



Análisis de Señales

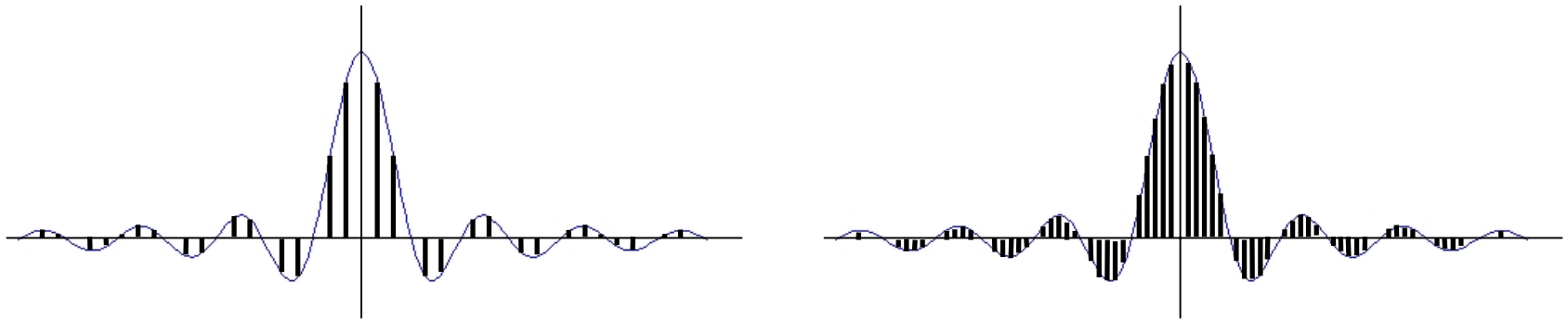
Capítulo II: La transformada de Fourier y sus aplicaciones

Profesor: Néstor Becerra Yoma



2.1 Representación para señal aperiódica

- Serie de Fourier: A medida que T aumenta, las líneas espectrales se juntan. La forma del espectro no cambia.



- Se puede generar espectro de señal aperiódica a partir de serie de Fourier al considerar que $T \rightarrow \infty$

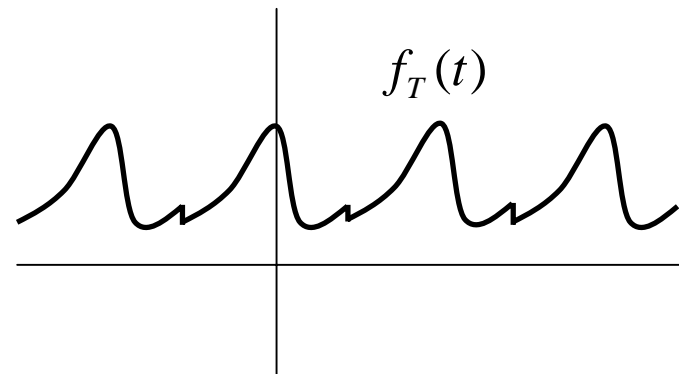
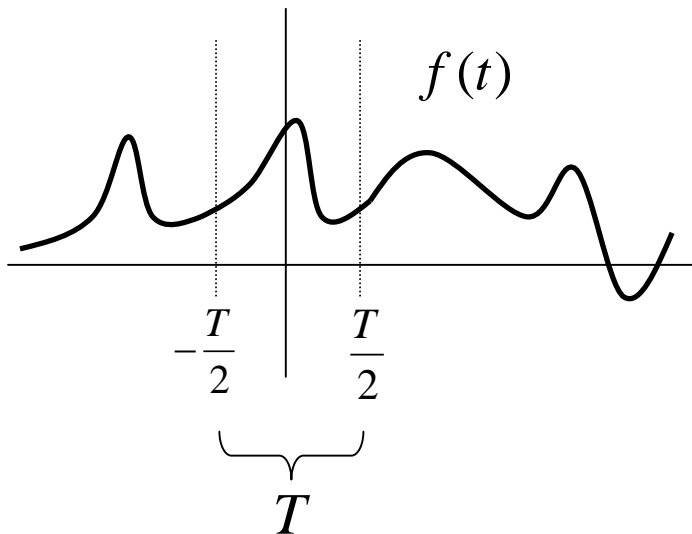


2.1 Representación para señal aperiódica

Sea $f(t)$ una señal aperiódica.

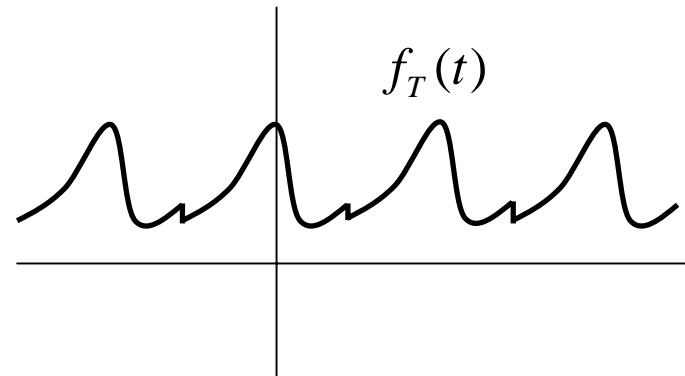
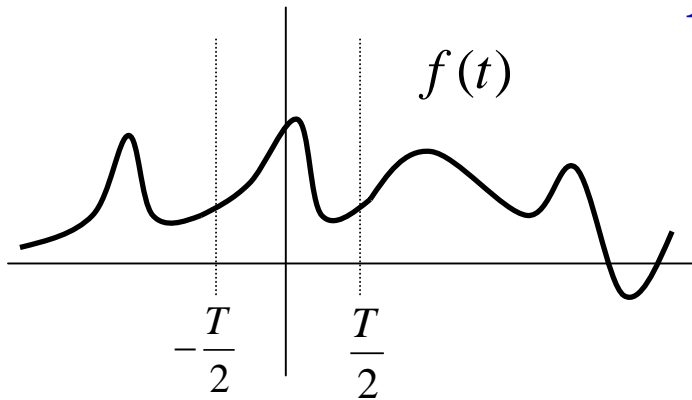
$f_T(t)$: función periódica asociada a $f(t)$ con período T

$$f_T(t) = f(t + nT), \quad (t + nT) \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \quad n \in \mathbb{Z}$$





2.1 Representación para señal aperiódica



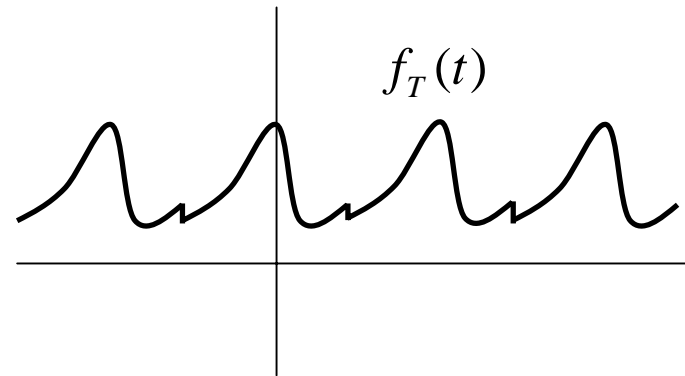
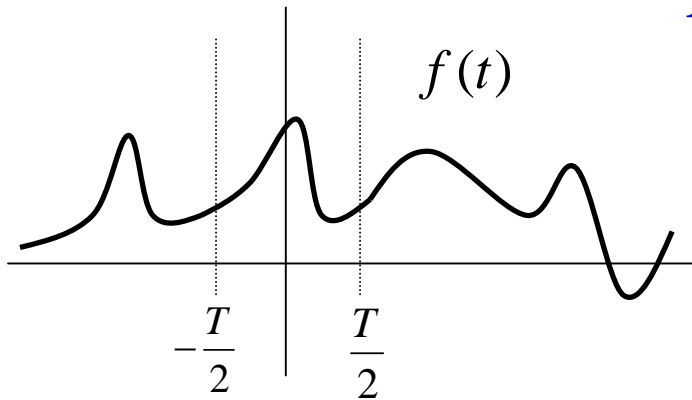
$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{Sea } F(\omega_n) = TF_n$$

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{jn\omega_0 t}, \quad F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$



