

# APUNTES DE EDO MA26A

Departamento de Ingeniería Matemática  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Universidad de Chile

14 de mayo de 2003

# Índice general

<b>1. Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	3
1.2. Sistemas Lineales en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	3
1.2.1. Método de sustitución . . . . .	5
1.2.2. Método de Transformada de Laplace . . . . .	5
1.3. Existencia y Unicidad . . . . .	12
1.4. Sistemas Homogéneos . . . . .	17
1.5. Soluciones Particulares . . . . .	21
1.6. Exponencial de una Matriz . . . . .	23
1.6.1. Caso diagonalizable . . . . .	27
1.6.2. Caso no diagonalizable . . . . .	32

# Índice de figuras

1.1. Polución en dos estanques del ejemplo 1.2.1 . . . . .	4
1.2. Comportamiento de la polución en estanque 2 del ejemplo 1.2.2 . . . . .	8
1.3. Masas atmosféricas del ejemplo 1.2.3 . . . . .	9
1.4. Modelamiento de los amortiguadores de un auto del ejemplo 1.6.1 . . . . .	28

# Capítulo 1

## Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales

### 1.1. Introducción

Hasta aquí se han estudiado ecuaciones lineales con una sola función incógnita. Estudiaremos ahora sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, tanto porque permiten modelar problemas físicos que involucran la interacción de varias funciones incógnita, como también porque a ellos pueden reducirse ecuaciones lineales de grado superior.

**Definición 1.1.1.** *Un sistema lineal de EDO en  $\mathbb{K}^n$  (con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) es un sistema de  $n$  ecuaciones escrito de la forma*

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \quad \forall t \in I, \quad X(t_0) = X_0, \quad (1.1)$$

donde  $A(t) \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ ,  $B(t) \in \mathbb{K}^n$  para cada  $t$  en  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $I$  intervalo abierto no vacío y  $X_0 \in \mathbb{K}^n$  son condiciones iniciales en  $t = t_0 \in I$ . En el caso  $B \equiv 0$  se dice que el sistema es homogéneo. En el caso que  $A$  es una matriz constante, se dice que el sistema es de coeficientes constantes.

### 1.2. Sistemas Lineales en $\mathbb{R}^2$

**Ejemplo 1.2.1 (Polución en dos estanques).** Dos estanques 1 y 2, que contienen  $V[m^3]$  de agua, se encuentran interconectados por medio de un canal, por el cual fluye agua desde 1 a 2 a razón de  $b[\frac{m^3}{s}]$ . El sistema es alimentado a través del estanque 1 a razón de  $b[\frac{m^3}{s}]$ , con un poluente de concentración  $\sigma[\frac{kg}{m^3}]$ , que contamina el agua. El agua sale del sistema por un canal del estanque 2, con un caudal de  $b[\frac{m^3}{s}]$ . En esta situación se produce una contaminación del agua en ambos estanques. Para tratar de disminuir este efecto negativo, se propone añadir otro canal que conecte a los dos estanques, para que devuelva flujo de 2 a 1, a razón de  $b\lambda[\frac{m^3}{s}]$ , donde  $\lambda > 0$ . Sin embargo,

para evitar el rebalse del sistema, se debe aumentar el flujo del canal ya existente a  $b(1 + \lambda)[\frac{m^3}{s}]$ . ¿Cuánto ayuda esta solución a disminuir la polución del agua en los estanques?

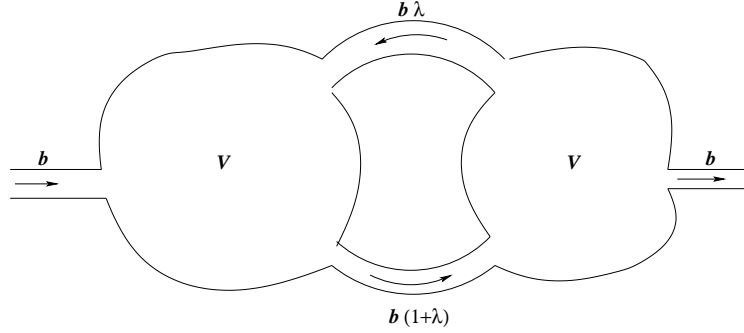


Figura 1.1: Polución en dos estanques del ejemplo 1.2.1

Para el estanque 1, tenemos que la variación de la cantidad de poluente por unidad de tiempo es la diferencia de las concentraciones que entran y las que salen por unidad de tiempo, es decir:

$$x'_1 \left[ \frac{kg}{s} \right] = b \left[ \frac{m^3}{s} \right] \sigma \left[ \frac{kg}{m^3} \right] + b\lambda \left[ \frac{m^3}{s} \right] x_2 [kg] - \frac{1}{V} \left[ \frac{1}{m^3} \right] x_1 [kg] - b(1 + \lambda) \left[ \frac{m^3}{s} \right] x_1 [kg] - \frac{1}{V} \left[ \frac{1}{m^3} \right] x_1 [kg].$$

Repitiendo el razonamiento para el estanque 2, resulta el sistema:

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= b\sigma + \frac{b\lambda}{V_2}x_2(t) - \frac{b(1 + \lambda)}{V_1}x_1(t) \\ x'_2(t) &= \frac{b(1 + \lambda)}{V_1}x_1(t) - \frac{b\lambda}{V_2}x_2(t) - \frac{b}{V_2}x_2(t). \end{aligned}$$

Este es un sistema de ecuaciones, por lo que se puede escribir matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b(1+\lambda)}{V_1} & \frac{b\lambda}{V_2} \\ \frac{b(1+\lambda)}{V_1} & -\frac{b(1+\lambda)}{V_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\sigma \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, es de la forma (1.1), donde

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{b(1+\lambda)}{V_1} & \frac{b\lambda}{V_2} \\ \frac{b(1+\lambda)}{V_1} & -\frac{b(1+\lambda)}{V_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

esto es, un sistema lineal de dos ecuaciones de primer orden no homogéneo a coeficientes constantes.  $\square$

Veamos en general como podría resolverse un sistema lineal en  $\mathbb{R}^2$ , utilizando distintos métodos. Supongamos  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  (matriz constante) y  $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$ .

### 1.2.1. Método de sustitución

Para resolver el sistema,

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2\end{aligned}$$

con las condiciones iniciales  $x_1(0) = x_1^0$  y  $x_2(0) = x_2^0$ , despejamos  $x_1$  de la segunda ecuación, suponiendo  $a_{21} \neq 0$ , esto es

$$x_1 = \frac{x'_2 - a_{22}x_2 - b_2}{a_{21}}$$

y luego derivamos:

$$x'_1 = \frac{x''_2 - a_{22}x'_2 - b'_2}{a_{21}}$$

Reemplazando en la primera ecuación resulta:

$$x''_2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\text{traza}(A)}x'_2 + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{\det(A)}x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 + b'_2,$$

que no es más que una ecuación de segundo orden, con condiciones iniciales

$$\begin{aligned}x_2(0) &= x_2^0 \\x'_2(0) &= a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + b_2(0)\end{aligned}$$

y con polinomio característico asociado  $P(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = \det(A - \lambda\mathcal{I})$ .

### 1.2.2. Método de Transformada de Laplace

Al sistema que teníamos, le aplicamos transformada de Laplace, y resulta:

$$\begin{aligned}s\mathcal{L}x_1 - x_1^0 &= a_{11}\mathcal{L}x_1 + a_{12}\mathcal{L}x_2 + \mathcal{L}b_1 \\s\mathcal{L}x_2 - x_2^0 &= a_{21}\mathcal{L}x_1 + a_{22}\mathcal{L}x_2 + \mathcal{L}b_2.\end{aligned}$$

Así tenemos el sistema:

$$\begin{aligned}(s - a_{11})\mathcal{L}x_1 - a_{12}\mathcal{L}x_2 &= \mathcal{L}b_1 + x_1^0 \quad / (s - a_{22}) \\-a_{21}\mathcal{L}x_1 + (s - a_{22})\mathcal{L}x_2 &= \mathcal{L}b_2 + x_2^0 \quad / a_{12}.\end{aligned}$$

Sumando la ecuaciones resulta:

$$(s - a_{11})(s - a_{22})\mathcal{L}x_1 - a_{12}a_{21}\mathcal{L}x_1 = (s - a_{22})\mathcal{L}b_1 + (s - a_{22})x_1^0 + a_{12}\mathcal{L}b_2 + a_{12}x_2^0.$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}(s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\mathcal{L}x_1 &= \phi(s) \\ P(s)\mathcal{L}(x_1) &= \phi(s),\end{aligned}$$

donde  $\phi(s) = (s - a_{22})(\mathcal{L}_1 + x_1^0) + a_{12}(\mathcal{L}_2 + x_2^0)$  y  $P(s) = s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

De esta forma la solución general del sistema será:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}x_1 &= \frac{(s - a_{22})(\mathcal{L}b_1 + x_1^0) + a_{12}(\mathcal{L}b_2 + x_2^0)}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \mathcal{L}x_2 &= \frac{(s - a_{11})(\mathcal{L}b_2 + x_2^0) + a_{21}(\mathcal{L}b_1 + x_1^0)}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.\end{aligned}$$

**Ejemplo 1.2.2 (continuación polución en dos estanques).** Volviendo al ejemplo de los estanques, si reemplazamos los valores que teníamos en ese sistema, se obtiene:

$$\left(s^2 + b(1 + \lambda)\left(\frac{1}{V} + \frac{1}{V}\right)s + \frac{b^2(1 + \lambda)}{V^2}\right)\mathcal{L}x_1 = \left(s + \frac{b(1 + \lambda)}{V}\right)\left(\frac{b\sigma}{s} + x_1^0\right) + \frac{bx_2^0\lambda}{V}.$$

