



Departamento de Ingeniería Matemática. FCFM-U. de Chile.
MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Guía #3

Semestre 2003-1. Prof.: A. Osses - Auxs: A. de Laire, F. Ortega.

El objetivo de esta tercera guía docente del curso es recopilar ejercicios, problemas de control y de modelamiento que involucran Transformada de Laplace y sistemas de EDO.

Ejercicios:

1. Pruebe que las funciones siguientes son de orden exponencial y encuentre sus transformadas de Laplace por definición.
(a) $f(t) = \sinh(at)$ (b) $f(t) = \cosh(at)$
(c) $f(t) = \sin(at)$ (d) $f(t) = \cos(at)$
(e) $f(t) = \frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$

2. Sea $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función periódica con periodo $T > 0$ (ie, $f(t) = f(t+T)$, $\forall t > 0$). Demuestre que:

$$L(f)_{(s)} = \frac{\int_0^T e^{-s\xi} f(\xi) d\xi}{1 - e^{-sT}}$$

Hint: Una suma geométrica se escribe como sigue:

$$\sum_{k=0}^N q^k = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}, \text{ si } |q| < 1$$

3. La función gamma ($\Gamma(x)$) se define como:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

- (i) Puede demostrarse que la integral converge para $x > 0$. Usando integración por partes pruebe que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\forall x > 0$.
- (ii) Pruebe que $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$. Por esta propiedad, $\Gamma(x)$ es llamada la generalización de la función factorial a \mathbb{R}_+ .
- (iii) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$. Demuestre que

$$L(t^\alpha)_{(s)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

Hint: haga $t = u \cdot s$ en la integral que define la transformada de Laplace anterior.

4. Considere un sistema lineal de la forma $x' = Ax$, $t \geq 0$, con $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable. Demuestre que si todas las soluciones de dicho sistema son periódicas, y además todas tienen el mismo período, digamos T , entonces el polinomio característico de la matriz A es de la forma $p(\lambda) = (\lambda^2 + T^2)^{n/2} = 0$. (Notar que n tiene que ser un número par).

5. Resolver el siguiente sistema: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

6. Resuelva el sistema $\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t)$ con $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7. Encuentre las 4 soluciones del sistema $\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t)$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 & -3 \\ -18 & -1 & 0 & 0 \\ -9 & -3 & -25 & -9 \\ 33 & 10 & 90 & 32 \end{pmatrix}$

8. Resolver usando sistemas de edo's la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^4 y}{dt^4} - 8\frac{d^2 y}{dt^2} + 16y = 0$$

9. Obtener e^{At} con las siguientes matrices: a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & e-1 \\ 0 & e & 2e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$

Problemas de Control:

1. (Ex-2000-1-Osses)

(i) Resuelva usando Transformada de Laplace la ecuación

$$my'' + ky = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

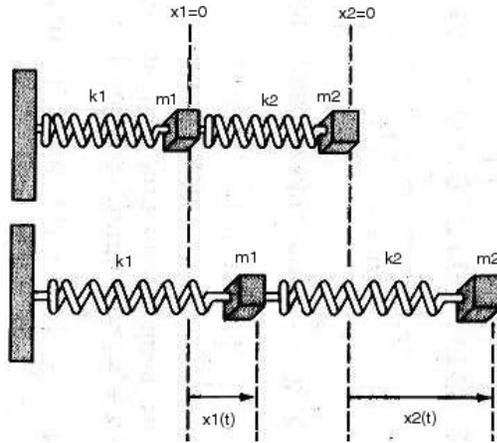
donde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ 1/\epsilon & a < t \leq a + \epsilon \\ 0 & t \geq a + \epsilon \end{cases}$$

(ii) Usando el resultado de (i), pruebe que $z(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} y(t)$, $t \geq 0$ satisface la ecuación

$$mz'' + kz = 0, \quad z(a) = 0, \quad z'(a) = 1/m$$

2. (C1-2000-1-Osses) *Resortes acoplados*. Se tiene el sistema de resortes acoplados mostrado en la figura siguiente, donde $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ son las posiciones de equilibrio de las masas m_1 y m_2 respectivamente.



Se pide encontrar las ecuaciones que rigen el movimiento de las masas m_1 y m_2 en torno a sus puntos de equilibrio (i.e., encontrar $x_1(t)$ y $x_2(t)$) dadas las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(t=0) = 0; \quad x_1'(t=0) = 1; \quad x_2(t=0) = 0; \quad x_2'(t=0) = -1;$$

Para lo anterior deberá plantear las ecuaciones diferenciales que rigen el sistema físico anterior y resolverlas mediante el uso de la transformada de Laplace. (Se tiene que $k_1 = 6$, $k_2 = 4$, $m_1 = m_2 = 1$).

Hint: La ley de Hooke establece que en un resorte la fuerza es proporcional a la deformación y de sentido contrario, ie: $F = -k\Delta x$.

