Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN71L : Modelos Estocásticos
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliar : Denis Sauré

Clase Auxiliar 10 de Octubre, 2003

Cadenas de Markov en tiempo continuo

Problema 1

La oficina de Entrega de Certificados de una prestigiosa Escuela de Ingeniería, ha contratado una muy agraciada secretaria, la cual causa sensación dentro del alumnado masculino. Es por esto que se le ha encargado a ud. el estudio del sistema de atención con el que actualmente se opera.

En la oficina, sólo existe un puesto de espera, además del lugar que ocupa el estudiante que se está atendiendo. Los alumnos que llegan y encuentran, tanto a la secretaria como el lugar de espera ocupados, se retiran indignados.

Los estudiantes llegan a pedir certificados según un proceso de Poisson de tasa λ [alumnos/hora]. Con probabilidad p un alumno es hombre, y con $1-p$, mujer.

La secretaria demora en la atención, un tiempo aleatorio que sigue una distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ para los hombres y $\frac{1}{\gamma}$ para las mujeres, con $\mu \leq \gamma$.

Además se sabe que las alumnas, víctimas de una irrefrenable envidia, están como máximo en el lugar de espera un tiempo que sigue una distribución exponencial de parámetro β, luego del cual se retiran furiosas, sin haber recibido la atención. Por otro lado si un estudiante hombre está en el puesto de espera, ni tonto ni perezoso, se queda en ese lugar hasta que la afamada secretaria se desocupe y le preste el servicio requerido.

1. Modele el estado de ocupación de la Oficina de Certificados como una Cadena de Markov en tiempo continuo.
2. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que permitirían calcularlas.
3. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias y que el sistema lleva operando por "mucho tiempo", responda las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuál es la cantidad de alumnos (en total) que, en una hora, se retiran indignados al encontrar la oficina llena?
   b) Si un hombre llega y logra entrar al sistema, en promedio cuánto tiempo tendrá que esperar hasta ser atendido?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer se retire indignada del lugar de espera, antes de que termine la atención de la persona que está con la secretaria?

Problema 2

Considere la complicada situación que vive Armijo Catalán, flamante auxiliar de variados cursos de Ingeniería Industrial. Este personaje recibe consultas de sus alumnos (en forma de e-mails) de acuerdo a un proceso de poisson de tasa λ (e-mails/hora). La capacidad de la cuenta de Armijo es tal que puede almacenar a lo más 3 e-mails (el resto simplemente rebotará). Armijo responde a cada una estas consultas en un tiempo exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\mu}$ y lo hará mientras hayan consultas sin responder (una a la vez). Cada vez que responde una consulta el e-mail correspondiente es borrado.

Por otro lado la novia de Armijo llama a este a su celular con el objeto de demandar atención inmediata por parte de él. El tiempo entre llamadas es una variable aleatoria distribuida exponencialmente de media $\frac{1}{\delta}$. Si la llamada se produce cuando Armijo se encuentra con menos de 3 consultas pendientes por contestar (incluyendo en la que se encuentra trabajando si corresponde) entonces, acudirá inmediatamente al encuentro con su enamorada con la cual pasará un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\gamma}$. Sin embargo si su cuenta de correo está llena acudirá donde su novia apenas termine de contestar el mensaje actual. Cuando la novia de este personaje ha llamado 2 veces sin recibir respuesta entra en un estado de shock (producto de celos injustificados?) y acude instantáneamente en encuentro de Armijo, al cual encuentra y reta durante un tiempo exponencial de media $\frac{1}{\beta}$. Tras este altercado la novia ingresa ilícitamente a la cuenta de correo de Armijo y borra todos los e-mails que encuentre. Por último considere que si el auxiliar se encuentra en su oficina y sin mails pendientes se dedica a trabajar en su tesis.

1. Modele el estado de ocupación de Armijo como una cadena de Markov en tiempo continuo.
2. Argumente la existencia de probabilidades estacionarias. Escriba las ecuaciones que permitirían calcularlas.