2.1 Representación para señal aperiódica

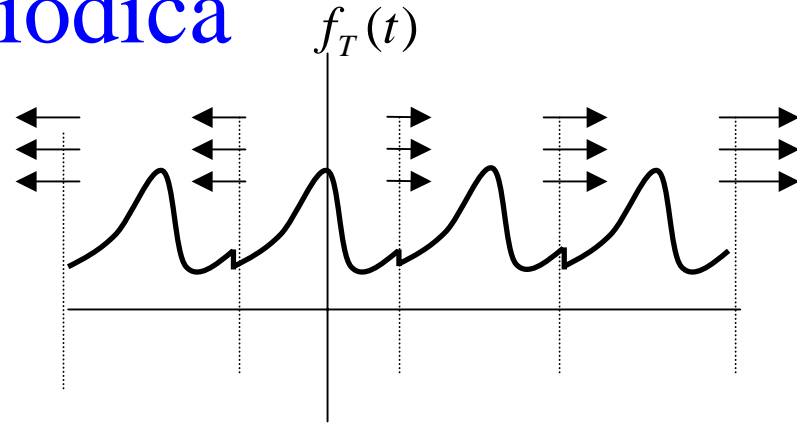
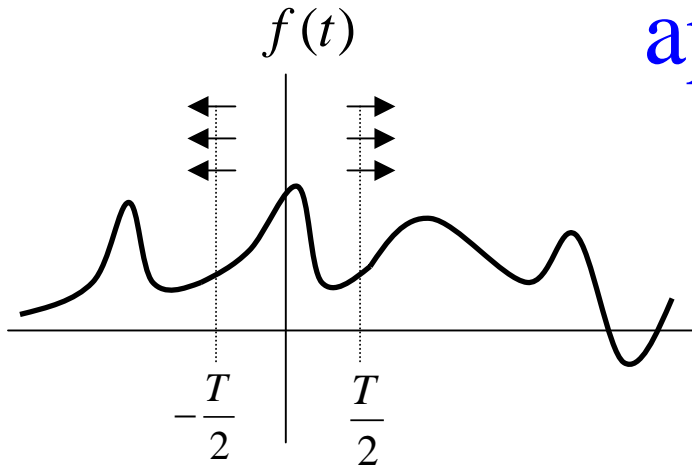


$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\Delta\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{jn\omega_0 t}, \quad F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega, \quad F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$



2.1 Representación para señal aperiódica



$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = f(t)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F(\omega_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(\omega)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$$



2.1 Representación para señal aperiódica

- Transformada directa e inversa de Fourier

$$F(\omega) = \mathfrak{F}(f(t)) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- Permite ver una señal:
 - En el dominio del tiempo $\Rightarrow f(t)$
 - En el dominio de la frecuencia $\Rightarrow F(\omega)$



2.1 Función de densidad espectral

- F_n son líneas espectrales: contenido espectral repartido en frecuencias discretas
- $F(\omega)$ es función de densidad espectral: contenido espectral repartido en un continuo
- $dA = F(\omega)d\omega \Rightarrow$ elemento de amplitud dentro de un elemento de frecuencia en torno a ω
- Existe relación entre la serie de Fourier de la señal periódica, y la transformada de Fourier para 1 sólo periodo de la señal (ver próxima transparencia).

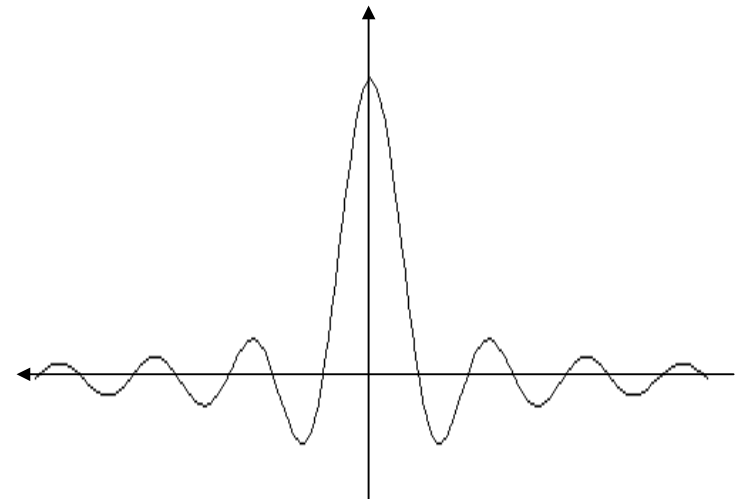
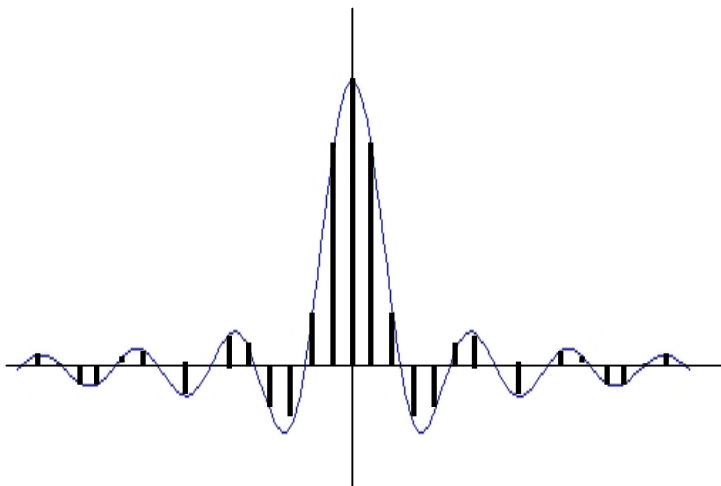
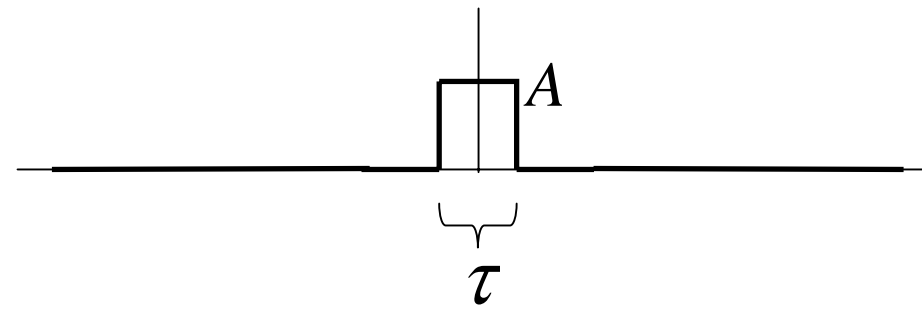
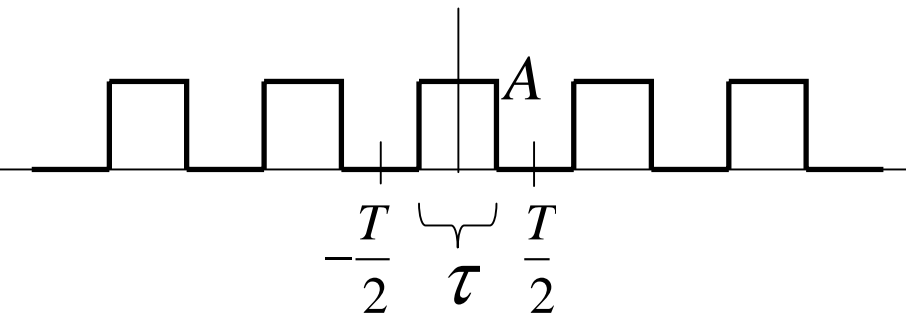


2.1 Función de densidad espectral

$$F_n = \frac{1}{T} F(\omega) \big|_{\omega=n\omega_0}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

$$F(\omega) = A\tau \text{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$$





2.1 Función de densidad espectral

- Dada $f(t)$, la transformada existe si se satisfacen las condiciones de Dirichlet para todo $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$
 - $f(t)$ tiene un n° finito de máximos y mínimos en $[t_1, t_2]$
 - $f(t)$ tiene un n° finito de discontinuidades en $[t_1, t_2]$
 - $f(t)$ es absolutamente integrable en \mathbf{R}

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

- Las condiciones anteriores siempre se cumplen para señales de energía finita en \mathbf{R}



2.2 Teorema de Parseval

- La energía total disipada por una señal $f(\cdot)$ es:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt$$

- Si se expresa $f^*(t)$ en términos de $F^*(\omega)$:

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt$$

- Cambiando el orden de integración:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F^*(\omega) \underbrace{\left[\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right]}_{F(\omega)} d\omega$$



2.2 Teorema de Parseval

$$E = \underbrace{\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}_{\text{Contribución del tiempo } t \text{ a la energía}} = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{\omega=-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}_{\text{Contribución de la frecuencia } \omega \text{ a la energía}}$$

- La energía de una señal se puede calcular tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia
- Se puede calcular la energía contenida en una banda de frecuencias $[\omega_1, \omega_2]$