3. (C3-2000-1-Osses) Considere el sistema lineal para $t \geq 0$

$$X' = AX + Bu(t), \quad X(0) = X_0,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B \in \mathbb{R}^N$, $X_0 \in \mathbb{R}^N$ son constantes y $u(\cdot)$ es una función escalar. Dado $T > 0$, nuestro propósito es encontrar una función $u(t)$, $0 < t < T$ que lleve el estado al reposo en $t = T$, esto es tal que se satisfaga la condición final

$$X(T) = 0. \tag{CF}$$

Suponga que la función u es de la forma (* denota transposición)

$$u(\sigma) = B^* e^{A^*(T-\sigma)} U_0$$

con $U_0 \in \mathbb{R}^N$ un vector constante.

- (i) Demuestre que si la matriz

$$M = \int_0^T e^{A\sigma} B B^* e^{A^*\sigma} d\sigma$$

es invertible entonces (CF) se satisface si

$$U_0 = -M^{-1} e^{AT} X_0.$$

- (ii) Demuestre que $e^{A^*t} = (e^{At})^*$. Esto le facilitará los cálculos que siguen.
- (iii) Dados $T > 0$, $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y X_0 , determine en cuál de los casos siguientes es posible calcular U_0 por el método anterior. (a) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (b) $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (para simplificar use $\lambda = 0$ en el caso (b)).

4. (C2-2000-1-Osses) Suponiendo que f es continua por pedazos y de orden exponencial, encuentre f tal que $f(0) = 0$ y que sea solución de la ecuación integro-diferencial siguiente

$$f'(t) = \text{sen}(t) + \int_0^t f(t - \sigma) \cos(\sigma) d\sigma$$

5. (C2-2001-1-Osses) Definimos la siguiente transformada lineal del tipo “Mellin” para funciones $y(x)$ continuas para $x \in]0, 1[$:

$$M[y(x)](s) = \int_0^1 x^{s-1} y(x) dx \quad s > 0 \text{ (cuando existe).}$$

- (i) Demuestre que $M[1] = \frac{1}{s}$ y que $M[x^a y](s) = M[y](s + a)$ para $a \in \mathbb{R}$.
- (ii) Si $y(x)$ satisface que $\forall s > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^s y(x) = 0$, demuestre que $M[xy'] = -sM[y] + y(1)$.
- (iii) Demuestre que $M[\int_x^1 y(u)/u du] = \frac{1}{s}M[y]$.
Hint: defina $z(x) = \int_x^1 y(u)/u du$ y use (ii).
- (iv) Resuelva la siguiente EDO usando la transformada de Mellin y las propiedades demostradas en los puntos anteriores:

$$x(xy')' + 2xy' = 1, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Hint: Se sabe que si $M[f] = M[g]$ entonces $f = g$ para f, g continuas en $]0, 1[$

6. Sea $A(t)$ una matriz simétrica de $n \times n$ de coeficientes continuos en toda la recta real, tal que $A(t)$ es invertible $\forall t > 0$.

- (i) Demuestre que los valores propios de $A(t)$ son una función continua del tiempo.
- (ii) Considere el sistema $\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t)$. Suponga que existe una constante $\eta > 0$ tal que $\forall \lambda_i(t)$ de $A(t)$ satisface: $\lambda_i(t) < -\eta \quad i = 1, \dots, n$. Demuestre que toda solución $\vec{X}(t)$ de este sistema satisface $\vec{X}(t) \rightarrow \vec{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Hint: Recuerde que existe una base ortonormal $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ de vectores propios de $A(t)$ respectivamente asociados a $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$. Utilice esto para deducir:

$$\frac{d}{dt} \|\vec{x}(t)\|^2 \leq -\eta \|\vec{x}(t)\|^2$$

donde $\|\vec{x}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

7. Para el sistema

$$X' = A(t)X + B(t), \quad t \geq 0, \\ X(0) \text{ dado en } \mathbb{R}^d,$$

donde $A(t) \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $B(t) \in \mathbb{R}^d$, y sus componentes son funciones continuas para $t \geq 0$.

- (i) Si $\Phi(t)$ es la matriz fundamental canónica del sistema, demuestre la siguiente fórmula de Abel generalizada:

$$\det(\Phi(t)) = \exp\left(\int_0^t \text{traza}(A(t)) dt\right)$$

Hint: Puede usar la siguiente fórmula para la derivada del determinante:

$$\frac{d}{dt} \det M(t) = \sum_{k=1}^d \det M_k(t)$$

donde $M_k(t)$ es la matriz que resulta al derivar la k -ésima fila de $M(t)$ y la linealidad del determinante por filas.