Resolvamos la ecuación cuadrática del lado izquierdo:

$$s = \frac{-b(1 + \lambda)}{V} \pm \frac{b(1 + \lambda)}{V} \underbrace{\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \lambda}}}_{\theta},$$

y como  $\lambda \geq 0 \implies 1 \geq \theta \geq 0$ , y por tanto resulta:

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{-b(1 + \lambda)}{V}(1 + \theta) < 0 \quad \text{si } \lambda \geq 0 \\ s_2 &= \frac{-b(1 + \lambda)}{V}(1 - \theta) < 0 \quad \text{si } \lambda \geq 0.\end{aligned}$$

Si introducimos los parámetros

$$\alpha = \frac{b(1 + \lambda)}{V}, \quad \beta = \frac{b\lambda}{V},$$

se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}x_1 &= \frac{b\sigma + \alpha x_1^0 + \beta x_2^0}{(s + \alpha(1 + \theta))(s + \alpha(1 - \theta))} + \frac{sx_1^0}{(s + \alpha(1 + \theta))(s + \alpha(1 - \theta))} + \frac{\alpha b\sigma}{s(s + \alpha(1 + \theta))(s + \alpha(1 - \theta))} \\ \mathcal{L}x_2 &= \frac{\alpha(x_1^0 + x_2^0)}{(s + \alpha(1 + \theta))(s + \alpha(1 - \theta))} + \frac{sx_2^0}{(s + \alpha(1 + \theta))(s + \alpha(1 - \theta))} + \frac{\alpha b\sigma}{s(s + \alpha(1 + \theta))(s + \alpha(1 - \theta))}.\end{aligned}$$

Los tres sumandos de cada ecuación anterior tienen una antitransformada conocida:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right) &= \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b} \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right) &= \frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b} \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}\right) &= \frac{(c-b)e^{at} + (a-c)e^{bt} + (b-a)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto las soluciones son:

$$\begin{aligned}x_1 &= -(b\sigma + \alpha x_1^0 + \beta x_2^0) \frac{e^{-\alpha(1+\theta)t} - e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\alpha\theta} + x_1^0 \frac{(1+\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1-\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\theta} + \\ &\quad \alpha b\sigma \frac{(1-\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1+\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t} + 2\theta}{2\alpha^2\theta(1-\theta^2)} \\ x_2 &= -\alpha(x_1^0 + x_2^0) \frac{e^{-\alpha(1+\theta)t} - e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\alpha\theta} + x_2^0 \frac{(1+\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1-\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\theta} + \\ &\quad \alpha b\sigma \frac{(1-\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1+\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t} + 2\theta}{2\alpha^2\theta(1-\theta^2)}.\end{aligned}$$

Luego

$$x_1 = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + C_3,$$

donde  $C_1, C_2, C_3$  son constantes dadas de la agrupación de términos semejantes en la expresión anterior, que por tanto dependen sólo de las condiciones iniciales y de la geometría del sistema. Para  $x_2$  se obtiene análogamente:

$$x_2 = C'_1 e^{s_1 t} + C'_2 e^{s_2 t} + C'_3,$$

con  $C'_1, C'_2, C'_3$  constantes. Es importante notar que estas soluciones son estables, es decir, que cuando  $t \rightarrow \infty$  las soluciones convergen a una solución determinada, y puesto que  $s_1, s_2 < 0$ , entonces :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) &= C_3 = \frac{b\sigma}{\alpha(1-\theta^2)} = \sigma V \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) &= C'_3 = \frac{b\sigma}{\alpha(1-\theta^2)} = \sigma V,\end{aligned}$$

por lo que concluimos que después de un tiempo suficientemente largo, la cantidad de poluente en cada estanque será muy cercana a  $\sigma V$ , independientemente del valor de  $\lambda$ , es decir, tenemos la misma solución que si  $\lambda = 0$ , que era como inicialmente estaba el sistema de estanques. En realidad la situación es más compleja, ya que graficando las soluciones para  $\lambda > 0$  y  $\lambda = 0$  se aprecia que la polución es menor en el caso  $\lambda > 0$  para un intervalo de  $t$  considerable (aunque el límite es el mismo). Ver figura 1.2.2.

□



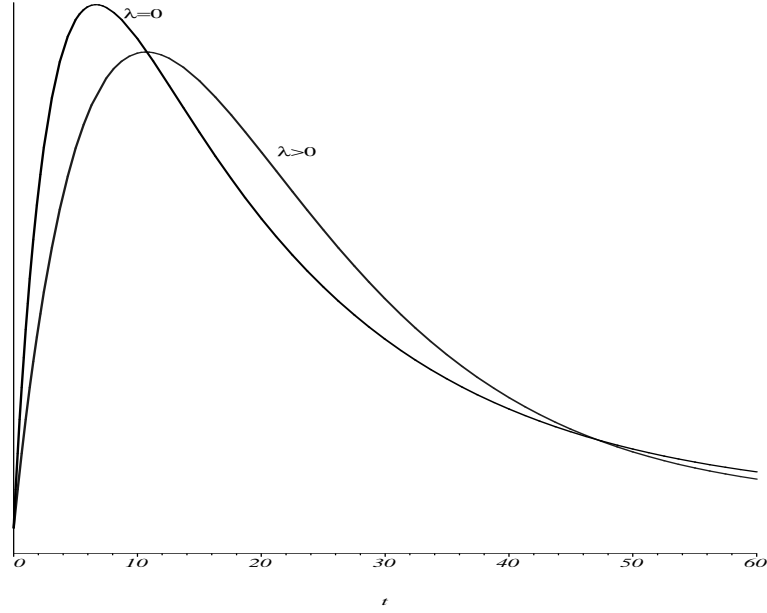


Figura 1.2: Comportamiento de la polución en estanque 2 del ejemplo 1.2.2

Veamos ahora el método de la Transformada de Laplace en caso de un sistema lineal general *a coeficientes constantes*:

$$\begin{aligned} X' &= AX + B(t), & B, X \in \mathbb{R}^n, A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ X(0) &= X_0, & X_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Analizamos la  $i$ -ésima fila del sistema:

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad x_i(0) = x_{0i}.$$

Aplicando Transformada de Laplace a cada ecuación:

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}x_i - x_{0i} &= \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathcal{L}x_j + \mathcal{L}b_i, & i = 1, \dots, n \\ s\mathcal{L}x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathcal{L}x_j &= \mathcal{L}b_i - x_{0i}, & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

O bien, matricialmente:

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}X - A\mathcal{L}X &= \mathcal{L}B + X_0 \\ sI\mathcal{L}X - A\mathcal{L}X &= \mathcal{L}B + X_0, \end{aligned}$$

esto es:

$$(sI - A)\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(B) + X_0.$$

De esta forma, si  $(sI - A) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  es invertible (en realidad basta tomar  $s > \max \Re \sigma(A)$ , donde  $\Re \sigma(A)$  son la parte real de los valores propios de  $A$ ), podemos despejar  $\mathcal{L}(X)$ :

$$\mathcal{L}(X) = (sI - A)^{-1}(\mathcal{L}(B) + X_0)$$

que es la generalización de la transformada de Laplace a sistemas donde  $A$  es una matriz a coeficientes constantes. De lo anterior se deduce que:

**Teorema 1.2.1.** *La solución del sistema lineal 1.1, donde  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  tiene coeficientes constantes, está dada por  $\mathcal{L}(X) = (sI - A)^{-1}(\mathcal{L}(B) + X_0)$ ,  $\forall s > \max \Re \sigma(A)$ .*

**Ejemplo 1.2.3 (Masas atmosféricas).** El siguiente es un modelo para la evolución de las masas atmosféricas en kilotoneladas [kton] de un contaminante en el hemisferio norte ( $c_1$ ) y el hemisferio sur ( $c_2$ ) de la Tierra (ver figura 1.2.3):

$$\begin{aligned} c_1' &= f_1 - \alpha(c_1 - c_2) - \beta c_1 \\ c_2' &= f_2 - \alpha(c_2 - c_1) - \beta c_2. \end{aligned}$$

La constante  $\alpha > 0$  representa inverso del tiempo de intercambio interhemisférico en [1/año] y la constante  $\beta > 0$  el inverso del tiempo de vida química del contaminante en [1/año]. Las emisiones del contaminante en cada hemisferio son constantes conocidas  $f_1 = 30$  y  $f_2 = 10$  en [kton/año]. Inicialmente  $c_1^0 = 84$  y  $c_2^0 = 60$  en [kton].

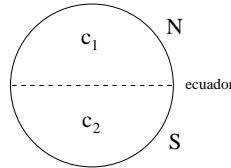


Figura 1.3: Masas atmosféricas del ejemplo 1.2.3

Introduzcamos la masa media entre los dos hemisferios como  $\bar{c}(t) = \frac{1}{2}(c_1(t) + c_2(t))$  y la emisión media como  $\bar{f} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ . Si derivamos la expresión de la masa media con respecto al tiempo obtenemos:

$$\bar{c}'(t) = \frac{1}{2}(c_1'(t) + c_2'(t)).$$

Luego, si sumamos las EDO que tenemos para  $c_1$  y  $c_2$ , nos queda:

$$\begin{aligned} c_1' + c_2' &= 2\bar{c}' = (f_1 + f_2) - \alpha(c_1 - c_2 + c_2 - c_1) - \beta(c_1 + c_2) \\ \bar{c}' &= \bar{f} - \beta\bar{c} \\ \bar{c}' &= 20 - \beta\bar{c}, \end{aligned}$$

que es una EDO para  $\bar{c}$ , con condiciones iniciales dadas, i.e.,

$$\bar{c}'(0) = \frac{1}{2}(c_1(0) + c_2(0)) = \frac{1}{2}(84 + 60)[kton] = 72[kton].$$

Asimismo,

$$\bar{c}'(0) = \bar{f} - \beta\bar{c}(0) = \frac{1}{2}(30 + 10) - 72\beta = [20 - 72\beta][kton/año],$$

donde  $\beta$  es desconocido.

