Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN71L : Modelos Estocásticos
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliar : Denis Sauré

Pauta Control 2
Viernes 17 de Octubre, 2003.

Problema 1

1. La cadena es ergódica por lo que existirá una única ley de probabilidades estacionarias. Supongamos que esta ley es:
$$\pi_i = \frac{1}{N} \quad \forall\, i$$
Verificamos que se cumple que $\Pi = \Pi \cdot P$ y que $\sum_i \pi_i = 1$. Dado que la ley es única concluimos.

   a) La cadena es la siguiente:
   - Estados: X_i = número de la silla donde esta el rey (contando hacia la derecha). $X_i \in \{0, \ldots, m\}$ donde el 0 representa el trono.
   - Probabilidades: Las probabilidades de transición son las siguientes:

$$p_{ij} = \begin{cases} p & j = i+1 \quad i \neq m \\ q & j = i-1 \quad i \neq 0 \\ p & j = 0 \quad i = m \\ q & j = m \quad i = 0 \end{cases}$$

   b) Para calcular la probabilidad que gane el caballero i condicionaremos sobre cual de los estados adyacentes a i es visitado primero.

$P[\text{Ganar}] = P[\text{Ganar } |i{+}1 \text{ primero}] \cdot P[i{+}1 \text{ primero}] + P[\text{Ganar } |i{-}1 \text{ primero}] \cdot P[i{-}1 \text{ primero}]$

Para calcular la probabilidad de visitar a $i-1$ primero utilizaremos los resultados de la ruina del jugador. La analogía se muestra en la figura 1.
Dado que tenemos $m-1$ estados y que partimos del trono (estado 0 en la cadena original, estado $m-i+1$ en la cadena de la ruina) tendremos que:

$$P[i-1 \text{ primero}] = \frac{1-\rho^{(m-i+1)}}{1-\rho^{m-1}}$$

Donde $\rho = \frac{1-p}{p}$. Entonces:

$$P[i+1 \text{ primero}] = 1 - \frac{1-\rho^{(m-i+1)}}{1-\rho^{m-1}}$$

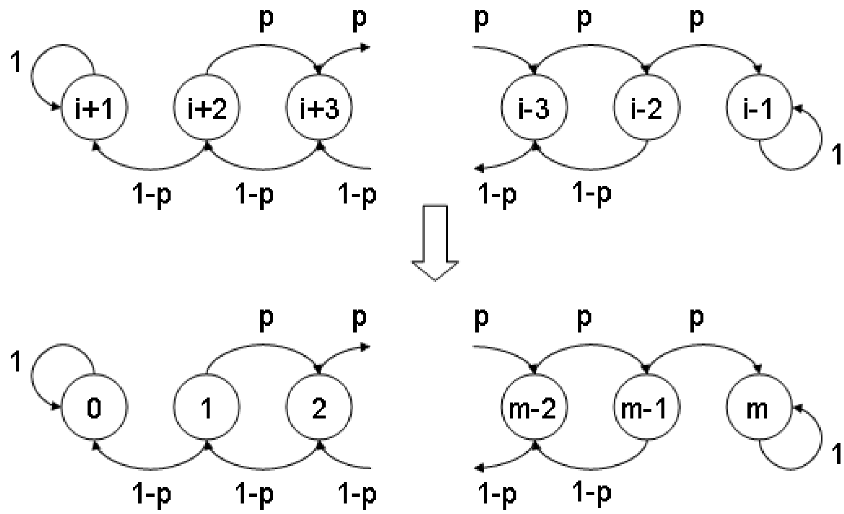

Figura 1: Analogía

Para calcular la probabilidad que i gane, dado que visito primero $i-1$ realizamos la analogía a una ruina del jugador que se muestra en la figura 2.
Para ganar debemos partir desde $i-1$ y no llegar a $i+1$ sin tocar i. Esto es, en nuestra cadena modificada, partir del estado $m-1$ y llegar a 0. Utilizando los resultados:

$$P[\text{Ganar } |i-1 \text{ primero}] = 1 - \frac{1-\rho^{(m-1)}}{1-\rho^m}$$

Razonando de la misma forma, vemos que para calcular la probabilidad de ganar dado que llegamos primero a i+1 podemos realizar la analogía que se muestra en la figura 3:
La probabilidad buscada es la de partiendo en el estado 1 llegar al estado m. Esto es:

$$P[\text{Ganar } |i+1 \text{ primero}] = \frac{1-\rho}{1-\rho^m}$$

Solo resta reemplazar.
La esperanza de las ganancias del caballero i es:

$$E[U_i] = P[\text{gana } i] \cdot \left[\sum_{j=1}^{m} R_j \right] - R_i$$

c) De la parte anterior conocemos la probabilidad de victoria de cada jugador. Sea T el número de periodos transcurridos hasta que algún caballero gana, y consideremos la siguiente expresión:

$$\sum_{j=1}^{T} X_j$$

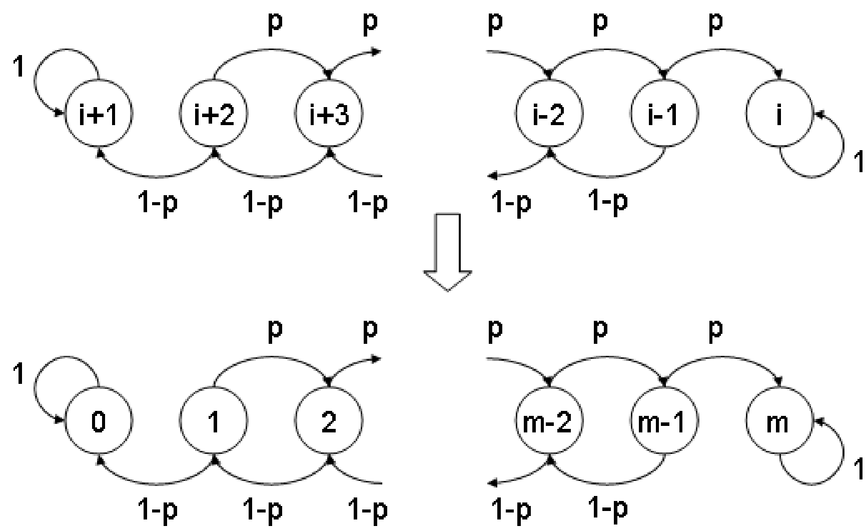

Figura 2: Analogía

en donde los X_j representan ensayos de una distribución bernoulli (1,-1) de parámetro p. Dado que T tiene esperanza finita (no es necesario demostrarlo) podemos ocupar el teorema de Wald. También podemos escribir la expresión de la izquierda condicionando sobre el ganador de la apuesta (considerare que el ganador debe esperar que el rey se siente en su silla para cobrar el premio, aunque se sepa ganador antes):

$$\begin{aligned} E[\sum_{j=1}^{T} X_j] &= E[T] \cdot (2p-1) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left[E[\sum_{j=1}^{T} X_j] | \text{gana } i \right] \cdot P[\text{gana } i] \end{aligned}$$

Pero

$$E[\sum_{j=1}^{T} X_j] | \text{gana } i] = -(m-i) \cdot \left[\frac{1-\rho^{(m-i+1)}}{1-\rho^{m-1}} \right] + i \cdot \left[1 - \frac{1-\rho^{(m-i+1)}}{1-\rho^{m-1}} \right]$$

Finalmente:

$$E[T] = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2p-1} \cdot \left(-(m-i) \cdot \left[\frac{1-\rho^{(m-i+1)}}{1-\rho^{m-1}} \right] + i \cdot \left[1 - \frac{1-\rho^{(m-i+1)}}{1-\rho^{m-1}} \right] \right) \cdot P[\text{gana } i]$$

