



**Pauta Auxiliar N° 3**  
**25 de Agosto de 2004**

**Pregunta 1**

- a) Si, siempre que  $f$  o  $g_i$  no sean convexas.
- b) Si, siempre que  $y^*$  no sea regular.
- c) Se trata de un punto factible. Luego:

$$g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Por lo tanto:

$$\mu_i \cdot g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1 \dots m$$

Si

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Se cumple la relación:

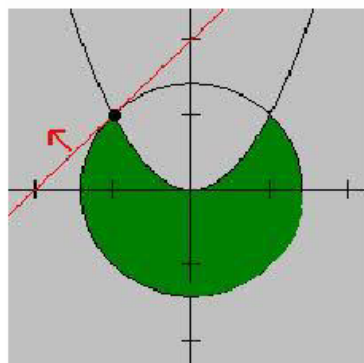
$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot \nabla g_i(x^*) = 0$$

- d) Pueden existir puntos factibles que cumplan KKT. Estas condiciones son necesarias y **no** suficientes.

**Pregunta 2**

- 1. Veamos el análisis gráfico:

El punto óptimo es el  $(-1,1)$ .



Verifiquemos las condiciones de KKT:

Llevemos al problema a la forma necesaria para aplicar KKT:

$$\begin{array}{ll} \min & x - y \\ \text{s.a.} & -x^2 + y \leq 0 \\ & x^2 + y^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

Ambas restricciones son activas en el óptimo, por lo tanto debe satisfacerse que

$$\nabla f(-1,1) + \mu_1 \nabla g_1(-1,1) + \mu_2 \nabla g_2(-1,1) = 0$$

$$\mu_1 g_1 = 0 \wedge \mu_2 g_2 = 0$$

$$\mu_1(-x^2 + y) = 0 \Rightarrow \mu_1 \in \Re$$

$$\mu_2(x^2 + y^2 - 2) = 0 \Rightarrow \mu_2 \in \Re$$

Así:

$$\nabla f(x, y) = (1, -1) \Rightarrow \nabla f(-1, 1) = (1, -1)$$

$$\nabla g_1(x, y) = (-2x, 1) \Rightarrow \nabla g_1(-1, 1) = (2, 1)$$

$$\nabla g_2(x, y) = (2x, 2y) \Rightarrow \nabla g_2(-1, 1) = (-2, 2)$$

Luego tenemos:

$$(1, -1) + \mu_1(2, 1) + \mu_2(-2, 2) = 0$$

El sistema queda:

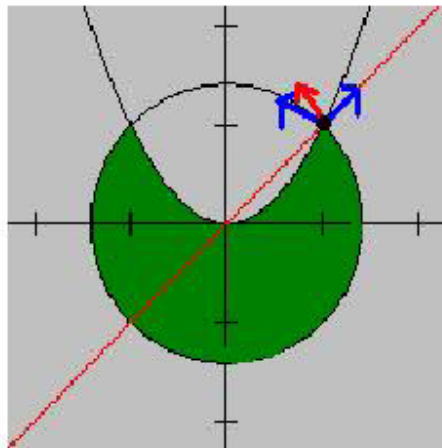
$$2\mu_1 - 2\mu_2 = -1$$

$$\mu_1 + 2\mu_2 = 1$$

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = \frac{1}{2}$$

Con esto el punto verifica KKT.

**2.** Existen solo 2 puntos, además del óptimo, que cumplen KKT, veámoslo gráficamente:



Vemos que el punto (1,1) cumple con KKT, verifiquémoslo numéricamente

En este punto ambas restricciones son activas, luego  $\Rightarrow \mu_1 \wedge \mu_2 \in \Re$  (como en la parte 1). Se tiene también que:

$$\nabla f(1,1) = (1, -1)$$

$$\nabla g_1(1,1) = (-2, 1)$$

$$\nabla g_2(1,1) = (2, 2)$$

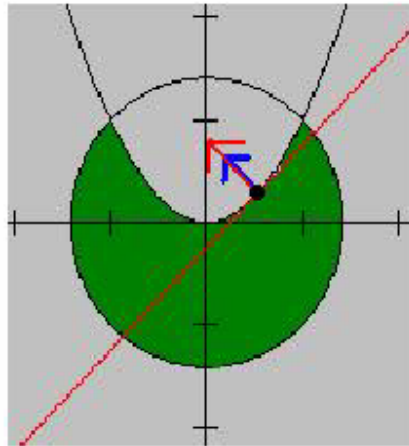
Así se tiene que:

$$-2\mu_1 + 2\mu_2 = -1$$

$$\mu_1 + 2\mu_2 = 1$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \frac{2}{3}, \mu_2 = \frac{1}{6}$$

Luego se verifica que el punto cumple KKT.



Para calcular el punto que lo cumple se pueden usar 2 formas:

-La primera dice que el punto viene dado por donde el gradiente de la función objetivo sea paralelo al de la primera restricción, o sea:

$$(1, -1) = \alpha(-2x, 1)$$

$$\Rightarrow \alpha = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Y como además el punto pertenece a la parábola,  $\frac{1}{4} - y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$

Finalmente el punto buscado es el  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ .

-La segunda opción es encontrar el punto donde la función objetivo intersecta en un solo punto a la parábola, o sea se busca que:

$$y - x = a$$

$$x^2 - y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = y$$

Luego

$$x^2 - x - a = 0$$

Así, para que la intersección sea un solo punto  $a$  debe ser tal que la expresión anterior sea un cuadrado perfecto, luego  $a = 1/4$  con lo que nos queda:

$$(x - \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Con esto  $y = (\frac{1}{2})^2 = 1/4$ , luego el punto que se busca es el  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ .

Luego vemos del gráfico que el punto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  cumple con KKT, verifiquémoslo numéricamente

En este punto solo la primera restricción es activa y la segunda inactiva, luego

$$\mu_1(-x^2 + y) = 0 \Rightarrow \mu_1 \in \mathbb{R}$$

$$\mu_2(x^2 + y^2 - 2) = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0$$

$$\nabla f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = (1, -1)$$

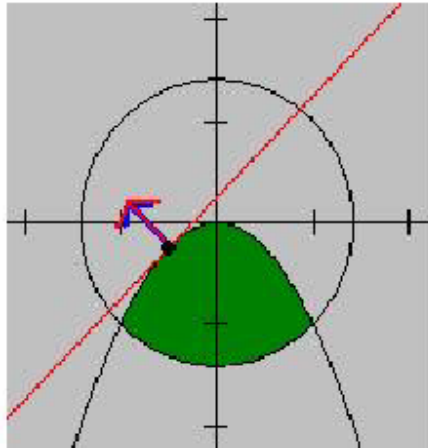
$$\nabla g_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = (-1, 1)$$

Así se tiene que con  $\mu_1 = 1$  se cumple la condición de KKT.

Esta situación puede darse ya que la región factible no es convexa, lo cual se prueba de la siguiente forma:

Sabemos que los puntos  $(-1,1)$  y  $(1,1)$  pertenecen a la región factible, luego si fuera convexo cualquier punto de la recta  $\lambda(-1, 1) + (1-\lambda)(1,1)$  debería pertenecer a la región factible, tomemos  $\lambda = 1/2$ , con esto resulta el punto  $(0,1)$  que claramente no pertenece a la región factible ya que  $0^2 - 1 = -1 < 0 \Rightarrow$  la región factible no es convexa.

**3.** En este caso tenemos solo un punto que cumple KKT, dado que la región factible y la función objetivo es convexa. El óptimo se muestra en la figura:



Para calcular el óptimo se pueden usar 2 formas:

- La primera dice que el óptimo viene dado por donde el gradiente de la función objetivo sea paralelo al de la primera restricción, o sea:

$$(1, -1) = \alpha(2x, 1)$$

$$\Rightarrow \alpha = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Y como además el punto pertenece a la parábola,  $\frac{1}{4} + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$

Finalmente el punto buscado es el  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ .

-La segunda opción es encontrar el punto donde la función objetivo intersecta en un solo punto a la parábola, o sea se busca que:

$$y - x = a$$

$$x^2 + y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -y$$

Luego

$$x^2 + x + a = 0$$

As, para que la intersección sea un solo punto  $a$  debe ser tal que la expresión anterior sea un cuadrado perfecto, luego  $a = \frac{1}{4}$  con lo que nos queda:

$$(x + \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Con esto  $y = -(\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{4}$ , luego el punto que se busca es el  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ .

Verifiquemos que cumple con KKT:

En este punto solo la primera restricción es activa y la segunda inactiva, por lo que directamente diremos que  $\mu_1 \in \Re \wedge \mu_2 = 0$ , luego tenemos:

$$\nabla g_1(x, y) = (2x, 1)$$

Luego

$$\nabla f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = (1, -1)$$

$$\nabla g_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = (-1, 1)$$

Así con  $\mu_1 = 1$  se cumple la condición de KKT.

Como la región factible y la función objetivo son convexas, el punto encontrado es óptimo global.

Demostremos que la región factible y la función objetivo son convexas:

➤ Función Objetivo:

Calculemos el hessiano de la función objetivo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos que es definido positivo (y negativo a la vez) por lo que la función es convexa.

➤ Región Factible:

Se puede usar cualquier método para demostrar la convexidad, por ejemplo se pueden tomar 2 puntos cualquiera de la región factible:  $(x, y)$  y  $(x', y')$ . Demostremos que cualquier punto de la recta  $\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', y') =$  con  $\lambda \in [0, 1]$  pertenece a la región factible.

### Problema 3

a) El espacio de soluciones son los puntos contenidos en un elipsoide. El problema consiste en encontrar un hiperplano tangente con vector normal 1.

b) Las condiciones de KKT son las siguientes:

$$-1 + 2 \cdot \mu \frac{x_i}{a_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

$$\mu \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{a_i} - b \right) = 0$$

$$\mu \geq 0$$

c) De inmediato vemos que:

$$x_i = \frac{a_i}{2\mu} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Vemos que  $\mu$  es distinto de 0 (directo de las ecuaciones anteriores). Multiplicamos la  $i$ -ésima ecuación por  $a_i$  y sumamos las  $n$  primeras ecuaciones.

$$\sum_{i=1}^n a_i = 2\mu f(b)$$

Si multiplicamos las ecuaciones por  $x_i$  y sumamos tenemos que:

$$\sum_{i=1}^N x_i = f(b) = 2\mu \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{a_i} = 2\mu b$$

Entonces

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N a_i}{b}}$$

por lo tanto

$$x_i = a_i \sqrt{\frac{b}{\sum_{i=1}^N a_i}}$$

finalmente

$$f(b) = \sqrt{b \sum_{i=1}^N a_i}$$

Dudas y/o consultas:  
Marianela Pereira C.  
**mapereir@ing.uchile.cl**