Un método sencillo para resolver la EDO anterior es considerar la ecuación homogénea asociada y la solución particular,  $\bar{c}_{part} = cte = \bar{f}/\beta$ . La homogénea,

$$\bar{c}' + \beta\bar{c} = 0,$$

que tiene asociado el polinomio característico  $\lambda + \beta = 0$ , de donde:

$$\bar{c}_{hom} = Ae^{-\beta t}, \quad A \text{ constante a determinar.}$$

Luego, la solución final es:

$$\bar{c}(t) = Ae^{-\beta t} + \frac{\bar{f}}{\beta},$$

de aquí que  $\bar{c}(0) = 72 = Ae^0 + \bar{f}/\beta = A + \bar{f}/\beta$ , luego,  $A = 72 - \bar{f}/\beta$  y

$$\bar{c}(t) = 72e^{-\beta t} + \frac{\bar{f}}{\beta}(1 - e^{-\beta t}).$$

Si se estima que el límite de  $\bar{c}(t)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  es de 100 [kton], podemos encontrar una estimación para  $\beta^{-1}$ , esto es, para los años de vida del contaminante:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{c}(t) = 100[kton] = \lim_{t \rightarrow \infty} [72e^{-\beta t} + \frac{\bar{f}}{\beta}(1 - e^{-\beta t})] = \frac{\bar{f}}{\beta},$$

pero  $\bar{f} = 20$  [kton/año]. Luego,

$$\beta^{-1} = \frac{100[kton]}{20[kton/año]} = 5 \text{ [años]}.$$

Por lo tanto, los años de vida de cada contaminante son 5 años.

Para resolver el sistema podemos utilizar el método de la Transformada de Laplace a sistemas lineales. Si escribimos matricialmente el sistema de la forma  $C' = AC + B$ , con

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & \alpha \\ \alpha & -\alpha - \beta \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

entonces, usando el Teorema 1.2.1

$$(sI - A)^{-1}(\mathcal{L}B + X_0) = \begin{pmatrix} s + \alpha + \beta & -\alpha \\ -\alpha & s + \alpha + \beta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{f_1}{s} + c_1^0 \\ \frac{f_2}{s} + c_2^0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (f_1 + c_2^0\alpha + c_1^0\alpha + c_1^0\beta)\phi_1(s) + c_1^0\phi_2(s) + (f_1\alpha + f_1\beta + f_2\alpha)\phi_3(s) \\ (f_2 + c_1^0\alpha + c_2^0\alpha + c_2^0\beta)\phi_1(s) + c_2^0\phi_2(s) + (f_2\alpha + f_2\beta + f_1\alpha)\phi_3(s) \end{pmatrix},$$

donde

$$\phi_1(s) = \frac{1}{(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)}, \quad \phi_2(s) = \frac{s}{(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)}, \quad \phi_3(s) = \frac{1}{s(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)}.$$

Para terminar, sólo falta encontrar las antitransformadas de cada componente del vector, lo que se reduce a encontrar las antitransformadas de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$ . Para esto usaremos una buena receta: si

$$\phi(s) = \frac{A}{s - a} + \frac{B}{s - b} + \frac{C}{s - c},$$

con  $a$ ,  $b$  y  $c$  distintos, entonces

$$A = \lim_{s \rightarrow a} (s - a)\phi(s), \quad B = \lim_{s \rightarrow b} (s - b)\phi(s), \quad \text{y} \quad C = \lim_{s \rightarrow c} (s - c)\phi(s).$$

Como  $\phi_1(s) = \frac{1}{(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)} = \frac{A_1}{s + \beta} + \frac{B_1}{s + 2\alpha + \beta}$ , hallamos  $A_1$ :

$$\lim_{s \rightarrow -\beta} \phi_1(s)(s + \beta) = A = \lim_{s \rightarrow -\beta} \frac{s + \beta}{(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)} = \lim_{s \rightarrow -\beta} \frac{1}{s + 2\alpha + \beta} = \frac{1}{2\alpha}.$$

De la misma manera,  $B_1 = -\frac{1}{2\alpha}$ , luego,

$$\phi_1(s) = \frac{1}{2\alpha(s + \beta)} - \frac{1}{2\alpha(s + 2\alpha + \beta)}.$$

Para  $\phi_2$ ,

$$\phi_2(s) = \frac{s}{(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)} = s \left[ \frac{A_2}{s + \beta} + \frac{B_2}{s + 2\alpha + \beta} \right] = \frac{1}{2\alpha} \left[ \frac{s}{s + \beta} - \frac{s}{s + 2\alpha + \beta} \right].$$

Por último,

$$\phi_3(s) = \frac{A_3}{s} + \frac{B_3}{s + \beta} + \frac{C_3}{s + 2\alpha + \beta},$$

y utilizando la receta,

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)} = \frac{1}{\beta(2\alpha + \beta)} \\ B = \lim_{s \rightarrow -\beta} \frac{s + \beta}{s(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)} = -\frac{1}{2\alpha\beta} \\ C = \lim_{s \rightarrow -(2\alpha + \beta)} \frac{s + 2\alpha + \beta}{s(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)} = \frac{1}{2\alpha(2\alpha + \beta)}.$$

Aplicando ahora antitransformada a estas funciones, asumiendo que si  $\mathcal{L}[f] = g$  entonces  $\mathcal{L}^{-1}[g] = f$  en ctp, que  $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+a}] = e^{-at}$ , y  $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s+a}] = \delta(t) - ae^{-at}$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[\phi_1(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2\alpha(s+\beta)} - \frac{1}{2\alpha(s+2\alpha+\beta)}\right] = \frac{1}{2\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\beta}\right] - \frac{1}{2\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2\alpha+\beta}\right] \\
&= \frac{1}{2\alpha}e^{-\beta t} - \frac{1}{2\alpha}e^{-(2\alpha+\beta)t} \\
\mathcal{L}^{-1}[\phi_2(s)] &= \frac{1}{2\alpha}(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s+\beta}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s+2\alpha+\beta}\right]) = \frac{1}{2\alpha}(\delta(t) - \beta e^{-\beta t} - \delta(t) + (2\alpha+\beta)e^{-(2\alpha+\beta)t}) \\
&= \frac{1}{2\alpha}((2\alpha+\beta)e^{-(2\alpha+\beta)t} - \beta e^{-\beta t}) \\
\mathcal{L}^{-1}[\phi_3(s)] &= \frac{1}{\beta(2\alpha+\beta)}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{2\alpha\beta}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\beta}\right] + \frac{1}{2\alpha(2\alpha+\beta)}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2\alpha+\beta}\right] \\
&= \frac{1}{\beta(2\alpha+\beta)} - \frac{1}{2\alpha\beta}e^{-\beta t} + \frac{1}{2\alpha(2\alpha+\beta)}e^{-(2\alpha+\beta)t}.
\end{aligned}$$

Finalmente, agrupando constantes, la cantidad de contaminante en cada hemisferio resulta:

$$\begin{aligned}
c_1(t) &= p_1 e^{-\beta t} + q_1 e^{-(2\alpha+\beta)t} + r_1 \\
c_2(t) &= p_2 e^{-\beta t} + q_2 e^{-(2\alpha+\beta)t} + r_2,
\end{aligned}$$

donde  $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$ , son constantes dependientes sólo de  $c_1^0, c_2^0, f_1, f_2, \alpha$  y  $\beta$ .

Es interesante notar que después de un tiempo suficientemente largo, se llega a un equilibrio en las cantidades de contaminación, que para el hemisferio Norte es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_1 = r_1 = \frac{(\alpha + \beta)f_1 + \alpha f_2}{\beta(2\alpha + \beta)}$$

y para el hemisferio Sur es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_2 = r_2 = \frac{\alpha f_1 + (\alpha + \beta)f_2}{\beta(2\alpha + \beta)}.$$

□

### 1.3. Existencia y Unicidad

Dado que los sistemas lineales se pueden escribir de forma tan similar a las ecuaciones lineales de primer orden escalares, y además todavía sirven métodos como Laplace (extendido a matrices), queremos tener otras buenas propiedades, en particular un Teorema de Existencia y Unicidad. Para ello partamos suponiendo que resolveremos el sistema en un subintervalo  $I_0$  cerrado y acotado de  $I$  y  $t_0 \in I_0$ . Introduzcamos algunos espacios:

**Definición 1.3.1.**  $\mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \text{las componentes } f_i \text{ de } f \text{ son funciones continuas en } I_0, \forall i = 1, \dots, n\}$ .

**Definición 1.3.2.**  $\mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^{n \times n}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{las componentes } f_{ij} \text{ de } f \text{ son funciones continuas en } I_0, \forall i, j = 1, \dots, n\}$ .