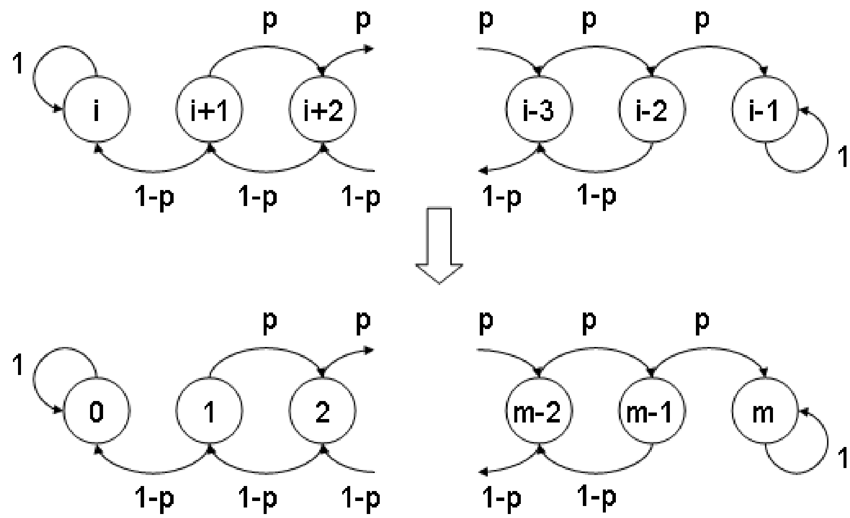

Figura 3: Analogía

d) Dado que la matriz de la cadena es doblemente estocástica no necesitamos calcular las probabilidades estacionarias. Dado que la reina llega en mucho, mucho tiempo, supondremos estado estacionario. De esta forma la esperanza de las ganancias del caballero i es:

$$E[U_i] = \frac{1}{m+1} \cdot \left[\sum_{j=1}^{m} R_j \right] - R_i$$

Notamos que en este caso pudiese no haber un ganador.

Problema 2

Para simplificar la notación, definimos $\alpha_{k,n}$ a la probababilidad de que si llega un avión de Armijo United y hay n personas en el aeropuerto k de ellas quieran abordarlo. Dado que si llega un avión de Armijo United cada uno de los pasajeros de manera independiente tendrá intenciones de tomar el vuelo con probabilidad p, o decidirá esperar a un próximo avión con probabilidad $(1-p)$, se tiene que:

$$\alpha_{k,n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \forall\ 0 \leq k \leq n$$

Además es útil definir $\alpha^+_{k,n}$ como sigue:

$$\alpha^+_{k,n} = \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \qquad \forall\ 0 \leq k \leq n$$

1. A contrinucaión se modela la situación descrita utilizando la notación recién definida.

- Para modelar la cantidad de personas en el terminal aéreo como una cadena de Markov en tiempo continuo, basta con determinar las tasas de transición para los siguientes 3 casos:
  Caso 1: $i = 0$

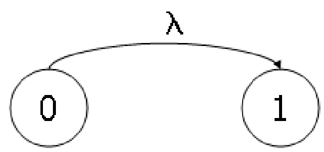

Figura 4: Caso 1

Caso 2: $i \leq R$, $0 \leq j \leq i$.

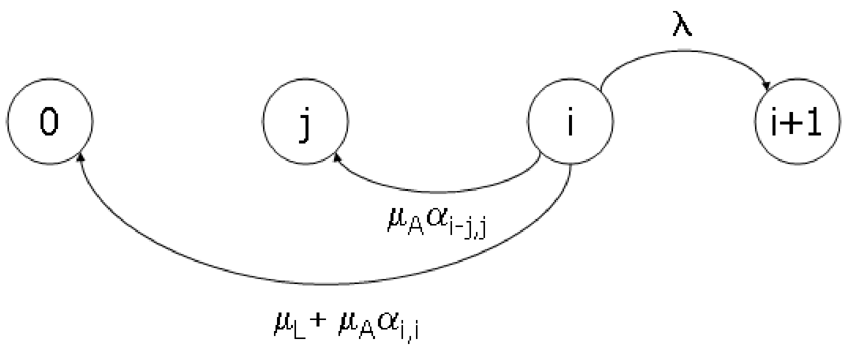

Figura 5: Caso 2

Caso 3: $i > R$, $i - R < j \leq i$.

