Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN71L : Modelos Estocásticos
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliar : Denis Sauré

Control 2
Viernes 17 de Octubre, 2003.

Problema 1

1. (1.0 ptos) Una matriz de transiciones se dice doblemente estocástica si

$$\sum_i P_{ij} = 1 \quad \forall\, j.$$

Esto es, todas las columnas suman 1. Muestre que una cadena ergódica de n estados, con matriz de transición doblemente estocástica, tiene la siguiente ley estacionaria:

$$\pi_i = \frac{1}{N} \quad \forall\, i$$

2. El rey Armijo acaba de recibir una elegante mesa redonda que cuenta con m sillas normales y un Trono, todas dispuestas a su alrededor. El rey Armijo realizará un exhaustivo control de calidad a cada uno de las sillas incluido su trono. Para esto, partiendo de su trono probará uno a uno los asientos de acuerdo a la siguiente lógica. Tras probar por un minuto un asiento, se desplazará rápidamente a uno de los asientos contiguos. Con probabilidad p se desplazará a la derecha y con probabilidad $1 - p$ a la izquierda, independiente de si ya ha pasado por el asiento de destino. Como ya se debe imaginar Armijo tiene una pésima memoria por lo que es capaz de estar realizando su control de calidad por mucho tiempo. Los caballeros de la mesa, que se encuentran observando semejante espectáculo han organizado una serie de apuestas. El caballero i, que se sienta en el i-ésimo lugar a la derecha del trono ha apostado R_i monedas de oro a que su asiento es el último en ser visitado por primera vez.

   a) (0.5 ptos.)Modele el errático comportamiento del rey como una cadena de markov en tiempo discreto.

   b) (1.5 ptos.)Calcule la ganancia esperada del caballero i.

   c) (1.5 ptos.) Calcule la esperanza del tiempo que transcurre hasta que alguno de los caballeros gana la apuesta.

   Una vez que acaba esta apuesta los caballeros de inmediato formulan otra, considerando el mismo monto (es decir el i-ésimo caballero apuesta R_i monedas de oro).Esta nueva apuesta consiste en lo siguiente: dejarán al rey en su comportamiento errático hasta que la reina lo descubra. Si la reina descubre al rey en el asiento del caballero i este será proclamado ganador.

d) (1.5 ptos.) Considerando que la reina no descubrirá al rey sino hasta pasado mucho tiempo, calcule la ganancia esperada del caballero i.

Problema 2

Al aeropuerto de Oregon llegan aviones de sólo dos líneas áereas, que realizan una ruta local de alto tráfico: L.A. Airlines y Armijo United. Los aviones de L.A. Airlines demoran exactamente τ_L horas en cubrir la ruta, mientras que los de Armijo United lo hacen en τ_A horas, con $\tau_A > \tau_L$. Además se sabe que el tiempo entre arribos de los aviones al aeropuerto de Oregon, son variables aleatorias i.i.d. exponenciales de parámetro μ_L y μ_A, respectivamente. Por otro lado la capacidad de todos los aviones de ambas compañías es de R pasajeros.

Los pasajeros que requieren realizar el viaje por esta ruta local, llegan al aeropuerto según un Proceso de Poisson de tasa λ[pasajeros/hora] y se ubican en una cola única con acceso directo a la loza del aeropuerto. Cada vez que llega un avión, cada uno de pasajeros en la fila de espera deciden si abordará o no dicho avión.

Se sabe que si el avión es de L.A. Airlines todos los pasajeros esperando tendrán intenciones de abordarlo. Por otro lado, si es de Armijo United cada uno de los pasajeros de manera independiente tendrá intenciones de tomar el vuelo con probabilidad p, o decidirá esperar a un próximo avión con probabilidad $1 - p$.

Los pasajeros que desean viajar en un vuelo determinado subirán al avión respetando el orden de llegada y la capacidad de la aeronave. Por otra parte,los pasajeros que deciden no tomar el vuelo y los que se quedaron abajo por falta de capacidad conservarán su prioridad en la fila remanente.

Finalmente suponga que tanto el tiempo que demoran los pasajeros en abordar un avión, como el tiempo de despegue son despreciables y que la sala de espera del aeropuerto cuenta con un espacio MUY grande.

1. (4.0 ptos.) Modele la cantidad de personas en el terminal aéreo como una cadena de Markov en tiempo continuo. Determine las transiciones posibles, las tasas involucradas, indique la condición de existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que permite calcularlas.

Suponga ahora que los pasajeros tomen la decisión de abordar o no un vuelo de manera racional, es decir, que tomen dicha decisión en función del tiempo esperado de viaje.

2. (0.5 ptos) Explique el trade-off que enfrenta un pasajero en el i-ésimo lugar de la fila al decidir si desea o no abordar un avión de Armijo United.
3. (1.5 ptos.) En términos de los parámetros del problema, encuentre la estrategia óptima de decisión para el pasajero que se encuentra en el i-ésimo lugar de la fila de espera.