En lo que sigue suponga conocidas las probabilidades estacionarias de la cadena.

3. ¿Cual es el número promedio de "escenas de celos" que la novia le hace a Armijo en una hora.
4. ¿Que fracción del tiempo, en el largo plazo Armijo dedica a su trabajo de tesis?

Problema 3

Una casa comercial ha decidido clasificar a sus clientes en 2 tipos: los tipo 1, *que recomiendan la tienda a sus amigos* y los tipo 2, *que no la recomiendan.* El gerente comercial sabe que cada uno de los clientes que recomiendan la tienda traerá un nuevo cliente luego de un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de tasa λ, el cual con probabilidad r será de tipo 1, y con probabilidad $(1-r)$ será de tipo 2. Además, a esta casa comercial llegan clientes tipo 2 de manera exógena, según un proceso de Poisson de tasa θ.

Se sabe que un cliente del tipo 1 dejará de ser cliente de la casa comercial luego de un tiempo aleatorio, exponencialmente distribuido de tasa μ. De la misma manera, un cliente tipo 2 dejará de ser cliente luego de un tiempo aleatorio, exponencialmente distribuido de tasa ν.

1. Modele la base de clientes de la casa comercial como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Escriba explícitamente las tasas de transición. HINT: No es necesario que dibuje toda la cadena.
2. Calcule $E[X(t)]$ y $E[Y(t)]$, donde $X(t)$ e $Y(t)$ son variables que indica el número de clientes tipo 1 y tipo 2, respectivamente que tiene la casa comercial en el instante t. Suponga que $X_1(0) = i$ e $Y(0) = j$. HINT: Construya una ecuación diferencial para las expresiones pedidas, a partir de las posibles evoluciones en un instante infinitesimal de tiempo. Recuerde que para un proceso de tasa λ se tiene que: $P[N(h) = 1] = \lambda h + o(h)$

Problema 4

La banda criolla "Jorge y los Markovianos" finalmente han alcanzado el éxito a nivel nacional. Es así como se aprestan a realizar un concierto en el Estadio Nacional a modo de celebración. Jorge como buen alumno, ocupará sus conocimientos para estudiar la dinámica del número de personas que asiste al concierto. Jorge sabe que sus fanáticos son de dos tipos específicos. El primer grupo llegará al estadio de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa β . Una persona de este tipo es tal que si llega al estadio y encuentra éste con su capacidad nominal completa (suponga esta capacidad igual a N personas) se retirará indignado.

Sin embargo, existe otro tipo de fanático a los que no les importa ir a ver tocar a Jorge sino que se motivan de acuerdo a la gran afluencia de público. Se puede suponer que los tiempos entre llegadas de este grupo están exponencialmente distribuidos y dependen linealmente del número de personas que ya se encuentran en el estadio. De esta manera, el tiempo esperado hasta que llegada el siguiente de estos fan, cuando hay sólo una persona en el estadio, es $1/\lambda$, mientras que si hay i es $1/(\lambda \cdot i)$. A este grupo no les interesa que el estadio ya haya sobrepasado su capacidad, dado que debido a la falta de seguridad ingresan al recinto de todas formas hasta que éste está por reventar, lo que ocurre cuando el número de personas es $3 \cdot N$.

Finalmente se tiene, que independiente del tipo de fan que se trate, éste se aburre y regresa del estadio en un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu$. Suponga para efectos de este problema que el repertorio de Jorge no se acaba nunca.

1. Modele el número de personas en el recinto como un proceso de nacimiento y muerte. ¿Cuál es la condición de estacionalidad?.
2. Calcule una expresión que le permita calcular las probabilidades estacionarias.
3. Si $N = 3$, $\lambda = \beta = 1$ y $\mu = 2$, determine la proporción del tiempo tal que no pueden ingresar al estadio fanáticos del primer tipo.