**Teorema 1.3.1 (Existencia y Unicidad).** Si  $A \in \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^{n \times n})$  y  $B \in \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$ , entonces dado  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $t_0 \in I_0$ , existe una única solución  $X \in \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$  del sistema lineal:

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t), \quad t \in I_0 \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned}$$

tal que  $X' \in \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$ .

Para la demostración de este teorema primero escribiremos el sistema diferencial en forma integral. Luego, usaremos un operador que entregue esta forma integral y veremos que sus puntos fijos son soluciones del sistema en cuestión. Finalmente, demostraremos que la aplicación es contractante, utilizando una norma apropiada y concluiremos que tiene un único punto fijo. En realidad, esta demostración hace uso del Teorema del punto fijo, que se deduce del hecho de que toda sucesión de Cauchy es convergente. Esto es cierto en  $\mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$  con la norma del supremo u otra similar, siempre que  $I_0$  sea cerrado y acotado.

1. Supongamos por un momento que  $X(t) \in \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$ . Además, dado que  $A \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$  y  $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ , tenemos la continuidad de  $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ . Tomando la coordenada  $i$ -ésima,

$$x'_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + b_i(t).$$

Integrando entre  $t_0$  y  $t$ , con  $t \in I_0$

$$\int_{t_0}^t x'_i(s)ds = \int_{t_0}^t \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(s)x_j(s) + b_i(s) \right) ds.$$

Luego, por Teo. Fundamenetal del Cálculo

$$x_i(t) = x_i^0 + \int_{t_0}^t \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(s)x_j(s) + b_i(s) \right) ds.$$

Escribiendo matricialmente, lo anterior se traduce en:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(s)X(s) + B(s))ds,$$

donde la integral de un vector se entiende como la integral de cada componente.

2. Para  $X_0$  fijo, definamos la aplicación:

$$\begin{aligned}\Psi : \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n) \\ X &\rightarrow \Psi(X),\end{aligned}$$

donde  $\Psi(X)(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(s)X(s) + B(s))ds$ ,  $\forall t \in I_0$ , de esta forma si  $\Psi$  tiene algún punto fijo, es decir, si existe una función  $\bar{X} \in \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\bar{X} = \Psi(\bar{X})$ , está será la solución (continua) que estamos buscando.

3. Para estudiar la convergencia en el espacio vectorial  $\mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$ , introduciremos la norma

$$\|X(\cdot)\|_M = \sup_{t \in I_0} \{e^{-2M|t-t_0|} \|X(t)\|_2\},$$

donde  $\|\cdot\|_2$  representa la norma euclidiana de  $\mathbb{R}^n$ , que de ahora en adelante denotaremos simplemente como  $\|\cdot\|$ . Es sencillo verificar que la norma recién definida efectivamente es una norma, lo que se deja al lector.

También es útil introducir la norma de Frobenius para matrices en  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Antes de seguir, reparemos en algunas propiedades. Sea  $Y \in \mathbb{R}^n$  y supongamos sin pérdida de generalidad que  $I_0 = [t_0, t_0 + T]$ , para algún  $T > 0$ .

- (a)  $\left\| \int_{t_0}^t Y(s)ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|Y(s)\| ds$ ,  $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$ .  
(b)  $\|A(s)Y(s)\| \leq M \|Y(s)\|$ , con  $M \in \mathbb{R}$  (constante),  $\forall s \in [t_0, t_0 + T]$ .

La propiedad (a) Es sencilla usando la propiedad de monotonía de las integrales reales y Cauchy-Schwartz. Para ver (b) notemos que:

$$\begin{aligned}\|A(s)Y(s)\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}(s)y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}(s)y_j \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(s)y_j \right)^2 \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}^2(s) \cdot \sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2(s) \right) \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \\ &= \|A(s)\|_F^2 \|Y\|^2.\end{aligned}$$

Pero  $\|A(s)\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2(s)}$  es una función continua de  $s$  en un intervalo cerrado y acotado, por lo que alcanza su máximo, que llamaremos  $M$ , de donde se tiene la propiedad (b).

Veamos ahora que  $\Psi$  es contractante para la nueva norma  $\|\cdot\|_M$ , ( el  $M$  escogido al crear la norma es justamente el  $M$  de la propiedad (b)). Sean  $Y, Z \in \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$ , calculemos para  $t \in I_0$

$$\begin{aligned}
\|\Psi(Y)(t) - \Psi(Z)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (A(s)Y(s) + B(s))ds - \int_{t_0}^t (A(s)Z(s) + B(s))ds \right\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^t A(s)(Y(s) - Z(s))ds \right\| \\
&\stackrel{\text{por (a)}}{\leq} \int_{t_0}^t \|A(s)(Y(s) - Z(s))\| ds \\
&\stackrel{\text{por (b)}}{\leq} M \int_{t_0}^t \|Y(s) - Z(s)\| ds \\
&= M \int_{t_0}^t \|Y(s) - Z(s)\| e^{2M(s-t_0)} e^{-2M(s-t_0)} ds \\
&\leq M \|Y - Z\|_M \int_{t_0}^t e^{2M(s-t_0)} ds \\
&= M \|Y - Z\|_M \cdot \left( \frac{e^{2M(t-t_0)}}{2M} - \frac{e^{2M(t_0-t_0)}}{2M} \right) \\
&= \frac{e^{2M(t-t_0)}}{2} \|Y - Z\|_M - \underbrace{\frac{1}{2} \|Y - Z\|_M}_{\leq 0} \\
&\leq \frac{e^{2M(t-t_0)}}{2} \|Y - Z\|_M.
\end{aligned}$$

Luego tenemos  $\forall t \in I_0$ :

$$e^{-2M(t-t_0)} \|\Psi(Y)(t) - \Psi(Z)(t)\| \leq \frac{1}{2} \|Y - Z\|_M.$$

Tomando supremo

$$\begin{aligned}
e^{-2M(t-t_0)} \|\Psi(Y)(t) - \Psi(Z)(t)\| &\leq \frac{1}{2} \|Y - Z\|_M \quad / \cdot \sup_{t \in I_0} \\
\|\Psi(Y) - \Psi(Z)\|_M &\leq \frac{1}{2} \|Y - Z\|_M.
\end{aligned}$$

Por la tanto  $\Psi$  es contractante con constante  $L = 1/2$ .



4. Recordando el Teo. de Punto fijo de Banach:

**Teorema 1.3.2 (Punto fijo de Banach).** *Sea un espacio  $X$  dotado de una norma tal que toda sucesión de Cauchy es convergente, y sea  $\Psi : X \rightarrow X$  una contracción, entonces existe un único punto fijo  $\bar{x} \in X$ .*

Tenemos que existe un único punto fijo de la aplicación construida, y por ende una única solución del sistema lineal estudiado. Notar que *a posteriori*, la solución es continua y del sistema se deduce que su derivada también lo es.

*Observación.* En el teorema anterior demostramos que existe una única solución del sistema lineal de primer orden, suponiendo que  $I_0$  era un intervalo cerrado y acotado. En el caso que el problema este definido en un intervalo  $I$  con un extremo abierto acotado, es decir, de la forma  $I = [t_0, t_0 + T[$ , se construye una solución  $X_n \in [t_0, t_0 + T - \frac{1}{n}]$ , y se considera la solución:

$$X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T[.$$

Notar que lo anterior define puntualmente la solución. Para ver que el límite está bien definido, tomemos  $\bar{t} \in I$ , se tiene entonces que  $\exists n_0 : \bar{t} \in [t_0, t_0 + T - \frac{1}{n}]$ ,  $\forall n \geq n_0$ . Además,  $X_n(\bar{t})$  es constante,  $\forall n \geq n_0$ , pues de lo contrario se tendrían por lo menos dos soluciones de la misma ecuación diferencial definidas en un intervalo cerrado y acotado que difieren en  $\bar{t}$ , lo que contradice el Teo. de Existencia y Unicidad demostrado. Así, la sucesión  $X_n(\bar{t})$  tiene garantizada la convergencia. También hay que considerar que la solución no tiene que ser necesariamente acotada, y puede diverger en  $T$ , por ejemplo en el caso en que  $A$  y  $B$  sean funciones no acotadas en el intervalo estudiado.

En el caso en que  $I$  no fuese acotado, por ejemplo  $I = [t_0, \infty[$ , se construye una solución  $X_n \in I = [t_0, n]$ , y se considera la solución

$$X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) \quad \forall t \in [t_0, \infty[.$$

Las mismas notas sobre la correcta definición de este límite puntual anteriormente hechas, siguen siendo válidas.

**Corolarios 1.3.1.** (a) *Si un sistema lineal homogéneo tiene una condición inicial nula, entonces la única solución del sistema es la función nula.*

$$\left. \begin{array}{l} X' = AX \\ X(t_0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow X(t) = 0, \quad \forall t \in I$$

(b) *Si tenemos un sistema lineal con dos trayectorias que coinciden en un punto, entonces son la misma; interpretado de otra forma, dos trayectorias  $X(t)$  e  $Y(t) \in \mathbb{R}^n$  distintas no se cruzan (determinismo).*

$$\left. \begin{array}{l} X' = A(t)X + B(t) \\ Y' = A(t)Y + B(t) \\ X(t_0) = Y(t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow X(t) = Y(t), \quad \forall t \in I$$

## 1.4. Sistemas Homogéneos

En ecuaciones diferenciales es habitual estudiar primero las soluciones de la parte homogénea de las ecuaciones, porque ellas entregan importante información para luego deducir las soluciones generales. Partamos entonces estudiando detenidamente los sistemas homogéneos.