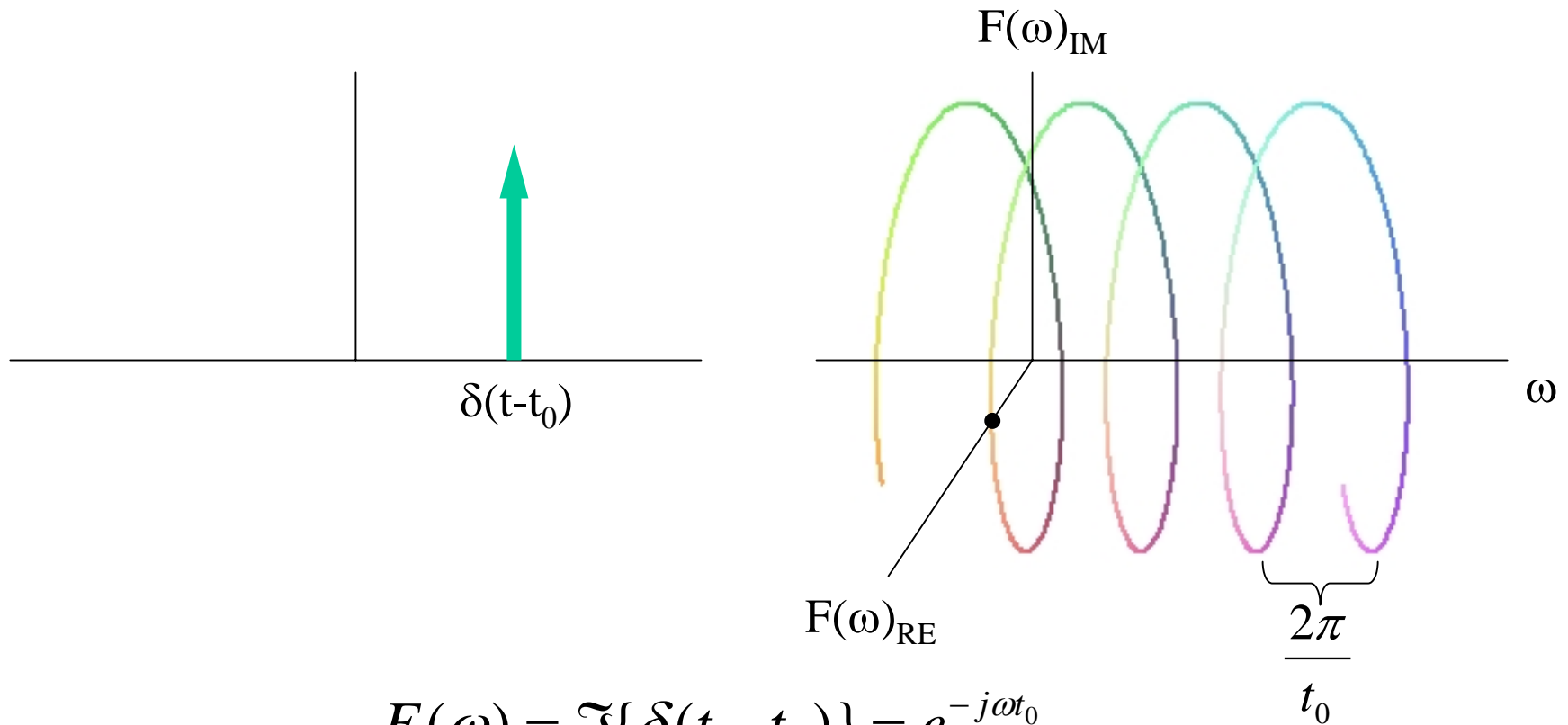


2.3 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Las transformadas de algunas señales de potencia (es decir, de energía infinita) no se pueden calcular usando la integral, por lo que deben calcularse de modo indirecto.
- Función impulso: $\mathfrak{T}\{\delta(t)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = e^{j0} = 1$
$$\mathfrak{T}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$$
 - La transformada de un impulso tiene amplitud constante para todo ω y fase lineal. Espectro “blanco”.



2.3 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$





2.3 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Exponencial complejo: Su transformada se calcula de modo indirecto.

$$\mathfrak{T}^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

$$\mathfrak{T}\left\{\mathfrak{T}^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\}\right\} = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{T}\{e^{j\omega_0 t}\} = \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{T}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

- Esto permite calcular las transformadas de las sinusoides.



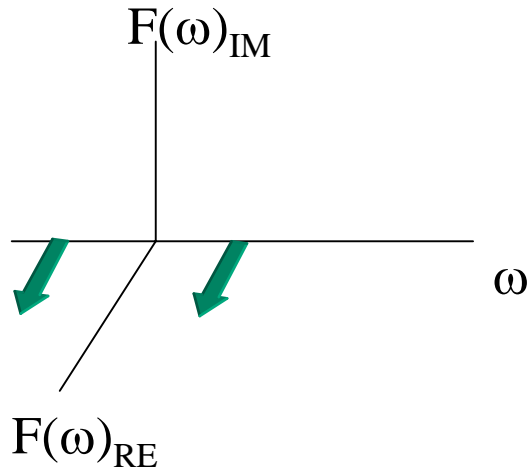
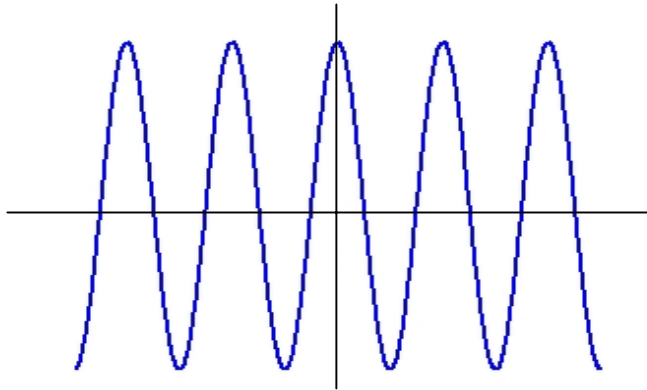
2.3 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Sinusoides: $\mathfrak{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$$\Rightarrow \mathfrak{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \mathfrak{F}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$
$$\Rightarrow \mathfrak{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = \mathfrak{F}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right\} = \frac{\pi\delta(\omega - \omega_0) - \pi\delta(\omega + \omega_0)}{j}$$
- El espectro de una senoide son 2 impulsos localizados en ω_0 y $-\omega_0$.

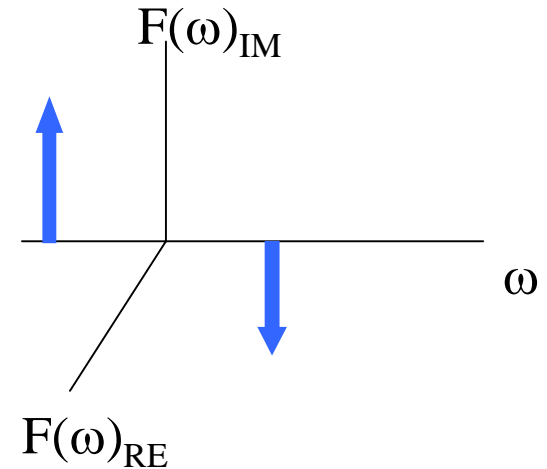
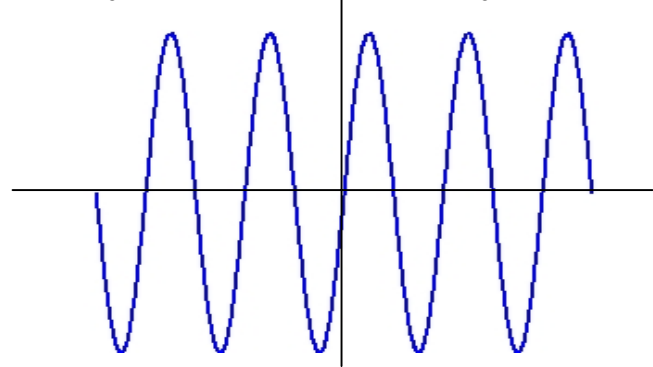


2.3 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$$\mathfrak{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$



$$\mathfrak{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)$$





2.3 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Función signo: $\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$
 - No es absolutamente integrable
 - Se calcula de modo indirecto

$$\mathfrak{I}\{\text{sgn}(x)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|a|t} \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathfrak{I}\{\text{sgn}(x)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

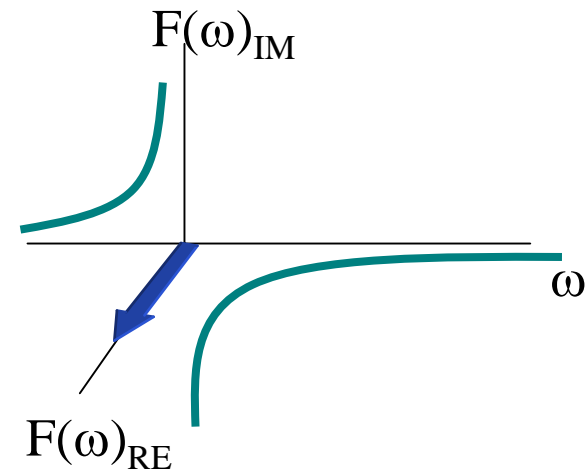
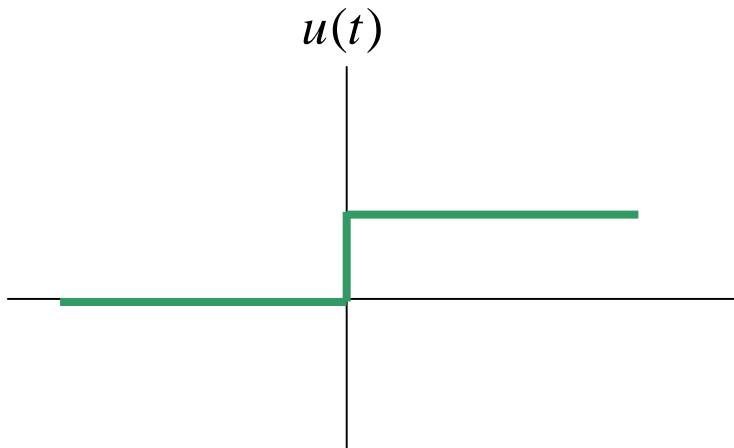
$$\mathfrak{I}\{\text{sgn}(x)\} = \frac{2}{j\omega}$$



2.3 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Escalón:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) \Rightarrow \mathfrak{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$





