necesaria de los puntos máximos y mínimos de una función derivable: Si $f : D \to I\!R$ es derivable y si $c \in \circ D$ es un máximo o mínimo de f en D, entonces $f'(c) = 0$. Esta misma condición es válida si c es un máximo local o un mínimo local. Definición de punto de inflexión.

xiv) Funciones convexas. Caracterización de la convexidad mediante el uso de la función derivada. Condición suficiente de punto mínimo de una función convexa.

xv) Función dos veces derivable y derivada de segundo orden en un punto. Teorema: Una función $f : D \to I\!R$ será dos veces derivable en un punto $a \in \circ D$ si y solo si ella es derivable en a y existe un número s y una función $\theta : [a-\delta, a+\delta] \to I\!R$ tal que $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 s + (x-a)^2\theta(x)$ para todo $x \in [a-\delta, a+\delta]$ y además $\lim_{x \to a} \theta(x) = 0$. Interpretación geométrica de la derivada de segundo orden: concavidad de una función, aproximación cuadrática de una función en un punto.

xvi) La función derivada de segundo orden de una función f.

xvii) Caracterización de la convexidad de una función mediante el uso de la derivada de segundo orden.

xviii) Condiciones necesarias y suficientes de máximos y mínimos locales mediante el uso de la derivada de segundo orden.

xix) Regla de l'Hôpital para el cálculo del límite de un cuociente de funciones.

xx) Derivadas de orden superior y desarrollo de Taylor.

xxii) Método de Newton para la aproximación del mínimo de una función y la aproximación de las raíces de una ecuación.

10.- **Integración.** (20,0 hrs.)

i) Integral de Riemann de una función acotada definida en un intervalo $[a, b]$. Interpretación geométrica (definición de Area) e interpretaciónfísica. Algunos ejemplos.

ii) Toda función continua por tramos en $[a, b]$ es integrable. Toda función monótona y acotada en $[a, b]$ es integrable.

iii) Definición de la integral entre b y a cuando $a > b$. Integral de la suma de dos funciones y del producto de una función por un escalar.

iv) Propiedades de la integral: Si f y g son dos funciones integrables en un intervalo $[a, b]$ se tendrá

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$(b-a) \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a) \cdot \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$g(x) \leq f(x) \text{ para todo } x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

si es f es continua con valores en $I\!R_+$ entonces $\int_a^b f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$ si f y g son continuas entonces

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left[\int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

v) Teorema fundamental del cálculo.

vi) Fórmula de la mediana: Si $f : [a, b] \to I\!R$ es continua, entonces para toda función continua $\phi : [a, b] \to I\!R_+$ (o $I\!R_-$), existe una constante μ, con $\min_{x\in[a,b]} f(x) \leq \mu \leq \max_{x\in[a,b]} f(x)$, tal que $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b \phi(x)dx$. Escribir la igualdad para el caso particular en que $\phi(x0 = 1$ para todo $x \in [a, b]$.

vii) Cambio de variable.

viii) Integración por partes.

ix) Integración de fracciones racionales.

x) Aplicaciones: Cálculo de áreas, cálculo del volumen de un sólido de revolución, cálculo del valor medio ponderado de una función, cálculo de la masa de una varilla no homogénea, cálculo del centro de gravedad de una varilla no homogénea, cálculo del momento de inercia de una varilla no homogénea con respecto a un eje, cálculo de la presión hidrostática.

xi) Curvas en $I\!R^N$ y vector tangente, definición de longitud de arco, integral de un campo escalar sobre una curva. Definición de integral de línea de un campo vectorial. Ejemplos.

xii) Integral de una función sobre un intervalo no acotado.

xiii) Integral de una función no acotada.

xiv) Integración numérica.

11.- **El Espacio Vectorial Normado $I\!R^n$.** (6,0 hrs.)

i) Normas en $I\!R^n$. Equivalencia de las tres normas usuales.

ii) Bola abierta y bola cerrada.

iii) Sucesiones en $I\!R^n$. Operaciones con sucesiones. Convergencia y punto de acumulación de una sucesión.

iv) Una sucesión $(\bar{x}_k)$ en $I\!R^n$ es convergente a un punto $\vec{a}$ si y solo si las sucesiones parciales $((x_1)_k), ((x_2)_k), ..., ((x_n)_k)$ convergen a $a_a, a_2, ..., a_n$ respectivamente.

v) Punto interior y punto adherente de una parte de $I\!R^n$. Caracterización de los puntos adherentes mediante sucesiones.

vi) Interior y adherencia de una parte de $I\!R^n$. Conjunto abierto y conjunto cerrado en $I\!R^n$.

vii) Límite de la suma de dos sucesiones convergentes y límite del producto por un escalar de una sucesión convergente.

viii) Teorema de Bolzano-Weierstrass: Si C es una parte cerrada y acotada en $I\!R^n$ y si $(\vec{x}_k)$ es una sucesión en C, entonces $(\vec{x}_k)$ tiene al menos un punto de acumulación en C.

ix) Teorema de Cauchy: Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión $(\vec{x}_k)$ en $I\!R^n$ sea convergente, es que para todo $\epsilon > 0$ exista un natural K tal que

$$\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\| \leq \epsilon \text{ para todo } i, j \geq K.$$

BIBLIOGRAFIA

- APOSTOL, T., Cálculo, Vol. I, Reverté, (1965).
- CARTAN, H., Calculus Diferencial, Omega, (1972).
- FRIEDMAN, A., Advanced Calculus, Holt-Rinehart and Winston, (1971).
- KITCHEN, J., Calculus of One Variable, Addison-Wesley, (1968).
- LANG, S., Analysis I, Addison-Wesley, (1968).
- SPIVAK, M., Cálculo Infinitesimal, Reverté, (1970).