



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FAC. DE CIENCIAS FÍS. Y MAT.  
Departamento de Ingeniería Industrial

Curso: IN34A - Optimización  
Semestre: Primavera 99  
Profesores: A.Musalem/ R.Weber  
Patricio Conca  
A. Muñoz/D.Varela  
Auxiliares: Felipe Caro  
Walter Krefft, Andrés Pardo  
Alvaro Alomar, Richard Vega

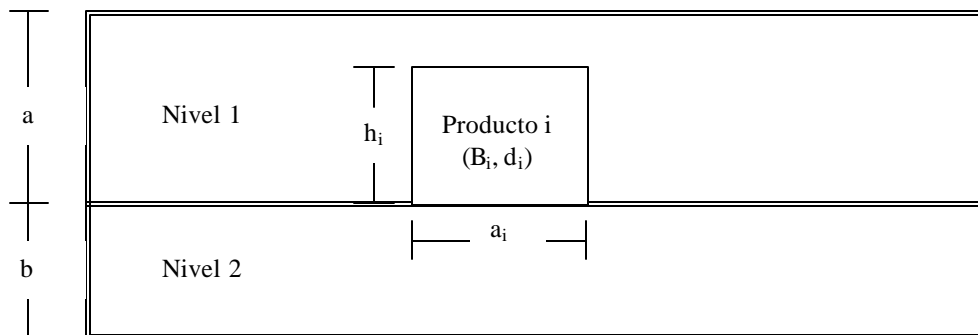
**CONTROL 2**  
**Miércoles 12 de Mayo de 1999**

**Problema 1**

- a) (4,5 ptos.) Suponga usted que se le ha encomendado mejorar el diseño del contenido de las góndolas de un supermercado en términos de los productos que debe incluir en ella. Para ello usted sabe que la góndola tiene 2 niveles (ver figura), cada uno de un alto  $a$  y  $b$  centímetros (cm), respectivamente. Además, ambos niveles tienen una longitud de  $L$  cm. Por otro lado usted cuenta con  $n$  tipos de productos distintos, los cuales tienen cada uno un cierto alto y un cierto ancho lo cual se denota por  $h_i$  y  $a_i$  ( $i=1..n$ ), respectivamente. Cada producto debe estar presente sólo en uno de los dos niveles. Obviamente existen productos más rentables que otros por lo cual cada producto tiene un beneficio neto unitario  $B_i$ , el cual incluye todos los beneficios y costos asociados a la venta de una unidad de producto "i". Finalmente se requiere además que exista un mínimo de  $d_i$  unidades de cada producto en las góndolas de modo de garantizar una mínima variedad y disponibilidad hacia los clientes.

Asumiendo que todo lo que se coloca en la góndola se vende y que no se puede poner un producto detrás de otro ni tampoco sobre otro, plantee un modelo de programación lineal mixta o entera que permita encontrar la asignación de máximo beneficio de los distintos productos a la góndola teniendo en cuenta las características físicas de cada producto y de la góndola.

**Figura: "Esquema de la Góndola"**



- b) (1,5 punto). Suponga ahora que es posible poner unidades de un mismo producto una detrás de otra. Para ello considere que la profundidad de la góndola es de  $P$  cm en

ambos niveles y que la profundidad de cada unidad de producto  $i$  es  $p_i$  (con  $p_i < P$ ). Plantee las modificaciones necesarias al modelo de la parte (a) de modo de agregar este nuevo grado de libertad que permite apilar unidades de un mismo producto una detrás de otra. Recuerde que el modelo debe seguir siendo lineal mixto o entero.

**Hint:** Defina una variable auxiliar que dé cuenta del número de corridas de profundidad o filas de productos unos detrás de otros que ocupará cada producto  $i$ .

## Problema 2

- a) ¿Cómo sabe usted que una forma canónica entrega una solución básica no factible? Explique cómo resolvería usted un problema de programación lineal a partir de una forma básica no factible.

- b) Sea la siguiente forma canónica:

$$\text{Min } z = -x_1 - 2x_2$$

sa.:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + x_4 = b_2$$

$$x_j \geq 0$$

Se sabe que en la próxima iteración  $x_3$  sale de la base.

Determine la variación de la función objetivo en la próxima iteración.

- c) Sea el problema:

$$\text{Min } z = C^T X$$

$$\text{sa.: } Ax \geq b$$

$$x_j \leq 0$$

Plantee los criterios de entrada y salida de la base para el algoritmo simplex en este problema con variables no positivas.

Nota: Su respuesta no puede basarse en el cambio de variable  $x_j = -x'_j$ , con  $x'_j \geq 0$ .

- d) Suponga que usted dispone de una forma canónica que entrega una solución básica factible que no es óptima. Además usted conoce todos los costos modificados de la función objetivo en el óptimo. Explique cómo se pueden obtener los valores de las variables en la solución óptima a partir de la información anterior y sin tener que resolver el problema mediante una secuencia de iteraciones.