2.3 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

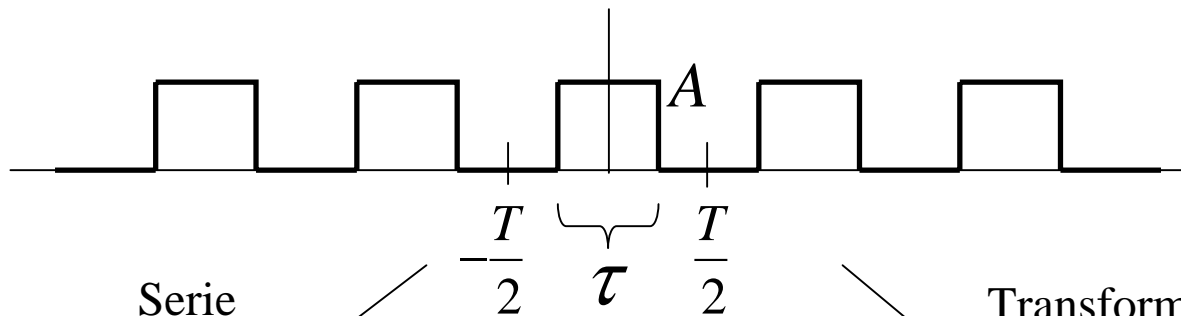
- Funciones periódicas
 - Se pueden expresar como serie de Fourier
 - Cada término de la serie contribuye con un impulso
- Se pueden representar como serie de Fourier o como transformada que incluye impulsos

$$\mathfrak{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$



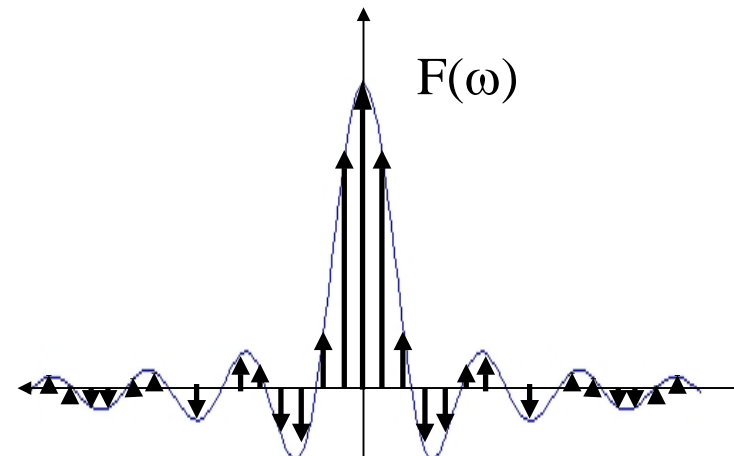
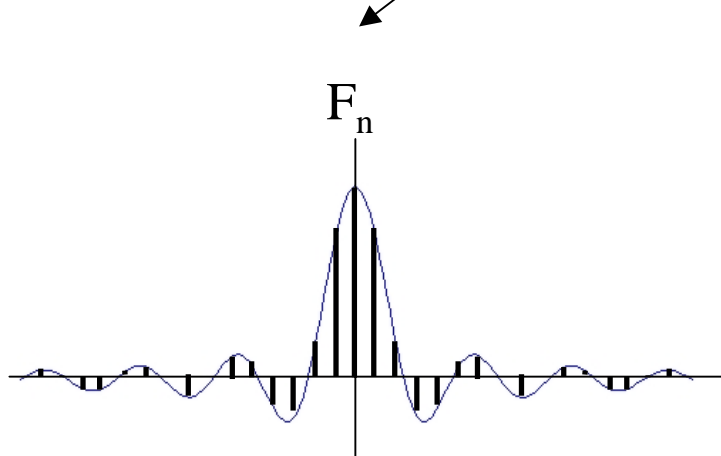
2.3 Transformadas que incluyen

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t}, \quad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0)$$



Serie
Fourier

Transformada
Fourier





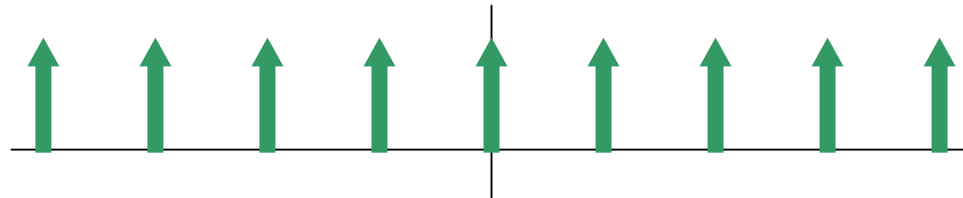
2.3 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Tren de impulsos, “peineta”

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$





2.3 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$e^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega)$
$te^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega)^2$
$e^{- a t}$	$2a/(a^2 + \omega^2)$
$e^{-t^2/(2\sigma^2)}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$
$\text{sgn}(t)$	$2/(j\omega)$
$j/(\pi t)$	$\text{sgn}(\omega)$



2.3 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + 1/(j\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{\pm j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\text{sen}(\omega_0 t)$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$



2.3 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$rect(t / \tau)$	$\tau Sa(\omega\tau / 2)$
$\frac{W}{2\pi} Sa\left(\frac{W\tau}{2}\right)$	$rect(\omega / W)$
$\Lambda(t / \tau)$	$\tau Sa^2(\omega\tau / 2)$
$\frac{W}{2\pi} Sa^2(Wt / 2)$	$\Lambda(\omega / W)$
$\cos(\pi t / \tau) rect(t / \tau)$	$\frac{2\tau}{\pi} \frac{\cos(\omega\tau / 2)}{1 - (\omega\tau / \pi)^2}$
$\frac{2W}{\pi^2} \frac{\cos(Wt)}{1 - (2Wt / \pi)^2}$	$\Lambda(\omega / W)$
$\delta_T(t)$	$\omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$



2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Linealidad (debido a que es una integral)

$$\mathfrak{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

- Conjugadas complejas

$$\mathfrak{F}\{f^*(t)\} = F^*(-\omega)$$

- Si f es real, $F^*(-\omega) = F(\omega)$
- Se prueba directamente calculando

$$\mathfrak{F}\{f^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-j\omega t} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right)^*$$



2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Simetría: Cualquier función es la suma de una parte par más una impar

$$\mathfrak{I}\{f_{PAR}(t)\} = F_{PAR}(\omega) \text{ real}$$

$$\mathfrak{I}\{f_{IMPAR}(t)\} = F_{IMPAR}(\omega) \text{ imaginario}$$

- Por ejemplo, para la función par:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}\{f_{PAR}(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{PAR}(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{PAR}(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f_{PAR}(t) \sin(\omega t) dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} f_{PAR}(t) \cos(\omega t) dt \text{ que es par}\end{aligned}$$



2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Dualidad

$$\text{si } \mathfrak{T}\{f(t)\} = F(\omega)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{T}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)$$

– Para probarlo basta hacer un cambio de variables entre t y ω en la transformada

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\{f(t)\} &= \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \overset{\omega' = t}{\underset{t' = \omega}{\int_{t'=-\infty}^{\infty} f(\omega') e^{-jt'\omega'} d\omega'}} \\ &= 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{\omega'=-\infty}^{\infty} f(\omega') e^{-jt'\omega'} d\omega' = 2\pi \mathfrak{T}^{-1}\{f(\omega')\} \big|_{\omega'=t} \end{aligned}$$

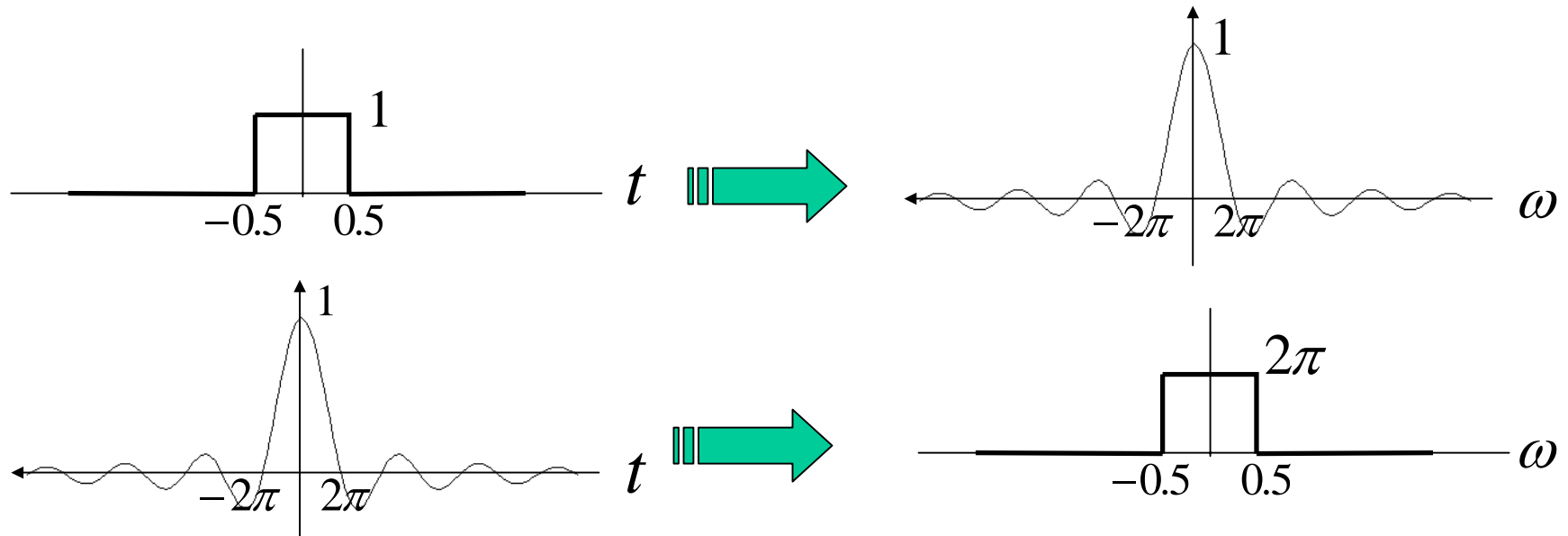


2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Ejemplo

– Si se sabe que $\mathfrak{F}\{rect(t)\} = Sa(\omega/2)$, calcular $\mathfrak{F}\{Sa(t/2)\}$

