DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN71L - Modelos Estocásticos
Sem.: Primavera 2004
Prof: Raúl Gouet
P. Aux: D. Sauré, P. Hernández

Clase Auxiliar 2
10 de Septiembre, 2004

Problema 1

1. Cada cliente llega interesado en el producto tipo i con probabilidad q_i. Para que un cliente que llega interesado en el producto Tipo i de precio P_i, lo demande efectivamente se debe tener que la disposición a pagar por dicho producto d_i sea mayor o igual al precio del producto. Luego la probabilidad de demandar es: $P[d_i \geq P_i] = 1 - P[d_i < P_i] = 1 - F_i(P_i) = \bar{F}_i(P_i)$. El proceso de demanda del producto Tipo i también es un Proceso de Poisson.

   Dada una probabilidad de demanda para el producto Tipo i igual a: $\bar{q}_i = q_i\bar{F}_i(P_i)$, se tiene que la llegada de clientes que demandan efectivamente un producto Tipo i sigue un proceso de poisson de tasa: $\lambda_i = \lambda\bar{q}_i$ entonces la distribución de probabilidades de la demanda efectiva por cada producto es:

$$P[N_i(t) = k] = \frac{(\lambda_i t)^k e^{\lambda_i t}}{k!}$$

2. Si inicialmente los inventarios de productos son Q_A y Q_B, respectivamente:

   a) Denotando por p_k a la probabilidad de que se vendan exactamente k productos tipo B, antes de que se agoten los productos tipo A es:

$$p_k = \binom{Q_A - 1 + k}{Q_A - 1} \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}^{Q_A - 1} \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$$

   b) Descondicionando lo anterior por sobre los valores de k, se tiene que:

$$r_{AB} = \sum_{k=0}^{Q_B - 1} p_k = \sum_{k=0}^{Q_B - 1} \binom{Q_A - 1 + k}{Q_A - 1} \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}^{Q_A - 1} \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$$

3. Del resultado visto en auxiliar sabemos que:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R]}{E[X]}$$

   Luego se debe definir el ciclo, y calcular la esperanza de los beneficios por ciclo y el largo esperado de cada ciclo.

   Definiendo cada ciclo de renovación, como cada vez que se acepta una nueva orden, se tiene que:

$$E[R] = P_A * Q_A + P_B * Q_B - K - [\frac{h_A}{\lambda_A} \sum_{k=1}^{Q_A} k + \frac{h_B}{\lambda_B} \sum_{k=1}^{Q_B} k]$$

Donde los dos primeros términos corresponden a los ingresos por ventas, el tercer término es el costo de aceptar la orden y el último corresponde al costo de inventario por unidad de tiempo.

Por otro lado para el largo del ciclo se tiene que:

$$E[L] = \frac{Q_A}{\lambda_A}(1 - r_{AB}) + \frac{Q_B}{\lambda_B}(r_{AB}) + \frac{1}{\mu}$$

Los dos primeros términos corresponden a la esperanza del tiempo hasta que se acaban todos los productos, donde $\frac{Q_i}{\lambda_i}$, representan las esperanzas de las llegadas Q_i-ésima para cada producto, esto es la esperanza de distribuciones gamma(Q_i, λ_i) . El tercer término corresponde a la esperanza del tiempo desde que se acaba el último producto hasta que llega la orden que se aceptará, es decir, la esperanza de una exponencial de parámetro μ.

Finalmente se tiene que:

4. En este caso, se utiliza la misma expresión de la parte anterior, pero con distintas estructura de ciclos y beneficios. Luego se tiene que en este caso la función de beneficios está compuesta por la demanda insatisfecha en cada ciclo:

$$E[R] = \frac{E[\text{Demanda después de venta } Q_i\text{-ésima}]}{E[\text{Demanda total del ciclo}]} = \frac{\frac{\lambda_A}{\mu}}{Q_A + \frac{\lambda_A}{\mu}}$$

El numerador corresponde a la esperanza de la cantidad de clientes que llegan a la tienda después de que se acaba el inventario y antes de que llegue el proveedor. En el denominador, se suma a la cantidad anterior el resto de la demanda del ciclo.