**Definición 1.4.1.**

$$H = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X' = A(t)X, t \in I\}.$$

**Definición 1.4.2.**

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X' = A(t)X + B(t), t \in I\}.$$

Además, del Teo. de Existencia y Unicidad, sabemos que para cualquier condición inicial, el sistema lineal homogéneo tiene una única solución, en particular para la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , y entonces podemos dar la siguiente definición:

**Definición 1.4.3.** Llamaremos  $\phi_k$  solución fundamental canónica  $k$ -ésima asociada a  $t_0 \in I$  a la solución del sistema:

$$\begin{aligned}\phi'_k &= A(t)\phi_k, \quad t \in I \\ \phi_k(t_0) &= e_k, \quad \forall k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

A la matriz formada por las soluciones fundamentales canónicas asociada a  $t_0$ , es decir, que en su columna  $k$ -ésima tiene a  $\phi_k$ , se llamará matriz canónica fundamental asociada a  $t_0$ , y se denotará por  $\Phi$

**Teorema 1.4.1.** El conjunto  $\{\phi_k\}_{k=1}^n$  es una base de  $H$ , y por lo tanto,  $\dim(H) = n$ . A esta base se le llama base fundamental canónica

**Ejemplo 1.4.1 (Cadena con resortes).** Se tiene una cadena de  $n$  cuentas conectadas por resortes idénticos de constante elástica  $k$  y largo natural  $l_0$ . Cada cuenta de masa  $m_i$ ,  $i = 1 \dots n$ , tiene libertad para oscilar horizontalmente, pero cada una presenta un rozamiento lineal con el medio, de constante  $c_i$ ,  $i = 1 \dots n$ . Para cada cuenta tenemos la ecuación de movimiento:

$$mx_i'' = -c_i x_i' - k[(x_i - x_{i-1}) + (x_i - x_{i+1})], \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

donde se ha definido  $x_0 = x_{n+1} = 0$ .

Matricialmente tenemos:

$$\begin{pmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_{n-1} \\ & & & & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}'' = - \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{n-1} \\ & & & & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}' - k \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix},$$

es decir, tiene la forma

$$MX'' + CX' + KX = 0,$$

con  $X \in \mathbb{R}^n$ . Para transformarlo en un sistema lineal, hacemos el cambio de variables:

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} \Rightarrow Z' = \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix},$$

pero

$$X'' = -M^{-1}K - M^{-1}C.$$

Por lo tanto, se puede escribir el sistema lineal:

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} Z.$$

Para determinar el conjunto de soluciones fundamentales asociadas, por ejemplo, al origen, bastará resolver el sistema anterior con condiciones iniciales en cada vector canónico de  $\mathbb{R}^{2n}$

$$Z(0) = e_k.$$

(En total son  $2n$  sistemas con condiciones iniciales a resolver). □

*Demostración del Teorema 1.4.1.* Partamos probando que efectivamente es generador, es decir,

$$\langle \{\phi_k\}_{k=1}^n \rangle = H.$$

Sea  $X_h \in H$  la solución del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} X_h' &= AX_h, \quad \forall t \in I \\ X_h(t_0) &= X_0. \end{aligned}$$

Descompongamos  $X_0$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ :

$$X_0 = x_0^1 e_1 + \cdots + x_0^n e_n, \quad x_0^1, \dots, x_0^n \in \mathbb{R}.$$

Mostraremos que  $X_h = x_0^1 \phi_1 + \cdots + x_0^n \phi_n$ ; para esto definimos  $\forall t \in I$ :

$$\begin{aligned} Z(t) &= x_0^1 \phi_1 + \cdots + x_0^n \phi_n, & \phi_k &= \phi_k(t) \\ \Rightarrow Z'(t) &= x_0^1 \phi_1' + \cdots + x_0^n \phi_n', & \text{pero } \phi_k' &= A \phi_k \\ \Rightarrow Z(t) &= A(x_0^1 \phi_1 + \cdots + x_0^n \phi_n) = AZ(t) \end{aligned}$$

Y además, por la definición de los  $\phi_k$  tenemos que:  $Z(t_0) = x_0^1 e_1 + \cdots + x_0^n e_n$   
 $\therefore Z$  es solución del mismo sistema de ecuaciones diferenciales que  $X_h$ , con las mismas condiciones iniciales. Luego, por teorema de existencia y unicidad,  $Z(t) = X_h(t) \quad \forall t \in I$

*Observación.* Notar que lo anterior demuestra también que si se tienen soluciones del sistema homogéneo, entonces cualquier combinación lineal de ellas también satisface el sistema, salvo las condiciones iniciales.

Ahora veamos que  $\{\phi_k\}_{k=1}^n$  son soluciones l.i.,

*P.d.q.*

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(t) = 0, \quad \forall t \Rightarrow \alpha_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \end{bmatrix}}_{\Phi} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si pudiéramos probar que  $\det(\Phi(t)) \neq 0, \forall t$ , entonces la única solución del sistema es  $\vec{\alpha} = 0$ , que era lo que hay que demostrar. Se define el Wronskiano de una familia de funciones vectoriales, justamente como el determinante de la matriz que tiene en sus columnas dichas funciones, así

$$W(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = \det(\Phi)$$

Notamos también que:

$$W(t_0) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det(I_n) = 1$$

Así el Wronskiano es no nulo en un punto, lo que implica que no se anula en todo el intervalo. En efecto, razonando por contradicción, supongamos que existe  $\bar{t} \in I$  tal que  $W(\bar{t}) = 0$ , como

el Wronskiano corresponde al determinante de la matriz fundamental canónica, tenemos que esta matriz tiene sus columnas l.d., es decir,  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$  constantes no todas nulas, tal que:

$$\alpha_1 \phi_1(\bar{t}) + \dots + \alpha_n \phi_n(\bar{t}) = 0$$

Pero vimos que cualquier combinación lineal de soluciones fundamentales canónicas, también es solución del sistema homogéneo, y claramente la función nula también es solución con la condición inicial impuesta en  $\bar{t}$ . Por lo tanto, por Teo. de Existencia y Unicidad,

$$\alpha_1 \phi_1(t) + \dots + \alpha_n \phi_n(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

lo que es una contradicción, pues en  $t_0$  no se cumple. Luego, concluimos la independencia lineal buscada, y por tanto,  $\dim(H) = n$   $\square$

**Corolario 1.4.1.** *La solución del sistema homogéneo*

$$\begin{aligned} X'_h &= AX_h \quad \forall t \in I \\ X_h(t_0) &= X_0 \end{aligned}$$

*está dada por*

$$X_h = x_0^1 \phi_1 + \dots + x_0^n \phi_n,$$

*o equivalentemente*

$$X_h = \Phi(t) X_0.$$

**Corolario 1.4.2 (Propiedades de la matriz canónica fundamental  $\Phi$  asociada a  $t_0$ ).**

$$(a) \quad \Phi(t_0) = I_n$$

$$(b) \quad \Phi'(t) = A\Phi(t)$$

$$(c) \quad \Phi \text{ es única.}$$

$$(d) \quad \Phi \text{ es invertible,} \quad \forall t \in I$$

*Demostración.* (a) Es directa de la definición.

(b) Entendiendo la derivada en el sentido que se deriva componente a componente, se tiene que:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \phi'_1 & \phi'_2 & \vdots & \vdots & \phi'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\phi_1 & A\phi_2 & \vdots & \vdots & A\phi_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \vdots & \vdots & \phi_n \end{pmatrix} = A\Phi$$

(c) Se concluye por Teo. de Existencia y Unicidad aplicado al sistema formado por (b), con las condiciones iniciales de (a).

(d) Se probó en la demostración del teorema anterior que si:

$$\exists t_0 \det(\Phi(t_0)) \neq 0 \Rightarrow \forall t \in I \det(\Phi(t)) \neq 0$$

Lo que prueba lo pedido, pues  $\det(\Phi(t_0)) = 1$ .  $\square$

Para generalizar los resultados anteriores, definamos una matriz fundamental (no necesariamente canónica) como la matriz  $M(t) = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \vdots & \psi_n \end{bmatrix}$ ,  $\forall t \in I$ , donde  $\psi$  son soluciones del sistema:

$$\begin{aligned}\psi'_k &= A(t)\psi_k, \quad t, t_0 \in I \\ \psi_k(t_0) &= v_k, \quad \forall k = 1, \dots, n\end{aligned}$$

donde  $\{\psi_i\}_{i=1}^n$  es una base (no necesariamente canónica) de  $\mathbb{R}^n$ , y entonces concluimos el siguiente corolario:

**Corolario 1.4.3.** *Sea una matriz fundamental  $M(t)$ , entonces:*

- (i) *Si existe  $t_0$  tal que  $\det(M(t_0)) \neq 0$ , entonces  $\det(M(t)) \neq 0$ ,  $\forall t \in I$ .*
- (ii) *Si el sistema  $X' = AX$  tiene condiciones iniciales  $X_0$  no nulas, entonces  $X(t) = M(t)M^{-1}(t_0)X_0$ .*

*Demostración.* (i) Consecuencia directa.