$$\mathfrak{F}\{Sa(t/2)\} = 2\pi rect(-\omega) = 2\pi rect(\omega)$$





2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Escala de Coordenadas

$$\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

- Prueba: 2 casos: α positivo y α negativo

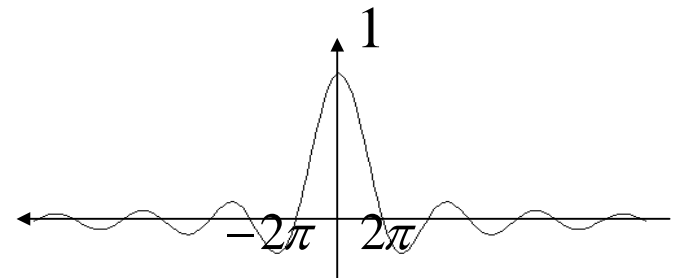
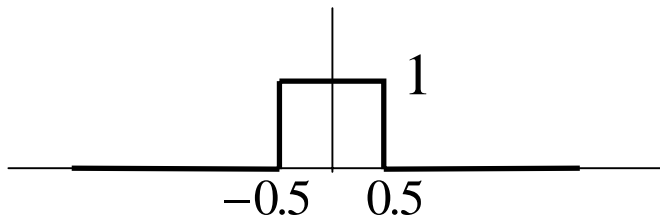
$$\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x/a} dx / \alpha = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \int_{\infty}^{-\infty} f(x) e^{-j\omega x/a} dx / \alpha = \frac{1}{-\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

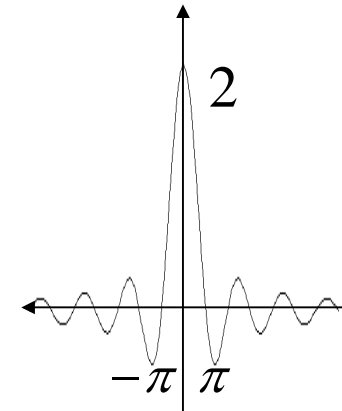
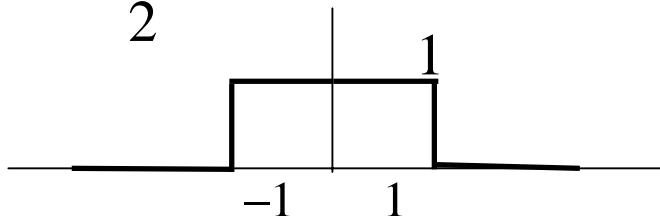


2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Si $f(t)$ se vuelve ancho, $F(\omega)$ se vuelve angosto y viceversa, amplitudes varían respetando Parseval.



$$\alpha = \frac{1}{2} :$$





2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Desplazamiento en el tiempo (retardo)

$$\mathfrak{F}\{f(t - t_0)\} = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

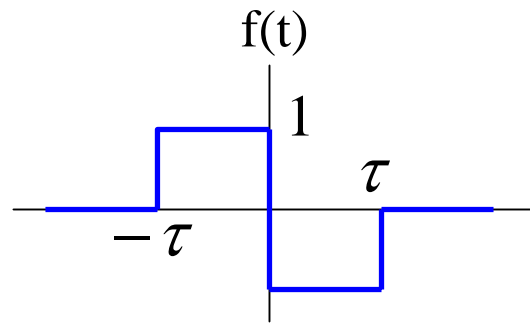
$$\mathfrak{F}\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(t+t_0)} dx$$

- Al retardar la señal, la amplitud del espectro no varía, pero su fase si => información temporal en la fase.



2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Ej: Determinar la transformada de:



$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{f(t)\} &= \mathfrak{F}\{rect[(t + \tau / 2) / \tau] - rect[(t - \tau / 2) / \tau]\} \\ &= \tau \mathfrak{F}\{rect[t + \tau / 2] - rect[t - \tau / 2]\} \\ &= \tau Sa(\omega \tau / 2) \{e^{j\omega \tau / 2} - e^{-j\omega \tau / 2}\} = j(4 / \omega) sen^2(\omega \tau / 2)\end{aligned}$$



2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Desplazamiento de frecuencia (modulación)
 - Es la propiedad dual a la del retardo

$$\mathfrak{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0)$$

$$\mathfrak{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt$$

- También ocurre con $\cos(\cdot)$

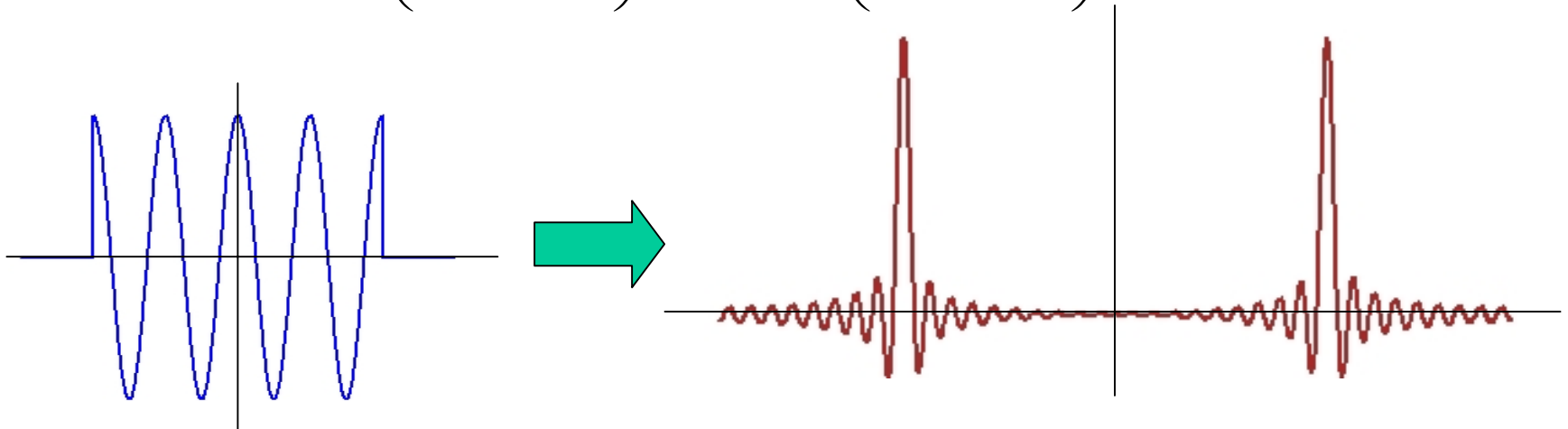
$$\mathfrak{F}\{f(t)\cos(\omega_0 t)\} = \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{2}f(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}f(t)e^{-j\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0)$$



2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Ej: hallar el espectro de:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{A \operatorname{rect}(t / \tau) \cos(\omega_0 t)\} &= \\&= \frac{A}{2} \mathfrak{F}\{ \operatorname{rect}(t / \tau) e^{j\omega_0 t} \} + \frac{A}{2} \mathfrak{F}\{ \operatorname{rect}(t / \tau) e^{-j\omega_0 t} \} \\&= \frac{A}{2} \tau \operatorname{Sa}\left(\tau \frac{\omega - \omega_0}{2}\right) + \frac{A}{2} \tau \operatorname{Sa}\left(\tau \frac{\omega + \omega_0}{2}\right)\end{aligned}$$





2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Derivación

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = j\omega F(\omega)$$

– Porque:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega = \mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega) j\omega\}$$

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = F(\omega) j\omega$$



2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Integración:

$$\Im \left\{ \int_{\tau=-\infty}^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$$

– donde:

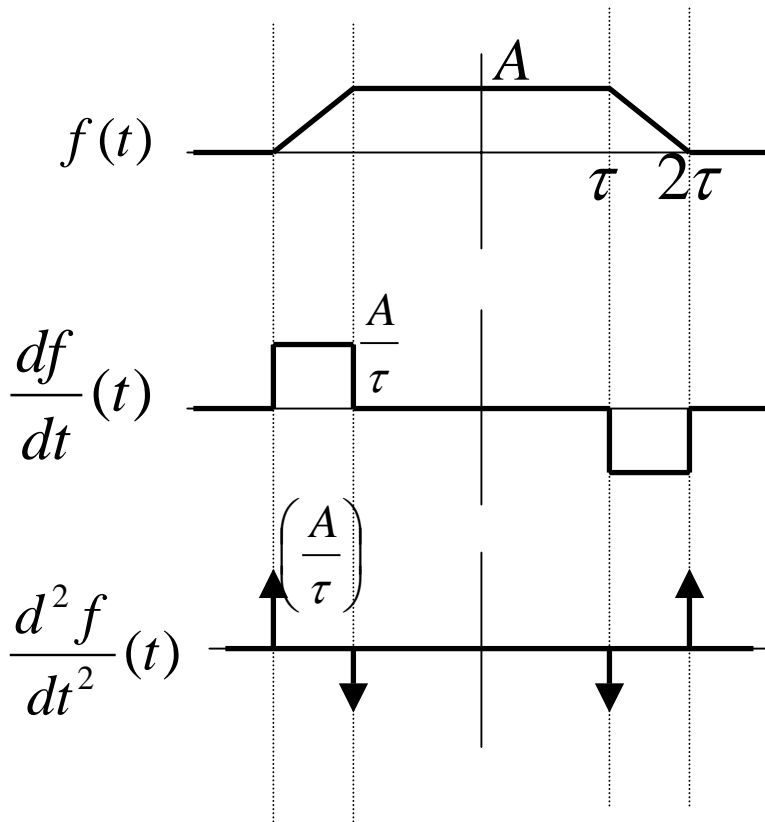
$$F(0) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

es la componente continua de la señal.