Por otro lado la esperanza del largo del ciclo está dado por:

$$E[L] = \frac{Q_A}{\lambda_A} + \frac{1}{\mu}$$

Donde el primer término corresponde al tiempo transcurrido hasta que se agotan los productos y el segundo hasta que llega el proveedor con una nueva entrega.

Problema 2

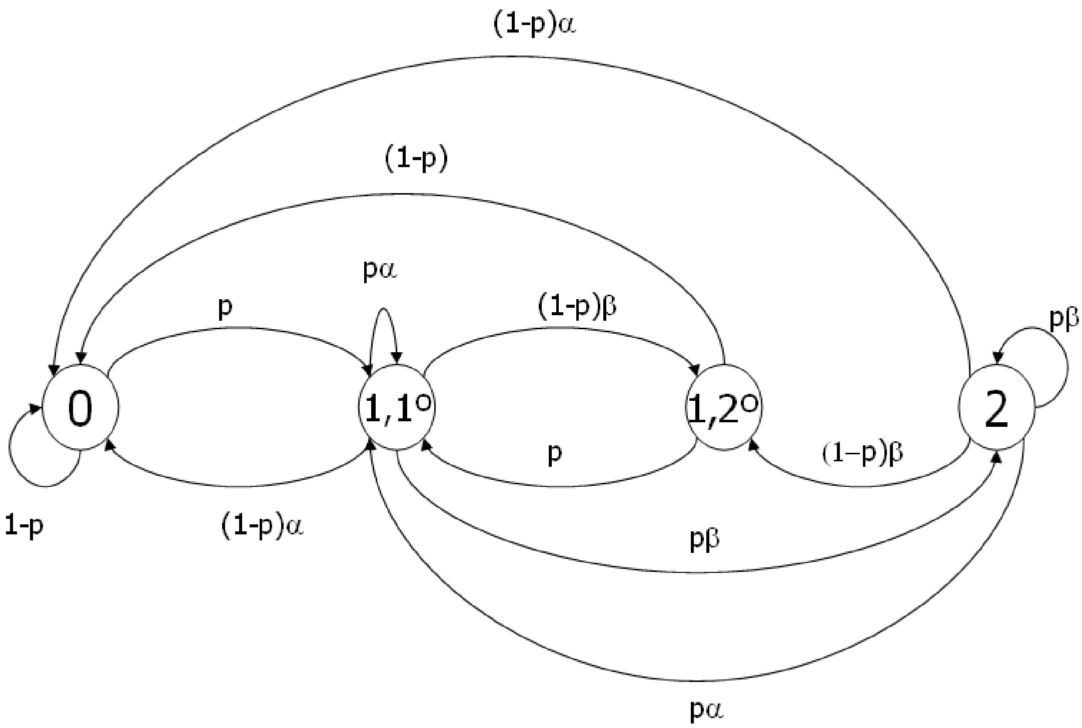
1. Dada la situación descrita en el enunciado la máxima cantidad de habitaciones ocupadas son 2.

2. Como todo problema de modelación es posible representar la situación bajo estudio de diferentes formas. En este caso, se muestra una cadena que contiene el mínimo número de estados posibles para la situación descrita.

   Los estados son los siguientes:

   - (0): El hotel se encuentra sin pasajeros durante la noche.
   - (1,1): Hay un pasajero en el hotel, y está en su primera noche de estadía.
   - (1,2): Hay un pasajero en el hotel, y está en su segunda noche de estadía.
   - (2): Hay dos pasajeros del hotel. Es importante notar que cuando hay 2 psasjeros, uno de ellos está en su primera noche de estadía y el otro en la segunda noche.

La cadena se muestra en la siguiente figura:



A modo de ejemplo, a continuación se explican algunas transiciones de la cadena.

- (0)⇝(1,1): Con probabilidad p llega un cliente, el que siempre llegará a estar en su primera noche de estadía. Por ahora, no nos preocupamos si se va a quedar por una segunda noche.
- (1,1)⇝(0): Si es que no llega otro cliente (con probabilidad $1-p$) y el que está actualmente sólo iba por una noche (con probabilidad α), se vuelve al hotel vacío.
- (1,1)⇝(1,1): Si es que llega otro cliente (con probabilidad p) y el que está actualmente sólo iba por una noche (con probabilidad α), se sigue en el mismo estado.
- (1,1)⇝(1,2): Si es que no llega otro cliente (con probabilidad $1-p$) y el que está actualmente se queda por una segunda noche (con probabilidad β), se pasa al estado (1,2).
- (1,1)⇝(2): Si es que llega otro cliente (con probabilidad p) y el que está actualmente se queda por una segunda noche (con probabilidad β), se pasa al hotel con 2 habitaciones ocupadas.