- Para determinar la condición de régimen estacionario debemos fijarnos en un estado genérico $i > R$. Para un estado de este tipo se tienen las siguientes tasas de muerte:
  - Si llega un avión de L.A Airlines lo abordarán con toda seguridad los primeros R pasajeros de la fila de espera.
  - Si llega un avión de Armijo United y más de R personas quieren abordarlo (con probabilidad $\alpha^+_{R,i}$), sólo R de ellos podrám hacerlo.
  - Si llega un avión de Armijo United, $(i - j)$ pasajeros abordarán el vuelo con probabilidad $\alpha_{i-j,i}$ para $i - R + 1 \leq j \leq i - 1$.

  Por otro lado cuando llega un nuevo pasajero al terminal aéreo la cantidad de personas en la fila aumenta en uno.

  Luego la condición de régimen estacionario es que $\exists i^*$ tal que $\forall i > i^*$ se cumpla que:

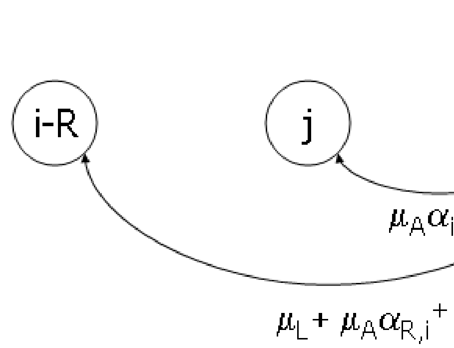

Figura 6: Caso 3

$$\lambda \leq \frac{\mu_L + \mu_A\alpha^+_{R,i}}{R} + \sum_{j=i-R+1}^{i-1} \frac{\mu_A\alpha_{i-j,i}}{(i-j)}$$

- El sistema de ecuaciones que permite calcular las probabilidades estacionarias se define en función de los 3 casos detallados anteriormente:
  Caso 1: $i = 0$

$$\Pi_0\lambda = \sum_{i=1}^{R} \Pi_i(\mu_A\alpha_{i,i} + \mu_L)$$

  Caso 2: $i \leq R$, $0 \leq j \leq i$.

$$\Pi_i(\lambda+\mu_L+\mu_A\alpha_{i,i}+\sum_{k=1}^{i-1}\mu_A\alpha_{i-k,i}) = \Pi_{i-1}\lambda+\Pi_{i+R}(\mu_L+\mu_A\alpha^+_{R,i+R})+\sum_{k=i+1}^{R+1-i}\Pi_k\mu_A\alpha_{k-i,i}$$

  Caso 3: $i > R$, $i - R < j \leq i$.

$$\Pi_i(\lambda+\mu_L+\mu_A\alpha^+_{R,i}+\sum_{k=i-R+1}^{i-1}\mu_A\alpha_{i-k,i}) = \Pi_{i-1}\lambda+\Pi_{i+R}(\mu_L+\mu_A\alpha^+_{R,i+R})+\sum_{k=i+1}^{R+1-i}\Pi_k\mu_A\alpha_{k-i,i}$$

  A este sistema sólo resta la clásica ecuación: $\sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i = 1$.

2. Para un pasajero que está en el lugar i-ésimo con $i \leq R$, el trade-off consiste en subirse al avión de Armijo United que es más lento o esperar el próximo avión de L.A. Airlines, pero que es más rápido pero puede tardar en llegar. Por otro lado, para un pasajero en el lugar i-ésimo con $i > R$ el trade-off es similar pero en lugar de esperar el próximo avión de L.A Airlines debe esperar $k + 1$ aviones de esta aerolínea con $k = \lfloor \frac{i}{R} \rfloor$.

3. Para $i \leq R$, la política óptima es tomar el avión de Armijo United si:

$$\tau_A < \frac{1}{\mu_L} + \tau_L$$

y esperar el avión de L.A. Airlines en caso contrario.

Para $i > R$, la política óptima es tomar el avión de Armijo United si:

$$\tau_A < \frac{1}{\mu_L}(k+1) + \tau_L \qquad \text{donde } k = \lfloor \frac{i}{R} \rfloor$$

y esperar el avión de L.A. Airlines en caso contrario.

Dudas y/o errores:
dsaure@dii.uchile.cl
shernand@ing.uchile.cl