- (ii) Demuestre que la fórmula anterior generaliza la fórmula de Abel para las EDO lineales de orden n :

$$W(y_1, \dots, y_n) = \exp\left(-\int_0^t a_{n-1}(t) dt\right)$$

donde $a_{n-1}(t)$ es el coeficiente del término de orden $n - 1$ de la EDO normalizada.

8. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ constante. Se define $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot t^k}{k!}$. Suponga que para cierto número $\lambda \in \mathbb{R}$ y cierto número $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $(A - \lambda \cdot I)^m = 0$ (ie, la matriz $(A - \lambda \cdot I)$ es nilpotente).

- (i) Demuestre que:

$$e^{At} = e^{\lambda t} \cdot \{I + t(A - \lambda I) + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \cdot (A - \lambda I)^{m-1}\}$$

Hint: $e^{(A+B)} = e^A \cdot e^B$ ssi $AB = BA$.

- (ii) Use lo anterior para calcular explícitamente la matriz e^{At} de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

9. Considere el sistema lineal $\vec{X}'(t) = A \cdot \vec{X}(t)$ en que la matriz A es antisimétrica (ie, $A^T = -A$). Sean X_0 y X_1 vectores en \mathbb{R}^n y denotemos por $Z(t, X_0)$ y $X(t, X_1)$ las soluciones de la ecuación con condiciones iniciales en $t=0$ igual a X_0 y X_1 respectivamente. Demuestre que si $\langle X_0, X_1 \rangle = 0$ entonces

$$\langle Z(t, X_0), X(t, X_1) \rangle = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(ie, si las soluciones comienzan ortogonales permanecen ortogonales).

10. Sea A una matriz simétrica de $n \times n$ a coeficientes constantes, y supongamos que $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable.

(i) Demostrar que: $[Ay(s)]^t \frac{dy}{ds}(s) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} ([Ay(s)]^t \cdot y(s))$.

(ii) Si “ y ” satisface la ecuación $y'' + Ay = 0$ demuestre que para alguna constante $C \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\|y'(s)\|^2 + [Ay(s)]^t y(s) = C$$

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ y el vector $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \text{sen}(t) \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ resuelva el sistema

tema $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}(t)$.

Hint: Recuerde que dada una matriz fundamental del sistema $x' = Ax + b(t)$, la solución corresponde a: $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s)ds$, según el método de variación de parámetros.

Problemas de Modelamiento:

1. (C3-2001-1-Osses) *Equilibrio Marino*. Considere el sistema discreto siguiente:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n + B_n, \quad n \geq 0 \\ X_0 &\text{ dado en } \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $B_n \in \mathbb{R}^d$, $n \geq 0$.

(i) Demuestre que la solución del sistema anterior está dada por:

$$X_n = A^n X_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j} B_{j-1}, \quad n \geq 1.$$

(ii) Si $B_n = 0$, $n \geq 0$, y los valores propios de A son estrictamente menores que 1 en módulo, demuestre que $X_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. (Considere sólo el caso A diagonalizable).

(iii) Suponga que la población de ballenas b , plancton p y temperatura del mar T están regidas por el siguiente sistema discreto, donde n designa el año y $\lambda > 0$ un parámetro de crecimiento:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \lambda b_n + p_n \\ p_{n+1} &= \lambda p_n + T_n \\ T_{n+1} &= \lambda T_n \\ b_0 = 10, \quad p_0 = 100 \quad T_0 = 15 \end{aligned}$$

Resuelva el sistema usando la fórmula que dedujo en el punto (i), calculando explícitamente A^n , $n \geq 0$, y determine para qué valores de λ existe el límite cuando

$n \rightarrow \infty$ de b_n, p_n y T_n , explicitándolo en cada caso.

Hint: Puede servirle usar la fórmula del binomio:

$$(M_1 + M_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_1^k M_2^{n-k},$$

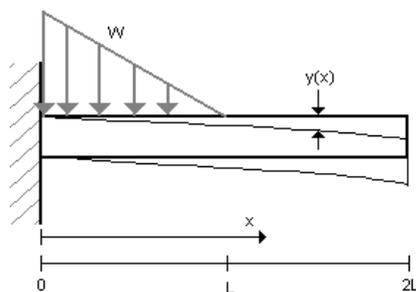
válida si las matrices M_1 y M_2 conmutan.