(ii) De la observación del teorema anterior, tenemos que una combinación lineal de los  $\psi_i$  resuelve el sistema, es decir:

$$X(t) = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots + c_n\psi_n = MC$$

donde el vector  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$  queda dado por las condiciones iniciales, entonces

$$X(t_0) = M(t_0)C \Rightarrow C = M(t_0)^{-1}X_0 \Rightarrow X(t) = M(t)M^{-1}(t_0)X_0$$

□

## 1.5. Soluciones Particulares

Teniendo bien estudiadas las soluciones del sistema homogéneo, sólo falta encontrar las soluciones particulares, gracias a que se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 1.5.1.** *Dada una solución particular  $X_p$  de  $X' = AX + B$ , toda solución del sistema se escribe como suma de  $X_p$  y alguna solución del sistema homogéneo.*

$$X_G = X_p + X_h.$$

*Demostración.* Sea  $X_G$  una solución general del sistema, y  $X_p$  una particular, entonces:

$$\begin{aligned}X'_G &= AX_G + B \\ X'_p &= AX_p + B,\end{aligned}$$

restando las ecuaciones:

$$(X_G - X_p)' = A(X_G - X_p).$$

Luego  $X_G - X_p$  es solución de la homogénea, es decir:

$$X_h = X_G - X_p \Rightarrow X_G = X_p + X_h.$$

□

Ahora, buscamos una fórmula de variación de parámetros, es decir, buscamos  $X_p = \Phi(t)C(t)$ , ecuación que podemos reemplazar en  $X_p' = AX_p + B$ , pero falta una fórmula para derivar productos de matrices, que se estudia en el siguiente lema:

**Lema 1.5.1.** Sean  $A(t) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $B(t) \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$ ,  $X(t) \in \mathbb{R}^n$

$$i) (A(t)X(t))' = A'(t)X(t) + A(t)X'(t)$$

$$ii) (A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$$

*Demostración.* (i) Por componentes:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) \right)' &= \sum_{j=1}^n (a_{ij}(t)x_j(t))' = \sum_{j=1}^n (a'_{ij}(t)x_j(t) + a_{ij}(t)x'_j(t)) \\ &= \sum_{j=1}^n a'_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x'_j(t) \end{aligned}$$

(ii) Análogo.

□

Luego, volviendo al problema de variación de parámetros, podemos reemplazar  $X_p = \Phi(t)C(t)$  y derivar:

$$\begin{aligned} X_p'(t) &= A(t)X_p(t) + B(t) \\ \Rightarrow (\Phi(t)C(t))' &= A(t)\Phi(t)C(t) + B(t) \\ \Rightarrow \Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) &= A(t)\Phi(t)C(t) + B(t) \\ \Rightarrow C'(t) &= \Phi^{-1}(t)B(t) \\ \Rightarrow C(t) &= \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $X_p = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds$ , y se concluye el siguiente teorema

**Teorema 1.5.2 (Variación de Parámetros).** La solución del sistema:

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) &= X_0, \end{aligned}$$

está dado por :

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds,$$

donde  $\Phi$  es la matriz fundamental canónica asociada a  $t_0$ .

## 1.6. Exponencial de una Matriz

Para calcular  $\Phi(t)$  resulta útil la noción de exponencial de una matriz:

**Definición 1.6.1 (Exponencial de una Matriz).** Sea  $M(t) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . La exponencial de  $M$  se define como:

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + \frac{M^2}{2!} + \cdots + \frac{M^n}{n!} + \cdots$$

Como estamos tratando en general con series de funciones en cada componente, es útil tener presente el siguiente lema:

**Lema 1.6.1 (Criterio  $M$  de Weierstrass).** Sean  $f_k : S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ \forall k \in \mathbb{N}$  funciones. Si existe una sucesión  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de reales positivos tales que

$$|f_k(x)| \leq M_k, \forall n > n_0, \forall x \in S,$$

y la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$  converge, entonces la serie de funciones  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  converge uniformemente en  $S$ .

*Demostración.* Como  $|f_k(x)| \leq M_k, \forall n > n_0, \forall x \in S$ , por criterio de comparación de series tenemos que para cada  $x \in S$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  converge (convergencia puntual). Definamos entonces  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ .

Sean  $m > n > n_0$ , hagamos la diferencia

$$\left| \sum_{k=1}^m f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^m M_k = \sum_{k=1}^m M_k - \sum_{k=1}^n M_k.$$

Como la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$  converge, podemos tomar límite  $m \rightarrow \infty$ :

$$\left| g(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^n M_k.$$

Pero como la serie de los  $M_k$  converge, tenemos que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > n_0, \forall n \geq n_0, \left| g(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq \epsilon, \forall x \in S.$$

Recordando que  $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ , se tiene la convergencia uniforme. □



**Teorema 1.6.1.** *Si las componentes de la matriz  $M(t)$  están uniformemente acotadas en un intervalo  $I$ , entonces cada componente de  $e^{M(t)}$  converge uniformemente en  $I$ .*

*Demostración.* P.d.q.  $(e^{M(t)})_{ij}$  converge uniformemente en  $I$ .

Tenemos por definición que

$$(e^{M(t)})_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M^k(t))_{ij}}{k!}.$$

Esto es una serie de funciones, por lo que para demostrar la convergencia uniforme usaremos el criterio  $M$  de Weierstrass. Veamos que, como cada componente está uniformemente acotada en  $I$ , se tiene:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall i, j \quad |(M(t))_{ij}| \leq \alpha, \forall t \in I.$$

Luego,

$$\forall i, j \quad |(M^2)_{ij}| \leq \left| \sum_{k=1}^n (M)_{ik}(M)_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n |(M)_{ik}| |(M)_{kj}| \leq \alpha^2 n$$

Así, por inducción, se tiene:

$$\forall k > 0 \quad \forall i, j \quad |(M^k)_{ij}| \leq \alpha^k n^{k-1}, \forall t \in I.$$

De esta forma encontramos una cota para los términos de la serie independiente de  $t$

$$\forall k > 0 \quad \forall i, j \quad \left| \frac{(M^k(t))_{ij}}{k!} \right| \leq \alpha^k n^{k-1}, \forall t \in I.$$

Sólo falta ver que la serie se estas cotas converge, en efecto:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \frac{\alpha^k n^{k-1}}{k!} &= 1 + \sum_{k=0}^p \frac{\alpha^k n^{k-1}}{k!} - \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^p \frac{\alpha^k n^k}{k!} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Por tanto converge, incluso sabemos cuando vale:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k n^{k-1}}{k!} = 1 + \frac{e^{\alpha n}}{n} - \frac{1}{n}$$

Finalmente, por criterio  $M$  de Weierstras, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(M^k(t))_{ij}}{k!}$$

converge uniformemente en  $I$ , y por tanto lo hace también

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M^k(t))_{ij}}{k!}.$$

□

Algunas propiedades de la exponencial de una matriz, son:

**Propiedades 1.6.1.** Sean  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  matrices constantes,  $t, s \in \mathbb{R}$ , entonces:

1.  $e^{0 \cdot t} = I$
2.  $e^{A \cdot 0} = I$
3.  $e^{0_{n \times n}} = I_n$
4.  $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$
5.  $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$
6.  $e^{At}$  es invertible, y  $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$
7.  $AB = BA \Leftrightarrow B e^{At} = e^{At} B$
8.  $AB = BA \Leftrightarrow e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t}$

*Demostración.* Las propiedades 1), 2), 3) son directas de la definición.

4) Notamos que en cada intervalo  $[-b, b]$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , las componentes de la matriz  $At$  están uniformemente acotadas por  $|\max(a_{ij})||b|$ , luego tenemos la convergencia uniforme de  $h_p(x) = \sum_{k=0}^p \frac{(A^k)_{ij} t^k}{k!}$ , es decir, tenemos la convergencia de la serie de potencias  $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)_{ij} t^k}{k!}$ , por lo que sabemos que  $h_p$  converge uniformemente a  $h$ , y la sucesión  $h'_p(x) = \sum_{k=1}^p k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!}$  converge uniformemente en  $[-b, b]$  a  $\sum_{k=1}^p k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!}$  y principalmente que  $h(x)$  es derivable y que

$$h'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!}, \quad \forall x \in (-b, b),$$

pero

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^{k+1})_{ij} t^k}{k!} = (A^k)_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)_{ij} t^k}{k!}.$$

En conclusión,

$$\frac{d}{dt} (e^{At})_{ij} = A_{ij} (e^{At})_{ij} \quad \forall x \in (-b, b),$$

y dado que  $b$  era arbitrario, se tiene el resultado para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

5) Para cada  $s$  fijo, tomamos la función

$$\psi(t) = e^{A(t+s)} - e^{At} e^{As},$$

de este modo

$$\psi(0) = 0$$

y

$$\psi'(t) = Ae^{A(t+s)} - Ae^{At}e^{As} = A\psi(t)$$

Luego por Teo. de Existencia y Unicidad,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) = 0 \Rightarrow \forall t, s \in \mathbb{R} e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}.$$

6) De 5) sabemos que

$$e^{At}e^{-At} = e^{A(t-t)} = I \Rightarrow (e^{At})^{-1} = e^{-At}.$$

7) Por inducción, es fácil ver  $AB = BA \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, A^k B = BA^k$ , pues

$$\begin{aligned} A^k B &= BA^k \quad / \cdot A \\ A^{k+1} B &= ABA^k \quad \text{pero } AB = BA \\ A^{k+1} B &= BAA^k \\ A^{k+1} B &= BA^{k+1}. \end{aligned}$$

Para la otra implicancia basta tomar  $k = 1$ . Ahora:

$$Be^{At} = B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{BA^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \cdot B = e^{At}B.$$

8) Análogamente a 5) tomamos la función

$$\psi(t) = e^{At}e^{Bt} - e^{(A+B)t},$$

que cumple con

$$\psi(0) = 0,$$

y

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= Ae^{At}e^{Bt} + \underbrace{e^{At}B}_{\text{por 7)}}e^{Bt} - (A+B)e^{(A+B)t} \\ &\stackrel{\text{por 7)}}{=} Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt} - (A+B)e^{(A+B)t} \\ &= (A+B)(e^{At}e^{Bt} - e^{(A+B)t}) = (A+B)\psi(t), \end{aligned}$$

es decir, tenemos:

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= (A+B)\psi(t) \\ \psi(0) &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos por Teo. de Existencia y Unicidad, que

$$\forall t \in \mathbb{R} \psi(t) = 0.$$

□

Las propiedades anteriores entregan mucha información sobre las soluciones de sistema lineales a **coeficientes constantes**.