2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Ejemplo: Determinar la transformada de $f(t)$:



$$\mathfrak{F}\left\{\frac{d^2 f}{dt^2}(t)\right\} = (j\omega)^2 F(\omega)$$

$$(j\omega)^2 F(\omega) = \frac{A}{\tau} \left(e^{j2\omega\tau} - e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau} + e^{-j2\omega\tau} \right)$$

$$F(\omega) = -\frac{A \left(e^{j2\omega\tau} - e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau} + e^{-j2\omega\tau} \right)}{\omega^2 \tau}$$



2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Convolución en el tiempo
 - Se denomina convolución entre dos funciones a la siguiente operación:

$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Se cumple la propiedad:

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = F(\omega)H(\omega)$$



2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} \left(\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt$$

- Cambiando el orden de integración:

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{t=-\infty}^{\infty} h(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right) d\tau$$

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \mathfrak{F}\{h(t - \tau)\} d\tau$$

- Propiedad de desplazamiento en el tiempo:

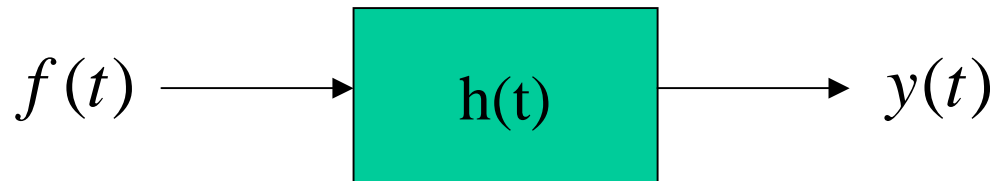
$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) H(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = H(\omega) F(\omega)$$



2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Si el sistema es lineal y $h(t)$ es la respuesta al impulso, se cumple:



$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$Y(\omega) = F(\omega)H(\omega) \quad \text{con } H(\omega) = \mathfrak{F}\{h(t)\}$$



2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

- Convolución en la frecuencia: Si

$$\mathfrak{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega), \quad \mathfrak{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)]$$

- Se prueba de forma semejante a la convolución en el tiempo



2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

Linealidad (superposición)	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
Conjugada compleja	$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$
Escala	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{ \alpha } F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
Retardo	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$
Traslación en frecuencia	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$



2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

Modulación de amplitud	$f(t) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2} F(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0)$
Convolución en el tiempo	$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$	$F(\omega) H(\omega)$
Convolución en la frecuencia	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{u=-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u) du$
Dualidad tiempo - frecuencia	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Simetría par - impar	$f_{PAR}(t)$	$F_{PAR}(t) \text{ real}$
	$f_{IMPAR}(t)$	$F_{IMPAR}(t) \text{ imaginario}$



2.4 – Propiedades de la transformada de Fourier

Derivación en el tiempo	$\frac{d}{dt} f(t)$	$j\omega F(\omega)$
Integración en el tiempo	$\int_{\tau=-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$

Como las transformadas de Fourier se obtienen a partir de las series de Fourier, las propiedades de una son aplicables a la otra cambiando ω por $n\omega_0$.



2.5 Relaciones de convolución

- La convolución se define por:

$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Si el sistema es causal, entonces $h(t)=0$ para $t<0$ ($h(t)$ es la respuesta al impulso $\delta(t)$)
- Si además la entrada $f(\cdot)$ cumple $f(t)=0$ para $t<0$, la convolución se puede reescribir:

$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=0}^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



2.5 Relaciones de convolución

- Propiedades: conmutatividad

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

- Distributividad

$$f_1(t) * (f_2(t) + f_3(t)) = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

- Asociatividad: no se requieren ()

$$\begin{aligned} (f_1(t) * f_2(t)) * f_3(t) &= f_1(t) * (f_2(t) * f_3(t)) = \\ &= f_1(t) * f_2(t) * f_3(t) \end{aligned}$$



2.5 Relaciones de convolución

- Respuesta al escalón: La respuesta al escalón es la integral de la respuesta al impulso para un sistema lineal invariante:

$$\begin{aligned}\Re\{u(t)\} &= u(t) * h(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \\ &= \int_{\tau=0}^{\infty} h(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

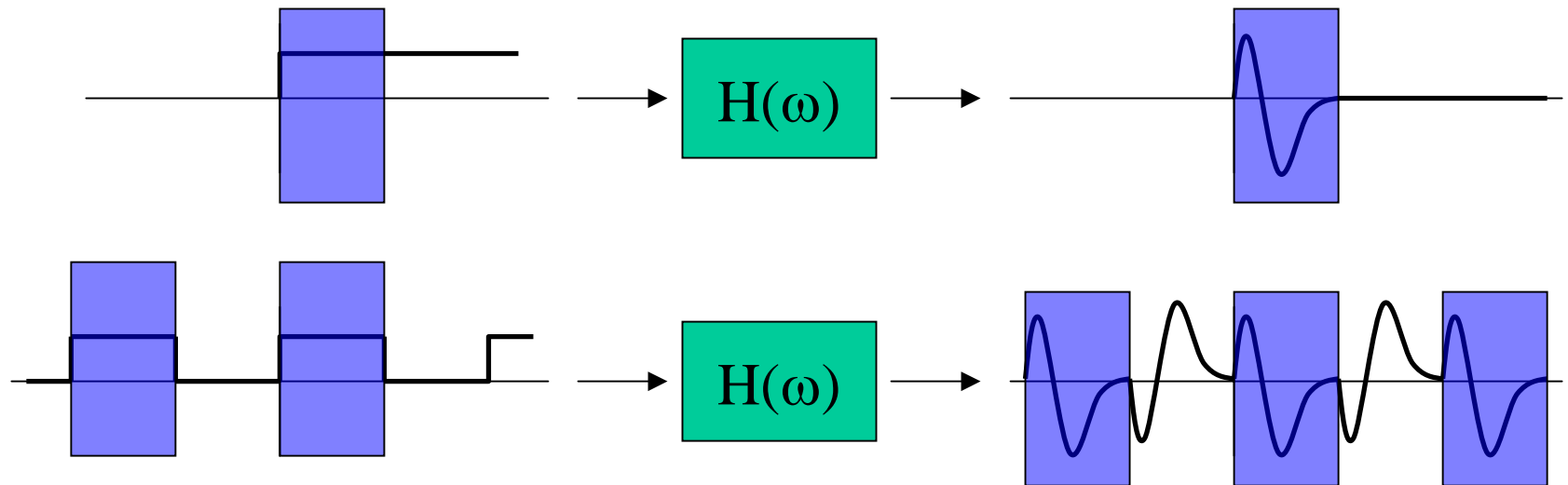
- Haciendo $x=t-\tau$.

$$\Re\{u(t)\} = \int_{x=-\infty}^t h(x)dx$$



2.5 Relaciones de convolución

- La respuesta al impulso puede determinarse derivando la respuesta al escalón
- La respuesta al escalón puede determinarse, usando una onda cuadrada lenta, en los flancos positivos:





2.5 Relaciones de convolución

- Convolución con impulso \Rightarrow retraso

$$f(t) * \delta(t - t_0) = \int_{\tau=0}^{\infty} f(\tau) \delta(t - t_0 - \tau) d\tau = f(t - t_0)$$