El resto de las transiciones sigue la misma lógica.

Vemos que existe una única clase recurrente, aperiódica, conformada por la totalidad de los estados de la cadena.

Problema 3

1. Definitivamente es posible modelar el número de maquinas buenas al comienzo de un da. Esto dado que el estado posee información que resume todo lo que necesitamos saber: Si existen i

maquinas buenas al comienzo del día, entonces (dado que las maquinas solo pueden estar buenas o malas) obligatoriamente tengo $T-i$ maquinas malas las cuales estarán disponibles al comienzo del proximo día, si no fuese así no estarían malas (dado que solo pueden fallar durante el transcurso de un día).

Por otro lado tenemos que:

$$S(j,i) = \begin{cases} \binom{i}{j} q^j (1-q)^{i-j} & i \geq j \\ 0 & \sim \end{cases}$$

2. Claramente tendremos $T+1$ estados (desde el 0 al T), sin embargo dibujar las transiciones y un esquema de la cadena general es muy complicado (debido al elevado numero de transiciones). Entonces la mejor forma de determinar la cadena es especificar cada transición entre estados con la probabilidad de transición asociada.

   Para determinar P_{ij} debemos notar el hecho que si T-i maquinas estarán con seguridad buenas en el siguiente etapa, entonces solo tiene sentido que $j \geq T-i$. Por otro lado, para los j que cumplen la condición tenemos que la transición implica que solo una cantidad $j-T+i$ de las i maquinas buenas sobrevive (o que $T-j$ no lo hacen). De esta forma tendremos que:

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & j < T-i \\ \binom{i}{T-j} q^{T-j} \cdot (1-q)^{j-T+i} & \sim \end{cases}$$

   En términos de $S(j,i)$ esto es:

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & j < T-i \\ S(T-j,i) & \sim \end{cases}$$

   Finalmente es bastante claro que (dado que todos los estados están comunicados entre si, la cadena es finita y hay estados aperíodicos) la cadena es ergódica, por lo si existirán probabilidades estacionarias. No esta demás decir que todos los estados forman una única clase recurrente.

3. La cadena sigue siendo la misma, solo cambiaran las probabilidades de transición. En este caso se tiene que:

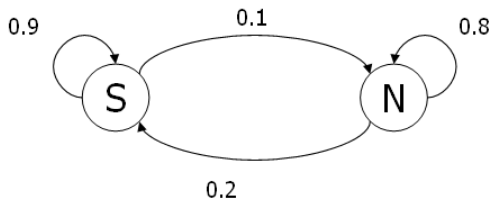
$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & j < \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor J \\ \binom{i}{i+\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor J - j} q^{i+\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor J - j} \cdot (1-q)^{-\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor J + j} & \sim \end{cases}$$

   En función de $S(j,i)$ queda de la siguiente forma:

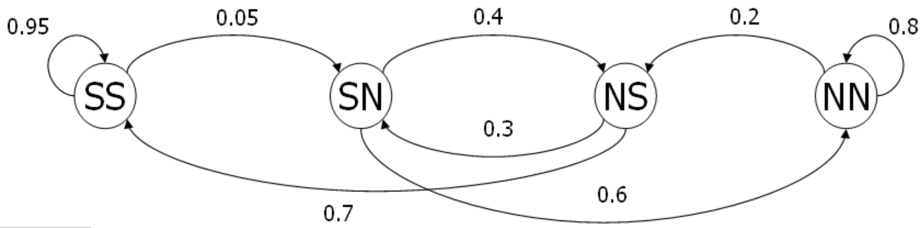
$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & j < \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor J \\ S(i+\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor J - j, i) & \sim \end{cases}$$

Problema 4

1. Claramente la cadena queda como sigue:



2. En este caso es necesario definir los estados como tuplas, en que se almacena la información del clima del día anterior y del día actual. La cadena se muestra en la siguiente figura:



Denis Sauré
dsaure@dii.uchile.cl

Patricio Hernández
shernand@ing.uchile.cl