De 3) y 4) vemos que  $e^{A(t-t_0)}$  cumple el mismo sistema que la matriz fundamental canónica asociada a  $t_0$ , entonces, por Teo. de Existencia y Unicidad:

$$\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}, \quad \forall t \in I$$

Luego, recordando que en un sistema lineal cualquiera, la solución está dada por:

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds,$$

en términos de la matrix exponencial queda:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}B(s)ds.$$

El problema ahora se reduce sólo al cálculo de la matriz exponencial, para esto nos ayudarán las propiedades anteriores, y la forma de la matriz  $A$ , en el sentido de si es o no diagonalizable.

### 1.6.1. Caso diagonalizable

En el caso de que  $A(t)$  sea diagonalizable, por ejemplo, en los casos en que  $A$  es simétrica ( $A^t = A$ ), antisimétrica ( $A^t = -A$ ), o normal ( $AA^t = A^tA$ ),  $A$  se que puede escribir de la forma  $A = PDP^{-1}$ , con  $D$ , matriz diagonal formada por los valores propios de  $A$ , y  $P$  una matriz que tiene en sus columnas los vectores propios respectivos. De esta forma tenemos, que si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los valores propios de  $A$ , y  $v_1, \dots, v_n$  sus respectivos vectores propios:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad P = (v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n),$$

entonces

$$e^{At} = e^{PDP^{-1}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PDP^{-1})^k t^k}{k!} = P \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k t^k}{k!} \right) P^{-1} = Pe^{Dt}P^{-1},$$

donde

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

De esta forma la solución del sistema homogéneo se puede escribir como:

$$X_h(t) = e^{A(t-t_0)} X_0 = P e^{Dt} e^{-Dt_0} P^{-1} X_0 = P e^{Dt} C,$$

donde  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$  es un vector constante que depende de las condiciones iniciales. O bien, desarrollando las matrices, tenemos:

$$\begin{aligned} X_h(t) &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} v_1 & e^{\lambda_2 t} v_2 & \cdots & e^{\lambda_n t} v_n \end{pmatrix} C \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n. \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo para aplicar todo esto:

**Ejemplo 1.6.1 (Confort de un auto).** Un modelo para estudiar el confort de un auto está dado por

$$\begin{aligned} x'' &= -(k_1 + k_2)x + (k_1 L_1 - k_2 L_2)\theta \\ \theta'' &= (k_1 L_1 - k_2 L_2)x - (k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2)\theta \end{aligned}$$

Las constantes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $L_1$  y  $L_2$  son respectivamente las rigideces y las distancias de los amortiguadores traseros y delanteros al centro de masas  $G$  del auto. En un instante  $t > 0$ ,  $x(t)$  representa la posición vertical de  $G$  y  $\theta(t)$  el giro del auto en torno a  $G$ .

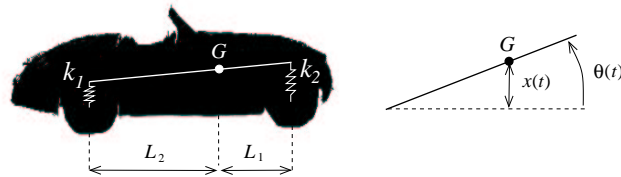


Figura 1.4: Modelamiento de los amortiguadores de un auto del ejemplo 1.6.1

Este sistema de orden 2, lo llevamos a un sistema lineal tomando la variables:  $x, \theta, x', \theta'$ , resultando:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2) & k_1 L_1 - k_2 L_2 & 0 & 0 \\ k_1 L_1 - k_2 L_2 & -(k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}.$$

En lo que sigue supongamos que  $k_1 = \lambda k_2$  y  $L_2 = \lambda L_1$ , donde  $0 < \lambda < 1$ , pues generalmente el  $G$  de los autos está hacia delante del auto, debido al peso del motor. De esta forma se anulan los términos de acoplamiento  $k_1 L_1 - k_2 L_2$ , y resulta el sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}, \text{ donde } a = -(1 + \lambda)k \text{ y } b = -\lambda(1 + \lambda)kL^2.$$

Dado que tenemos la forma  $X' = AX$ , podemos calcular la exponencial de la matriz. Para esto analicemos como son la potencias de  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix};$$

luego, elevando a  $k$ :

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \end{pmatrix},$$

y si multiplicamos por  $A$ , queda:

$$A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \\ a^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo todas las potencias calculadas, procedemos a determinar la matriz exponencial:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \\ a^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si tomamos  $a = -\alpha^2$  y  $b = -\beta^2$ , resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha t)^{2k}}{(2k)!} = \cos(\alpha t) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k t^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta t)^{2k}}{(2k)!} = \cos(\beta t), \end{aligned}$$

y de la misma manera:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\beta} \sin(\beta t).\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta t) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\beta t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \sin(\beta t) \\ \sin(\alpha t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\beta t) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ponemos alguna condición inicial, como por ejemplo una frenada, representada por:

$$x(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \quad \theta'(0) = -1,$$

y reemplazamos en la fórmula obtenida para sistema a coeficientes constantes, se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} \\ -\frac{\sin(\beta t)}{\beta} \\ -\cos(\alpha t) \\ -\cos(\beta t) \end{pmatrix},$$

es decir, la solución del movimiento es:

$$x(t) = \frac{-\sin(\alpha t)}{\alpha}, \quad \theta(t) = \frac{-\sin(\beta t)}{\beta},$$

con  $\alpha = \sqrt{(1+\lambda)k}$  y  $\beta = L\sqrt{\lambda(1+\lambda)k}$ , que físicamente representan la frecuencia de cada modo. Otro método para solucionar este problema es analizar los valores y vectores propios del sistema. Calculemos los valores propios de A

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & b & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - a)(\lambda^2 - b).$$

En términos de las variables antes definidas quedan los valores propios imaginarios puros:

$$\lambda_1 = i\alpha, \quad \lambda_2 = -i\alpha, \quad \lambda_3 = i\beta, \quad \lambda_4 = -i\beta,$$

que tienen asociados respectivamente los vectores propios:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego la solución general será:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix} = c_1 e^{i\alpha t} \begin{pmatrix} -i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-i\alpha t} \begin{pmatrix} i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ -i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 e^{-i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

o bien,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} &= c_1 e^{i\alpha t} \begin{pmatrix} -i/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-i\alpha t} \begin{pmatrix} i/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ -i/\beta \end{pmatrix} + c_4 e^{-i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ i/\beta \end{pmatrix} \\ &= (ic_2 e^{-i\alpha t} - ic_1 e^{i\alpha t}) \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + (ic_4 e^{-i\beta t} - ic_3 e^{i\beta t}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aquí se ve que el movimiento del sistema se expresa fundamentalmente sólo como el movimiento vertical de  $G$  (representado en el vector  $\begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ ) y separadamente la rotación del eje que une los resotes, en torno a  $G$ , representado en el vector  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\beta \end{pmatrix}$ , y por tanto la solución general del sistema no es más que la combinación lineal de estos dos movimientos fundamentales llamados modos propios. Los valores propios cuando son imaginarios puros, representan la frecuencia natural de cada modo propio, en este caso al modo de movimiento vertical de  $G$   $\begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$  tiene asociado la frecuencia propia  $w = \alpha$ . Una aplicación del conocimiento de este valor es que si se deseara tener un fenómeno de resonancia, bastaría aplicar una fuerza externa sinusoidal sobre el auto con esta misma frecuencia ( $F = F_0 \sin(\alpha t)$ ,  $F_0$  constante). La misma interpretación se tiene para la frecuencia  $\beta$  en el modo  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\beta \end{pmatrix}$ . Para comprobar que este método entrega la misma solución que la exponencial de la matriz, impongamos las mismas condiciones iniciales, para determinar las constantes:

$$\begin{aligned} 0 &= -c_1 + c_2 \\ 0 &= -c_3 + c_4 \\ -1 &= \frac{-i}{\alpha} c_1 + c_2 \frac{-i}{\alpha} \\ -1 &= \frac{-i}{\beta} c_3 + c_4 \frac{-i}{\beta}, \end{aligned}$$



de donde se obtiene  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = -\frac{1}{2}$ , por tanto:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \frac{i}{2}(-e^{-i\alpha t} + e^{i\alpha t}) \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}(-e^{-i\beta t} + ie^{i\beta t}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\beta \end{pmatrix};$$

recordando la identidad  $e^{is} - e^{-is} = 2i \sin(s)$ , se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = -\sin(\alpha t) \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(\beta t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\beta \end{pmatrix},$$

que es el mismo resultado antes obtenido. □

### 1.6.2. Caso no diagonalizable

Si  $A$  es una matriz cuadrada cualquiera (en particular no diagonalizable) siempre existe una descomposición dada denominada **Forma canónica de Jordan**.