- Ejemplo: Calcular $f(t) * g(t)$ si

$$f(t) = A \operatorname{sen}(\pi t), \quad g(t) = \delta(t) - \delta(t - 2)$$

$$f(t) * g(t) = f(t) * \delta(t) - f(t) * \delta(t - 2)$$

$$= f(t) - f(t - 2) = A \operatorname{sen}(\pi t) u(t) - A \operatorname{sen}(\pi(t - 2)) u(t)$$

$$= A \operatorname{sen}(\pi t) (u(t) - u(t - 2))$$



2.6 Interpretación gráfica de la convolución

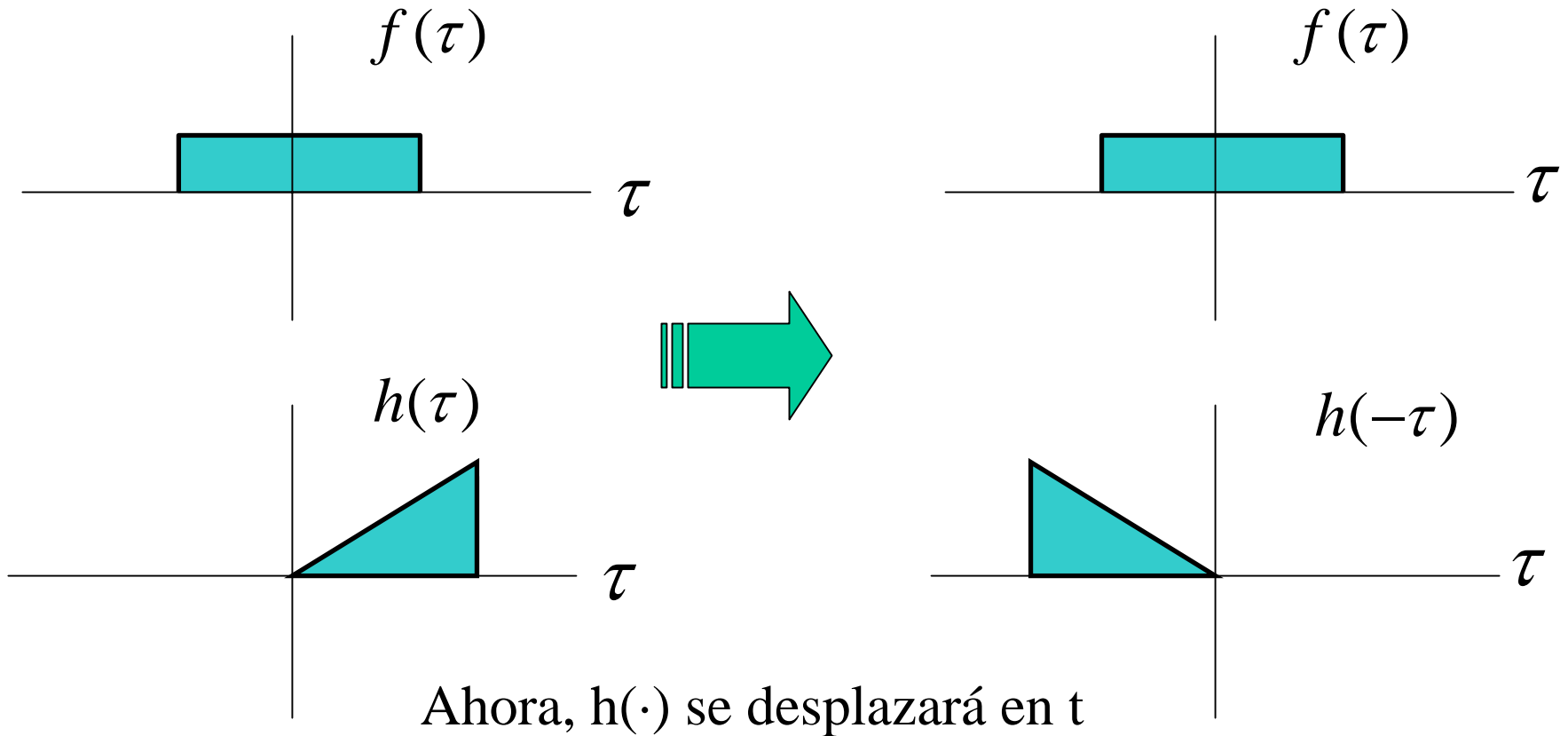
- La convolución se define por la integral:

$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- Se quiere ver qué significa en el dominio del tiempo de un modo intuitivo.
- $h(t)$, al ser invertido en el eje horizontal se comporta como un promediador móvil: permite calcular un “promedio ponderado” de la entrada en cada t :

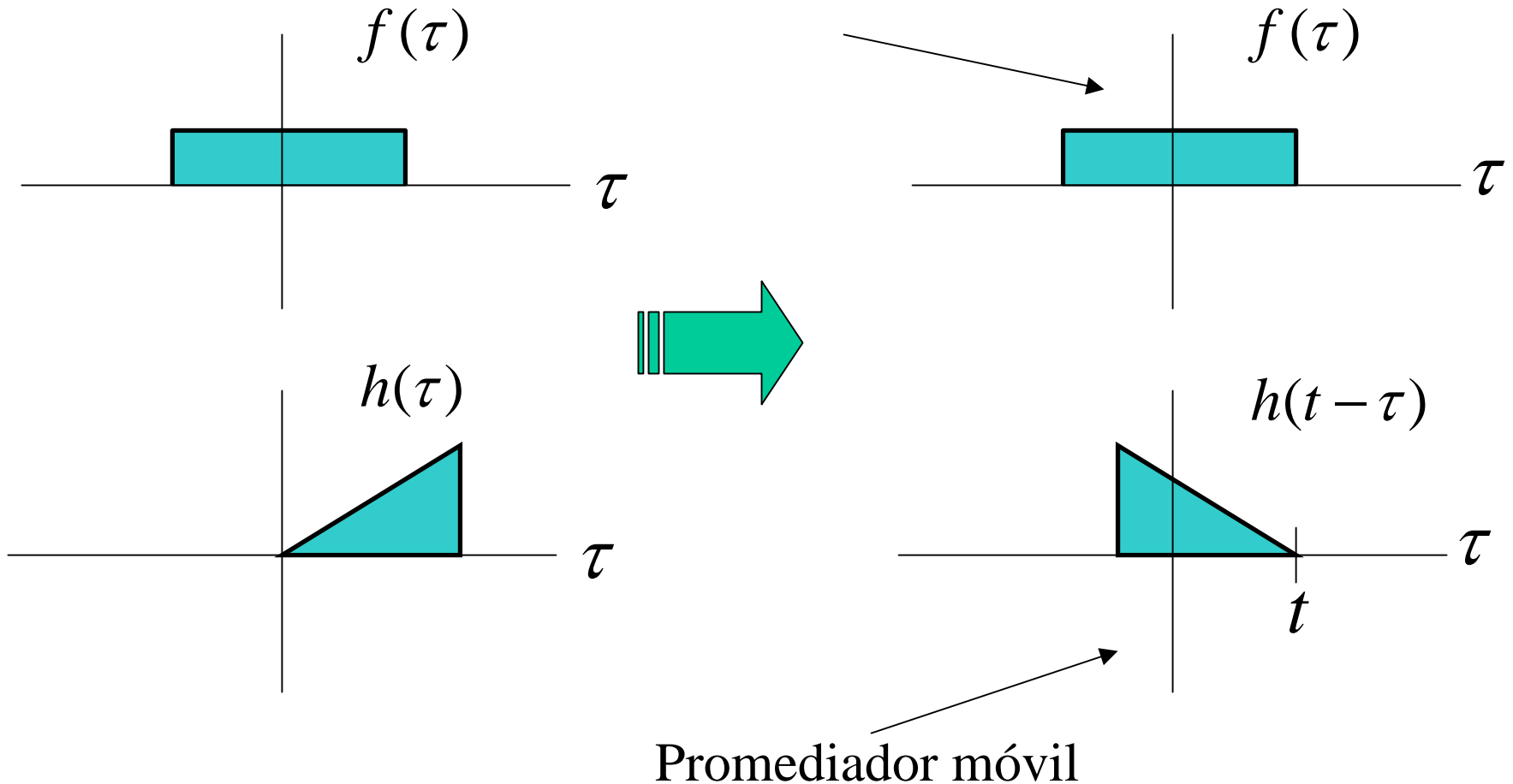


2.6 Interpretación gráfica de la convolución





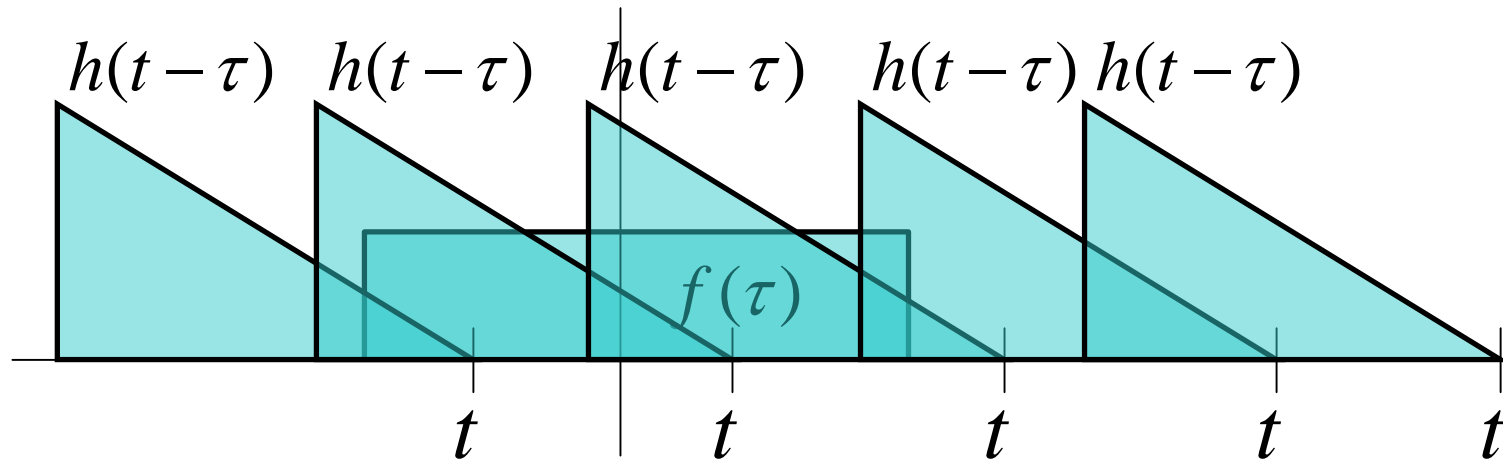
2.6 Interpretación gráfica de la convolución





2.6 Interpretación gráfica de la convolución

El promediador avanza al pasar el tiempo. La salida en el tiempo t es el área común que resulta al multiplicarlos.