## Problema 3

- a) (1,5 punto). Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned}
 \text{(PL-1)} \quad & \max \quad z = -x_1 + x_2 \\
 \text{s. a.} \quad & 2x_1 + 3x_2 = 2 \\
 & 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\
 & 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 10 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Es posible reducir el tamaño del problema (PL-1). Explique por qué.

b) **(4,5 punto).** Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned}
 \text{(PL-2)} \quad & \max \quad z = -x_1 + x_2 \\
 \text{s. a.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\
 & 3x_1 + x_2 = 6 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Determine una base factible del problema (PL-2). ¿Cuáles son los valores de las variables  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  correspondientes a esta base? ¿Cuál es el valor de la función objetivo para esta base?

#### Problema 4

Considere el siguiente problema lineal

**Min  $x_1$**

$$\begin{aligned}
 \text{s.a.} \quad & x_1 - x_2 \geq -1 \\
 & 5x_1 - x_2 \leq 10 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Comience a iterar con Simplex fase dos a partir de la base formada por las variables de holgura de las restricciones 1 y 2.

¿Corresponde esta base al óptimo del problema?

Concluya sobre la unicidad del punto óptimo.

## Pauta Problema 1, Control 2, Semestre 1999/1

### a) Solución.

#### Variables de decisión:

$x_{ij}$  := Unidades de producto  $i$  puestas en el nivel  $j$ .  $i=1..n$ ,  $j=1,2$

(variable que puede ser definida como entera o aproximadamente continua).

$y_{ij}$  := 1 si el producto  $i$  está en el nivel  $j$ ; 0, si no. (variable binaria)

#### Restricciones:

a1) No negatividad:  $x_{ij} \geq 0 \quad \forall i=1..n, \forall j=1,2$

a2) Cada producto debe estar presente solamente en un nivel de la góndola:

$$y_{i1} + y_{i2} = 1 \quad \forall i=1..n$$

a3) Consistencia en la definición de  $y_i$ :

$$x_{i1} \leq M \cdot y_{i1}, \quad x_{i2} \leq M \cdot y_{i2}, \quad M \text{ número muy grande. } \forall i=1..n$$

a4) Ancho de la góndola no debe ser superado:

$$\sum_i^n x_{i1} \cdot a_i \leq L, \quad \sum_i^n x_{i2} \cdot a_i \leq L$$

a5) Altura de cada nivel de la góndola no debe ser superada por la altura de ninguno de los productos asignados a ese nivel:

$$h_i \leq a + M \cdot (1 - y_{i1}), \quad h_i \leq b + M \cdot (1 - y_{i2}) \quad \forall i=1..n$$

a6) Satisfacción de variedad y disponibilidad mínima:

$$x_{i1} + x_{i2} \geq d_i \quad \forall i=1..n$$

**Función Objetivo:**  $\sum_i^n (x_{i1} + x_{i2}) \cdot B_i$

### b) Solución.

#### Nueva variable de decisión(auxiliar):

$f_{ij}$  := número de corridas del producto  $i$  en el nivel  $j$  de la góndola. (Variable **Entera**)

$$\forall i=1..n, \forall j=1,2$$

#### Nuevas Restricciones:

c1) Consistencia de  $f_{ij}$ :

$$f_{ij} \geq x_{ij} \cdot (p_i / P) \quad \forall i=1..n, \forall j=1,2$$

$$f_{ij} \geq 0 \quad \forall i=1..n, \forall j=1,2 \text{ (REDUNDANTE)}$$

c2) Nueva Restricción de ancho (reemplaza a **a4**):

$$\sum_i^n f_{ij} \cdot a_i \leq L \quad \forall j=1,2$$

**Función Objetivo: no cambia.**

## Solución.

Pregunta M-2.

- a) Si  $\exists \bar{b}_i < 0$  entonces la forma canónica original una solución básica no factible.

Se deben agregar variables artificiales y desarrollar una fase 1 y luego iniciar en fase 2.

- b) Es claro que  $x_2$  entra a la base. Como  $x_2$  sale de la base, entonces  $6/2$  es el valor que tomará  $x_2$ .

Luego la función objetivo tendrá una variación de  $-2 \times 2 = -4$ .

- c) Criterio de entrada:

$$\text{Max} \{ \bar{c}_j ; \bar{c}_j > 0 \} = \bar{c}_3$$

Criterio de salida:

$$\text{Max} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{a_{i,3}} ; a_{i,3} > 0 \right\}$$

- d) Como se conocen los datos modificados de la F.O. en el óptimo se pueden identificar las  $n$  no básicas en el óptimo y por tanto las  $n$  básicas de la solución óptima.

Si se conocen las  $n$  básicas en el óptimo se pueden definir la matriz básica del óptimo.

Luego se puede calcular:  $\bar{b}^* = B^{*-1} \bar{b}$

El vector  $\bar{b}^*$  contiene el valor de las variables básicas en el óptimo.