**Definición 1.6.2.** Si una matriz  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  tiene un valor propio  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  de multiplicidad algebraica  $m$ , se dice que el Bloque de Jordan asociado a este valor propio es la matriz  $J_i \in M_{m \times m}(\mathbb{C})$  dada por:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

La Forma canónica de Jordan asociada a  $A$  es la matriz  $J \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ , dada por:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_k \end{pmatrix},$$

donde en la diagonal están los  $k$  bloques de Jordan asociados a los  $k$  valores propios distintos de  $A$ .

**Definición 1.6.3.** Se llama vectores propios generalizados de  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  asociados al valor propio  $\lambda_i$  de multiplicidad algebraica  $m$ , a un conjunto de vectores linealmente independientes  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ , dado por:

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_i v_1 \\ Av_2 &= \lambda_i v_2 + v_1 \\ Av_3 &= \lambda_i v_3 + v_2 \\ &\vdots \\ Av_m &= \lambda_i v_m + v_{m-1} \end{aligned}$$

Con esto tenemos el siguiente teorema de descomposición:

**Teorema 1.6.2.** *Para toda matriz  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ , existe una Forma de Jordan  $J$  asociada, tal que:*

$$A = PJP^{-1},$$

donde  $P \in P_{n \times n}(\mathbb{C})$  es la matriz que en su  $i$ -ésima columna tiene un vector propio generalizado asociado al valor propio en la posición  $(J)_{ii}$ .

Este teorema es un resultado clásico del álgebra lineal y su demostración es un poco compleja. Una demostración se puede encontrar en el libro *Finite Dimensional Vector Spaces*, de P. Halmos (1958).

Para el cálculo de  $e^{At}$  en el caso general (no necesariamente diagonalizable) veamos la siguiente propiedad:

**Proposición 1.6.1.** *Sea  $M \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  diagonal por bloques de la forma*

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix},$$

$M_i$  bloque de  $M$ , entonces

$$e^M = \begin{pmatrix} e^{M_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{M_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{M_n} \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* Recordemos que las matrices por bloques se pueden multiplicar como si los bloques fueran números

$$M^2 = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n^2 \end{pmatrix}.$$

Luego, por inducción,  $M^k = \begin{pmatrix} M_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n^k \end{pmatrix}$ , aplicando esto a la matriz exponencial:

$$\begin{aligned} e^M &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \frac{M_1^k}{k!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{M_2^k}{k!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{M_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} M_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{M_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{M_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{M_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Calculemos ahora:  $e^{J_i t} = e^{(\lambda_i I_m + N)t}$ , donde  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$  ( $m$  es la multiplicidad del valor propio  $\lambda_i$ ).

Claramente  $\lambda_i I_m$  y  $N$  conmutan, entonces

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i I_m t + N t} = e^{\lambda_i I_m t} e^{N t}.$$

Sabemos que  $e^{\lambda_i I_m t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}$ , pero falta conocer propiedades sobre  $N$ ; para esto veamos las potencias de  $N$ :

$$\begin{aligned}
N^0 &= I \\
N^1 &= N \\
N^2 &= N \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
N^{m-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
N^m &= 0_m.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $N$  es una matriz nilpotente de orden  $m$ , y tenemos que

$$\begin{aligned}
e^{Nt} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{N^k t^k}{k!} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \underbrace{N^k}_{=0} \\
&= I + tN + \frac{t^2}{2!} N^2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} N^{m-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En conclusión,  $e^{Nt}$  es una matriz triangular superior de la forma

$$[e^{Nt}]_{ij} = \begin{cases} \frac{t^k}{k!} & \text{si } j - i = k \geq 0 \\ 0 & \text{si } j - i < 0 \end{cases}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
e^{J_i t} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De esta forma hemos demostrado la siguiente proposición:

**Proposición 1.6.2.** Sea  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ , y su descomposición en forma canónica de Jordan  $A = PJP^{-1}$ , entonces:

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{J_n t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

**Ejemplo 1.6.2 (Equilibrio Marino).** Suponga que la población de ballenas  $b$ , plancton  $p$  y temperatura del mar  $T$  están regidas por el siguiente sistema discreto, donde  $n$  designa el año y  $\lambda > 0$  es un parámetro de crecimiento:

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \lambda b_n + p_n \\
p_{n+1} &= \lambda p_n + T_n \\
T_{n+1} &= \lambda T_n + 1,
\end{aligned}$$

con condiciones iniciales:  $b_0 = 10$ ,  $p_0 = 100$ ,  $T_0 = 15$ .

Se quiere saber cómo evoluciona este sistema en el tiempo, dependiendo del parámetro  $\lambda$ . Para esto, escribamos el sistema anterior se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ p_{n+1} \\ T_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ p_n \\ T_n \end{pmatrix}, \text{ con condición inicial } \begin{pmatrix} b_0 \\ p_0 \\ T_0 \end{pmatrix}$$

Consideremos primero un caso más general de sistemas discretos:

$$X_{n+1} = AX_n + B_n, \quad n \geq 0,$$

con condición inicial  $X_0 \in \mathbb{R}^d$ , donde  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $B_n \in \mathbb{R}^d$ ,  $n \geq 0$ . Como  $X_0$  es la condición inicial, iterando tenemos:

$$\begin{aligned} X_1 &= AX_0 + B_0 \\ X_2 &= AX_1 + B_1 = A(AX_0 + B_0) + B_1 = A^2X_0 + AB_0 + B_1 \\ X_3 &= AX_2 + B_2 = A^3X_0 + A^2B_0 + AB_1 + B_2 \\ &\vdots \\ X_n &= A^nX_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1}. \end{aligned}$$

Probemos por inducción que efectivamente la solución del sistema está dada por:

$$X_n = A^nX_0 + \sum_{j=0}^n A^{n-j}B_{j-1}, \quad n \geq 1$$

Para  $n = 1$ , resulta

$$X_1 = AX_0 + B_0,$$

que es solución del sistema. Suponemos ahora que  $X_n = A^nX_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1}$  satisface el sistema propuesto, entonces hay que probar que

$$X_{n+1} = A^{n+1}X_0 + \sum_{j=1}^{n+1} A^{n+1-j}B_{j-1}$$

también lo satisface. En efecto,

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= A^{n+1}X_0 + \sum_{j=1}^{n+1} A^{n+1-j}B_{j-1} \\ &= A^{n+1}X_0 + \sum_{j=1}^n A^{n+1-j}B_{j-1} + A^{n+1-(n+1)}B_{(n+1)-1} \\ &= A^{n+1}X_0 + A \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1} + I_{d \times d}B_n \\ &= A \left( A^nX_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1} \right) + B_n, \text{ usando la hipótesis de inducción} \\ &= AX_n + B_n. \end{aligned}$$

Por tanto,  $X_{n+1}$  satisface el sistema.

Estudiemos ahora la solución del sistema discreto homogéneo, para el caso en que  $A$  sea diagonalizable, es decir  $A = PDP^{-1}$ , con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \lambda_1, \dots, \lambda_d \text{ son los valores propios de } A.$$

Según lo anterior, la solución de este sistema será:  $X_n = A^n X_0$ , pero  $A^n = P D^n P^{-1}$ , entonces:

$$X_n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_d^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0.$$

De esta forma si queremos que nuestro problema tenga solución, es decir que exista  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ , debemos imponer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^n$  exista  $\forall k = 1, \dots, d$ , lo que equivale a pedir que  $|\lambda_k| < 1$ ,  $\forall k = 1, \dots, d$ .

Si volvemos al problema específico de las ballenas, estamos en el caso de un sistema homogéneo discreto, pero donde la matriz  $A$  no es diagonalizable (tiene la forma de un bloque de Jordan), sin embargo, sigue siendo válida la solución  $X_n = A^n X_0$ , entonces sólo resta calcular  $A^n$ . Para esto usaremos la siguiente propiedad:

$$AB = BA \Rightarrow (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}, \forall n \geq 0,$$

es decir, si las matrices conmutan, se tiene la propiedad del Binomio de Newton, y la demostración de esto es idéntica a la del Binomio original (por inducción). En este caso podemos usar esta fórmula, pues claramente

$$\lambda I_d N = \lambda N = N \lambda = N \lambda I_d.$$

Luego:

$$A^n = (\lambda I_d + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k I^k N^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k N^{n-k},$$

con  $N$  una matriz nilpotente de orden 3, pero  $N^{n-k} = 0$  cuando  $n - k \geq 3 \Rightarrow n - 3 \geq k$ , luego la suma sin los términos nulos queda:

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=n-2}^n \binom{n}{k} \lambda^k N^{n-k} \\ &= \binom{n}{n-2} \lambda^{n-2} N^2 + \binom{n}{n-1} \lambda^{n-1} N + \binom{n}{n} \lambda^n \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} N^2 + n \lambda^{n-1} N + \lambda^n. \end{aligned}$$

Usando en el desarrollo sobre las formas de Jordan, habíamos calculado todas sobre las potencias

de una matriz nilpotente, resulta entonces:

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} N^2 + n \lambda^{n-1} N + \binom{n}{n} \lambda^n \\
&= \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n \lambda^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda^n \\
&= \begin{pmatrix} \lambda^n & n \lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De esta forma vemos que se repite la solución que teníamos para el caso diagonalizable: independiente de la condiciones iniciales, nuestro modelo indica que cuando  $n \rightarrow \infty$ , si  $|\lambda| \geq 1$ , el sistema diverge, es decir las poblaciones de ballenas y plancton se expanden indefinidamente, mientras que si  $|\lambda| < 1$ , las poblaciones se extinguen y la temperatura del mar desciende a 0.  $\square$