$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad \forall t$$



2.6 Interpretación gráfica de la convolución

- La salida, en el dominio del tiempo, es un promedio ponderado de la señal de entrada. El promediador avanza junto con t
- El cálculo de la integral puede discretizarse \Rightarrow permite cálculo en un computador



2.7 – Característica de filtro de los sistemas lineales

- La salida de un sistema lineal se puede ver también en el dominio de la frecuencia:

$$y(t) = f(t) * h(t)$$

$$Y(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$

- $H(\omega)$ indica la ganancia del filtro en función de la frecuencia \Rightarrow función de transferencia
- A la salida, sólo quedan las frecuencias de $F(\omega)$ que están también en $H(\omega)$



2.7 – Característica de filtro de los sistemas lineales

- Para cada frecuencia ω :
 - $|H(\omega)|$: ganancia de amplitud
 - Fase de $H(\omega)$: desfase entre salida y entrada. A la fase de la entrada se le suma la fase de $H(\omega)$
- Ejemplo: calcular el espectro de salida si $\tau=4RC$: $F(\omega) = \tau Sa(\omega\tau / 2)$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau / 4)^2}} e^{j\phi}$$

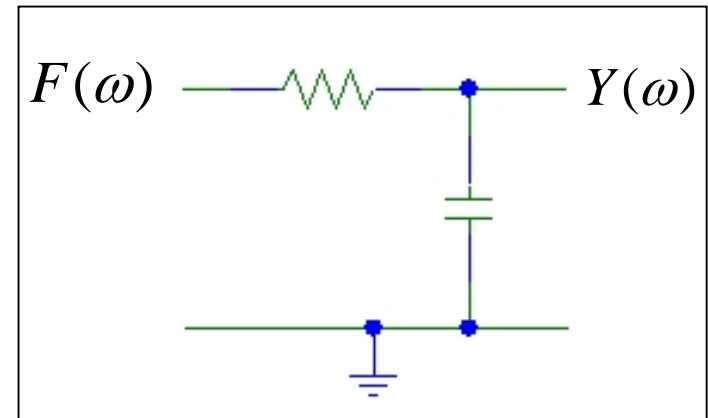


2.7 – Característica de filtro de los sistemas lineales

$$F(\omega) = \tau \operatorname{Sa}(\omega\tau / 2)$$

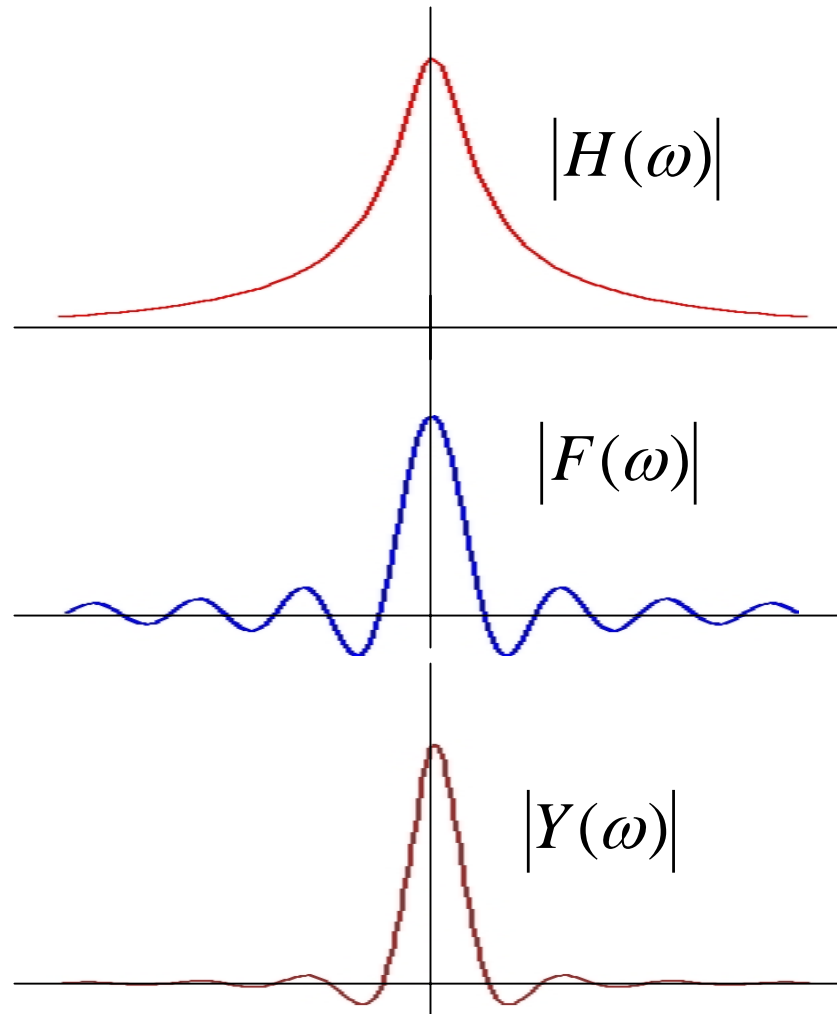
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau / 4)^2}} e^{j\phi}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau / 4)^2}} \tau \operatorname{Sa}(\omega\tau / 2) e^{j\phi}$$





2.7 – Característica de filtro de los sistemas lineales



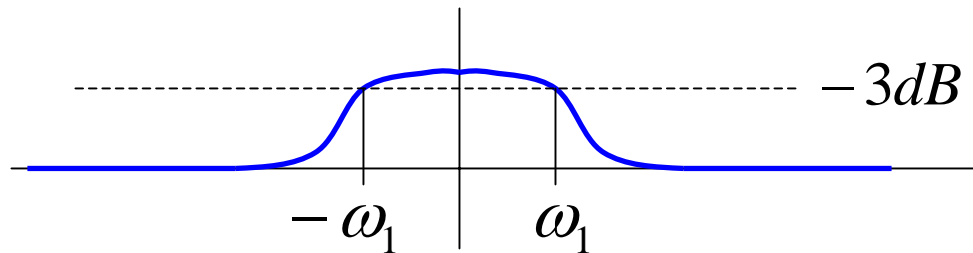


2.8 Ancho de banda de un sistema

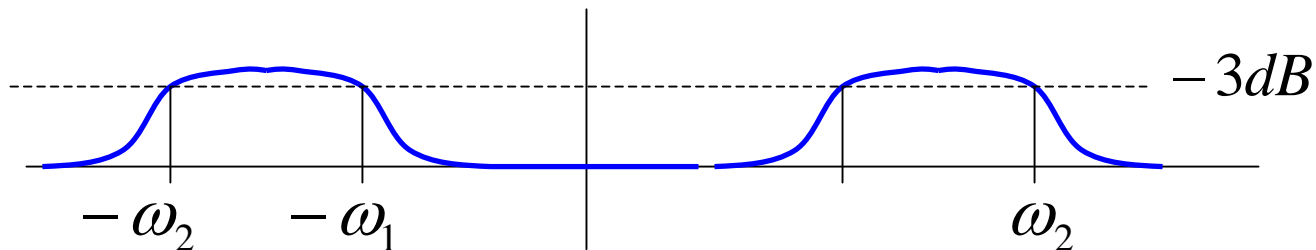
- Zona en que $H(\omega)$ deja pasar la señal \Rightarrow ancho de banda
- Intervalo W (en rad/s) donde la magnitud es mayor que un cierto umbral (factor numérico)
- Típicamente: ancho de banda de -3dB = ancho de banda de potencia media: umbral = $1/\sqrt{2}$ en amplitud = $1/2$ en potencia.
- Ancho de banda en Hz $\Rightarrow B$



2.8 Ancho de banda de un sistema



$$W = \omega_1, \quad B = \frac{\omega_1}{2\pi}$$



$$W = \omega_2 - \omega_1, \quad B = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$



2.9 Transmisión sin distorsión

- Requisito para que un sistema lineal no distorsione la forma de onda: debe ser del tipo:

$$y(t) = Kf(t - t_0)$$

- Tomando transformada de Fourier:

$$Y(\omega) = Ke^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

- Es decir, $H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$



2.9 Transmisión sin distorsión

- Requisito para que un sistema lineal no distorsione la forma de onda: debe tener ganancia constante y fase lineal

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$$

- Ganancia K para todo ω
- Fase: $\phi_H = -t_0\omega$