



## Clase Auxiliar 12 de Noviembre, 2004

### Problema 1

Considere la siguiente estación de pago de peaje y estudie su comportamiento en estado estacionario. Vehículos llegan según un proceso de Poisson de tasa  $r$  vehículos por hora. Cada vehículo independientemente es ruteado con probabilidad  $1/2$  a la caseta 1 y con probabilidad  $1/2$  a la 2. Cada caseta consiste en un servidor automático FIFO con tiempos de atención i.i.d. exponenciales de media  $\frac{1}{\mu_1}$ . Lamentablemente, el servidor se hecha a perder con probabilidad  $p$ , con lo cual el vehículo debe volver a colocarse en la cola correspondiente. Al salir de cualquiera de las casetas, los autos se rutean a la pista 1 y los camiones a la pista 2. En el proceso original de llegada, un vehículo es un camión con probabilidad  $q$  y un auto con probabilidad  $1 - q$ . La entrada de los autos (camiones) a las pistas se modelan como colas con tiempos de atención exponenciales i.i.d. de medias  $\frac{1}{\mu_a}$  ( $\frac{1}{\mu_c}$ ).

1. Modele el sistema anteriormente descrito como una red de colas. ?
2. Calcule las tasas efectivas de entrada y determine las condiciones de estado estacionario.
3. Encuentre la distribución de probabilidades estacionarias del número de camiones a la entrada de la respectiva pista.
4. Calcule el número promedio de autos en su respectiva pista.
5. ¿Cuánto tiempo pasa un auto dentro del sistema? ¿Y un camión?

### Problema 2

Fruta llega a una línea de desembarque en cajas de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa  $l$  (cajas/hr). En el sistema 1, 2 operarios se encargan de abrir las cajas y de revisar superficialmente el estado de la fruta y si detecta que la fruta está muy deteriorada la aparta para devolución. El tiempo que demora un operario en abrir y revisar la caja se distribuye exponencialmente con tasa  $m_1$  (cajas/hr), además se observa que una fracción  $p$  de las cajas son separadas para devolución. Una vez abiertas y revisadas, las cajas pasan al sistema 2, donde un operario se encarga de poner toda la fruta en correas transportadoras, demorándose un tiempo exponencialmente distribuido de media  $m_2$ . Además una fracción  $q$  de las cajas vienen mal abiertas por lo que se devuelven al sistema anterior. Finalmente la fruta en la correa transportadora pasa al sistema 3 en donde un operario se encarga de limpiar y revisar cada fruta individualmente para asegurar su calidad. El tiempo que demora se distribuye exponencialmente con media  $m_3$  (frutas/hora) y se ha observado que una fracción  $r$  de la fruta está en mal estado y es separada para su devolución. Además el número de frutas por caja es una variable aleatoria con la siguiente ley de probabilidades

N° fruta por caja	Probabilidad
9	0.1
10	0.2
11	0.3
12	0.3
13	0.1

1. Número promedio de fruta que es separada para devolución
2. Número promedio de cajas en sistema 1 y sistema 2. Número promedio de frutas en sistema 3. ¿Cuál es el tiempo promedio de permanencia por fruta en el sistema?.
3. Si existe un costo de  $c$  (\$/hr) asociado a la permanencia de cada fruta en la línea de desembarque ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por aumentar en un 10% todas las tasas de atención?.

### Problema 3

Un ex-alumno de cierta Universidad se encuentra en Japón con motivo del Campeonato Mundial de Fútbol. Precisamente en estos momentos y luego de ver el partido Argentina-Inglaterra, entra a un café del centro de Tokio. Dentro del local, existe un mesón en el cual se sirve el café. Éste es atendido por dos amables Geishas, cualquiera de las cuales demora un tiempo exponencialmente distribuido de tasa  $\mu_1$  en realizar una atención. Además se sabe que la llegada de personas al establecimiento, sigue un proceso Poissoniano de parámetro  $\lambda$ (clientes/hora).

Luego de conversar con el dueño, el alumno se entera que éste quiere modificar su tradicional local para convertirlo en un moderno cyber-café. Para lograr lo anterior acondicionará una Sala de Terminales, en la que instalará  $K$  computadores. Una vez que los clientes terminen de ser atendidos en el mesón, pasarán (y suponga que todos lo harán) a la sala de terminales. Cada computador puede ser utilizado por una y sólo una persona que lo usará un tiempo exponencialmente distribuido de media  $1/\mu_2$ . Una vez que el cliente termina de usar la máquina, se retira del café.

Si un cliente llega a la sala de terminales y observa que están todos los computadores ocupados, con una probabilidad  $q$  se retirará indignado del local. En caso contrario, volverá al primer mesón para tomarse otro café para poder después probar suerte nuevamente con los computadores.

1. El dueño ha estimado que con una cantidad  $K$  de computadores y las mismas dos señoritas, el local estará capacitado para dar un buen servicio. Según él: “La tasa de entrada al local no cambia, por lo tanto con las mismas dos señoritas se debería mantener un nivel de servicio razonable en el mesón del café”. El estudiante, después de meditar un segundo, le dice: “Con ese diseño, el sistema colapsará: la cola frente al mesón de café crecerá indefinidamente”. Sin embargo Ud. puede evitar el colapso aumentando ya sea el número de señoritas o el de computadores. ¿Puede ocurrir el problema planteado por el estudiante?. De ser así, las soluciones que él postula ¿Resuelven el problema?. Para ello modele el cyber-café como un sistema de colas (tenga cuidado, no realice más cálculos de los estrictamente necesarios).
2. El alumno convence al dueño que tiene razón y éste le solicita al alumno que le indique cuántas señoritas debe contratar y cuántos computadores comprar, de modo que el local no colapse, pero al mínimo costo posible. Se sabe que el costo de contratar una señorita (con las mismas características de atención anteriormente descritas) es  $C_S$  y el costo de un computador es  $C_C$ . Formule el modelo que resuelve este problema .

3. El dueño del local pretende que la tasa de pérdida de clientes (aquellos que se retiran del local “indignados” sin haber utilizado el servicio computacional) no sea mayor al 30 % del flujo total de clientes que entra al local. Encuentre una expresión para el número mínimo de computadores que se debe tener para lograr ese objetivo, en términos de los parámetros conocidos. (Suponga que el número de señoritas atendiendo es igual a dos y que se alcanza estado estacionario).
4. Si el número de señoritas es  $S$  y el número de computadores es  $K$ , calcule el tiempo promedio que demora un cliente cada vez que se sirve un café y el tiempo promedio que está en el sector de los computadores un cliente que consigue entrar en él. ¿Cuál es el tiempo promedio que pasa un cliente dentro del local?, ¿En promedio, cuánta gente hay dentro del local? (Considere que se alcanza estado estacionario).