2. (C2-2000-1-Osses) *Deformación de una viga.* Al ser sometida a una carga W , la viga de la figura tiene una deformación $y(x)$ donde x es la variable longitudinal. Esto puede ser modelado por la EDO de cuarto orden

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = W(x)$$

para $0 \leq x \leq 2L$ con las siguientes condiciones de borde en los extremos $x = 0$ y $x = 2L$

$$y(0) = y'(0) = y''(2L) = y'''(2L) = 0.$$



La carga está distribuida sobre la viga como

$$W(x) = \begin{cases} \frac{w_0}{L}(L-x) & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{si } L < x \leq 2L \end{cases}$$

- (i) Escriba W usando la función escalón de Heaviside.
 - (ii) Usando transformada de Laplace y las dos primeras condiciones de borde, resuelva la ecuación expresando la solución en términos de $A = y''(0)$ y $B = y'''(0)$.
 - (iii) Calcule y' , y'' e y''' . Determine los valores de A y B usando las dos últimas condiciones de borde.
3. (C2-2001-1-Osses) *Masas atmosféricas.* El siguiente es un modelo para la evolución en las masas atmosféricas de un contaminante (por ejemplo, monóxido de carbono) en el hemisferio norte (c_1) y el hemisferio sur (c_2) de la Tierra:

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= f_1 - \alpha(c_1 - c_2) - \beta c_1 \\ \dot{c}_2 &= f_2 - \alpha(c_2 - c_1) - \beta c_2 \end{aligned}$$

La constante $\alpha > 0$ representa el inverso del tiempo de intercambio interhemisférico en [1/año] y la constante $\beta > 0$ representa el inverso de tiempo de vida química del contaminante en [1/año].

Parte (a) Las emisiones del contaminante en cada hemisferio son funciones conocidas $f_1 = 30$ y $f_2 = 10$ en [Kton/año]. Inicialmente $c_1(0) = 84$ [Kton] y $c_2(0) = 60$ [Kton].

(i) Introducimos la masa media entre los dos hemisferios como

$$\bar{c}(t) = (c_1(t) + c_2(t))/2$$

y la emisión media como

$$\bar{f}(t) = (f_1 + f_2)/2$$

. Deduzca una EDO y condiciones iniciales para $\bar{c}(t)$ y encuentre $\bar{c}(t)$.

(ii) Si se estima que el límite de $\bar{c}(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ es de 100[Kton], encuentre una estimación para β^{-1} , esto es, los años de vida química del contaminante.

(iii) Como $c_2 = 2\bar{c} - 1$, basta ahora encontrar c_1 . Para ello, aplique transformada de Laplace a las ecuaciones en c'_1 y c'_2 . Despeje la transformada de c_1 eliminando la transformada de c_2 y exprésela en término de las funciones: $\Psi_1(s) = \frac{1}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)}$, $\Psi_2(s) = \frac{s}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)}$, $\Psi_3(s) = \frac{1}{s(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)}$

(iv) Encuentre las antitransformadas de Ψ_1 , Ψ_2 y Ψ_3 .

Hint: si le agradan las buenas recetas sepa que si $\Psi(s) = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b} + \frac{C}{s-c}$ con a, b y c distintos, entonces $A = \lim_{s \rightarrow a} (s-a)\Psi(s)$

Parte (b) Las emisiones del contaminante en cada hemisferio son funciones conocidas $f_1(t) = 20 + 10 \cdot e^{-4t}$ y $f_2(t) = 5 + 5 \cdot e^{-2t}$ en [Kton/año] (Las exponenciales negativas se deben a políticas de reducción de emisión de contaminantes en el planeta). Si inicialmente $c_1(0) = 84$ [Kton] y $c_2(0) = 60$ [Kton], encuentre la concentración del contaminante en cada hemisferio de la Tierra en función del tiempo (ie, encuentre $c_1(t)$ y $c_2(t)$), y vea que pasa cuando el sistema alcanza el equilibrio (ie, cuando $t \rightarrow \infty$). (Mediciones permiten estimar que el tiempo de intercambio interhemisférico es $\alpha^{-1} = 2$ [años] y el tiempo de vida química del monóxido de carbono es $\beta^{-1} = 4$ [años] aproximadamente).

Hint: Recuerde que dada una matriz fundamental del sistema $x' = Ax + b(t)$, la solución corresponde a: $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s)ds$, según el método de variación de parámetros.

4. (Examen 2001-1-Osses) *Mezclador*. Se tiene un sistema de tres estanques, 1, 2 y 3, los cuales tienen volúmenes V_1 , V_2 y V_3 de salmuera respectivamente. El tanque 1 está conectado con el tanque 2, el tanque 2 con el 3, y para cerrar el sistema se conecta el tanque 3 con el 1. De esta forma, el intercambio de líquido hace variar la concentración de sal en cada tanque (x_1, x_2 y x_3 respectivamente). Ahora la variación de concentración de sal está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -k_1x_1 + k_3x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= k_1x_1 - k_2x_2 \end{aligned}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = k_2x_2 - k_3x_3$$

donde $k_i = \frac{r}{V_i}$, $V_1 = 20$, $V_2 = 50$, $V_3 = 20$ y $r = 10$.

- (i) Hallar las concentraciones de sal en cada uno de los estanques en función del tiempo.
- (ii) Demostrar que la concentración total de sal del sistema es constante.
- (iii) Analizar que pasa cuando $t \rightarrow \infty$.