### Pauta Pregunta 3

3a) (1,5 punto). Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{(PL-1)} & \max \quad z = -x_1 + x_2 \\ \text{s. a.} & 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ & 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Es posible reducir el tamaño del problema (PL-1). Explique por qué.

**Solución:** La tercera restricción es linealmente dependiente de las primeras dos restricciones. Entonces es posible eliminar la tercera restricción.

3b) (4,5 punto). Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{(PL-2)} & \max \quad z = -x_1 + x_2 \\ \text{s. a.} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & 3x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Determine una base factible del problema (PL-2). ¿Cuáles son los valores de las variables  $x_1, x_2, x_3$  correspondientes a esta base? ¿Cuál es el valor de la función objetivo para esta base?

**Solución:**

(PL-2) →

Punto Pregunta 3 b)

(3-2)

$$\begin{aligned} (PL-2) \rightarrow \min w &= t_1 + t_2 \\ (PA) \text{ s.a. } x_1 + 2x_2 + x_3 + t_1 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + t_2 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, t_1, t_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$0) B_1 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1) B_1^{-1} = I_2$$

$$2) \bar{b} = B_1^{-1} b = b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad t_1 = 4, \quad t_2 = 6, \quad w = 10$$

$$3) \bar{d}_j = d_j - \pi A_{.j} \quad \pi = d_{B_1} B_1^{-1} = (1, 1)$$

$$\bar{d}_1 = d_1 - \pi A_{.1} = 0 - (1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -4$$

$$\bar{d}_2 = d_2 - \pi A_{.2} = 0 - (1, 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$\bar{d}_3 = d_3 - \pi A_{.3} = 0 - (1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$\bar{d}_4 = \bar{d}_5 = 0$$

4) entra  $x_1$



$$5) \bar{A}_1 = B_1^{-1} A_{.1} = A_{.1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

$$\min_{\bar{a}_{i1} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{1} \quad \frac{6}{3} \right\} = 2$$

scale  $t_2$

$$6) B_2 = (A_{.4}, A_{.1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$1) B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$2) \bar{b} = B_2^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t_1 = 2, \quad x_1 = 2, \quad w = 2$$

$$3) \bar{d}_j = d_j - \pi A_{.j} \quad \pi = d_{B_2} B_2^{-1} = (1, 0) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (1, -\frac{1}{3})$$

$$\bar{d}_1 = \bar{d}_4 = 0$$

$$\bar{d}_2 = 0 - \pi A_{.2} = 0 - (1, -\frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{5}{3}$$

$$\bar{d}_3 = 0 - \pi A_{.3} = 0 - (1, -\frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$\bar{d}_5 = 1 - \pi A_{.5} = 1 - (1, -\frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}$$

4) entra  $x_2$

$$5) \quad \overline{A}_{.2} = B_2^{-1} A_{.2} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

$$\min_{\overline{a}_{i2} > 0} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{i2}} \right\} = \min \left\{ \frac{2}{5/3} \quad \frac{2}{1/3} \right\} = \min \left\{ \frac{6}{5}, 6 \right\}$$

take  $t_1$

$$6) \quad B_3 = (A_{.2}, A_{.1}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$1) \quad B_3^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \overline{b} = B_3^{-1} b = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{8}{5} \quad x_2 = \frac{6}{5} \quad w = 0$$

$$3) \quad \overline{d}_j = d_j - \pi A_{.j} \quad \pi = d_{B_3} B_3^{-1} = (0, 0) B_3^{-1} = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \overline{d}_j = d_j \geq 0 \quad \forall j$$

$\Rightarrow B_3$  es base óptima del problema (PA)

$\Rightarrow B_3$  es base factible del problema (PL-2)

$$x_1 = \frac{8}{5} \quad x_2 = \frac{6}{5} \quad x_3 = 0 \quad z = \frac{-2}{5}$$

# Pauta Pregunta 4

(4-1)

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 \\ \text{s.t. } x_1 - x_2 &\geq -1 \\ 5x_1 - x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \min z &= x_1 \\ \text{s.t. } x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \\ 5x_1 - x_2 + x_4 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$0) B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1) B_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \bar{b} = B_1^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 1, x_4 = 10, z = 0$$

$$3) \bar{c}_j = c_j - \pi A_j$$

$$\pi = c_{B_1} B_1^{-1} = (0, 0) \quad B_1^{-1} = (0, 0)$$

$$\bar{c}_j = c_j \quad \forall j$$

$$\bar{c}_1 = c_1 = 1$$

$$\bar{c}_2 = \bar{c}_3 = \bar{c}_4 = 0$$

$$\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j \Rightarrow B_1 \text{ es base óptima}$$

$\bar{c}_2 = 0$ : el costo reducido de una variable no básica es cero  $\Rightarrow \exists$  óptimo alternativo (degeneración dual!)